ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 71 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Брюно А.Д.

Семейства периодических решений и инвариантных торов системы Гамильтона без параметров

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д. Семейства периодических решений и инвариантных торов системы Гамильтона без параметров // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 71. 15 с. http://doi.org/10.20948/prepr-2020-71
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-71

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А. Д. Брюно

Семейства периодических решений и инвариантных торов системы Гамильтона без параметров

Москва — 2020

УДК 517.93+531.314

Александр Дмитриевич Брюно
Семейства периодических решений и инвариантных торов системы Гамильтона без параметров. Препринты института прикладной математики им. М. В. Келдыша, Москва, 2020.

Вблизи неподвижного решения, вблизи периодического решения и вблизи инвариантного тора системы Гамильтона рассматривается нормальная форма функции Гамильтона. Обычно нормализующее преобразование расходится в полной окрестности каждого указанного исходного объекта, но оно может сходиться на некотором множестве, примыкающем к исходному объекту. Множество сходимости включает все формальные семейства периодических решений, а при некотором условии на малые знаменатели оно включает некоторые формальные семейства инвариантных торов с подобными базисами частот. Поэтому в случае общего положения система Гамильтона с n степенями свободы имеет однопараметрические семейства периодических решений и n-мерных торов.

Ключевые слова: система Гамильтона, стационарное решение, периодическое решение, инвариантный тор, нормальная форма.

Alexander Dmitrievich Bruno
Families of periodic solutions and invariant tori of Hamiltonian system without parameters.

Near a stationary solution, near a periodic solution and near an invariant torus of a Hamiltonian system we consider the normal form of its Hamiltonian function. Usually the normalizing transformation diverges in the whole neighborhood of each mentioned initial object, but it converges on some set adjoining the initial object. The set of convergence includes all formal families of periodic solutions and under a condition on small divisors it includes some formal families of invariant tori with similar bases of frequencies. So generically the Hamiltonian system with n degrees of freedom has one-parameter families of periodic solutions and one-parameter families of n-dimensional tori.

Key words: stationary solution, periodic solution, invariant torus, normal form.

Работа поддержана РФФИ, грант № 18–01–00422а.

e-mail: `abruno@keldysh.ru`

1. Введение

Рассматривается вещественная аналитическая автономная система Гамильтона с конечным числом степеней свободы и без параметров вблизи её неподвижного решения (раздел 2), вблизи её периодического решения (раздел 3) и вблизи её инвариантного тора (раздел 4). Наша цель – изучить семейства периодических решений и семейства инвариантных торов, примыкающие к указанному выше исходному объекту. Для этого система Гамильтона приводится к её нормальной форме, и по нормальной форме выбираются такие формальные множества, для которых существуют сходящиеся нормализующие преобразования. Поэтому эти множества являются аналитическими. Это – множество $\widetilde{\mathcal{A}}$, если нет малых знаменателей, и множество $\mathcal{B}$, если имеются малые знаменатели и они удовлетворяют определённому условию. Оказалось, что в случае общего положения периодическое решение лежит на однопараметрическом семействе периодических решений с близкими периодами и инвариантный тор также лежит на однопараметрическом семействе таких торов с подобными базисами частот, если он (а) наибольшей возможной размерности или (б) максимально неустойчив. Но формальные семейства других инвариантных торов не наибольшей размерности неаналитичны.

Гюйгенс в XVII веке начал изучать периодические решения, Колмогоров в 1954 начал изучение аналитических инвариантных торов. Его последователи Арнольд, Мозер и другие развили теорию, названную КАМ. Здесь применяется другой метод из [Брюно, 1974a,b, Bruno, 1989, Part II]. В настоящей работе имеются два новых подхода:

- разбиение формального множества $\mathcal{A}$ на компоненты;
- запись множеств $\mathcal{A}^1$ и $\mathcal{B}^1$ для приведённой нормальной формы.

Замечание об обозначениях

Векторные величины обозначены полужирным шрифтом. По умолчанию это векторы размерности n, если не оговорено противное, т. е. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, а $\mathbf{x}^\mathbf{p} = x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}$; скалярное произведение $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p_1 q_1 + \dots + p_n q_n$; $||\mathbf{p}|| = |p_1| + \dots + |p_n|$.

