



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 76 за 2020 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Белов А.А., [Калиткин Н.Н.](#)

Численное интегрирование
задач Коши с особыми
точками

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Белов А.А., Калиткин Н.Н. Численное интегрирование задач Коши с особыми точками // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 76. 36 с. <http://doi.org/10.20948/prepr-2020-76>
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-76>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМ. М.В. КЕЛДЫША

А. А. Белов, Н. Н. Калиткин

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ
ЗАДАЧ КОШИ С ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Москва, 2020

А. А. Белов, Н. Н. Калиткин. Численное интегрирование задач Коши с особыми точками

Предложен эффективный метод решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с кратными полюсами целого порядка. Метод позволяет проводить сквозной расчет через полюс как для единичного полюса, так и в случае цепочки полюсов. В методе используется специальный алгоритм нахождения кратности каждого полюса. По этой кратности определяется обобщенная инверсная функция, для которой K -кратный полюс исходной функции является простым нулем. Расчет такого нуля не представляет трудности, поэтому предложенный метод позволяет получать высокую точность даже вблизи полюсов. После прохождения этого нуля возобновляется расчет исходной функции. Применение данного метода на последовательности полюсов позволяет найти численное решение одновременно с апостериорной оценкой его погрешности. Метод проиллюстрирован на тестовых примерах.

Ключевые слова: задача Коши, полюсы целого порядка, продолжение за полюс

A. A. Belov, N. N. Kalitkin. Numerical integration of Cauchy problems with singularity points

We propose an effective method for solving Cauchy problem for an ordinary differential equation with multiple poles of an integer order. The method provides through calculation of a pole for both single pole and chain of poles. The method uses a special algorithm for finding the multiplicity of each pole. This multiplicity is used to define the generalized reciprocal function for which the K -th order pole of the initial function is a prime zero. Calculating such a zero is not difficult, so the proposed method provides high accuracy even near the poles. After passing this zero, the calculation of the initial function resumes. Using this method on a sequence of poles permits to find a numerical solution simultaneously with a posteriori estimation of its error. The method is illustrated with test examples.

Keywords: Cauchy problem, singularities, continuation through pole

Работа поддержана грантом РФФИ №18-01-00175

1 Проблема

Существует немало задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых имеют особые точки. Эти особые точки могут быть полюсами, в том числе кратными. Кроме того, при численном расчете серьезную проблему представляют точки, в которых обращается в нуль первая производная или одновременно несколько последовательных производных начиная с первой. Столь же проблематичны точки, в которых сама функция конечна, но обращается в бесконечность ее первая производная и, возможно, несколько последующих.

подавляющее большинство таких задач являются нелинейными. Много подобных задач возникает в квантовой механике. Другими примерами являются гамма-функция, эллиптические интегралы и др. В таких решениях особые точки оказываются, как правило, не единственными, а образуют последовательности.

Такие задачи, за редкими исключениями, не решаются в элементарных функциях. Решения многих задач являются специальными функциями математической физики. Для практического применения они требуют тщательного исследования их свойств, но даже в этом случае решение редко удается довести до числа. Положение усугубляется тем, что каждый узкий класс задач требует введения своей специальной функции. Это большое поле деятельности для математиков, однако практический выход для решения прикладных задач оказывается зачастую недостаточным.

Поэтому необходима разработка универсальных численных методов, позволяющих единообразно решать задачи Коши с самыми разными типами особенностей. Численные методы должны не только находить приближенное решение, но и одновременно находить конструктивную оценку его погрешности. При этом желательно иметь не мажорантные интервальные оценки (которые могут быть сильно завышенными), а асимптотически точные.

Данная работа посвящена построению таких методов. Для простейших случаев (например, для полюсов кратности $K = 1$) предложен метод инверсной функции. Для полюсов целого порядка $K \geq 1$ разработан алгоритм, который для каждого полюса определяет его кратность. Для этого полюса строится обобщенная инверсная функция, ориентированная на прохождение данного полюса. В обоих случаях решение продолжается за полюс. Это позволяет вычислить решение, содержащее цепочку полюсов с произвольными целыми кратностями.

Эти методы позволяют не только находить решение, но и оценивать погрешность решения. Для этого расчеты проводятся на последовательности равномерных сеток, сгущающихся вдвое. К решениям на каждой паре соседних сеток применяется метод Ричардсона, дающий асимптотически

точное значение погрешности.

2 Известные методы

Задачи с разрушением решения. Задачи с полюсами можно разделить на две категории.

Первая категория включает задачи для уравнений в частных производных, описывающих различные режимы горения термоядерных мишеней, процессы пробоя в полупроводниках, задачи нелинейной лазерной оптики, гравитационный коллапс и др. В некоторый момент времени в решении возникает сингулярность, и решение не может быть продолжено за нее. С физической точки зрения, отсутствие продолжения означает, что исходное уравнение в момент сингулярности перестает описывать физическое явление и дальнейший его расчет не имеет смысла. В литературе рассмотрены многие подобные задачи. Наиболее хорошо изучены задачи, сводящиеся к параболическому уравнению с нелинейной правой частью [1] – [29] и в некоторых случаях – с нелинейным пространственным оператором [30].

Для расчета таких задач обычно используют разностные схемы. Однако вблизи сингулярности решение разностных уравнений быстро теряет точность. Чтобы преодолеть эту трудность, предлагались разные подходы.

В [1] – [5] был предложен метод масштабирования. По мере приближения к сингулярности шаги пространственной и временной сеток уменьшались в соответствии с соотношением подобия. Ожидается, что такое уменьшение шагов должно уменьшить погрешность численного решения. Однако лишь уменьшение шага по времени проводится естественным образом. Уменьшение шага по пространству требует введения новых узлов пространственной сетки. Начальные значения в новых узлах надо находить пространственной интерполяцией, что вносит дополнительную погрешность. Поскольку такое сгущение сеток проводится неоднократно по мере приближения к сингулярности, вклад погрешности интерполяции может стать значительным.

Близко к описанному подходу примыкают другие геометрические методы, основанные на построении нормализующих групп (то есть на других преобразованиях подобия) [6], [7]. Такие подходы могут более адекватно подобрать правило уменьшения шагов для различных конкретных задач. Но в остальном они сохраняют недостатки, присущие методу масштабирования.

В [8] были предложены адаптивные сетки, основанные на апостериорных мажорантных оценках погрешности. Такие оценки достаточно трудно строить, и обычно они имеют громоздкую форму. Не всегда удается получить оценки, применимые при произвольных шагах сетки. Нередко

теоретические оценки доказаны лишь при достаточно малых шагах сетки. Все это затрудняет их практическое применение. Сам момент разрушения определяется как момент «развала» мажорантной оценки, что нельзя считать строгим критерием.

Большое количество работ посвящено методу движущихся сеток [9] – [14] и его применению в различных задачах [10], [15], [16]. Смысл его в том, что пространственная сетка должна адаптироваться к решению. Тем самым положения узлов сетки должны непрерывно смещаться с течением времени. Для нахождения кривых координатных линий такой сетки предлагаются различные критерии, не имеющие строго обоснования. При этом для нахождения линий сетки возникает вспомогательное уравнение в частных производных, решение которого представляет отдельную трудность: нередко расчетные координатные линии оказываются осциллирующими. Это бессмысленно с геометрической точки зрения, поэтому приходится вводить дополнительное сглаживание, также основанное на нестрогих соображениях. В итоге делается столько приближений, что оценить их суммарный вклад не представляется возможным. Поэтому вопрос о точности определения сингулярности остается открытым.

В работах [17] – [27] очередной шаг по времени выбирался по пространственной норме решения на последнем временном слое (обычно обратно пропорционально величине этой нормы). Зачастую удается доказать, что сумма этих уменьшающихся шагов стремится к конечной величине, которая интерпретируется как момент разрушения решения. Этот подход представляется разумным. Однако подобные доказательства справедливы лишь на фиксированных пространственных сетках. Поэтому для полной реализации этого подхода необходимо, во-первых, на каждой пространственной сетке проводить расчет большого числа шагов по времени. Во-вторых, необходимо проводить такие расчеты с многократным сгущением пространственных сеток. Это делает данный подход весьма трудоемким. При этом остается нерешенным вопрос, какую погрешность вносит конечность самых подробных сеток и конечность числа шагов по времени.

Для некоторых конкретных задач удавалось найти преобразование, которое переводит решение в несингулярное [28], [29]. Однако такие случаи весьма редки, а общего алгоритма построения таких преобразований не предложено.

Предлагались и другие частные подходы. Упомянем, например, работы [31] – [33]. В них вводится формальный критерий «численного разрушения», для которого исследуются достаточные условия сходимости. Однако проверить применимость этих критериев в реальных практических задачах обычно не удается, что отмечают сами авторы этих работ [32].

Описанные выше методы не универсальны и предназначены для конкретных классов задач. Однако существует достаточно общий подход, при-

менимый практически ко всем типам задач. Он основан на методе Ричардсона, который имеет строгое теоретическое обоснование в работах Ричардсона [34], Рябенского и Филлипова [35] и Лакса [36]. Вкратце напомним смысл этих работ.

Ричардсон [34] обратил внимание, что погрешность вычисления квадратур обычно имеет вид Ch^p , где h – шаг сетки, p – порядок точности разностной формулы. Поэтому если сгущать сетку в q раз и сравнивать численные расчеты на двух сетках, то по разности этих расчетов нетрудно вычислить асимптотически точную оценку погрешности расчета на каждой сетке. Позднее этот метод применялся рядом исследователей к решению дифференциальных уравнений (там обычно удобно брать $q = 2$ для поточечного сравнения решений на соседних сетках).

В [35] для разностных схем сформулированы четыре фундаментальные теоремы. Для простоты приведем их наглядные, но нестрогие формулировки.

Теорема 1. Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость. • Эта теорема доказана для произвольных нелинейных схем.

Теорема 2. Для линейных разностных схем порядок сходимости равен порядку аппроксимации. •

Теорема 3. Для линейных задач с достаточно гладкими решениями применим метод Ричардсона. •

Теорема 4. Пусть разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу, а при сгущении сеток численное решение сходится к предельной функции. Тогда точная задача имеет решение, которым является данная предельная функция. •

К аналогичным выводам пришел Лакс [36]. По-видимому, только совокупность описанных теорем позволяет строить методы, в которых одновременно вычисляются решение и его асимптотически точная величина погрешности. Подробная методология такого подхода изложена в [37]. Вкратце приведем ее.

Пусть исходная задача описывается нестационарным уравнением в частных производных. Вводится пространственная сетка, и пространственные операторы заменяются разностными соотношениями. Тогда задача сводится к задаче Коши для системы большого числа обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегрирование такой системы по времени проводится с помощью некоторой независимой схемы, не коррелированной с пространственной схемой. Неограниченное нарастание численного решения такой системы при приближении к некоторому моменту времени трактуется как сингулярность численного решения. Затем одновременно проводится сгущение шагов по пространству и времени. Число обыкновенных дифференциальных уравнений при этом соответственно увеличивается. Снова проводится численный расчет и определяется его момент

сингулярности. Такое сгущение сеток проводится столько раз, сколько позволяют вычислительные мощности.

Последовательность полученных решений и моментов их сингулярностей, согласно теоремам Рябенского-Филлипова, стремится к точному решению и его моменту разрушения. Этот метод был развит в работах [38] – [40] и позволил единообразно решить ряд различных задач. Дальнейшее усовершенствование метода предполагает переход от временной переменной t к длине дуги интегральной кривой l в многомерном пространстве [41], [42]. Это позволяет еще повысить надежность метода, рассчитывать момент разрушения с хорошей точностью и во многих случаях определять его тип.

