

<u>ИПМ им.М.В.Келдыша РАН</u> • <u>Электронная библиотека</u> <u>Препринты ИПМ</u> • <u>Препринт № 67 за 2020 г.</u>



ISSN 2071-2898 (Print) ISSN 2071-2901 (Online)

Захаров В.С., Жуковский М.Е., Захаров С.В., <u>Марков М.Б.,</u> <u>Гасилов В.А.</u>

О расчете сечений упругого рассеяния электронов на положительных ионах азота и кислорода

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: О расчете сечений упругого рассеяния электронов на положительных ионах азота и кислорода / В.С.Захаров [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 67. 15 с. <u>http://doi.org/10.20948/prepr-2020-67</u> URL: <u>http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-67</u>

Ордена Ленина ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В.Келдыша Российской академии наук

В.С. Захаров, М.Е. Жуковский, С.В. Захаров, М.Б. Марков, В.А. Гасилов

О расчете сечений упругого рассеяния электронов на положительных ионах азота и кислорода

В.С. Захаров, М.Е. Жуковский, С.В. Захаров, М.Б. Марков, В.А. Гасилов

О расчете сечений упругого рассеяния электронов на положительных ионах азота и кислорода

В работе рассмотрена методика расчета сечений упругого рассеяния электронов на атомах и ионах. Описываемый подход основан на методе парциальных волн и квазиклассическом приближении с использованием самосогласованного потенциала Хартри-Фока-Слэтера. Предложенный метод характеризуется широким диапазоном применимости и сравнительно низкой вычислительной нагрузкой и позволяет получать дифференциальные и интегральные сечения упругого рассеяния, а также транспортные сечения с точностью, достаточной для использования при расчетах коэффициентов диффузии, теплопроводности и т.п. и моделирования явлений переноса. На примере атомов азота и кислорода проведено сравнение получаемых сечений с опубликованными данными. Приведены результаты расчетов сечений для однократно ионизованных атомов азота и кислорода.

Ключевые слова: упругое рассеяние, сечения атомных процессов, квазиклассическое приближение, многозарядные ионы

Vasily Sergeevich Zakharov, Mikhail Evgenievich Zhukovskiy, Sergey Vasilievich Zakharov, Mikhail Borisovich Markov, Vladimir Anatolievich Gasilov Calculation of electron elastic scattering cross-sections on positive nitrogen and oxygen ions

A calculational approach for the cross-section computation of electron elastic scattering on neutral atoms and ions is considered. Discussed method is based on partial waves and semiclassical approximation with the use of self-consistent Hartree-Fock-Slater potential. The method is applicable in a wide range of electron energies, has a relatively low computational complexity, and allows the calculation of differential and total cross-section of elastic electron scattering, and the transport cross-sections needed as well. Decent accuracy of the approach permits to use the calculated data in diffusion, heat transfer etc computations and in the transport phenomenon modelling. Calculated cross-sections for elastic scattering on nitrogen and oxygen atoms are presented.

Key words: elastic scattering, cross-sections, semiclassical approximation, multicharged ions

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 18-01-00582 и 20-01-00419.

1. Введение

Данные о сечениях рассеяния электронов на атомах и ионах представляют значительный интерес как в области фундаментальной науки для углубленного изучения процессов взаимодействия, так и в практическом применении, и необходимы во многих областях исследований, таких как моделирование низкотемпературной плазмы, явлений астрофизики, лазерной физики. атмосферных эффектов и т.д. Одним из примеров является взаимодействие электромагнитного излучения с газо-плазменными образованиями. Плазменные слои возникают, например, в окрестности спускаемых космических аппаратов за счет температурной ионизации воздушной среды [1]. Наличие плазмы влияет на распространение электромагнитных волн между аппаратом и наземными станциями. Электромагнитное поле влияет на энергию свободных электронов в плазме и может изменять ее параметры. Исследование этого процесса средствами математического моделирования в рамках кинетических моделей требует рассмотрения столкновений электронов не только с нейтральными молекулами газов воздуха, но и с ионами азота, кислорода и т.д.

В дополнение к естественным феноменам, процессы столкновения электронов с веществом играют существенную или основную роль в плазменных технологиях, таких, например, как микроэлектроника [2] и биомедицина [3]. Атомная физика, физика плазмы и оптика – области, электронно-атомными напрямую связанные с И электронно-ионными столкновениями – вносят значительный вклад в фундаментальное понимание мира. Несмотря на длительное изучение эффектов рассеяния электронов на атомах и ионах, и полученные результаты в физике атомных столкновений, данная область по-прежнему требует теоретических и экспериментальных исследований, ощущается существенная нехватка данных по сечениям столкновений для их последующего использования в моделировании и расчетах. В частности, отсутствуют систематизированные данные по сечениям упругого рассеяния электронов на атомных ионах.