2. Окрестность стационарного решения

2.1. Нормальная форма. Рассмотрим систему Гамильтона

$$\dot{\xi}_j = \frac{\partial \gamma}{\partial \eta_j}, \quad \dot{\eta}_j = -\frac{\partial \gamma}{\partial \xi_j}, \quad j = 1, \dots, n \tag{2.1}$$

с n степенями свободы в окрестности неподвижного решения

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0. \tag{2.2}$$

Если Гамильтониан $\gamma(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ аналитичен в этой точке, то он разлагается в степенной ряд

$$\gamma(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \sum \gamma_{\mathbf{pq}} \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{q}}\,, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{p}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{p},\mathbf{q} \geqslant 0$, $\gamma_{\mathbf{pq}}$ — постоянные коэффициенты. Поскольку точка (2.2) — неподвижная, то разложение (2.3) начинается с квадратичных членов. Им соответствует линейная часть системы (2.1). Собственные числа её матрицы разбиваются на пары

$$\lambda_{j+n} = -\lambda_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Пусть $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Как известно, канонические замены координат

$$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta} \longrightarrow \mathbf{x},\mathbf{y} \tag{2.4}$$

сохраняют гамильтоновость системы. Здесь $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

Теорема 2.1 ([Брюно, 1972, §12]). *Существует каноническое обратимое формальное преобразование* (2.4) *исходной системы* (2.1)*, приводящее гамильтониан* (2.3) *к нормальной форме*

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum g_{\mathbf{pq}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}}, \tag{2.5}$$

где ряд

$$\sum g_{\mathbf{pq}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}}, \tag{2.6}$$

содержит только резонансные члены с

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0. \tag{2.7}$$

Здесь $\langle \mathbf{p},\boldsymbol{\lambda} \rangle = p_1\lambda_1 + \cdots + p_n\lambda_n$ — скалярное произведение.

Для вещественной исходной системы (2.1) постоянные коэффициенты $g_{\mathbf{pq}}$ комплексной нормальной формы гамильтониана (2.6) удовлетворяют определённым соотношениям вещественности, и при стандартной канонической линейной замене координат $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \to (\mathbf{X},\mathbf{Y})$ гамильтониан (2.5) переходит в вещественный.

Пусть $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$ — это набор возрастающих натуральных индексов $i \leqslant n$. Здесь $1 \leqslant m \leqslant n$. Рассмотрим координатное подпространство

$$L_I = \{\mathbf{x},\mathbf{y} : x_j = y_j = 0 \text{ для всех } j \notin I\}\,.$$

Если $I = \{1, \ldots, n\}$, тогда L_I — это всё пространство $\mathbb{C}^{2n}$ с координатами $\mathbf{x},\mathbf{y}$, которое мы обозначим L_n. Отметим четыре числовых характеристики координатного подпространства L_I.

1. Его *полуразмерность* $m_I = m$.

2. Его *кратность резонансов* $\varkappa_I$, как количество линейно независимых целочисленных соотношений $\sum_{i\in I} p_i\lambda_i = 0$ с целыми p_i.
3. Его *степень иррациональности* $\sigma_I = m_I - \varkappa_I$.
4. Его *подмножество собственных чисел* $\boldsymbol{\lambda}_I = \{\lambda_i, i \in I\}$.

Ниже в этом разделе рассматривается случай, когда все собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — чисто мнимые: $\lambda_j = \mathrm{i}\alpha_j$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, и все $\lambda_j \neq 0$.

2.2. Сходимость нормализующего преобразования.

Условие ω

Пусть $\omega_k = \min|\langle \mathbf{p},\boldsymbol{\lambda}\rangle|$ при $\langle \mathbf{p},\boldsymbol{\lambda}\rangle \neq 0$, $||\mathbf{p}|| < 2^k$, $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$. Тогда

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log \omega_k}{2^k} < \infty.$$

Это очень слабое числовое ограничение на собственные числа $\boldsymbol{\lambda}$. Оно удовлетворяется для почти всех векторов $\boldsymbol{\lambda}$. В частности, оно удовлетворено, если все λ_j попарно соизмеримы, тогда кратность резонансов $\varkappa_n$ для всего пространства L_n равна $n-1$. Условие ω — это ограничение на «малые знаменатели», возникающие в нормализующем преобразовании.