Последовательность сингулярностей. Существует второй класс задач, в котором решение не разрушается, а имеет множественные сингулярности. В таких задачах требуется найти ряд последовательно расположенных сингулярностей. Подобные задачи часто встречаются в теории специальных функций (эллиптические функции, гамма-функция и т.д.).

Для составления таблиц специальных функций [43] и для стандартных программ прямого расчета [44] широко применяют численные методы. Стандартные схемы (например, схемы Рунге-Кутты) позволяют рассчитывать гладкие участки решения с хорошей точностью. Однако вблизи сингулярности ошибка таких схем катастрофически нарастает. Прямое продолжение решения за полюс, как правило, невозможно. Поэтому решение продолжается за полюс какими-то искусственными приемами. Прохождение ряда полюсов представляет еще большую проблему и требует разработки специальных процедур. Насколько нам известно, универсальные численные методы, единообразно решающие широкие классы таких задач, отсутствуют. Настоящая работа посвящена построению общих методов решения подобных задач.

3 Расчет задач с сингулярностями

Продолжение за полюс. Решения задач Коши с сингулярностями выходят за рамки известных теорем о разрешимости. Сначала определим, что понимается под продолжением решения за полюс. Для наглядности рассмотрим одно автономное ОДУ

$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad t > 0; \quad u(0) = u_0. \quad (1)$$

Случай систем рассматривается аналогично. Неавтономные задачи сводятся к системе ОДУ с помощью процедур автономизации.

Пусть правая часть имеет столько непрерывных производных в комплексной плоскости u , сколько требуется для конкретной схемы интегри-

рования ОДУ. Пусть решение (1) имеет произвольное число полюсов первого порядка. Положение полюсов неизвестно априори. Обозначим точку ближайшего полюса через $t = t_*$.

Перейдем к комплексным значениям аргумента t . Тогда полюс на вещественной оси можно обойти по контуру на комплексной плоскости и, вернувшись на вещественную ось, продолжить решение. При этом не возникает никаких особенностей. Такой подход позволяет продолжить решение через любое число полюсов. Однако такой подход неконструктивен, так как требует существенно более трудоемкого численного интегрирования в комплексной плоскости. Построим более простую его реализацию.

Правее точки $t = t_*$ формально существует бесконечно много точных решений дифференциального уравнения (1). Какое из них соответствует начальному условию u_0 ? Наличие полюса первого порядка в точке t_* означает, что точное решение разлагается в этой точке в следующий ряд Лорана:

$$u = \frac{a_{-1}}{t - t_*} + \sum_{p=0}^{P+1} a_p (t - t_*)^p + o((t - t_*)^{P+1}). \quad (2)$$

Здесь предполагается, что $f(u)$ имеет P непрерывных производных. Тогда $u(t)$ имеет $P + 1$ непрерывную производную. Коэффициенты a_p этого ряда зависят от начального условия u_0 . Ряд (2) справедлив в круге радиусом до ближайшей особой точки. Поэтому при $t > t_*$ он выбирает то же самое решение дифференциального уравнения (1), что и при $t < t_*$. Именно оно соответствует начальному условию u_0 . Аналогично осуществляется продолжение решения за последующие полюсы.

Заметим, что описанная процедура продолжения применима к задачам, в которых решение имеет полюсы либо существенно особые точки. В этом случае ряд (2) содержит только целые степени $(t - t_*)$. Если особая точка является точкой ветвления, то для продолжения нужно выбрать одну из ветвей. При этом ряд (2) будет обобщенным степенным рядом.

Трудности. Напомним типичные трудности, встречающиеся при численном решении подобных задач. Рассмотрим любую явную схему. Пусть для простоты шаг τ является постоянным. Формально решение численное существует на каждом шаге $t_n = N\tau$. Однако вблизи первого полюса значения $u(t_n)$ быстро нарастают, и происходит переполнение. При использовании переменного шага τ_n , уменьшающегося в соответствии с ростом решения, описанная картина сохраняется.

Если взять неявную схему, то описанная картина сохраняется. Кроме того, возникает еще одна трудность. Решение на новом шаге находится из нелинейного алгебраического уравнения. Для конечного временного шага τ_n это уравнение может не иметь вещественного решения. В обоих случаях расчет положения полюса затруднен и продолжение решения по той же

схеме невозможно.

4 Метод инверсной функции

Рассмотрим сначала задачу для одного ОДУ. Случай систем будет рассмотрен далее.

Инверсная функция. Введем инверсную функцию $v(t) = [u(t)]^{-1}$. Из (1) следует, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{dv}{dt} = \varphi(v), \quad \varphi(v) = -v^2 f\left(\frac{1}{v}\right). \quad (3)$$

Это уравнение будем называть инверсным. Все полюсы функции $u(t)$ становятся нулями функции $v(t)$ и, наоборот, нули функции $u(t)$ становятся полюсами функции $v(t)$.

Выберем точку $\tilde{t} \in (0, t_*)$, такую, что на отрезке $t \in (\tilde{t}, t_*)$ точное решение $u(t)$ сохраняет знак. Для уравнения (3) выберем начальное условие $v(\tilde{t}) = 1/u(\tilde{t})$. Инверсное уравнение с таким начальным условием будем называть инверсной задачей. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $f(u) \in \mathbb{C}^P(\mathbb{R})$. Пусть решение $u(t)$ задачи (1) имеет сингулярность, то есть существует t_* , такое, что $u(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_*$. Эта сингулярность является полюсом первого порядка тогда и только тогда, когда $f(u)/u^2$ имеет конечный ненулевой предел при $u \rightarrow \infty$. •

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть u есть некоторое решение дифференциального уравнения в задаче (1), имеющее полюс первого порядка в точке t_* . Тогда функция $u(t)$ представима рядом Лорана (2). Дифференцируя его, получим ряд Лорана для сложной функции $f(u(t))$

$$f(u(t)) = \frac{du}{dt} = -\frac{a_{-1}}{(t-t_*)^2} + \sum_{p=1}^{P+1} p a_p (t-t_*)^{p-1} + o((t-t_*)^P). \quad (4)$$

Найдем разложение в ряд Лорана для отношения f/u^2

$$\frac{f(u(t))}{u(t)^2} = \sum_{p=0}^P b_p (t-t_*)^p + o((t-t_*)^P), \quad (5)$$

$$b_0 = -\frac{1}{a_{-1}}, \quad b_1 = \frac{2a_0}{a_{-1}^2}, \quad b_2 = \frac{3}{a_{-1}^3}(a_1 a_{-1} - a_0^2), \dots$$

Разложения (2), (4), (5) справедливы в некоторой малой окрестности точки t_* . Однако $t \rightarrow t_*$ как раз соответствует $u \rightarrow \infty$. Из (5) непосредственно видно, что в этом случае отношение $f/u^2 \rightarrow -1/a_{-1}$. Необходимость доказана.

2) Достаточность. Сделаем формальную замену неизвестной функции $u = 1/v$. Новая функция удовлетворяет инверсному уравнению (3), причем $\varphi(v) = -v^2 f(1/v) \rightarrow C \neq 0$. Это означает, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при достаточно малом $|v| < \delta$ выполнено неравенство

$$C - \varepsilon < |\varphi(v)| < C + \varepsilon. \quad (6)$$

Выберем ε так, что $|\varepsilon| < C$. Тогда величины $C + \varepsilon$ и $C - \varepsilon$ имеют одинаковый знак, следовательно, в указанной окрестности dv/dt остается знакоопределенной. Если функция $u(t)$ имеет сингулярность в точке t_* , то в этой точке $v(t)$ обращается в нуль. Из неравенств (6) следует, что этот нуль может быть только простым. Тогда в точке t_* функция $u(t)$ имеет полюс первого порядка. Теорема доказана. ■

Замечание. В доказательстве необходимости коэффициенты ряда (2) могут быть произвольными. Иными словами, рассматривается не одна интегральная кривая, а семейство интегральных кривых, имеющих полюс в точке t_* . Это семейство интегральных кривых можно трактовать как окрестность точного решения задачи (1).

Теорема 2. Пусть $f(u) \in \mathbb{C}^P(\mathbb{R})$, решение $u(t)$ имеет сингулярность, и $f(u)/u^2 \rightarrow C \neq 0$ при $u \rightarrow \infty$. Тогда найдется такая окрестность особой точки t_* , в которой решение $v(t)$ инверсной задачи существует, единственно и равномерно непрерывно зависит от начального условия u_0 . •

Доказательство. 1) Из условий теоремы следует, что в указанной окрестности $\varphi(v)$ непрерывна и ограничена, причем $\varphi(v) \rightarrow -C$ при $v \rightarrow 0$. Тогда, согласно классическим теоремам [45], решение инверсной задачи $v(t)$ существует и единственно.

2) Покажем, что оно равномерно непрерывно зависит от начального условия u_0 . Расчет исходной задачи ведется до момента \tilde{t} , который является начальным для инверсной задачи. Согласно условиям на гладкость правой части f , решение $u(t)$ на отрезке $(0, \tilde{t})$, и в частности его значение $u(\tilde{t})$, равномерно непрерывно зависит от u_0 .

Покажем, что φ_v непрерывна. Из условий теоремы следует, что решение $u(t)$ задачи (1) имеет полюс первого порядка на отрезке интегрирования. Рассмотрим семейство интегральных кривых, задаваемых рядом (2) с произвольными коэффициентами a_p , $-1 \leq p \leq P+1$. Найдем соответствующее семейство интегральных кривых инверсного уравнения (3)

$$v(t) = \frac{1}{u(t)} = \sum_{p=1}^{P+1} c_p (t - t_*)^p + o((t - t_*)^{P+1}), \quad (7)$$

$$c_1 = \frac{1}{a_{-1}}, \quad c_2 = -\frac{a_0}{a_{-1}^2}, \quad c_3 = \frac{a_0^2 - a_1 a_{-1}}{a_{-1}^3}, \dots \quad (8)$$

В силу произвольности коэффициентов a_i равенства (7), (8) задают не конкретное решение инверсной задачи, а некоторую его окрестность. Дифференцированием нетрудно найти $\varphi(v(t))$

$$\varphi(v(t)) = \frac{dv}{dt} = \sum_{p=1}^P p c_p (t - t_*)^{p-1} + o((t - t_*)^P). \quad (9)$$

Вычислим φ_v из (9) и (7) как производную параметрической функции

$$\begin{aligned} \varphi_v(v(t)) &= \frac{\varphi_t(v(t))}{v_t(t)} = \left[\sum_{p=2}^{P-1} c_p p(p-1)(t - t_*)^{p-2} \right] \left[\sum_{p=2}^P c_p p(t - t_*)^{p-1} \right]^{-1} = \\ &= \sum_{p=0}^{P-1} d_p (t - t_*)^p + o((t - t_*)^{P-1}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$d_0 = -2 \frac{a_0}{a_1}, \quad d_1 = \frac{2}{a_{-1}^2} (a_0^2 - 3a_1 a_{-1}), \quad d_2 = \frac{2}{a_{-1}^3} (3a_0 a_1 a_{-1} - a_0^3 - 6a_2 a_{-1}^2), \dots \quad (11)$$

В силу оценки (6) $\varphi(v)$ не обращается в нуль в некоторой окрестности $v = 0$. Поэтому φ_v непрерывна, и ряд (10) сходится.

