ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 93 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

И.Ф. Потапенко

# Численное исследование асимптотического затухания длинноволновых колебаний электрического поля для уравнения Власова

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки:*** Потапенко И.Ф. Численное исследование асимптотического затухания длинноволновых колебаний электрического поля для уравнения Власова // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 93. 24 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-93
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-93

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

И.Ф. Потапенко

# Численное исследование асимптотического затухания длинноволновых колебаний электрического поля для уравнения Власова

Москва
2020

***Потапенко И. Ф.***

**Численное исследование асимптотического затухания длинноволновых колебаний электрического поля для уравнения Власова**

Рассматривается плазма электронов на нейтрализующем фоне бесконечно тяжелых ионов. Численно моделируется кинетическое уравнение Власова с начальным градиентом температуры в 1D1V геометрии конечными разностями для типичных длин порядка длины свободного пробега $r_D \ll L_0 \leq \lambda_{ei}$. Проводится сравнение с асимптотической формулой для электрического поля, полученной в линеаризованном случае. Показано экспоненциально слабое затухание осциллирующего электрического поля в нелинейном случае. Скорость затухания зависит от параметра $\varepsilon = r_D/L_0$. Это обстоятельство необходимо учитывать при кинетическом моделировании слабо столкновительной плазмы.

**Ключевые слова:** уравнение Власова–Ампера, квазинейтральный предел, асимптотика длинноволновых колебаний

***Potapenko I. F.***

**Numerical study of asymptotic damping of electric field long-wave oscillations for the Vlasov equation**

Plasma consisting of electrons on neutralizing background of infinitely heavy ions is considered. The Vlasov kinetic equation with initial temperature gradient is numerically simulated in 1D1V space by finite differences for typical lengths of the order of mean free path $r_D \ll L_0 \leq \lambda_{ei}$. A comparison with the asymptotic formula for an electric field in the linearized case is made. An exponentially weak damping of the oscillating electric field in nonlinear case is shown. Damping rates depend on the parameter $\varepsilon = r_D/L_0$. This circumstance must be taken into account in the kinetic simulation of weakly collision plasmas.

**Key words:** Vlasov–Ampere equation, quasineutral limit, long wave asymptotics

# Оглавление

Введение . . . 3
Постановка задачи . . . 4
Кинетическое уравнение и уравнение для электрического поля . . . 8
Алгоритм численного решения . . . 9
Вычислительные аспекты . . . 12
Асимптотика длинноволновых колебаний . . . 17
Заключение . . . 23
Библиографический список . . . 23

# Введение

Данная работа является продолжением работы [1], которая посвящена математическим аспектам динамики столкновительной плазмы, относящимся к вопросу сильно различающихся пространственно–временных масштабов. Рассматривается поведение функции распределения в случае, если типичной характерной длиной задачи является длина пробега $\lambda_{ei}$, которая много больше наименьшей характерной плазменной длины, радиуса Дебая $r_D$. Идеологически эта проблема, проблема длинноволновых асимптотик для кинетического уравнения Власова–Пуассона–Ландау [2]–[4], примыкает к так называемому квазинейтральному пределу для уравнения Власова–Пуассона, когда дебаевский радиус исчезающе мал [5]–[7].

Интерес к этой проблеме обусловлен недостаточностью описания в рамках гидродинамики реальных экспериментов, при которых возникают значительные градиенты температуры и плотности, в плазменных установках (лазерные установки, токамаки) и, в связи с этим, необходимостью привлечения кинетических моделей. С другой стороны, решение кинетических уравнений Власова–Ландау в рамках единой модели сталкивается со значительными трудностями как математического, так и вычислительного характера. В кинетической модели, например, требуется объединение разномасштабных процессов в единый алгоритм, что приводит, как правило, к сокращенному описанию процессов. В серии работ (см., например, [8]–[11]) авторы рассматривают упрощенную модель плазмы электронов с нейтрализующим фоном из бесконечно тяжелых ионов. Затем неявно делается формальный переход к определенному пределу и численно решаются предельные уравнения. Эти уравнения имеют некоторые преимущества, так как предельное электрическое поле задается явной формулой.