Условие A

Существует такой степенной ряд $a(\mathbf{x},\mathbf{y})$, что в нормальной форме (2.5)

$$\frac{\partial g}{\partial y_j} = \lambda_j x_j a, \quad \frac{\partial g}{\partial x_j} = \lambda_j y_j a, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Это очень жёсткое ограничение на правые части нормальной формы (2.5). Оно редко удовлетворяется.

Теорема 2.2 ([Брюно, 1971]). *Если собственные числа* $\boldsymbol{\lambda}$ *удовлетворяют Условию* ω *и нормальная форма* (2.5) *удовлетворяет Условию* **A**, *тогда нормализующее преобразование* (2.4) *сходится в некоторой окрестности точки* $\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0$.

Согласно [Брюно, 1972, § 12] Условие **A** эквивалетно условию, что гамильтониан $g(\mathbf{x},\mathbf{y})$ нормальной формы (2.5) является степенным рядом от одной переменной $z = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j y_j$.

2.3. Множество $\mathcal{A}$. Пусть функции $f_1(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ldots,f_r(\mathbf{x},\mathbf{y})$ аналитичны и обращаются в ноль в точке $\mathbf{x}=\mathbf{y}=0$. Тогда система уравнений

$$f_j(\mathbf{x},\mathbf{y})=0, \quad j=1,\ldots,r \tag{2.8}$$

определяет *аналитическое множество* $\mathcal{N}$, содержащее точку $\mathbf{x}=\mathbf{y}=0$. Если же $f_1,\ldots,f_r$ — формальные степенные ряды, то будем говорить, что система (2.8) определяет *формальное множество* $\mathcal{N}$.

Задача
Какие инвариантные формальные множества системы (2.1) являются аналитическими?

Дело в том, что сравнительно легко вычислить формальные инвариантные множества, используя нормальную форму (2.5) –(2.7). Нужно только выбрать среди них те, которые аналитичны в исходной системе (2.1).

По нормальной форме (2.5) образуем формальное множество

$$\mathcal{A}=\left\{\mathbf{x},\mathbf{y}:\frac{\partial g}{\partial y_j}=\lambda_j x_j a,\ \frac{\partial g}{\partial x_j}=\lambda_j y_j a,\ j=1,\ldots,n\right\}, \tag{2.9}$$

где a — это свободный параметр. Можно исключить его из уравнений и получить представление множества $\mathcal{A}$ в форме (2.8). Все решения из множества Re $\mathcal{A}$ являются условно-периодическими (включая периодические и неподвижные решения). При этом значение параметра a постоянно на каждом решении, и мы имеем

$$x_j=x_j^0\exp\lambda_j at, \quad y_j=y_j^0\exp\left(-\lambda_j at\right), \quad j=1,\ldots,n.$$

Определение. Рассмотрим координатное пространство L_I в $\mathbf{x},\mathbf{y}$. *Компонента $\mathcal{A}_I$ множества $\mathcal{A}$* в этом подпространстве определяется системой уравнений

$$\frac{\partial g}{\partial y_j}=\lambda_j x_j a, \quad \frac{\partial g}{\partial x_j}=\lambda_j y_j a, \quad j\in I,$$

и все $x_j,y_j\neq 0$ для $j\in I$. В частности, имеется компонента $\mathcal{A}_n$ для всего пространства L_n.