Экспериментальные методы исследования в области упругого взаимодействия электронов с атомами и ионами продемонстрировали существенное улучшение в течение последних десятилетий в связи с развитием детекторов и снижением задержек в электронных компонентах, что позволило расширить диапазон энергий и углов детектирования взаимодействующих частиц [4][5]. Однако, несмотря на достигнутый прогресс, экспериментальные данные ограничены, как и диапазон параметров взаимодействий, и могут служить в основном только для проверки и калибровки теоретических моделей.

В то же время теоретические модели и методы расчета сечений рассеяния электронов также получили развитие с ростом вычислительной способности современных компьютерных систем. В течение последних десяти лет стало возможным проведение отдельных расчетов с применением достаточно сложных методов второго порядка теории возмущений, таких как метод

сильной связи [6] и R-матриц [7] с различными вариациями (в т.ч. метод Rматриц с приближением псевдо-состояний и сплайн-представлением базисных функций [8][9]). Эти методы предполагают решение системы уравнений для выбранных связанных состояний, причем сходимость при решении системы уравнений резко снижается с ростом числа состояний. Таким образом, возникает разумное ограничение на число каналов рассеяния и приходится осуществлять выбор учитываемых состояний, что требует индивидуального и тщательного подхода при смене заряда иона, элемента, энергии и т.п. Неверный или недостаточный выбор таких состояний приводит к потере всех преимуществ от применения сложных методов, а также к различным искусственным эффектам, например к псевдорезонансам, наблюдаемым в результатах расчетов [9][10].

Несмотря на упомянутые сложности, озвученные методы находят свое применение в отдельных расчетах резонансной структуры сечений и дифференциальных сечений в области низких энергий налетающих электронов (порядка нескольких эВ – для атомов и первых ионов). Наряду с моделью квантового дефекта данные методы имеют переменные успехи в соответствии с экспериментальными результатами [11].

Простым и наиболее популярным методом расчета сечений является борновское приближение и его вариации [12][13]. Условия для его применимости возникают, когда энергия рассеиваемой частицы превышает потенциальную энергию внешних связанных электронов в несколько раз. В сочетании с применением экранированного потенциала ионного остова борновское приближение может давать удовлетворительное соответствие экспериментальным данным даже в области низких энергий [14].

В данной работе рассмотрена и предложена методика для расчета сечений упругого рассеяния электронов на атомах и ионах. Описываемый подход основан на методе парциальных волн и квазиклассическом приближении [15][16] с использованием самосогласованного потенциала Хартри-Фока-Слэтера (ХФС) [17][18], характеризуется широким диапазоном применимости и сравнительно низкой вычислительной нагрузкой и позволяет получать дифференциальные и интегральные сечения упругого рассеяния, а также транспортные сечения с точностью, достаточной для использования при расчетах коэффициентов диффузии, теплопроводности и т.п. и моделирования явлений переноса. На примере атомов азота и кислорода проведено сравнение получаемых сечений с данными, обнаруженными в свободном доступе. Приведены результаты расчетов сечений для однократно ионизованных атомов азота и кислорода.

Всюду ниже использованы атомные единицы, если иное не указано явно.

2. Сечения упругого рассеяния в методе парциальных волн

При разложении на парциальные волны в квантовой теории рассеяния дифференциальное сечение упругого рассеяния частицы с волновым числом k на центральном потенциальном поле может быть выражено через амплитуду рассеяния $A(\theta)$ в элемент телесного угла $d\Omega$ и фазовый сдвиг δ_l [15][19]:

$$d\sigma = |A(\theta)|^2 d\Omega$$

$$A(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) e^{i\delta_l} \sin\delta_l,$$
(1)

откуда после интегрирования по углам следует интегральное сечение упругого рассеяния

$$\sigma = \int d\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l.$$
⁽²⁾

При этом учитывается ортогональность полиномов Лежандра $P_l(\cos\theta)$ для различных моментов $l \prod_{l=1}^{1} P_l(\mu)^2 d\mu = \frac{2}{2l+1}$.