Таким образом, согласно классическим теоремам [45], решение инверсной задачи (3) равномерно непрерывно зависит от начального условия $v(\tilde{t})$. Последнее равномерно непрерывно зависит от u_0 . Это завершает доказательство теоремы. ■

Следствие 1. Построенная функция $v(t)$ является решением инверсного уравнения (3) как при $t < t_*$, так и при $t > t_*$. Тем самым она однозначно определяет продолжение решения $u(t)$ за полюс по правилу $u(t) = [v(t)]^{-1}$.

Следствие 2. После прохождения полюса необходимо вернуться от инверсной задачи к исходной. Обозначим точку перехода через \tilde{T} . Примем эту точку за начальную для функции $u(t)$, зададим в ней начальное значение $u(\tilde{T}) = [v(\tilde{T})]^{-1}$ и продолжим расчет исходного уравнения при $t > \tilde{T}$. Согласно доказанным теоремам, значение $u(\tilde{T})$ зависит от u_0 равномерно непрерывно. Поэтому то же справедливо для всего решения $u(t)$ при $t > \tilde{T}$.

Тем самым, если исходная задача (1) имеет не один полюс, а последовательность полюсов, то к каждому из них применимы теоремы 1 и 2.

Следствие 3. Из следствия 2 непосредственно вытекает, что метод инверсной функции применим к задачам с *последовательностями* полюсов первого порядка.

Следствие 4. Условие гладкости на функцию $f(u)$ обеспечивает применимость разностных схем порядка точности до P -го и нахождение асимптотически точного значения погрешности по методу Ричардсона.

Замечание. Проведенные доказательства являются локальными, то есть относятся к некоторой окрестности точки t_* . Если точка \tilde{t} оказалась слишком далеко от точки t_* , то ее необходимо передвинуть в сторону t_* .

Алгоритм. В численном расчете нахождение окрестностей точки t_* , указанных в теоремах 1 и 2, достаточно проблематично. Будем использовать следующий более простой алгоритм.

Выберем некоторую равномерную сетку $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N$. Здесь $\tau = T/N$ – шаг сетки. Введем некоторое пороговое значение $U > 0$. Будем вести на этой сетке расчет задачи (1) по некоторой явной схеме до тех пор, пока для очередного сеточного значения u_n не выполнится условие $|u_n| > U$. Обозначим этот номер узла через n^* . Далее с этого момента численно решаем задачу (3) на той же сетке, выбирая в качестве начального условия $v_{n^*} = 1/u_{n^*}$. При этом во всех последующих узлах сетки восстанавливаем численное значение $u(t)$ по соотношению $u_n = 1/v_n$.

Если в ходе этого расчета v_n изменила знак, это означает переход функции $v(t)$ через нуль, что соответствует полюсу функции $u(t)$. Таким образом мы находим решение по обе стороны полюса и можем продолжать расчет за полюс. Если при дальнейшем решении уравнения (3) выполнится условие $|v_n| > 1/U$, то снова возвращаемся к решению уравнения (1). Такой переход можно проводить неограниченное количество раз. Этот способ позволяет проводить сквозной расчет через полюс или через последовательность полюсов кратности 1. При этом не происходит никакой потери точности, поскольку уравнение (3) в окрестности t_* не имеет никаких особенностей.

Схемы. В любом узле сетки может произойти переход от функции $u(t)$ к инверсной функции $v(t)$. Поэтому многошаговые схемы для такого расчета непригодны. Следует использовать только одношаговые схемы. В наших расчетах хорошие результаты дали

- явные схемы Рунге-Кутты,
- явно-неявные одностадийные схемы Розенброка [46], из которых особенно надежной была вещественная схема точности $O(\tau)$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \tau \mathbf{w}, \quad (E - \tau \mathbf{f}_u) \mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n). \quad (12)$$

Здесь E – единичная матрица. Несколько уступала ей в надежности, но имела точность $O(\tau^2)$ одностадийная схема с комплексным коэффициентом (CROS)

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \tau \operatorname{Re} \mathbf{w}, \quad \left(E - \frac{1+i}{2} \tau \mathbf{f}_u \right) \mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n). \quad (13)$$

- диагонально- неявные схемы Рунге-Кутты BORK [47], из которых упомянем общеизвестную обратную схему Эйлера точности $O(\tau)$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \tau \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1}) \quad (14)$$

и рекурсивную схему точности $O(\tau^2)$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \tau \mathbf{f} \left(\mathbf{u}_{n+1} - \frac{\tau}{2} \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1}) \right). \quad (15)$$

Положения полюсов. Пусть использована численная схема точности $O(h^p)$. Найдем интервал $[t_n, t_{n+1}]$, на концах которого значения v_n и v_{n+1} имеют разные знаки. На этом интервале лежит расчетное приближение к полюсу T . В окрестности точки смены знака выберем p точек сетки t_j . Очевидно, для $p = 2$ это будут точки t_n и t_{n+1} , для $p = 4$ – точки t_{n-1} , t_n , t_{n+1} , t_{n+2} .

Рассмотрим значения v_j в выбранных узлах как аргумент, а соответствующие значения t_j – как функцию этого аргумента. Проведем ньютоновскую (или иную) интерполяцию по этим значениям v_j функции $t(v)$ и вычислим значение t_* при $v^* = 0$. Это и будет расчетное положение полюса.

Погрешность. Вычисление погрешности как традиционной нормы (C , L_2 или подобных им) от разности численного и точного решений неконструктивно на задачах с сингулярностями. Причина в том, что расчетное положение полюса заведомо отличается от точного, и поэтому погрешности вблизи полюса оказываются огромными.

В [48] было предложено использовать метрику Хаусдорфа для оценки близости решений, имеющих участки быстрого изменения. Опишем процедуру вычисления расстояния в такой метрике. Возьмем точное решение $u(t)$ на участке до первого полюса или на участке между двумя соседними полюсами. Возьмем сеточное решение u_n , относящееся к этому участку; оно состоит из точек с координатами (t_n, u_n) . При этом часть значений u_n вычисляется непосредственно решением уравнения (1), а лежащие вблизи полюсов значения восстанавливаются по расчетным величинам v_n .

Опустим из каждой точки (t_n, u_n) перпендикуляр на кривую $u(t)$. Длина этого перпендикуляра d_n есть расстояние от точки до кривой. Беря $d = \max d_n$, получим метрику Хаусдорфа. Очевидно, она аналогична норме C .

На практике более выгодно построить аналог нормы L_2 . Для этого возьмем среднеквадратичную величину d_n в расчете на одну точку:

$$d = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N d_n^2}, \quad (16)$$

где N – полное число точек на выбранном участке. Далее будем пользоваться определением (16).

5 Пример расчета для одного ОДУ

Автономный тест. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{du}{dt} = 1 + (u - \pi/4)^2, \quad t > 0; \quad u(0) = \pi/4. \quad (17)$$

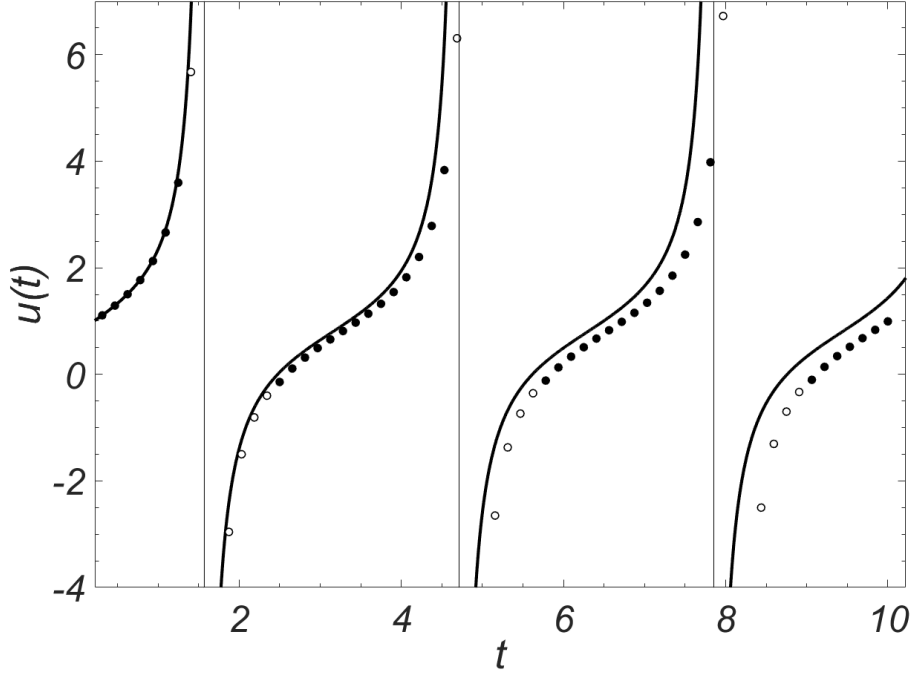


Рис. 1: Расчет теста (17) с шагом $\tau = 0.157$ по схеме ERK2. Точное решение – сплошная кривая. Точки – расчет по $u(t)$, кружки – по $v(t)$.

Приведем точное решение и его полюсы $(t_*)_m$

$$u(t) = \pi/4 + \operatorname{tg} t, \quad (t_*)_m = \pi(m - 1/2). \quad (18)$$

Это решение показано на рис. 1. Приведем также уравнение для функции $v(t)$:

$$\frac{dv}{dt} = -v^2 - \left(1 - \frac{\pi}{4}v\right)^2. \quad (19)$$

Расчеты проводились с разными константами перехода U . Оказалось, что большое значение U приводит к худшей точности. Значение $U \geq 100$ давало плохие результаты. Для иллюстративных расчетов было выбрано $U = 5$. В общем случае U должно служить настроечным параметром программы.

Результаты. Для численной реализации были выбраны явные схемы Рунге-Кутты второго и четвертого порядков (ERK2 и ERK4) и схема CROS (13). Мы пользовались их реализацией в пакете GEABORK [49]. Схемы ERK2 и CROS имеют аппроксимацию $O(\tau^2)$, а схема ERK4 – $O(\tau^4)$. Все

расчеты проводились до момента $T = 10$, что требовало прохождения трех полюсов. Опишем качественные и количественные результаты.

На рис. 1 показано численное решение по схеме ERK2 с шагом $\tau = 0.157$. Шаг демонстрационного расчета выбран так, чтобы он был а) несоизмерим с расстоянием между полюсами (тогда узел сетки заведомо не попадает в полюс) и б) достаточно велик, чтобы можно было видеть отличие численного решения от точного. Видно, что расчет хорошо проходит через полюсы. Ошибка накапливается с увеличением t_n , однако даже при таком крупном шаге можно успешно пройти довольно много полюсов.

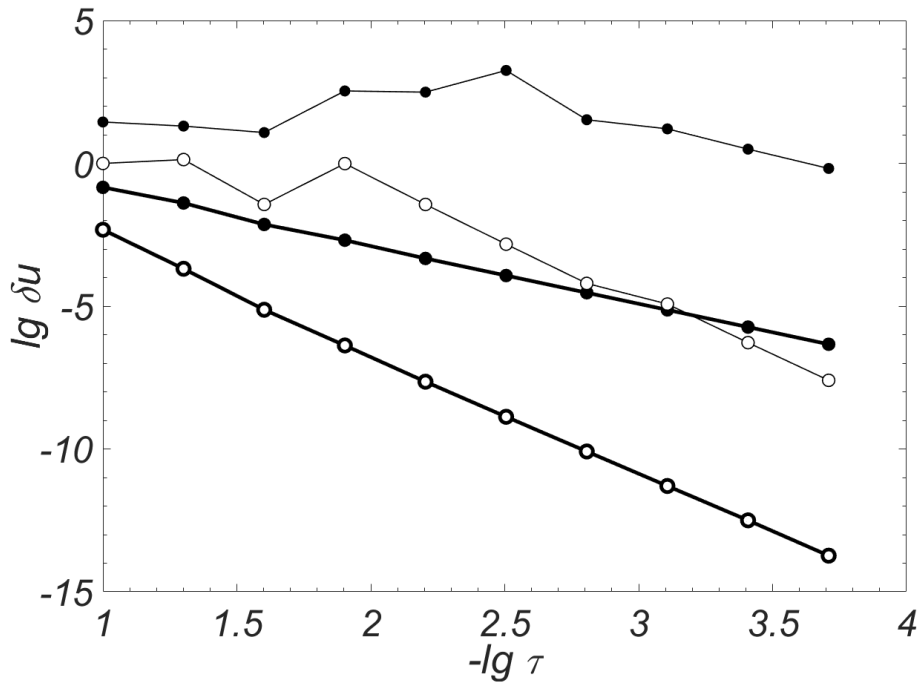


Рис. 2: Зависимость погрешности решения от шага, жирные линии – в метрике Хаусдорфа, тонкие – в норме L_2 . Точки – схемы ERK2 и CROS, кружки – схема ERK4.