Теорема 2.3. *Если в нормальной форме* (2.5) *гамильтониан* $g(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *аналитичен, то каждая компонента* Re $\mathcal{A}_I$ *является семейством неприводимых инвариантных торов размерности σ_I с частотами* $a\boldsymbol{\lambda}_I/\mathrm{i}$. *В случае общего положения это семейство либо однопараметрическое (по a), либо пусто. В вырожденных случаях оно может иметь более одного параметра.*

Заметим, что тор размерности 1 — это периодическое решение, а размерности 0 — это неподвижная точка. Координатное подпространство $L_{\tilde{I}}$ называется *рациональным* если соответствующие собственные значения $\boldsymbol{\lambda}_{\tilde{I}}$ попарно соизмеримы. Пусть $\tilde{\mathcal{K}}$ — это объединение всех рациональных подпространств $L_{\tilde{I}}$, и $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cap \tilde{\mathcal{K}}$.

Теорема 2.4 ([Брюно, 1974b, § 3], [Bruno, 1989, Part II, § 3])**.** *Существует аналитическое каноническое преобразование* $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta} \to \mathbf{x},\mathbf{y}$*, которое приводит исходную систему* (2.1) *к нормальной форме на множестве* $\tilde{\mathcal{A}}$*, и это множество аналитично.*

2.4. Множество $\mathcal{B}$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ — это диагональная матрица. На множестве $\mathcal{A}$ рассмотрим $2n \times 2n$ матрицу

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{x}} - \Lambda a & \dfrac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}} \\ -\dfrac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} & -\dfrac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} + \Lambda a \end{pmatrix},$$

где a тот же самый параметр, что и в уравнениях (2.9). Определим формальное множество $\mathcal{B}$ как такое подмножество множества $\mathcal{A}$, на котором матрица B нильпотентна, т.е.

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{x},\mathbf{y} : \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathcal{A}, \quad B^{2n} = 0 \right\}.$$

Теорема 2.5 ([Брюно, 1974a], [Bruno, 1989, Part II])**.** *В случае общего положения* $\mathcal{B} = \mathcal{A}_n$*.*

Теорема 2.6 ([Брюно, 1974a], [Bruno, 1989, Part II])**.** *Если собственные значения* $\boldsymbol{\lambda}$ *удовлетворяют условию* ω*, то существует аналитическая каноническая замена* $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta} \to \mathbf{x},\mathbf{y}$*, которая приводит исходную систему* (2.1) *к нормальной форме в множестве* $\mathcal{B}$*, и это множество аналитично.*

2.5. Пример 2.1. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ линейно независимы над целыми числами, т.е. уравнение $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$ имеет только тривиальное решение $\mathbf{p} = 0$ в целочисленных $\mathbf{p}$. Тогда в нормальной форме (2.5)-(2.7),

$$g = f(\rho_1, \dots, \rho_n), \quad \text{где } \rho_j = x_j y_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Следовательно,

$$\mathcal{A} = \left\{ \mathbf{x}, \mathbf{y} : x_j \frac{\partial f}{\partial \rho_j} = \lambda_j x_j a, \quad y_j \frac{\partial f}{\partial \rho_j} = \lambda_j y_j a, \quad j = 1, \dots, n \right\}.$$

Рассмотрим множество $\mathcal{A}$ в декартовых координатах $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$. В случае общего положения каждое координатное подпространство (по $\boldsymbol{\rho}$) содержит одну одномерную (по $\boldsymbol{\rho}$) компоненту множества $\mathcal{A}$, которая не лежит в меньшем координатном подпространстве. Следовательно, множество $\mathcal{A}$ состоит из $2^n - 1$ таких компонент, а для каждого $d \leqslant n$ имеется точно $n!/[d!(n-d)!]$ таких компонент, расположенных в d-мерных (по $\boldsymbol{\rho}$) координатных подпространствах. В частности, имеется одна компонента

$$\mathcal{A}_n = \left\{ \boldsymbol{\rho} : \frac{\partial f}{\partial \rho_j} = \lambda_j a, \quad j = 1, \ldots, n \right\},$$

расположенная вне координатных подпространств. На ней $B^2 = 0$. Действительно,

$$B = \begin{pmatrix} R - \Lambda a & 0 \\ 0 & -R + \Lambda a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & S \\ -S & -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$$

где блоки — это следующие $n \times n$ матрицы:

$$R = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \rho_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial \rho_n} \right\}, \quad U = \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad V = \{y_1, \ldots, y_n\}$$