Для полного численного описания физической проблемы естественно объединить последовательно уравнение Власова, столкновительные уравнения, уравнения гидродинамики в единый алгоритм, используя малость различных физических параметров в разнообразных физических режимах. В этом направлении разрабатываются асимптотически корректные схемы, рассматриваются упрощенные модели столкновительного оператора Ландау–Фоккера–Планка (см., например, [12] и ссылки в ней), ищутся пути увеличения дискретных расчетных параметров для ускорения расчета и т.д.

Целью данной работы является численная проверка некоторых математических результатов, полученных в статье [1] для линеаризованного случая, и расширение результатов на нелинейный случай. Основное внимание уделено поведению самосогласованного электрического поля на большом интервале времени (длинноволновая асимптотика). Проведен анализ результатов для широкого спектра входных параметров.

Выбрана достаточно стандартная численная модель с надлежащей малостью шага по времени. Основные физические результаты иллюстрируются в последней части работы. Показано, что длинноволновые осцилляции электрического поля практически не затухают на длительных временах. Это обстоятельство необходимо учитывать при кинетическом моделировании слабо столкновительной плазмы.

Материал изложен в следующем порядке. Дается постановка задачи и основные уравнения. Уравнения приводятся к безразмерному виду, в котором важный параметр $\varepsilon$, отвечающий отношению характерных длин $\varepsilon = r_D/\lambda_{ei}$, входит в уравнение для поля. Далее приводится система уравнений Власова, которая и предназначена для численного интегрирования.

Уравнения в $1D1V$ геометрии решаются в декартовых координатах с помощью метода конечных разностей, с периодическими граничными условиями по $x$ и начальным максвелловским распределением с пространственно неоднородной температурой.

Даны численная схема и алгоритм решения задачи Коши для системы уравнений Власова–Максвелла. Разностная схема и некоторые приведенные полезные соотношения стандартны и детально описаны для удобства изложения и наглядности.

В параграфе, посвященном численным аспектам, приводятся параметры рассматриваемой задачи и обсуждается необходимая малость величины шага по времени для корректного описания решения.

В заключение дан анализ зависимости решения от входных физических параметров. Проводится сравнение с аналитической формулой, полученной в [1] для осцилирующего электрического поля.

# Постановка задачи

Численно исследуется решение уравнения Власова для электронов и однозарядных бесконечно тяжелых ионов в электростатическом случае. Электронная функция распределения $f(x, v, t)$ рассматривается в полном пространстве, где $x \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+$ — это положение, скорость и время.

Плотность числа частиц $\rho_{e,i}$, ток $j$ и энергия $< \mathcal{E} >$ определяются моментами функции распределения

$$\rho_{e,i} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{e,i}(x, v, t) dv, \qquad j = -e \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v, t)\, v\, dv\,,$$

$$< \mathcal{E} >= \frac{m}{2\rho_e} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v, t)\, v^2\, dv\,.$$

Для функции распределения электронов $f(x,v,t)$ кинетическое уравнение Власова–Максвелла–Ландау имеет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial t} + v\cdot\nabla_x f - \frac{e}{m}E\cdot\nabla_v f = C(f)\,,\\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t) = e(\rho_i-\rho_e)\,,\quad E = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial E}{\partial x} = e(\rho_e-\rho_i),
\end{aligned}\tag{1}$$

где $C(f) = C_{ee} + C_{ei}$ — интеграл кулоновских столкновений. Поскольку ионы предполагаются фиксированными, то плотность ионов $\rho_i$ – заданная функция в пространстве.

Далее мы перейдем к нормировке уравнений и приведем рассматриваемые в работе безразмерные уравнения.

Характерная длина $L_0$ с самого начала рассматривается как *свободный параметр*; $\rho_0$ и $T_0$ обозначают некоторые характерные значения начальной плотности и абсолютной температуры, выраженной в единицах энергии; $v_0 = (T_0/m)^{1/2}$ и $t_0 = L_0/v_0$ — тепловая скорость и характерное время соответственно. С помощью этих значений введем следующие безразмерные величины: для длины $\tilde{x} = x/L_0$, для скорости $\tilde{v} = v/v_0$, для времени $\tilde{t} = t/t_0$ и для функции распределения $\tilde{f} = f/F_0$.