На рис. 2 для всех схем показана зависимость погрешности в метрике Хаусдорфа от величины шага. Для схем ERK2 и CROS кривые практически совпадают. График дан в двойном логарифмическом масштабе. Линии графика прямые, начиная уже со второй сетки. Следовательно, зависимость погрешности от шага является степенной. Тангенсы угла наклона этих прямых равны -2 для схем ERK2 и CROS и -4 для ERK4. Таким образом, даже на задаче с полюсами эти схемы реализуют свой теоретический порядок точности. Это свидетельствует о высокой надежности метода инверсной функции и о применимости метода Ричардсона даже на задачах с сингулярностями.

Заметим, что для такого количественного определения точности необходим использованный здесь среднеквадратичный аналог метрики Хаусдорфа. Обычные нормы L_2 или C и даже традиционная метрика Хаусдорфа (являющаяся аналогом нормы C) не дают конструктивного ответа. Для

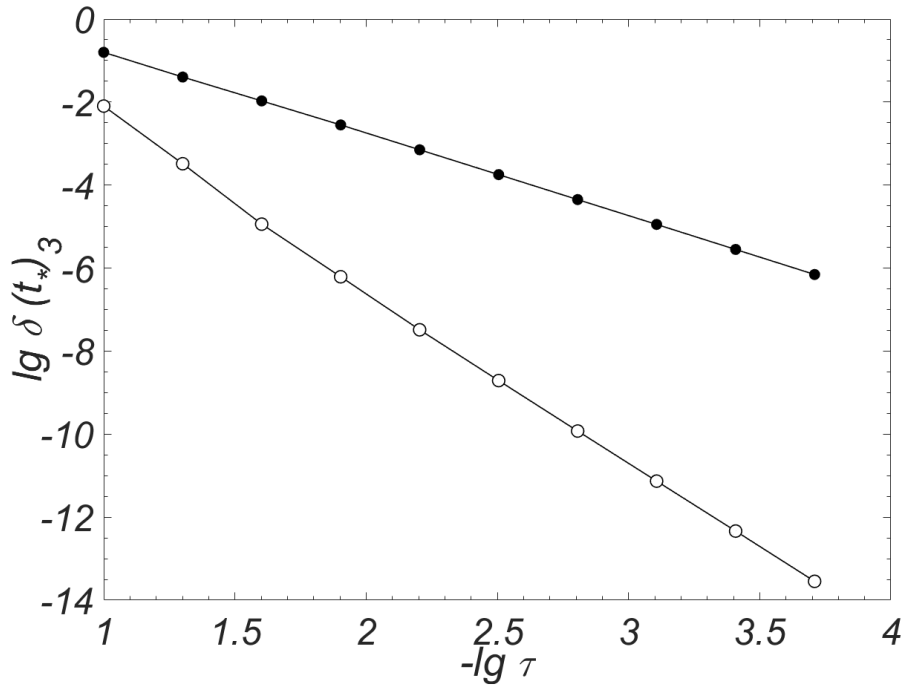


Рис. 3: Зависимость погрешности положения третьего полюса от шага. Точки – схемы ERK2 и CROS, кружки – схема ERK4.

иллюстрации на рис. 2 показаны также погрешности в норме L_2 . Сами эти погрешности намного больше погрешностей в метрике Хаусдорфа. Кривые в традиционных нормах имеют очень длинные нерегулярные участки: теоретическая сходимость начинается только при чрезмерно малом шаге, который нечасто используется в практических расчетах.

На рис. 3 показана зависимость погрешности определения положения третьего полюса от шага для всех схем. График также дан в двойном логарифмическом масштабе. Картина полностью аналогична рис. 2: положение полюса вычисляется с точностью $O(\tau^p)$.

Обсудим некоторые следствия из этого. На грубой сетке расчетный и точный полюсы могут отстоять на несколько интервалов сетки. Если $p = 1$ (схемы первого порядка точности), то при сгущении сеток такое взаимное расположение расчетного и точного полюсов сохраняется. Но если $p \geq 2$, то после нескольких сгущений расчетный и точный полюсы попадут в один и тот же интервал сетки. С этого момента на кривой погрешности в традиционной норме начинается регулярный участок.

Неавтономный тест. Тест (17) был описан автономным уравнением. Однако к такому же точному решению (18) приводит задача для неавтономного уравнения

$$\frac{du}{dt} = \left(u - \frac{\pi}{4}\right) (\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t). \quad (20)$$

В этом случае уравнение для инверсной функции имеет следующий вид:

$$\frac{dv}{dt} = - \left(v - \frac{\pi}{4} v^2 \right) (\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t). \quad (21)$$

Расчет неавтономной задачи (20) является существенно более серьезной проблемой, чем решение автономной задачи. Поясним причину этого на данном конкретном примере. Правая часть уравнения (21) оказывается произведением двух сомножителей: первый зависит только от v , второй – только от t . Второй сомножитель показывает, что v должно менять знак (то есть проходить через нуль) точно при t_* . Первый же сомножитель приводит к изменению знака в точке, смещенной на один или несколько шагов τ . Поэтому вблизи t_* эти сомножители попеременно меняют знак v_n , и численное решение принимает пилообразный вид, показанный на рис. 4.

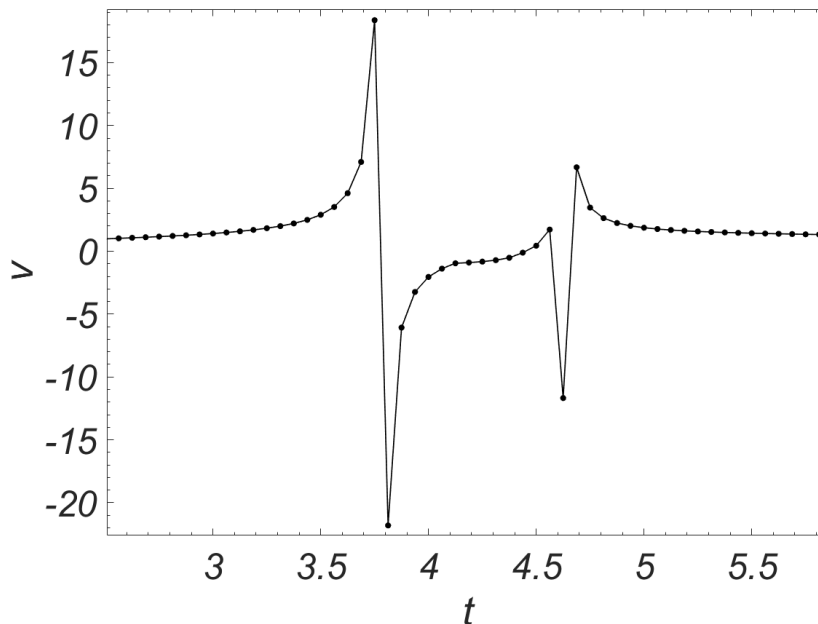


Рис. 4: Расчетная инверсная функция в неавтономной задаче (21).

Этот эффект наблюдается на грубых сетках. Он снижает точность расчета и даже может привести к срыву расчета. Однако на достаточно подробных сетках этот эффект обычно пропадает, то есть качественный вид и точность решения оказываются хорошими. Поэтому при возникновении подобных явлений в расчетах можно порекомендовать пользователю существенно уменьшать шаг сетки. Целесообразно также увеличить разрядность вычислений.

6 Системы ОДУ

Рассмотрим автономную задачу Коши для системы ОДУ с полюсами первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad t > 0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0; \\ \mathbf{u} &= \{u^1, u^2, \dots, u^J\}, \quad \mathbf{f} = \{f^1, f^2, \dots, f^J\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Неавтономный случай как для одного уравнения, так и для систем сводится к автономной задаче с помощью процедуры автономизации. Эта процедура будет описана далее.

Будем считать, что полюсы различных компонент не совпадают. Совпадение полюсов является вырожденным случаем, он будет рассмотрен отдельно. С формальной точки зрения, расстояние между соседними несовпадающими полюсами может быть любым. Однако для надежности численного расчета нужно, чтобы это расстояние было существенно больше шага сетки. Будем считать это условие выполненным (в противном случае шаг нужно уменьшить). Таким образом, полюсы различных компонент можно рассматривать последовательно один за другим.

Инверсный вектор. Пусть первым возникает полюс в компоненте u^k , соответствующий момент времени обозначим через t_*^k . В некоторой окрестности этой точки справедливы следующие разложения:

$$\begin{aligned} u^k &= \frac{a_{-1}^k}{t - t_*^k} + \sum_{p=0}^{P+1} a_p^k (t - t_*^k)^p + o((t - t_*^k)^{P+1}), \\ u^j &= \sum_{p=0}^{P+1} a_p^j (t - t_*^k)^p + o((t - t_*^k)^{P+1}), \quad 1 \leq j \leq J, \quad j \neq k. \end{aligned} \quad (23)$$

Компонента, имеющая сингулярность, разлагается в ряд Лорана, а все прочие компоненты разлагаются в ряды Тейлора. Верхние пределы сумм выбраны из предположения, что правые части являются P раз непрерывно дифференцируемыми, соответственно, компоненты решения имеют $P + 1$ непрерывную производную. Левую границу рассматриваемой окрестности по-прежнему будем обозначать через \tilde{t} .

Введем k -ю инверсную функцию $v^k(t) = [u^k(t)]^{-1}$ (ее можно рассматривать как компоненту инверсного вектора). Для нее в окрестности точки t_*^k справедливо разложение, аналогичное (7). Инверсная система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dv^k}{dt} &= (v^k)^2 f^k(u^1, u^2, \dots, u^{k-1}, [v^k]^{-1}, u^{k+1}, \dots, u^J) \equiv \\ &\equiv \varphi^k(u^1, u^2, \dots, u^{k-1}, [v^k]^{-1}, u^{k+1}, \dots, u^J), \\ \frac{du^j}{dt} &= f^j(u^1, u^2, \dots, u^{k-1}, [v^k]^{-1}, u^{k+1}, \dots, u^J), \quad 1 \leq j \leq J, \quad j \neq k. \end{aligned} \quad (24)$$

Дифференцированием рядов для $u^j(t)$, $j \neq k$ и $v^k(t)$ нетрудно получить разложения правых частей (24), аналогичные (9).