диагональны, и

$$S = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \rho_j \partial \rho_k} \right).$$

На множестве $\mathcal{A}$ имеем

$$B = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & S \\ -S & -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix},$$

т. е. $B^2 = 0$. В случае общего положения матрица B не является нильпотентной на координатных подпространствах, так как для некоторых производных $\partial g / \partial \rho_j \neq \lambda_j a$. Поэтому $\mathcal{B} = \mathcal{A}_n$. Более того, n компонент

$$\mathcal{A}'_j = \{ \boldsymbol{\rho} : \quad \rho_i = 0, \quad i \neq j, \quad 1 \leqslant i \leqslant n \}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

являются координатными осями по $\boldsymbol{\rho}$ и исчерпывают все рациональные подпространства. Взятые вместе, они образуют множество $\tilde{\mathcal{A}}$. Согласно теореме 2.4, исходная система (2.1) имеет n аналитических однопараметрических семейств $\mathcal{A}'_j$ периодических решений (это семейства Ляпунова [1892], см. [Ляпунов, 1935]). Если собственные значения $\boldsymbol{\lambda}$ удовлетворяют условию ω, то по теоремам 2.5, 2.6 компонента $\mathcal{A}_n = \mathcal{B}$ также является аналитическим множеством.

Пусть
$$g = \langle \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda} \rangle + \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\rho}, T\boldsymbol{\rho}^* \rangle + \cdots , \tag{2.10}$$
где T — это симметрическая матрица. В случае общего положения $\det T \neq 0$ и система уравнений (2.9) имеет одномерное решение
$$\boldsymbol{\rho}^* = T^{-1}\boldsymbol{\lambda}^*(a-1) + o(a-1), \tag{2.11}$$
где * означает транспонирование.

Если исходная система (2.1) вещественна, то x_j, y_j связаны соотношением вещественности $\bar{x}_j = -\mathrm{i}y_j$. Следовательно, $-\arg x_j = \arg y_j - \pi/2$, т.е. $\arg(x_j y_j) = \pi/2$. Поэтому чисто мнимые ρ_j с $\operatorname{Im}\rho_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$ соответствуют вещественным значениям исходных координат. Каждое множество $\mathcal{A}'_j$ имеет вещественную часть
$$\operatorname{Re}\mathcal{A}'_j = \{\rho_j : \operatorname{Re}\rho_j = 0, \quad \operatorname{Im}\rho_j \geq 0\},$$
которая является вещественным однопараметрическим семейством периодических решений. Для вещественного гамильтониана (2.10) матрица T также вещественна. Если вектор $T^{-1}\operatorname{Im}\boldsymbol{\lambda}^*$ имеет координаты разных знаков, то согласно (2.11), множество $\mathcal{B}$ имеет только тривиальную вещественную часть $\operatorname{Re}\mathcal{B} = 0$. Если все координаты вектора $T^{-1}\boldsymbol{\alpha}^*$ одного знака, то вещественное множество $\operatorname{Re}\mathcal{B}$ является однопараметрическим семейством n-мерных неприводимых инвариантных торов с частотами $\alpha_1 a, \ldots, \alpha_n a$. При $a \to 1$ торы этого семейства стремятся к неподвижной точке $\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0$. Для более подробного анализа разных случаев см. [Брюно, 1974b, § 3], [Bruno, 1989, Part II, § 3].

3. Окрестность периодического решения

3.1. Локальные координаты. Пусть вещественная система Гамильтона с $n+1$ степенью свободы имеет вещественное 2π-периодическое решение $\mathcal{M}$ и функция Гамильтона аналитична в окрестности решения $\mathcal{M}$. Согласно [Брюно, 1990, гл. II, п. 2.А], вблизи решения $\mathcal{M}$ можно ввести такие вещественные локальные канонически сопряжённые координаты $\boldsymbol{\xi}$, ψ и $\boldsymbol{\eta}$, ρ, что решение $\mathcal{M}$ задаётся уравнениями
$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0, \quad \rho = 0, \quad \psi = \psi_0 + t$$
и гамильтониан имеет вид
$$\gamma = \Sigma\gamma_{\mathbf{pq}l}(\psi)\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}}\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{q}}\rho^l = \rho + \cdots , \tag{3.1}$$
где целочисленные $\mathbf{p}, \mathbf{q} \geqslant 0$, целое $l \geqslant 0$, вещественные аналитические функции $\gamma_{\mathbf{pq}l}(\psi)$ имеют по ψ период 2π и разлагаются в ряды Фурье.