Рассмотрим задачу Коши в полном пространстве $(x,v)\in\mathbb{R}$ для $t>0$ с начальными условиями

$$f(x,t=0) = F_0\,\tilde{f}_0\,(\tilde{x},\,\tilde{v})\ ,\quad F_0 = \rho_0\,v_0^{-3/2}.$$

Предположим, что

$$\tilde{f}_0(\tilde{x},\tilde{v}) \xrightarrow[|\tilde{x}|\to\infty]{} M(|\tilde{v}|) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-|\tilde{v}|^2/2).\tag{2}$$

Это условие можно рассматривать как граничное условие на бесконечности для

$$f(x,v,t) = F_0\,\tilde{f}(\tilde{x},\tilde{v},\tilde{t}),\quad E(f) = \tilde{E}\,E_0,\quad C(f) = C_0\,\tilde{C}(\tilde{f})\tag{3}$$

с соответствующими нормирующими константами $E_0$ и $C_0$. Опуская тильды, получим из уравнений (1)–(3) следующие *безразмерные* уравнения

$$f_t + v\,f_x - A\,E\,f_v = B\,C(f,f)\,,\qquad A = \frac{t_0 e E_0}{v_0 m};\quad B = \frac{L_0}{\lambda_{ei}}\,,\tag{4}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{L_0 e\rho_0}{E_0}\,(\rho_e-\rho_i);\tag{5}$$

с

$$f|_{t=0} = f(x,v), \qquad f(x,v,t) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} (2\pi)^{-3/2}\exp(-|v|^2/2).$$

Положим $E_0 = L_0\, e\, \rho_0$ в уравнении (5). Следовательно, в уравнении (4) мы имеем только два безразмерных параметра

$$A = \left(\frac{L_0}{r_D}\right)^2 \quad \text{и} \quad B = \frac{L_0}{\lambda_{ei}} = \frac{1}{Kn}\,, \tag{6}$$

где

$$r_D = \left(\frac{4\pi\rho_0 e^2}{T_0}\right)^{-1/2} \quad \text{— радиус Дебая,}$$

$$\lambda_{ei} = \frac{T_0^2}{2\pi e^4 \rho_0^{1/3}\Lambda} \quad \text{— длина свободного пробега,}$$

$$\Lambda = \log\frac{r_D T_0}{e^2} \quad \text{— кулоновский логарифм.}$$

Напомним, что кинетическое уравнение Власова–Ландау (1) основано на предположении (см., например, [13], [14]) малости параметра (параметра неидеальности плазмы)

$$\delta = \frac{1}{\rho_0 r_D^3} = \left(\frac{4\pi e^2 \rho_0^{1/3}}{T_0}\right)^{3/2} << 1.$$

Следовательно,

$$\Lambda = \log\frac{4\pi}{\delta} \approx \log\frac{1}{\delta} >> 1, \qquad \frac{\lambda_{ei}}{r_D} = 8\pi\,\frac{1}{\delta\Lambda} \approx 8\pi\,\left(\delta\log\frac{1}{\delta}\right)^{-1} >> 1\,.$$

$$\text{Тогда} \quad \frac{A}{B} = \frac{L_0}{r_D}\,\frac{\lambda_{ei}}{r_D} \approx \frac{8\pi}{\delta\log\frac{1}{\delta}}\,\frac{L_0}{r_D} \gg 1\,, \quad \text{если только} \quad L_0 \gtrsim r_D.$$

Поэтому столкновительный член в уравнении Власова–Ландау (1), (4) много меньше силы Власова во всех практически интересных случаях $L_0$. Случай *умеренно больших* значений $L_0$ математически проанализирован в работах [1]. Далее мы будем рассматривать численно только решение уравнения Власова без учета интегралов столкновений Ландау, то есть, вообще говоря, для сравнительно небольших времен $\omega_{ep}^{-1} < t \lesssim t_{ei}$.