Рассмотрим инверсную систему в указанной окрестности точки t_*^k , принимая точку \tilde{t} за начальную. Для компоненты v^k начальное условие имеет вид $v^k(\tilde{t}) = [u^k(\tilde{t})]^{-1}$, для прочих компонент оно выписывается тривиально. Систему (24) вместе с указанным начальным условием будем называть инверсной задачей. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{u}) \in \mathbb{C}^P(\mathbb{R}_J)$. Пусть компонента $u^k(t)$ имеет сингулярность, то есть существует t_*^k , такое, что $u^k(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_*^k$. Эта сингулярность является полюсом первого порядка тогда и только тогда, когда $f^k(\mathbf{u})/(u^k)^2$ имеет конечный ненулевой предел при $u^k \rightarrow \infty$. •

Доказательство практически дословно повторяет доказательство теоремы 1.

Замечание. Значение предела $C = \lim_{u^k \rightarrow \infty} f^k/(u^k)^2$ является функцией других компонент u^j , $1 \leq j \leq J$, $j \neq k$. В теореме 3 предполагается, что эта функция не обращается в нуль.

Теорема 4. Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{u}) \in \mathbb{C}^P(\mathbb{R}_J)$, компонента $u^k(t)$ имеет сингулярность, и $f^k(\mathbf{u})/(u^k)^2$ имеет конечный ненулевой предел при $u^k \rightarrow \infty$. Тогда найдется такая окрестность особой точки t_*^k , в которой решение инверсной задачи существует, единственно и равномерно непрерывно зависит от начального условия \mathbf{u}_0 . •

Доказательство во многом аналогично доказательству теоремы 2.

1) По условию, правые части инверсной системы (24) непрерывны и ограничены. В силу классических теорем разрешимости задач Коши для систем ОДУ, решение инверсной системы существует и единственно.

2) Покажем, что зависимость решения инверсной задачи от \mathbf{u}_0 является равномерно непрерывной. Легко видеть, что начальное условие в точке \tilde{t} зависит от \mathbf{u}_0 равномерно непрерывно. Поэтому достаточно обосновать равномерно непрерывную зависимость решения инверсной задачи от условия в точке \tilde{t} . Для этого достаточно показать, что компоненты якобиана системы (24) непрерывны.

В самом деле, в якобиан системы (24) входят производные вида $\partial\varphi^k/\partial v^k$, $\partial\varphi^k/\partial u^j$, $\partial f^i/\partial v^k$, $\partial f^i/\partial u^j$, здесь всюду $i, j \neq k$. Производные вида $\partial\varphi^k/\partial u^j$ и $\partial f^i/\partial u^j$ непрерывны в силу условий гладкости на правые части \mathbf{f} (напомним, что φ^k зависит от u^j точно так же, как f^k).

Выражения для $\partial\varphi^k/\partial v^k$ полностью аналогичны (10), (11). Тем же способом можно найти $\partial f^i/\partial v^k$. Приведем для них несколько первых коэффициентов ряда (10)

$$\begin{aligned} d_0 &= 2a_2^i a_{-1}^k, \quad d_1 = 4a_2^i a_0^k + 6a_3^i a_{-1}^k, \\ d_2 &= \frac{2}{a_{-1}^k} [a_2^i (a_0^k)^2 + 3a_2^i a_1^k a_{-1}^k + 6a_3^i a_0^k a_{-1}^k + 6a_4^i (a_{-1}^k)^2], \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Легко видеть, что производные $\partial\varphi^k/\partial v^k$ и $\partial f^i/\partial v^k$ непрерывны, поскольку φ^k не обращается в нуль в окрестности особой точки.

Таким образом, все компоненты якобиана непрерывны, и решение инверсной задачи зависит от \mathbf{u}_0 равномерно непрерывно. Теорема доказана. ■

Следствие 5. Инверсная компонента $v^k(t)$ однозначно определяет продолжение за полюс для компоненты $u^k(t)$ и тем самым для всей системы (22).

Следствие 6. После прохождения полюса следует вернуться от инверсной системы к исходной. Это делается так же, как в случае одного уравнения. При этом зависимость решения за полюсом от начального условия \mathbf{u}_0 является равномерно непрерывной.

Последующий полюс может быть как в той же компоненте u^k , так и в какой-то другой. В обоих случаях для него справедливы теоремы 3 и 4.

Следствие 7. Метод инверсной функции применим к системам со **множественными** полюсами первого порядка.

Следствие 8. Условие на гладкость $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ позволяет применять разностные схемы порядка точности до P -го и вычислять асимптотически точное значение погрешности по Ричардсону.

Совпадение полюсов. Рассмотрим случай, когда полюсы нескольких компонент совпадают. Пусть, для простоты, таких компонент две. Если совпадают полюсы большего числа компонент, то рассмотрение проводится полностью аналогично.

Пусть компоненты u^k и u^l имеют полюсы первого порядка, находящиеся в одной и той же точке $t_*^k = t_*^l \equiv t_*$. Пусть прочие компоненты не имеют особенностей в некоторой окрестности этой точки. Тогда в этой окрестности точки t_* уже две компоненты разлагаются в ряд Лорана:

$$\begin{aligned} u^j &= \frac{a_{-1}^j}{t - t_*} + \sum_{p=0}^{P+1} a_p^j (t - t_*)^p + o((t - t_*)^{P+1}), \quad j = k, l \\ u^j &= \sum_{p=0}^{P+1} a_p^j (t - t_*)^p + o((t - t_*)^{P+1}), \quad j \neq k, l. \end{aligned} \tag{26}$$

В этом случае вводится не одна инверсная компонента, а две: $v^j(t) = [u^j(t)]^{-1}$, $j = k, l$. Инверсная система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dv^j}{dt} &= (v^j)^2 f^j(u^1, u^2, \dots, u^{k-1}, [v^k]^{-1}, u^{k+1}, \dots, u^{l-1}, [v^l]^{-1}, u^{l+1}, \dots, u^J) \equiv \\ &\equiv \varphi^j(u^1, u^2, \dots, u^{k-1}, [v^k]^{-1}, u^{k+1}, \dots, u^{l-1}, [v^l]^{-1}, u^{l+1}, \dots, u^J), \quad j = k, l, \\ \frac{du^j}{dt} &= f^j(u^1, u^2, \dots, u^{k-1}, [v^k]^{-1}, u^{k+1}, \dots, u^{l-1}, [v^l]^{-1}, u^{l+1}, \dots, u^J), \quad j \neq k, l. \end{aligned} \tag{27}$$

Начальное условие в точке \tilde{t} выбирается очевидным образом.

Нетрудно показать, что для такой инверсной задачи справедлив аналог теоремы 4, в котором необходимо оговорить наличие конечного ненулевого предела для $f^k(\mathbf{u})/(u^k)^2$ и $f^l(\mathbf{u})/(u^l)^2$. Напомним, что это условие эквивалентно наличию полюсов первого порядка в этих компонентах.

Автономизация. Неавтономная задача сводится к автономной с помощью процедуры автономизации. Напомним эту процедуру. Исходная задача имеет следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \quad (28)$$

Введем новую компоненту решения $u^0 \equiv t$. Для нее $f^0 = 1$. Тогда неавтономная система (28) переходит в автономную систему

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}(u^0, u^1, \dots, u^J), \quad u^0(0) = 0, \quad u^j(0) = u_0^j, \quad 1 \leq j \leq J, \\ F^0 = 1, \quad F^j = f^j, \quad 1 \leq j \leq J. \end{aligned} \quad (29)$$

Если $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^P(\mathbb{R}_J)$, то такую же гладкость имеют правые части \mathbf{F} . Поэтому для системы (29) также справедливы теоремы 3 и 4.

Алгоритм. Описанный выше алгоритм расчета легко обобщается на случай систем ОДУ. Подчеркнем, что для каждой компоненты $u^k(t)$ вектор-функции $\mathbf{u}(t)$ необходимо вводить отдельную инверсную функцию $v^k(t) = [u^k(t)]^{-1}$ (то есть компоненту инверсного вектора). Настраиваемый параметр A^k также следует выбирать отдельно для каждой компоненты.

7 Пример для системы ОДУ

Тест. Для иллюстрации рассмотрим следующую систему ОДУ

$$\frac{du_1}{dt} = u_1(u_1 + u_2), \quad \frac{du_2}{dt} = -u_2(u_1 + u_2), \quad u_1(0) = u_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (30)$$

Точное решение (30) имеет следующий вид:

$$u_1 = \operatorname{tg}(t - \pi/4), \quad u_2 = \operatorname{ctg}(t - \pi/4). \quad (31)$$

В моменты $T_k^1 = \pi/4 + \pi(k - 1/2)$, компоненты u_1 и u_2 имеют простые полюсы и простые нули соответственно. В моменты $T_k^2 = \pi/4 + \pi k$, u_1 имеет простые нули, а u_2 – простые полюсы. Это решение дано на рис. 5.

Для разных компонент переход к соответствующей инверсной функции может происходить в различные моменты времени. Поэтому необходимо рассмотреть следующие случаи. Во-первых, пусть условие перехода выполнено только для функции u_1 , то есть $|u_1| > A_1$ и $|u_2| < A_2$. Тогда

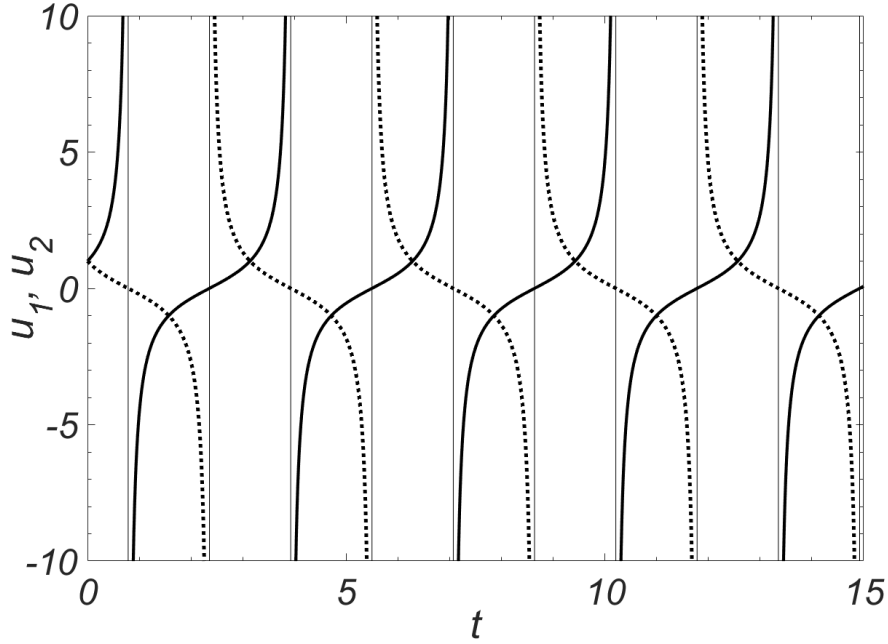


Рис. 5: Решение задачи (30). Сплошная линия – u_1 , пунктир – u_2 , вертикальные линии – положения полюсов.

от (30) перейдем к системе

$$\frac{dv_1}{dt} = -1 - v_1 u_2, \quad \frac{du_2}{dt} = -\frac{u_2}{v_1} - u_2^2. \quad (32)$$

Во-вторых, если $|u_1| < A_1$ и $|u_2| > A_2$, рассмотрим систему

$$\frac{du_1}{dt} = u_1^2 + \frac{u_1}{v_2}, \quad \frac{dv_2}{dt} = v_2 u_1 + 1. \quad (33)$$

Наконец, если условия $|u_1| > A_1$, $|u_2| > A_2$ выполнены для обеих компонент, следует решать систему

$$\frac{dv_1}{dt} = -1 - \frac{v_1}{v_2}, \quad \frac{dv_2}{dt} = \frac{v_2}{v_1} + 1. \quad (34)$$

Очевидно, системы (32) – (34) являются нелинейными. Они не содержат малых параметров, допускающих линеаризацию. Поэтому тест (30) достаточно представительен. Его важным преимуществом является то, что точное решение (31) выражается в элементарных функциях.