3.2. Нормальная форма. При $\rho = 0$ и $\psi = t$ квадратичная по $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ часть γ_2 гамильтониана (3.1) определяет 2π-периодическую линейную по $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ систему

$$\dot{\xi}_j = \frac{\partial \gamma_2}{\partial \eta_j}, \quad \dot{\eta}_j = -\frac{\partial \gamma_2}{\partial \xi_j}, \quad j = 1,\ldots,n. \tag{3.2}$$

Пусть $\nu_1,\ldots,\nu_{2n}$ — собственные числа её матрицы монодромии, т. е. матрицы подстановки фундаментальной матрицы решений системы (3.2) за период 2π. Пусть все $|\nu_j| = 1$ и $\nu_j \neq -1$. Положим

$$\alpha_j = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \ln \nu_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad \alpha_j \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \quad j = 1,\ldots,2n.$$

При правильной нумерации

$$\alpha_{j+n} = -\alpha_j, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Положим $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

Теорема 3.1 ([Брюно, 1990], [Bruno, 2020])**.** *Существует комплексная формальная обратимая 2π-периодическая по ψ и φ каноническая замена координат в виде рядов Пуассона*

$$\boldsymbol{\xi},\psi,\boldsymbol{\eta},\rho \longleftrightarrow \mathbf{x},\varphi,\mathbf{y},r, \tag{3.3}$$

которая приводит гамильтониан γ к нормальной форме

$$g(\mathbf{x},\varphi,\mathbf{y},r) = r + \mathrm{i}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j y_j + \sum g_{\mathbf{pq}lm} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}} r^l \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}, \tag{3.4}$$

где $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $0 \leqslant \mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$, $l \geqslant 0$ и m — целые числа, все члены второй суммы резонансные, т. е.

$$\langle \mathbf{p}-\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha}\rangle + m = 0. \tag{3.5}$$

Теорема 3.2 ([Bruno, 2020])**.** *Каноническое преобразование*

$$x_j = u_j \exp(-\mathrm{i}\alpha_j\varphi), \quad y_j = v_j \exp(\mathrm{i}\alpha_j\varphi), \quad j = 1,\ldots,n,$$
$$r = s - \mathrm{i}\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Im} \lambda_j u_j v_j$$

приводит нормальную форму гамильтониана (3.4) *к автономному степенному ряду*

$$h(\mathbf{u},\mathbf{v},s) = s + \sum h_{\mathbf{pq}lm} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}} s^l, \tag{3.6}$$

соответствующему второй сумме в (3.4).

Переменная s теперь является формальным интегралом для системы

$$\dot{u}_j = \frac{\partial h}{\partial v_j}, \quad \dot{v}_j = -\frac{\partial h}{\partial u_j}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3.7}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial h}{\partial s}. \tag{3.8}$$

Если исходный гамильтониан γ является вещественным для вещественных координат $\boldsymbol{\xi},\psi,\boldsymbol{\eta},\rho$, то в теореме 3.1 переменные $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ комплексные, но переменные ψ, ρ и φ, r вещественны. Здесь, согласно [Брюно, 1990, Гл. I и II], переменные $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$ связаны с вещественными переменными $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ линейной стандартной заменой

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{i}}}\left(\mathrm{i}X_j - Y_j\right), \quad y_j = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{i}}}\left(\mathrm{i}X_j + Y_j\right), \quad j = 1, \ldots, n.$$

3.3. Сходимость нормализующего преобразования.