Во многих физических применениях теории столкновений (в частности для переноса в плазме) в качестве величины, характеризующей рассеяние, фигурирует не интегральное, а транспортное сечение [20]:

$$\sigma_{l} = \int (1 - \cos\theta) d\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin \delta_{l} \left[\sin \delta_{l} - \frac{2l+2}{2l+1} \sin \delta_{l+1} \cdot \cos(\delta_{l} - \delta_{l+1}) \right], \quad (3)$$

здесь использовано соотношение $(2l+1)\mu \cdot P_l(\mu) = (l+1) \cdot P_{l+1}(\mu) + l \cdot P_{l-1}(\mu)$.

Фазовые сдвиги могут быть вычислены путем решения уравнения Шредингера. Точное решение задачи рассеяния возможно лишь в некоторых типах потенциалов, в частности для чисто кулоновского поля, а в более общем случае используется теория возмущений (борновское приближение) либо ВКБ метод (квазиклассическое приближение) [15][16].

Борновское приближение применимо при малом сдвиге фазы относительно фазы волновой функции свободного движения $\delta_l \ll 1$, т.е. при малом потенциале рассеивающего поля $|U| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$, или в случае быстрых частиц, при условии

$$\left|U\right| << \frac{\hbar^2}{ma}k = \frac{\hbar p}{ma} = \frac{\hbar \upsilon}{a} = \frac{\hbar}{a} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} ,$$

где a – радиус действия поля U(r), m, ε , p, υ – приведенная масса, энергия, импульс и скорость налетающей частицы соответственно.

В квазиклассическом случае волновые функции характеризуются большой величиной их фазы

$$\phi = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\hbar} \int_{\eta}^{r} p dr \gg 1$$

Предельному переходу к квазиклассическому приближению в теории рассеяния соответствуют большие сдвиги фазы относительно фазы волновой функции свободного движения при $r \to \infty$

$$\delta_{l} = \int_{\eta}^{\infty} \left[\frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(\varepsilon - U) - \frac{\hbar^{2}(l + 1/2)^{2}}{r^{2}}} \right] dr - \int_{\eta}^{\infty} \left[\frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\varepsilon - \frac{\hbar^{2}(l + 1/2)^{2}}{r^{2}}} \right] dr , \qquad (4)$$

где r_l и r_l' – точки поворота частицы с моментом, соответствующим прицельному параметру $\rho = \frac{(l+1/2)}{k}$, при наличии и отсутствии потенциального поля соответственно.

В случае многозарядного иона поле представляет собой самосогласованное поле электронного остова V(r) в поле некомпенсированного заряда иона Z_i на расстояниях порядка размера орбит связанных электронов, переходящее с ростом r в медленно спадающее чисто кулоновское поле:

$$U(r) = \begin{cases} V(r) - \frac{Z_{i}e^{2}}{r}, & r \le r_{\max} \\ -\frac{Z_{i}e^{2}}{r}, & r > r_{\max} \end{cases}$$
(5)

Из-за дальнодействия результирующего потенциала иона основной вклад в сечение упругого рассеяния вносят парциальные сечения при больших моментах l, где применимо квазиклассическое приближение. Однако прямое применение формулы (4) в (1) и (2) связано с трудностями из-за расходимости интегралов.

Для чисто кулоновского потенциала $U(r) = -\frac{Z_i e^2}{r}$ при всех *r* прямое решение уравнения Шредингера приводит к формуле Резерфорда для дифференциального сечения упругого рассеяния электрона [21][15]

$$d\sigma = \left(\frac{Z_i e^2}{2\varepsilon}\right)^2 \frac{d\Omega}{4\sin^4(\theta/2)}.$$
 (6)

Дифференциальное сечение (6) значительно возрастает с уменьшением угла рассеяния, что является проявлением дальнодействующего поля иона. Для потенциала иона вида (5) влияние потенциала электронного остова должно становиться пренебрежимо малым по сравнению с кулоновским потенциалом иона для достаточно малых углов рассеяния и для прицельных параметров налетающего электрона свыше r_{max} . Дифференциальное сечение для такого потенциала должно переходить в формулу Резерфорда (6) также и при уменьшении угла рассеяния. Поэтому вычисление дифференциального сечения для потенциала иона (5) предлагается реализовать в два этапа:

- вычисляется дифференциальное сечение $d\sigma_i$ по формуле парциальных волн (1) в рамках квазиклассического приближения с помощью формулы для фазового сдвига (4) при $r \le r_{max}$ как функции r_{max} ;