Результаты. Мы проводили расчеты по схеме ERK4. Промежуток $t \leq T = 15$ включал 5 полюсов для каждой компоненты решения. На рис. 6 показана точность нахождения всего решения и положения пятого полюса для каждой из компонент. Обе компоненты вычислены с примерно одинаковой точностью. То же справедливо для положения всех полюсов каждой из компонент.

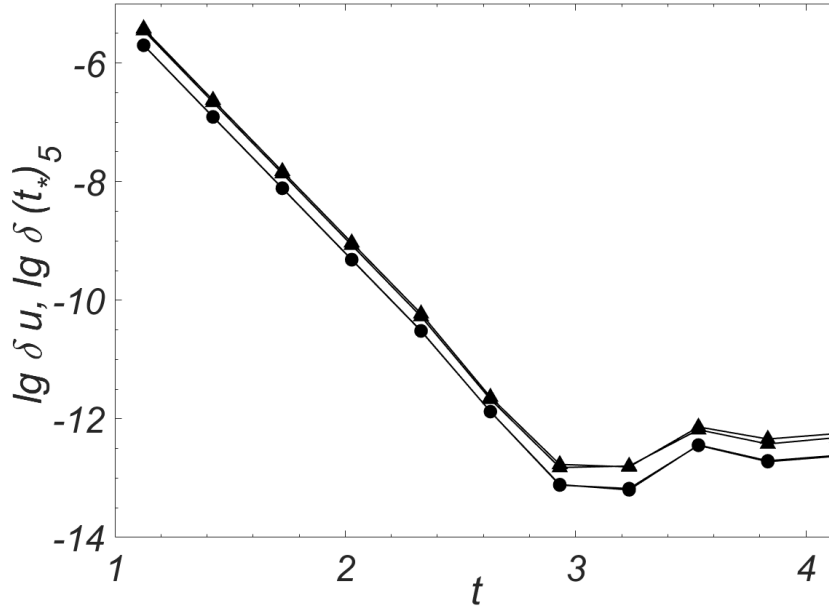


Рис. 6: Зависимость погрешности от шага сетки в тесте (30). Круги – решения для обеих компонент, треугольники – положение пятого полюса в обеих компонентах.

Видно, что даже на достаточно грубой сетке с шагом $\tau = 0.075$ получена отличная точность $\sim 3 \cdot 10^{-6}$. Точность $\sim 10^{-13}$, соответствующая ошибкам округления, достигнута при $\tau \sim 10^{-3}$. Скорость убывания ошибки при уменьшении шага сетки соответствует теоретическому четвертому порядку точности. Это подтверждает высокую надежность предложенного метода.

8 Кратные полюсы

Трудности. Если полюс $u(t)$ имеет кратность $k > 1$, то в точке t_* инверсная функция $v(t)$ имеет нуль кратности k . Следовательно, в этой точке обращается в нуль не только $v(t)$, но и ее производные до $(k - 1)$ -й включительно.

Это представляет серьезную проблему для численного решения. В самом деле, явные схемы порядка точности $p \leq k$ передают p первых производных решения. В точке t_* все эти производные обращаются в нуль, поэтому при $t > t_*$ численное решение оказывается тривиальным $v \equiv 0$. Такие явные схемы позволяют дойти до полюса t_* , но не позволяют вести из него дальнейший расчет.

На практике ни один из узлов сетки не будет точно совпадать с точкой t_* . Поэтому формальное продолжение решения за полюс возможно. Но при этом значения $v(t)$ в районе полюса очень малы и существенно возрастает роль ошибок округления. Поэтому после сквозного прохождения

каждого полюса точность решения существенно ухудшается тем сильнее, чем больше кратность полюса k . Найти много полюсов высокой кратности с 64-битовыми числами не удастся, и требуется существенно увеличивать разрядность вычислений, что неконструктивно. Изложим способ преодоления этой трудности.

Обобщенная инверсная функция. По скорости убывания функции $v(t)$ при приближении к полюсу можно определить кратность нуля k , который равен кратности полюса функции $u(t)$. Эффективные алгоритмы, позволяющие определить эту кратность, будут описаны позже. Пока будем предполагать, что кратность k ближайшего полюса найдена (мы допускаем, что разные полюсы могут иметь различную кратность). Тогда вместо инверсной функции $v(t)$ перейдем к обобщенной инверсной функции $w(t)$. Для нечетного k она имеет следующий вид:

$$w(t) = v^{1/k}. \quad (35)$$

Дробная степень $1/k$ имеет k комплексных значений. При нечетном k одно из них вещественно. В формуле (35) подразумевается выбор вещественной ветви корня.

При четном k надо различать два случая. Если $v > 0$, имеются два вещественных значения корня, различающихся знаками. Для наших целей выбор знака безразличен. Поэтому также можно пользоваться записью (35). Если $v < 0$, то среди значений корней нет вещественных. Однако для наших целей можно воспользоваться следующим обобщением

$$w(t) = \operatorname{sgn}(v)|v|^{1/k}. \quad (36)$$

Формулой (36) можно пользоваться при любом знаке v . Заметим, что для нечетных k эта формула также дает правильный результат.

У обобщенной инверсной функции t_* есть простой корень. Сама функция $w(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{k}w^{1+k}f\left(\frac{1}{w^k}\right). \quad (37)$$

Сквозное прохождение нуля $w(t)$ является достаточно простой задачей по сравнению с задачей о сквозном прохождении кратного нуля.

Для задачи (37) нетрудно доказать аналоги теорем 1 и 2 для случая одного уравнения и 3 и 4 для случая системы ОДУ. При этом в теоремах 1 и 3 следует заменить f/u^2 на $f/u^{1+1/k}$.

Определение кратности полюса. Диагностика кратности полюса проводится в тех случаях, когда v_n становится достаточно малым. В этом случае можно принять гипотезу о том, что t_n достаточно близко к полюсу t_* , а само поведение функции приближенно описывается формулой $v_n \approx$

$\text{const}(t_* - t_n)^k$. Одновременно с v_n продолжается расчет величины $u_n = 1/v_n$, и поведение функции u имеет вид $u_n \approx A(t_* - t_n)^{-k}$, где A – некоторая константа.

Рассмотрим два соседних шага сетки t_n, t_{n+1} . В них вычислено значение u_n, u_{n+1} и правые части $f_n = f(u_n, t_n), f_{n+1} = f(u_{n+1}, t_{n+1})$. Очевидно, вблизи полюса можно считать, что выполняются следующие приближенные соотношения:

$$u_n \approx A(t_* - t_n)^{-k}, \quad u_{n+1} \approx A(t_* - t_{n+1})^{-k}, \quad (38)$$

$$f_n \approx Ak(t_* - t_n)^{-k-1}, \quad f_{n+1} \approx Ak(t_* - t_{n+1})^{-k-1}. \quad (39)$$

Это система четырех уравнений с тремя неизвестными A, t_*, k . Очевидно, система несовместна, но можно отыскать ее приближенное решение. Важное требование к этому решению – простота и надежность расчетных формул.

Опуская промежуточные выкладки, приведем два приближенных решения для k

$$k \approx \frac{t_{n+1} - t_n}{u_n/f_n - u_{n+1}/f_{n+1}}, \quad k \approx \left[1 - \frac{\ln(f_n/f_{n+1})}{\ln(v_n/v_{n+1})} \right]^{-1}. \quad (40)$$

Отметим, что для применимости этих формул необходимо (но не достаточно) выполнение следующих условий:

$$v_n v_{n+1} > 0, \quad f_n f_{n+1} > 0, \quad v_n f_n < 0, \quad |v_n| > |v_{n+1}|. \quad (41)$$

Поэтому вычислять значения k (40) следует только в случае выполнения этих неравенств.

В наших расчетах формулы (40) давали совпадающие результаты. Разумеется, расчетное значение q оказывалось нецелым. Но если несколько шагов подряд оно было достаточно близко к одному и тому же целому числу, то это целое число принималось за кратность полюса теста. Расчеты показали, что найденное таким образом значение практически всегда совпадало с реальной кратностью полюса. Поэтому данный алгоритм определения кратности был принят в наших расчетах.

9 Теоретические аспекты построения тестов

Построение представительных тестов для задач с кратными полюсами оказалось нетривиальной проблемой. Хороший тест должен иметь точное решение, содержать цепочку кратных полюсов, не содержать особенности других типов. Обсудим этот вопрос подробнее.

Несингулярные особенности. Тривиальным обобщением теста (17) является следующая задача:

$$\frac{du}{dt} = k(u - u_0) \left[(u - u_0)^{1/k} + (u - u_0)^{-1/k} \right], \quad \text{при нечетных } k. \quad (42)$$

Точное решение этой задачи имеет следующий вид:

$$u(t) = u_0 + \operatorname{tg}^k t. \quad (43)$$

Однако у такого теста имеется специфическая трудность, которая не свойственна общим задачам с сингулярностями. В точном решении имеются точки $t = \pi m$, $m = 0, 1, \dots$. В них производные точного решения $u^{(q)}(t) = 0$ для $q = 1, 2, \dots, k - 1$. Такие точки назовем несингулярными особенностями. Прохождение такой особенности эквивалентно расчету задачи с началом в особой точке высокого порядка. Начало расчета в особой точке является самостоятельной трудной проблемой численных методов. В данной задаче эта трудность возникает многократно, то есть при прохождении каждой несингулярной особенности. Этот вопрос выходит за рамки данной работы.

Сформулируем следующие очевидные условия.

1) Для отсутствия несингулярных особых точек необходимо, чтобы на интегральной кривой между любой парой соседних полюсов выполнялось условие $f(u, t) \neq 0$.

2) Для отсутствия несингулярных особых точек достаточно, чтобы $f(u, t) \neq 0$ ни в одной полосе плоскости u, t , расположенной между соседними полюсами.

Единственный полюс. Можно сконструировать тест, не содержащий несингулярной особенности. Например, это задача

$$\frac{du}{dt} = u^\nu, \quad \nu > 1, \quad u(0) = u_0. \quad (44)$$

Точное решение

$$u(t) = \frac{u_0}{(1 - t/t_*)^{1/(\nu-1)}} \quad (45)$$

имеет полюс порядка $k = (\nu - 1)^{-1}$ в точке $t_* = u_0^{1-\nu}/(\nu - 1)$. Однако такой тест достаточно прост, так как в нем имеется только один полюс, а не цепочка полюсов.

Полюсы четного порядка. Задачи с полюсами четного порядка имеют один существенный недостаток. Они в принципе не могут быть автономными. Справедлива следующая

Теорема. Если решение имеет полюс четной кратности и описывается дифференциальным уравнением первого порядка, то это уравнение не может быть автономным. ●

В самом деле, вблизи полюса четной кратности левая и правая ветви решения имеют разные знаки производных при одном и том же значении решения u . Если задача автономна, то правая часть $f(u)$ есть однозначная функция u , и она не может иметь разные знаки при одном и том же значении u . Это противоречие доказывает теорему.

Неавтономность. В разделе 3 было замечено, что для простого полюса при неавтономной записи задачи могут возникать нежелательные осцилляции численного решения вблизи полюса. Подобная трудность возникает и с кратными полюсами. Способа преодоления этой трудности найти пока не удается. Поэтому целесообразно строить тесты с автономной записью правой части.