Условие ω^1. Пусть $\omega_k = \min|p_0 + \langle\mathbf{p},\boldsymbol{\alpha}\rangle|$ по $|p_0 + \langle\mathbf{p},\boldsymbol{\alpha}\rangle| \neq 0$, $|p_0| + ||\mathbf{p}|| < 2^k$, $p_0 \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$. Тогда

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log \omega_k}{2^k} < \infty.$$

Условие $\mathbf{A}^1$. Существует такой ряд Пуассона $a(\mathbf{x},\varphi,\mathbf{y},r)$, что в нормальной форме (3.4)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g}{\partial y_j} = \mathrm{i}\alpha_j x_j a, \quad \frac{\partial g}{\partial x_j} = \mathrm{i}\alpha_j y_j a, \; j = 1, \ldots, n, \\ &\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0, \qquad\quad \frac{\partial g}{\partial r} = a. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Согласно [Брюно, 1972, § 11] оно эквивалентно условию, что гамильтониан g является степенным рядом от одной переменной $w = r + \mathrm{i}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j y_j$.

Теорема 3.3 ([Брюно, 1972, § 11])**.** *Нормализующее преобразование* (3.3) *сходится в окрестности периодического решения $\mathcal{M}$, если числа $\boldsymbol{\alpha}$ удовлетворяют условию ω^1 и нормальная форма* (3.4), (3.5) *удовлетворяет условию* $\mathbf{A}^1$.

3.4. Множество $\mathcal{A}^1$. Пусть теперь a — это произвольный параметр. Тогда система уравнений (3.9) определяет множество $\mathcal{A}^1$. Для приведённой нормальной формы (3.6), (3.7), (3.8) множество $\mathcal{A}^1$ определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial h}{\partial v_j} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\ &\frac{\partial h}{\partial s} = a. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Подсистема уравнений (3.10) определяет множество неподвижных точек подсистемы (3.7). Уравнение (3.8) $\dot{\varphi} = \partial h / \partial s$ даёт зависимость φ от t для каждой из этих точек.

Каждому набору возрастающих индексов $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$, $1 \leqslant i_1, i_m \leqslant n$, $1 \leqslant m \leqslant n$ соответствуют координатные подпространства

$$K_I^1 = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, r, \varphi : x_j = y_j = 0 \text{ для всех } j \notin I\}\,,$$
$$L_I^1 = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, s, \varphi : u_j = v_j = 0 \text{ для всех } j \notin I\}\,.$$

Теперь координате r или s соответствует частота 1, поэтому каждому подмножеству K_I^1 и L_I^1 соответствует набор частот $\{1, \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}\}$. Так же, как в разделе 2, определяем для него *кратность резонансов* $\varkappa_I^1$ и *степень иррациональности* $\sigma_I^1 = m + 1 - \varkappa_I^1$. Как раньше, в подпространствах K_I^1 и L_I^1 определяем *компоненты* $\mathcal{A}_I^1$ *множества* $\mathcal{A}^1$ как части пересечения множества $\mathcal{A}^1$ с подпространством, исключая точки, лежащие на меньших координатных подпространствах K_J^1 и L_J^1 соответственно.

Для компонент $\mathcal{A}_I^1$ остаётся справедливой теорема 2.3 об инвариантных торах.

Пусть $\tilde{I}^1$ — это множество индексов j с рациональными α_j. Определим $\mathcal{A}_{\tilde{I}}^1 = \mathcal{A}^1 \cap \tilde{I}^1$. Аналогично теореме 2.4, нормализующее преобразование сходится на множестве $\mathcal{A}_{\tilde{I}}^1$, и это множество аналитично. Оно содержит все семейства периодических решений, примыкающие к исходному периодическому решению $\mathcal{M}$.

3.5. Множество $\mathcal{B}^1$. В множестве $\mathcal{A}^1$ в координатах $\mathbf{u}, \mathbf{v}, s$ рассмотрим квадратную матрицу размера $(2n+1) \times (2n+1)$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 h}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{u}} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial \mathbf{v} \partial s} \\ \dfrac{\partial^2 h}{\partial s \partial \mathbf{u}} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial s \partial \mathbf{v}} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial s \partial s} \\ \dfrac{\partial^2 h}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{u}} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial \mathbf{u} \partial s} \end{pmatrix}.$$

Множество $\mathcal{B}^1$ — это такое подмножество множества $\mathcal{A}^1$, на котором матрица $\tilde{B}$ нильпотентна , т.е. $\tilde{B}^{2n+1} = 0$.