- полученное сечение "сшивается" с формулой Резерфорда (6) при угле рассеяния $\theta_c \ll 1$, соответствующем прицельному параметру $\rho_c = r_{\text{max}} = \frac{|Z_i e^2|}{2\varepsilon} \frac{\cos(\theta_c / 2)}{\sin(\theta_c / 2)}$, что следует из уравнения

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = \left(\frac{Z_i e^2}{2\varepsilon}\right)^2 \frac{2\pi\sin(\theta) d\theta}{\sin^4(\theta/2)} = 8\pi \left(\frac{Z_i e^2}{2\varepsilon}\right)^2 \frac{d\left(\sin(\theta/2)\right)}{\sin^3(\theta/2)} .$$
(7)

Из "сшивки" в принципе находятся в неявном виде величины r_{max} и θ_c . Тем самым такой подход должен обеспечить корректную аппроксимацию дифференциального сечения упругого рассеяния электронов на многозарядных ионах.

Полученное дифференциальное сечение в интервале $\theta_c < \theta \le \pi$ и его продолжение по формуле Резерфорда (7) в интервале $0 < \theta \le \theta_c$ позволяют вычислить полное транспортное сечение

$$\sigma_{t} = \int (1 - \cos\theta) d\sigma = 16\pi \left(\frac{Z_{i}e^{2}}{2\varepsilon}\right)^{2} \int_{0}^{\theta_{c}} \frac{d\left(\sin(\theta/2)\right)}{\sin(\theta/2)} + 16\pi \int_{\theta_{c}}^{\pi} \left(\frac{d\sigma_{i}}{d\Omega}\right) \sin^{3}(\theta/2) d\left(\sin(\theta/2)\right).$$
(8)

Первый интеграл в (8) логарифмически расходится на нижнем пределе интегрирования, что связано, как известно, с дальнодействием кулоновских сил, приводящим к большой вероятности рассеяния на малые углы. Однако в действительности в квазинейтральной плазме заряд частицы экранируется другими заряженными частицами на радиусе Дебая

$$r_D = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi n_e e^2}} \,. \tag{9}$$

Поэтому электроны, налетающие на ион при прицельном расстоянии свыше радиуса Дебая, не испытывают действия его поля. Принимая этот факт во внимание, перепишем первый интеграл в (9), переходя от угла рассеяния к прицельному параметру согласно соотношению $\rho = \frac{|Z_i e^2|}{2\varepsilon} \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$:

$$16\pi \left(\frac{Z_i e^2}{2\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\theta_c} \frac{d\left(\sin(\theta/2)\right)}{\sin(\theta/2)} \to 16\pi \int_{\rho_c}^{r_D} \frac{\rho d\rho}{\left(\frac{\rho 2\varepsilon}{Z_i e^2}\right)^2 + 1} \approx 16\pi \left(\frac{Z_i e^2}{2\varepsilon}\right)^2 \ln\left(\frac{r_D}{\rho_c}\right). \tag{10}$$

Второй интеграл в (8) конечен и не расходится на нижнем пределе, также ввиду малости $\theta_c \ll 1$ его предел можно продлить до нуля. В результате для этой добавки к транспортному сечению можно применить выражение (3)

$$\sigma_{it} = \int (1 - \cos\theta) d\sigma_i = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin \delta_l \left[\sin \delta_l - \frac{2l+2}{2l+1} \sin(\delta_{l+1}) \cdot \cos(\delta_l - \delta_{l-1}) \right], \quad (10)$$

где фазовые сдвиги вычисляются, например в ВКБ приближении по формуле (4) с ограничением радиуса действия потенциала (5) $r \le r_{\text{max}}$.

В итоге полное транспортное сечение можно выразить в следующем виде

$$\sigma_{t} = \int (1 - \cos \theta) d\sigma = 16\pi \left(\frac{Z_{i}e^{2}}{2\varepsilon}\right)^{2} \ln \left(\frac{r_{D}}{\rho_{C}}\right) + \sigma_{it}.$$
 (11)

Данные выражения не требуют численного интегрирования дифференциальных сечений, что значительно ускоряет время расчета, и могут быть напрямую использованы для расчета интегральных и транспортных сечений. На современных рабочих станциях время расчета одного значения сечения для заданной энергии частицы составляет от доли секунды до нескольких секунд в зависимости от энергии электрона (число членов в сумме по *l* растет с ростом энергии).