10 Представительные тесты

Цепочка полюсов третьего порядка. Нам удалось построить тест, отвечающий сформулированным выше требованиям. В нем точное решение имеет следующий вид:

$$u = u_0 + \operatorname{tg}^3(t - t_0) + \operatorname{tg}(t - t_0). \quad (46)$$

Наличие члена $\operatorname{tg}^3(t - t_0)$ обеспечивает наличие полюса третьего порядка. В то же время член $\operatorname{tg}(t - t_0)$ гарантирует отсутствие несингулярным особенностей. Уравнение (46) является приведенным кубическим уравнением относительно $\operatorname{tg}(t - t_0)$. Из трех корней этого уравнения только один вещественный. Он имеет следующий вид:

$$\operatorname{tg}(t - t_0) = -\frac{2}{\sqrt{27}}S \operatorname{sh}\varphi, \quad S = \operatorname{sgn}(u - u_0), \quad \varphi = \frac{1}{3} \operatorname{arcsch} \left| \frac{\sqrt{27}}{2}(u - u_0) \right|. \quad (47)$$

Это решение можно записать и в другой форме

$$\operatorname{tg}(t - t_0) = \sqrt[3]{\frac{u}{2} + r} + \sqrt[3]{\frac{u}{2} - r}, \quad r = \sqrt{\frac{u^2}{4} + \frac{1}{27}}. \quad (48)$$

Продифференцировав точное решение по t , получим неавтономную запись дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} = \frac{1 + 3\operatorname{tg}^2(t - t_0)}{\cos^2(t - t_0)} = (1 + 3\operatorname{tg}^2(t - t_0))(1 + \operatorname{tg}^2(t - t_0)). \quad (49)$$

Подставляя сюда $\operatorname{tg}(t - t_0)$ из (47) или (48), получим автономное уравнение вида

$$\frac{du}{dt} = \left[1 + 3(2/\sqrt{27} \operatorname{sgn}(u - u_0) \operatorname{sh}\varphi)^2 \right] \left[1 + (2/\sqrt{27} \operatorname{sgn}(u - u_0) \operatorname{sh}\varphi)^2 \right] \quad (50)$$

или

$$\frac{du}{dt} = 3 \left[(u/2 + r)^{4/3} + (u/2 - r)^{4/3} + 1/9 \right]. \quad (51)$$

К сожалению, построить аналогичный автономный тест для полюсов произвольного нечетного порядка k не удалось. Если взять точное решение

$$u = u_0 + \operatorname{tg}(t - t_0) + \operatorname{tg}^k(t - t_0), \quad (52)$$

то дифференциальное уравнение в неавтономной форме выписывается без труда

$$\frac{du}{dt} = \frac{1 + k \operatorname{tg}^{k-1}(t - t_0)}{\cos^2(t - t_0)}. \quad (53)$$

Однако алгебраическое уравнение относительно $\operatorname{tg}(t - t_0)$ имеет k -ю степень, а при $K \geq 5$ оно неразрешимо в радикалах.

Цепочка полюсов второго порядка. В этом случае задача может быть только неавтономной. Нам удалось построить следующий тест. Пусть точное решение имеет вид

$$u(t) = u_0 + \frac{\sin(t - t_0)}{\cos^2(t - t_0)} = [1 + \operatorname{tg}^2(t - t_0)] \sin(t - t_0). \quad (54)$$

оно имеет полюсы порядка $k = 2$ при $(t_*)_m = \pi/2 + \pi m$.

Дифференцируя (54), получаем

$$\frac{du}{dt} = \frac{1 + 2\operatorname{tg}^2(t - t_0)}{\cos(t - t_0)} = [1 + 2\operatorname{tg}^2(t - t_0)] [1 + \operatorname{tg}^2(t - t_0)] \cos(t - t_0). \quad (55)$$

Выразим $\operatorname{tg}(t - t_0)$ из (54) и подставим в (55)

$$\frac{du}{dt} = \left(1/2 + \sqrt{1/4 + (u - u_0)^2 + 2(u - u_0)^2} \right) \cos(t - t_0). \quad (56)$$

Заметим, что одному и тому же точному решению могут соответствовать разные неавтономные формы записи задачи. Например, функция (54) является точным решением дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\cos(t - t_0)} + 2 \frac{\sin^2(t - t_0)}{\cos^3(t - t_0)}. \quad (57)$$

Однако все попытки расчета указанного уравнения различными квадратурными формулами оказались безуспешными: счет разваливался.

Поэтому сконструированные здесь тесты (50), (51) и (56) представляют самостоятельную ценность. Решения имеют цепочки полюсов указанных порядков, отсутствуют особые точки других типов, и минимизировано влияние неавтономности. Эти задачи рекомендуются при тестировании других методов сквозного расчета полюсов.

11 Апробация

Цепочка полюсов третьего порядка. Из предыдущего обсуждения видно, что тест (50) является представительным тестом, описывающим цепочку кратных полюсов, причем полюсы являются единственными особенностями решения. В нем отсутствуют несингулярные особые точки. Поэтому апробация метода обобщенной инверсной функции была проведена на этом тесте. В расчетах использована схема ERK4.

Были выполнены две серии расчетов теста (50) на последовательности равномерных сгущающихся вдвое сеток. Расчет проводился на отрезке $0 \leq t \leq T = 15$, содержащем пять полюсов. В первой серии во входных данных программы принудительно задавалась кратность полюса $k = 3$. В этой серии при выполнении условия $|u_n| > U$ выполнялся переход не к простой, а сразу к обобщенной инверсной функции w , соответствующей данному k . Для первой сетки задавался шаг $\tau = 0.15$. Далее сетки последовательно сгущались вдвое, пока погрешности не достигали ошибок округления. На рис. 7 показан график решения на самой грубой сетке. Видно, что при сквозном прохождении всех пяти полюсов третьего порядка численное решение визуально совпадает с точным. Это свидетельствует о высокой надежности метода обобщенной инверсной функции.

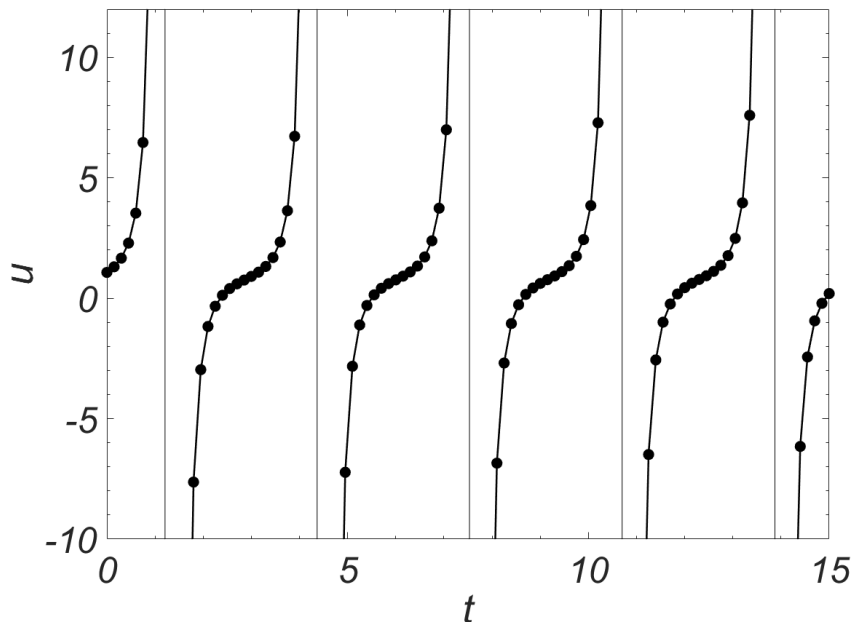


Рис. 7: Расчет теста (50) с шагом $\tau = 0.15$ по схеме ERK4. Сплошная линия – точное решение (46), маркеры – численное решение.

На рис. 8 показана зависимость погрешностей от шага сетки в двойном логарифмическом масштабе. Каждая сетка отмечена маркером. Для удобства эти маркеры соединены между собой тонкими линиями. Линия с

темными кружками показывает погрешность решения в среднеквадратичном аналоге метрики Хаусдорфа.

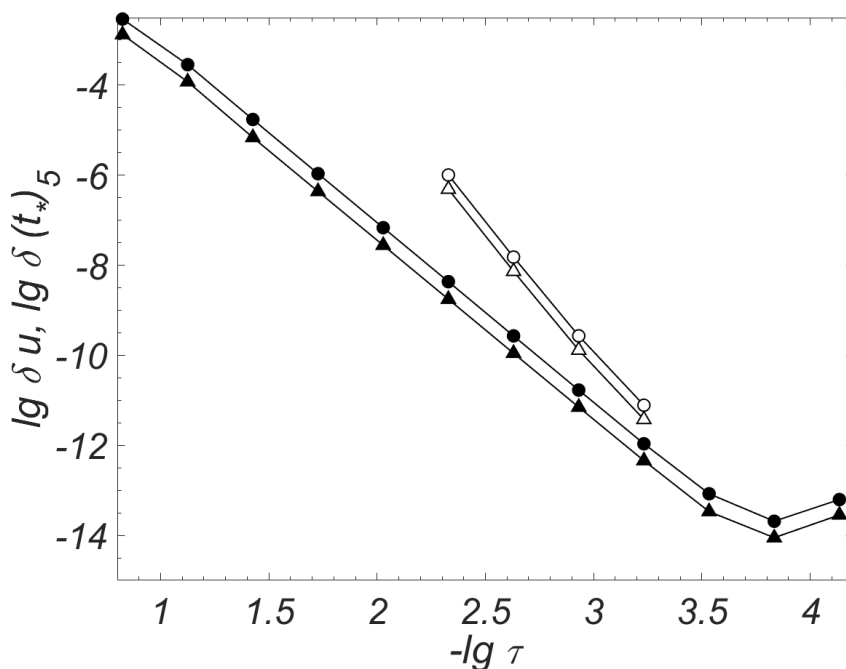


Рис. 8: Зависимость погрешности решения и положения пятого полюса от шага в тесте (50). Обозначения – см. текст.

Видно, что начальный участок линии слегка искривлен, но быстро происходит выход на регулярный прямолинейный участок. Его наклон точно соответствует теоретическому порядку сходимости $p = 4$ схемы ERK4. Погрешность убывает до $\sim 10^{-14}$, затем перестает убывать при дальнейшем сгущении сетки. Этот предел показывает, что ошибки округления всего лишь в ~ 100 раз превышают ошибку единичного округления компьютера 10^{-16} . Это также подтверждает высокую надежность метода.

Линия с темными треугольниками показывает погрешность определения положения самого далекого пятого полюса. Для нее также справедливо сказанное выше.

Во второй серии расчетов кратность полюса не задавалась. Программа автоматически определяла кратность по критерию (40). При этом сначала происходил переход от основной функции u к простой инверсной функции v . Когда для простой инверсной функции устанавливался критерий (40), то производился переход к обобщенной инверсной функции. На практике этот критерий не срабатывал как на грубых сетках, так и на слишком подробных. В этом случае счет разваливался. Расчеты удалось провести на сетках с числами узлов $N = 400, 800, 1600, 3200$. Погрешность решения на всем отрезке $[0, T]$ и ошибка положения пятого полюса также представлены на рис. 8 светлыми маркерами.

Видно, что на первой из этих четырех сеток погрешности решения и

пятого полюса в ~ 100 раз превышают соответствующие значения, полученные при априорном задании правильного k . При дальнейшем сгущении сеток расхождение быстро уменьшается. Кривые стремятся к линиям, полученным при априорно заданном k . Таким образом, программа с автоматическим выбором k по точности и надежности уступает программе с априорно заданной кратностью полюса. Однако видно, что она позволяет рассчитывать цепочки полюсов, о природе которых заранее ничего неизвестно.