Теорема 3.4. *В случае общего положения*

$$\mathcal{B}^1 = \mathcal{A}_n^1$$

и $\operatorname{Re}\mathcal{B}^1$ *является однопараметрическим (по* a*) семейством инвариантных торов размерности* σ_n^1*.*

Теорема 3.5 ([Брюно, 1974b, § 3], [Bruno, 1989, Part II, § 3])**.** *При условии* ω^1 *существует такое аналитическое каноническое преобразование* (3.2)*, которое приводит исходную систему к нормальной форме на множестве* $\mathcal{B}^1$*, и это множество аналитично.*

Если для чисел $1,\boldsymbol{\alpha}$ не существует резонансных соотношений $p_0 + \langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{p}\rangle = 0$, где $p_0 \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$, то в случае общего положения множество $\operatorname{Re}\mathcal{B}^1$ является однопараметрическим семейством неприводимых инвариантных торов размерности $n+1$.

4. Замечания

Окрестность n-мерного инвариантного тора в системе с n степенями свободы изучена [Брюно, 1990, Гл. II, § 3]. Там показано, что такой неприводимый тор лежит на однопараметрическом семействе неприводимых инвариантных торов размерности n, если его частоты удовлетворяют условию ω. Инвариантный тор размерности $k < n$ назовём *регулярным*, если в аналитических координатах:

(a) уравнения на торе имеют вид $\dot{\varphi}_j = \Omega_j$, $j = 1,\ldots,k$,

(b) система в вариациях имеет постоянную матрицу. Пусть $\lambda_{2(k+1)},\ldots,\lambda_{2n}$ — её собственные числа. Если все $\operatorname{Re}\lambda_{2(k+l)} \neq 0$, то такой тор назовём *максимально неустойчивым*.

Если система вблизи неподвижной точки имеет собственные значения λ_j с $\operatorname{Re}\lambda_j \neq 0$, или вблизи периодического решения она имеет мультипликаторы ν_j с $|\nu_j| \neq 1$, или вблизи регулярного инвариантного тора она имеет собственные числа λ с $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$, то всё сказанное выше относится к центральному многообразию этой системы и все теоремы сохраняются.

Поэтому в аналитической системе Гамильтона с n степенями свободы и без параметров аналитические однопараметрические семейства образуют:

(a) периодические решения,

(b) инвариантные торы размерности n,

(c) регулярные максимально неустойчивые инвариантные торы размерности $k < n$.

Благодарности

Автор благодарит А.Б. Батхина за большую помощь при подготовке этой работы.

Список литературы

Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений (I) // Тр. ММО. 1971. Т. 25. С. 119—262.

Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений (II) // Тр. ММО. 1972. Т. 26. С. 199—239.

Брюно А. Д. Множества аналитичности нормализующего преобразования. I Основные результаты // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1974a. № 98. С. 1—58.

Брюно А. Д. Множества аналитичности нормализующего преобразования. II Приложения и обобщения // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1974b. № 98. С. 1—53.

Брюно А. Д. Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990. 296 с.

Колмогоров А. Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98, № 4. С. 527—530.

Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: ОНТИ, 1935.

Bruno A. D. Local Methods in Nonlinear Differential Equations. Berlin – Heidelberg – New York – London – Paris – Tokyo: Springer–Verlag, 1989. 350 p.

Bruno A. D. Normalization of the periodic Hamiltonian system // Programming and Computer Software. 2020. Vol. 46, no. 2. P. 76–83. DOI: 10.1134/S0361768820020048.

Lyapunov A. M. Problème général de la stabilité du mouvement // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 1892. Vol. 9 (1907), no. 2. P. 204–474. Ann. of Math. Studies (1947). Stability of Motion. New York, London: Acadamic Press (1966) [English].

Содержание