Пусть $E_0 = (v_0\, m)/(t_0\, e)$, $\rho_i/\rho_0 = 1$, $\rho(x,t) = \rho_e(x,t)/\rho_0$. Система рассматриваемых уравнений примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\,\frac{\partial f}{\partial x} - E\,\frac{\partial f}{\partial v} = 0\,, \tag{7}$$

$$\varepsilon^2\,\frac{\partial E}{\partial t} = -\,j(x,t)\,, \quad j(x,t) = -\int_{-\infty}^{\infty} f v\,dv\,; \qquad \varepsilon^2 = \left(\frac{r_D}{L_0}\right)^2 . \tag{8}$$

Параметр $\varepsilon$, который есть не что иное, как обратный плазменный параметр, в большинстве задач является малой величиной: $\varepsilon = r_D/L_0 \simeq \nu_{ei}/\omega_{ei}$ . Если $\varepsilon = 1$ , то характерная длина равна радиусу Дебая, $L_0 = r_D$ . Вместо уравнения Пуассона (Гаусса)

$$\varepsilon^2\,\frac{\partial E}{\partial x} = 1 - \rho(x,t) \tag{9}$$

мы будем использовать в расчетах уравнение Ампера (8). Эти уравнения эквивалентны, если уравнение Пуассона справедливо в начальный момент времени.

Интегрируя уравнение (7) по скорости с весами 1 и $v$, получим следующие выражения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \tag{10}$$

и

$$-\frac{\partial j}{\partial t} + \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + E(x,t)\int v\frac{\partial f}{\partial v}dv =$$
$$= -\frac{\partial j}{\partial t} + \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + E(x,t)\;\rho(x,t) = 0\,,$$
$$\text{где} \quad P(x,t) = \int f v^2 dv = 2 < \mathcal{E} > \;. \tag{11}$$

Предельный случай, когда параметр $\varepsilon \to 0$, соответствует квазинейтральному пределу. Из уравнений (8), (9) следует $\rho \to 1$, $j \to 0$. Предельная система может быть записана как

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t} + v\,\frac{\partial f}{\partial x} - E(x,t)\,\frac{\partial f}{\partial v} = 0\,, \\ &j = 0\,, \end{aligned} \tag{12}$$

при этом $\rho = 1,\ j = 0$ в начальный момент. То есть уравнения Максвелла в данном случае вырождаются в алгебраические уравнения, из которых нельзя найти электрическое поле.

# Кинетическое уравнение и уравнение для электрического поля

При численном решении неоднородного кинетического уравнения с самосогласованным электрическим полем, которое является решением системы уравнений Власова-Максвелла, обычно применяется метод расщепления. Поле расчитывается на каждом шаге по времени.

Переформулируем задачу (7), (8) следующим образом. Продифференцируем уравнение (8) по времени. Вместе с уравнением (11) получим следующую систему

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial j}{\partial t}+\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}+E(x,t)\,\rho(x,t)=0\,,\\ &-\frac{\partial j}{\partial t}\;=\;\varepsilon^2\,\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\,, \end{aligned} \tag{13}$$

откуда получим уравнение для электрического поля

$$\varepsilon^2\,\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+E\,\rho(x,t)=-\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}\,,\qquad P(x,t)=\int f v^2 dv\,. \tag{14}$$

Окончательно система уравнений для численного интегрирования выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t}+v\,\frac{\partial f}{\partial x}-E(x,t)\,\frac{\partial f}{\partial v}=0\,,\\ &\varepsilon^2\,\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+E(x,t)\,\rho(x,t)\;=-\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} \end{aligned} \tag{15}$$

(уравнение Пуассона должно быть выполнено в начальный момент времени).

При переходе к предельному случаю $\varepsilon\to 0$ (формально!) система (15) принимает вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t}+v\,\frac{\partial f}{\partial x}-E\,\frac{\partial f}{\partial v}=0\,,\\ &E(x,t)=\frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Второе уравнение из системы (12), соответствующее переходу $j\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, налагает условие, которое должно выполняться в начальный момент времени. Таким образом, если используется система (16) для расчета варианта с $\varepsilon=0$, мы должны проверять условие численного равенства нулю тока $\partial j(x,t)/\partial t=0$ для всех $t>0$.