3. Результаты расчетов

Предложенные выражения для вычисления интегральных и транспортных сечений были использованы для расчетов сечений рассеяния электронов на нейтральных и однократно ионизованных атомах азота и кислорода. В качестве атомного потенциала для вычисления фазового сдвига в (2) и (10) использовался самосогласованный потенциал Хартри-Фока-Слэтера [17][18].

а. Рассеяние на нейтральных атомах

Данные об упругом рассеянии электронов на нейтральных атомах различных элементов представлены в литературе и банках данных, таких как ENDF [22] и NIST [23]. На рис. 1 и рис. 2 представлены результаты сравнения вычисленных по описанной выше методике интегрального и транспортного сечений в сравнении с результатами из открытого доступа для рассеяния на атомах азота и кислорода соответственно. Можно видеть, что с ростом энергии рассеянного электрона интегральное и транспортное сечения расходятся – это объясняется тем фактом, что дифференциальное сечение рассеяния резко снижается с ростом энергии частицы и угла рассеяния. Если при малых энергиях существенную долю составляет рассеяние на углы больше $\pi/2$, то начиная с нескольких десятков эВ этот вклад уже не так заметен и рассеяние происходит в основном в узком диапазоне углов.



Рис. 1. Вычисленные интегральные и транспортные сечения рассеяния на нейтральном атоме азота в зависимости от энергии налетающего электрона (красная и оранжевая линии соответственно) в сравнении с интегральными сечениями из базы данных ENDF/B-VII [22] (зеленая линия) и данными по транспортным сечениям NIST [23] (синяя линия).



Рис. 2. Вычисленные интегральные и транспортные сечения рассеяния на нейтральном атоме кислорода в зависимости от энергии налетающего электрона в сравнении с интегральными сечениями из базы данных ENDF/B-VII [22] и данными по транспортным сечениям NIST [23].

b. Рассеяние на ионах

В отличие от рассеяния на нейтральных атомах, данные о рассеянии на положительно заряженных ионах, доступные для использования, крайне экспериментально правило, сводятся К полученным скудны И, как дифференциальным сечениям для отдельно выбранных элементов и низких энергий рассеянного электрона, а также ограниченного диапазона углов рассеяния. Теоретические результаты, зачастую полученные в результате использования методов сильной связи и R-матриц, приводятся в основном в сравнении с упомянутыми экспериментальными данными. В литературе не найти систематизированных интегральным удалось данных по или транспортным сечениям для ионов азота и кислорода, подходящих для сравнения с результатами расчетов по изложенному выше методу парциальных волн с использованием самосогласованного потенциала Хартри-Фока-Слэтера.

Из представленных на рис. 3 и рис. 4Рис. 4 вычисленных сечений для ионов азота и кислорода соответственно хорошо заметно, что присутствие дальнодействующего потенциала существенно влияет на диапазон углов рассеяния электронов в гораздо более широком диапазоне энергий по сравнению с рассеянием на нейтральном атоме. Рассеяние в основном происходит на малый угол, что приводит к различию в величине интегрального и транспортного сечения в несколько раз даже в области низких энергий. Это полностью соответствует теоретическому представлению, упомянутому в п.2.



Рис. 3. Рассчитанные интегральные и транспортные сечения рассеяния на однократно ионизованном атоме азота в зависимости от энергии налетающего электрона (красная и оранжевая линии соответственно).



Рис. 4. Рассчитанные интегральные и транспортные сечения рассеяния на однократно ионизованном атоме азота в зависимости от энергии налетающего электрона (красная и оранжевая линии соответственно).

На рис. 5 и 6 изображены сравнительные графики интегральных сечений упругого рассеяния для нейтральных атомов кислорода и азота и соответствующих однократных ионов.



Рис. 5. Интегральное сечение упругого рассеяния на нейтральном (красная линия) и однократно ионизованном (синяя линия) атоме кислорода.



Рис. 6. Интегральное сечение упругого рассеяния на нейтральном (красная линия) и однократно ионизованном (синяя линия) атоме азота.

4. Заключение

Предложенная методика, основанная на методе парциальных волн и квазиклассическом приближении с использованием самосогласованного потенциала ХФС, позволяет проводить расчеты сечений упругого рассеяния электронов на атомах и ионах и получать результаты, соответствующие доступным экспериментальным и теоретическим данным. Вычисленные дифференциальные и интегральные сечения упругого рассеяния, а также транспортные сечения обладают достаточной точностью для использования в расчетах и моделирования явлений переноса. Метод характеризуется широким диапазоном применимости и сравнительно низкой вычислительной нагрузкой.