Сравнение двух серий расчетов показывает, что критерий определения кратности полюса существенно менее надежен, чем сам метод обобщенной инверсной функции. Разработка более надежного критерия может быть предметом дальнейшего исследования.

Цепочка полюсов второго порядка. Расчеты теста (56) проводились по схеме ERK4. На рис. 9 приведены численное решение при $\tau = 0.15$ и точное решение (обозначения соответствуют рис. 7). Видно, что численный расчет через 5 полюсов проходит успешно, хотя визуальное отличие к концу расчета несколько больше, чем для автономной задачи на рис. 7.

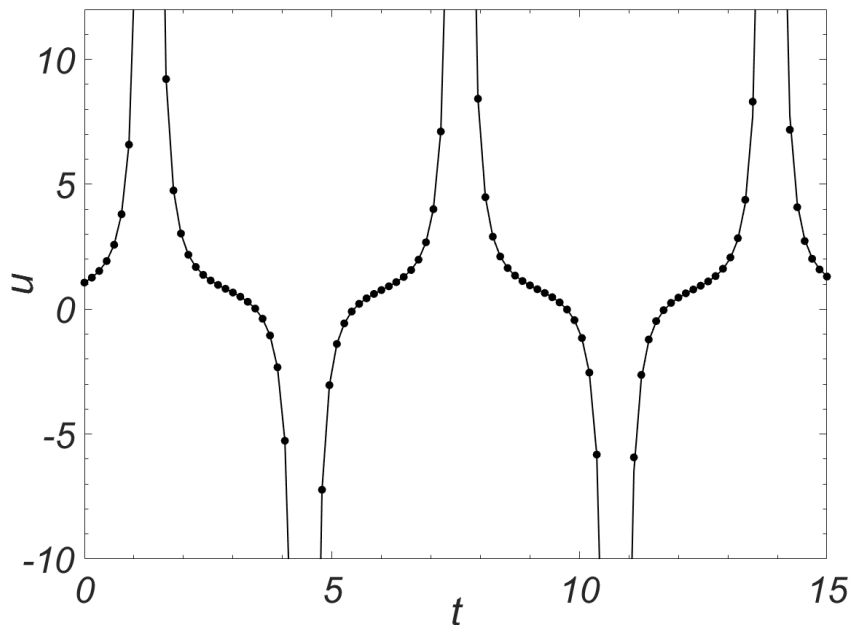


Рис. 9: Расчет теста (56) с шагом $\tau = 0.15$ по схеме ERK4. Сплошная линия – точное решение (46), маркеры – численное решение.

На рис. 10 показана зависимость погрешности самого решения и положения пятого полюса от шага сетки. Обозначения соответствуют рис. 10. Видно, что расчетные точки несколько разбросаны вокруг усредненной прямой. Это и есть проявление трудностей, связанных с решением неавтономных задач. Однако средний наклон прямой соответствует теоретическому порядку точности $p = 4$, и на умеренных сетках достигается

очень высокая точность, близкая к ошибкам единичного округления.

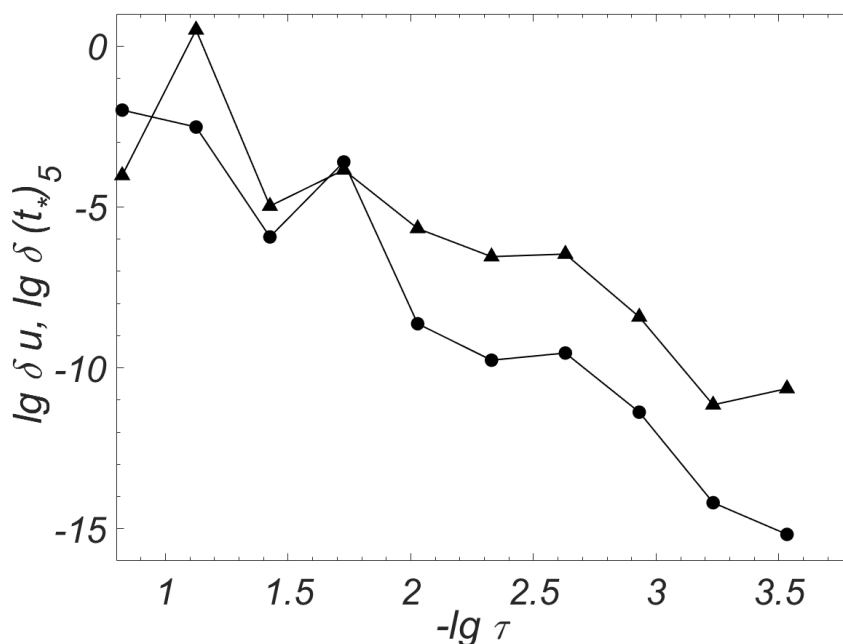


Рис. 10: Зависимость погрешности решения и положения пятого полюса от шага в тесте (56). Обозначения – см. текст.

12 Заключение

Предложенный в данной работе алгоритм сквозного прохождения полюсов высокой заранее неизвестной кратности оказался достаточно надежным. Он обеспечивает высокую точность сквозного расчета не только единичного полюса, но и цепочки полюсов, причем на автономных и неавтономных задачах. Для более тщательной проверки алгоритма желательно построить такие тестовые примеры, в которых имеются цепочки полюсов, но отсутствуют какие-либо другие особые точки решения.

Работа поддержана грантом РФФИ №18-01-00175

Список литературы

1. Berger M., Kohn R.V. // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1988. Vol. 41, No 6, P. 841–863.
2. Nassif N.R., Fayyad D., Cortas M. // Computational Science – ICCS 2005. 2005. P. 58-65.
3. Filo J., Hundertmark-Zaušková A. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016. Vol. 39. P. 411–426.

4. Anada K., Ishiwata T., Ushijima T. // Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. 2017. Vol. 35. No. 1. P. 33–47.
5. Nguyen V.T. // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2017. Vol. 339. P. 49–65.
6. Chen L.-Y., Goldenfeld N., Oono Y. // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 73. P. 1311–1315.
7. Isaia V.M. // Discrete & Continuous Dynamical Systems - B. 2017. Vol. 22. No. 9, P. 3459–3481.
8. Cangiani A., Georgoulis E.H., Kyza I., Metcalfe S. // SIAM Journal on Scientific Computing. 2016. Vol. 38. No. 6. P. A3833–A3856.
9. Huang W., Ren Y., Russell R.D. // Journal of Computational Physics. 1994. Vol. P. 279–290.
10. Budd C.J., Weizhang Huang, Russell R.D. // SIAM Journal on Scientific Computing. 1996. Vol. 17. No. 2. P. 305–327.
11. Ren W.-Q., Wang X.-P. // Journal of Computational Physics. 2000. Vol. 159. P. 246–273.
12. Russell R.D., Williams J.F., Xu X. // SIAM Journal on Scientific Computing. 2007. Vol. 29. No. 1. P. 197–220.
13. Huang W., Ma J., Russell R.D. // Journal of Computational Physics. 2008. Vol. 227. No. 13. P. 6532–6552.
14. Budd C.J., Weizhang Huang, Russell R.D. // Acta Numerica. 2009. Vol. 18. P. 111–241.
15. Budd C.J., Carretero-González R., Russell R.D. // Journal of Computational Physics. 2005. Vol. 202. P. 463–487.
16. Hamada S. // Proceedings of Japan SIAM. 2009. Vol. 19. P. 1–23.
17. Nakagawa T. // Applied Mathematics & Optimization. 1976. Vol. 2. P. 337–350.
18. Chen Y.-G. // Journal of the Faculty of Science: University of Tokyo. 1986. Vol. 33. P. 541–574.
19. Stuart A.M., Floater M.S. // European Journal of Applied Mathematics. 1990. Vol. 1. P. 47–71.
20. Bandle C., Brunner H. // Madrid :Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. 1994. Vol. 88. P. 203–222.

21. Abia L., López-Marcos J.C., Martínez J. // Applied Numerical Mathematics. 2001. Vol. 38. P. 287–313.
22. Brändle C., Quirós F., Rossi J.D. // Numerische Mathematik. 2005. Vol. 102. No. 1. 39–59.
23. Groisman P. // Computing. 2006. Vol. 76. P. 325–352.
24. Cho C.-H., Hamada S., Okamoto H. // Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. 2007. Vol. 24. P. 131–160.
25. Brändle C., Groisman P., Rossi J.D. // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2011. Vol. 14. No. 10. P. 1425–1450.
26. Nassif N.R., Makhoul-Karam N., Erhel J. // Applied Numerical Mathematics. 2013. Vol. 67. P.204–219.
27. Yang Z.W., Brunner H. // SIAM J. Numer. Anal. 2013. Vol. 51, P. 2260–2282.
28. McLaughlin D.W., Papanicolaou G.C., Sulem C., Sulem P.L. // Physical Review A. 1986. Vol. 34. P. 1200.
29. Haynes R., Turner C. // Atlantic electronic journal of mathematics. 2007. Vol. 2, No 1. 1–13.
30. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
31. Cho C.-H. // Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. 2013. Vol. 30. P. 331–349.
32. Cho C.-H. // Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. 2016. Vol. 33. P. 81–98.
33. Cho C.-H. // Numerical Algorithms. 2017. Vol. 75. No. 3. P. 675–697.
34. Richardson L.F., Gaunt J.A. // Phil. Trans. A. 1927. Vol. 226. P. 299–349.
35. Рябенкий В.С., Филлипов А.Ф. Об устойчивости разностных уравнений. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956.
36. Lax P. // Comm. Pure Appl. Math. Vol. 14, P. 497.
37. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
38. Альшина Е. А., Калиткин Н. Н., Корякин П. В. // ДАН. 2005. Т. 404, №3, С. 295–299.

39. Альшина Е. А., Калиткин Н. Н., Корякин П. В. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45, №10, С. 1837–1847.
40. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
41. Белов А.А. // ДАН. 2016. Т. 468, №1, Р. 21–25.
42. Белов А.А. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57, №1, С. 91–102.
43. Janke E., Emde F., Lösch F. Taffeln höhere Functionen (B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1960).
44. NIST Digital Library of Mathematical Functions. <https://dlmf.nist.gov>
45. Хайпер Э., Нерсет С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990.
46. Rosenbrock Н.Н. // Computer Journal. 1963. Vol. 5. No. 4. P. 329–330.
47. Калиткин Н.Н., Пошивайло И.П. // ДАН. 2012. Т. 442, №2, С. 175–180.
48. Белов А.А., Калиткин Н.Н. // Дифф. уравнения. 2019. Т. 55, №7, С. 907–918.
49. Пошивайло И.П. Жесткие и плохо обусловленные нелинейные модели и методы их расчета. Диссертация ... кандидата физико-математических наук. М., 2015.
50. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979.
51. Калиткин Н.Н., Альшин А.Б., Альшина Е.А., Рогов Б.В. Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: Физматлит, 2005.
52. Шалашин В.И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
53. Белов А.А., Калиткин Н.Н., Пошивайло И.П. // ДАН. 2016. Т. 466, №3, С. 276–281.

Содержание

1 Проблема	3
2 Известные методы	4
3 Расчет задач с сингулярностями	7
4 Метод инверсной функции	9
5 Пример расчета для одного ОДУ	14
6 Системы ОДУ	18
7 Пример для системы ОДУ	21
8 Кратные полюсы	23
9 Теоретические аспекты построения тестов	25
10 Представительные тесты	27
11 Апробация	29
12 Заключение	32