# Алгоритм численного решения

Введем пространственно-временную сетку $\omega = \omega_x \times \omega_v \times \omega_t$ с постоянными шагами по пространству $0 \le x \le 2\pi$, по скорости $-\infty < v < \infty$ и времени $t$:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \{x_{l+1} = x_l + \triangle x,\ l = 1, 2, \ldots, L_m,\ x_1 = 0,\ x_{L_m} = L_m = 2\pi\},\\
\omega_t &= \{t^{n+1} = t^n + \triangle t,\ n = 0, 1, \ldots,\ t^0 = 0\},\\
\omega_v &= \{v_{k+1} = v_k + \triangle v,\ k = 1, 2, \ldots, K_m,\ v_1 = -v_m,\ v_{K_m} = v_m, \}\,.
\end{aligned}$$

В качестве начальной функции $f^0_{l,k} = f(x_l, v_k, t_0)$ выберем максвелловское распределение по скорости с неоднородной по пространству температурой $T_0(x)$ и постоянной начальной плотностью $\rho_0 = 1$

$$f^0_{l,k} = \frac{1}{(2\,\pi\,T^0_l)^{1/2}}\ \exp\left(-\frac{v_k^2}{2\,T^0_l}\right)\ ; \quad l = 1, 2, \ldots, L_m, \quad k = 1, 2, \ldots, K_m\,.$$

Граничные условия по $x$ периодические: $f(x, v, t) = f(x + 2\pi, v, t)$: $f^n_{l,k} = f^n_{l+L_m,k}$. Функция распределения при $v \to \pm\infty$ стремится к нулю $f(x, v, t) \to 0$. Граничное условие по скорости: $f(x, \pm v_m, t) = 0$, при этом размер области расчета $[-v_m, v_m]$ должен быть достаточно большим для обеспечения этого условия.

Моменты функции распределения примут вид

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f\ dv\ \sim\ \rho_l = \sum_{2}^{K_m-1} f_{l,k} \triangle v \tag{17}$$

для плотности и для тока:

$$\begin{aligned}
-\,j(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f\ v\,dv = \int_{-\infty}^{0} f\ v\,dv + \int_{0}^{\infty} f\ v\,dv = -(j^- + j^+)\ \sim\\
-\,j^-_l = \sum_{2}^{k_0-1} f_{l,k}\,v_k \triangle v + \frac{1}{2}\,f_{l,k_0}\,v_{k_0}\,\triangle v\ ,\\
-\,j^+_l = \frac{1}{2}\,f_{l,k_0}\,v_{k_0}\,\triangle v\ +\ \sum_{k_0+1}^{K_m-1} f_{l,k}\,v_k \triangle v\ ,
\end{aligned} \tag{18}$$

где $v_{k_0} = 0$, в граничных точках $f(l, 1) = f(l, K_m) = 0$, $l = 1, 2, \ldots, L_m$.

Для анализа расчетов удобно иметь в виду разбиение тока на сумму в отрицательной и положительной областях по скорости $j = j^- + j^+$. Такое же разбиение справедливо и для плотности $\rho = \rho^- + \rho^+$.

Аппроксимация адвективного члена (переноса) $\hat{I}_x f = v\, f_x$ в общем случае выглядит как

$$\frac{f^{n+1}_{l+1,k} - f^n_{l,k}}{\triangle\, t} \propto \hat{I}_x f^n_{l,k} = \frac{v_k}{2\,\triangle\, x}\{(f^n_{l+1,k} - f^n_{l-1,k}) - |v_k|[f^n_{l+1,k} - 2f^n_{l,k} + f^n_{l-1,k}]\}.$$

В нашем простейшем одномерном случае для ускорения счета используются следующие алгебраические уравнения для отрицательных и положительных скоростей

$$\hat{I}_x f^n_{l,k} = \begin{cases} v_k < 0: \; v_k \frac{f^n_{l+1,k} - f^n_{l,k}}{\triangle x}, \; l = 1, 2, \ldots, L_m - 1; & f^{n+1}_{L_m,k} = f^{n+1}_{1,k}; \\ \\ v_k > 0: \; v_k \frac{f^n_{l,k} - f^n_{l-1,k}}{\triangle x}, \; l = 2, \ldots, L_m; & f^{n+1}_{1,k} = f^{n+1}_{L_m,k}. \end{cases} \tag{19}$$