Библиография

- [1] Е. И. Попов. Спускаемые аппараты. М.: Знание, 1985.
- [2] V.M. Donnelly, A. Kornblit. Plasma etching: Yesterday, today and tomorrow // J. Vac. Sci. Technol. – 2013. – V. A 31(5). – P. 050825.
- [3] Th. von Woedtke, H.R. Metelmann, K.D. Weltmann. Clinical plasma medicine: State and perspectives of in vivo application of cold atmospheric plasma // Contrib. Plasma Phys. – 2014. – V. 54(2). – P. 104–117.
- [4] F.H. Read, J.M. Channing. Production and optical properties of an unscreened but localized magnetic field // Rev. Sci. Instrum. – 1996. – V. 67(6). – P. 2372–2377.
- [5] J. Ullrich, et al. Recoil-ion and electron momentum spectroscopy: Reaction-microscopes // Rep. Prog. Phys. – 2003. – V. 66(9). – P. 1463–1545.
- [6] Н. Мотт, Г. Месси. Теория атомных столкновений. М.: Издательство иностранной литературы, 1951.
- [7] P.G. Burke and K.A. Berrington. Atomic and Molecular Processes: an R-Matrix Approach. Institute of Physics, Britstol. 1993.
- [8] P.G. Burke, D.F. Gallaher, and S. Geltman. Electron scattering by atomic hydrogen using a pseudo-state expansion I. Elastic scattering // J. Phys. B. - 1969. - V. 2. - P. 1142.
- [9] O. Zatsarinny and S.S. Tayal. Low-energy electron collisions with atomic oxygen: R-matrix calculation with non-orthogonal orbitals // J. Phys. B. -2001. – V. 34. – P. 1299.
- [10] M. Plummer, C.J. Noble, and M. Le Dourneuf. Low-energy behaviour of e–O scattering calculations // J. Phys. B. - 2004. – V. 37. – P. 2979.
- [11] J.T. Shepherd and A.S. Dickinson. Elastic scattering of electrons from positive ions // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. – 1999. – V. 32. – P. 513.

- [12] H. A. Bethe and R. Jackiw. Intermediate Quantum Mechanics. Westview Press, 1986, 1997.
- [13] H. Bethe. Bremsformel f
 ür Elektronen relativistischer Geschwindigkeit // Zeitschrift f
 ür Physik – 1932. – V. 76, N. 5-6. – P. 293–299.
- [14] J.B. Greenwood, I.D. Williams, B. Srigengan, W.R. Newell, J. Geddes, R.W. O'Neill. Elastic scattering of electrons from ions // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms. – 1995. – V. 98 (1–4). – P. 125-128.
- [15] А.С. Давыдов. Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963.
- [16] В.А. Вайнштейн, И.И. Собельман, Е.А. Юков. Возбуждение атомов и уширение спектральных линий. -М.: Наука, 1979.
- [17] B.Γ. А.Д. Соломянная, B.C. Новиков, Захаров Квантовостатистические методы расчета оптических и термодинамических свойств плотной плазмы // Энциклопедия низкотемпературной Том VII-1. Ч. 2. Математическое моделирование плазмы В Серия Б / Под ред. Фортова В.Е. низкотемпературной плазме; Москва: Янус-К, 2008. С. 378-435.
- [18] А.Ф. Никифоров, В.Г. Новиков, В.Б. Уваров. Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы и методы расчета росселандовых пробегов и уравнений состояния. -М.: Физматлит, 2000.
- [19] Г.Ф. Друкарев. Столкновения электронов с атомами и молекулами. -М.: Наука, 1978.
- [20] Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 1.
- [21] E. Rutherford. The Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom // Philos. Mag. 1909. V. 6. P. 21.
- [22] https://www.nndc.bnl.gov/sigma
- [23] A. Jablonski, F. Salvat, C. J. Powell, and A. Y. Lee. NIST Electron Elastic-Scattering Cross-Section Database Version 4.0, NIST Standard Reference Database Number 64, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg MD, 20899 (2016).

Оглавление

1.	Введение		
2.	Сечения упругого рассеяния в методе парциальных волн		5
3.	Результаты расчетов		9
	a.	Рассеяние на нейтральных атомах	9
	b.	Рассеяние на ионах	
4.	Заключение		
Библиография			