При разностном интегрировании (суммировании) уравнений (19) по скорости с весом 1 и $v_k$ получим следующие соотношения для производных для $j^n_l$ и $P^n_l$ (14):

$$\begin{gathered} \int_{-\infty}^{\infty} dv\, \hat{I}_x\, f = \int_{-\infty}^{\infty} dv\, \frac{\partial f\, v}{\partial x} = -\frac{\partial j}{\partial x} = -\left(\frac{\partial j^-}{\partial x} + \frac{\partial j^+}{\partial x}\right) \sim \\ \sim -\frac{\triangle j^-_l}{\triangle x} = \sum_2^{k_0} v_k \frac{f^n_{l+1,k} - f^n_{l,k}}{\triangle x}\triangle v, \quad -\frac{\triangle j^+_l}{\triangle x} = \sum_{k_0}^{K_m-1} v_k \frac{f^n_{l,k} - f^n_{l-1,k}}{\triangle x}\triangle v \end{gathered} \tag{20}$$

и

$$\frac{\triangle P^n_l}{\triangle x} = \sum_2^{K_m-1} \hat{I}_x f^n_{l,k}\, v\, \triangle v = \begin{cases} \sum_2^{k_0} v_k^2\, (f^n_{l+1,k} - f^n_{l,k})\, \triangle v/\triangle x\,, & v_k < 0; \\ \\ \sum_{k_0}^{K_m-1} v_k^2\, (f^n_{l,k} - f^n_{l-1,k})\, \triangle v/\triangle x\,, & v_k > 0. \end{cases} \tag{21}$$

Аппроксимация оператора электрического поля на $n+1$ слое по времени дана уравнением

$$\hat{I}_v f^n_{l,k} = \frac{E^{n+1}_l f^n_{l,k+\frac{1}{2}} - E^{n+1}_l f^n_{l,k-\frac{1}{2}}}{\triangle v}\,, \tag{22}$$

где

$$E^{n+1}_l f^n_{l,k+\frac{1}{2}} = E^{n+1}_l \left(\frac{f^n_{l,k,j} + f^n_{l,k+1}}{2}\right) + \left|E^{n+1}_l\right| \left(\frac{f^n_{l,k+1} - f^n_{l,k}}{2}\right).$$

При этом сумма по скорости, аппроксимирующая интеграл, равна нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv\, E\, \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \sim \sum_2^{K_m-1} \triangle v\, \hat{I}_v f^n_{l,k} = 0.$$

А сумма, аппроксимирующая интеграл по скорости с весом $v_k$, дает выражение $E\,\rho$ (ср. с уравнением (11)):

$$-\int_{-\infty}^{\infty} dv\, v\, E\, \frac{\partial f}{\partial v} = E\,\rho \quad \sim -\sum_{2}^{K_m-1} \hat{I}_v f_{l,k}^n\, v_k\, \triangle v = E_l^{n+1}\, \rho_l^n\,.$$

Отметим, что такой простой (и эффективный для расчетов) результат суммирования возможен при постоянном шаге по скорости.

Таким образом, из уравнения для функции распределения на $n+1$ шаге

$$\frac{f_{l,k}^{n+1} - f_{l,k}^n}{\triangle t} = \hat{I}_x f_{l,k}^n \; + \; \hat{I}_v f_{l,k}^n \tag{23}$$

суммированием по скорости с фактором $\triangle v$ обеих частей уравнения получим аналог равенства (10)

$$\frac{\triangle \rho_l}{\triangle t} = \frac{\triangle j_l^-}{\triangle x} + \frac{\triangle j_l^+}{\triangle x}\,. \tag{24}$$

Суммированием уравнения (23) с весом $v_k \triangle v$ получим разностный аналог уравнения (11).

Для нахождения функции на $n+1$ шаге с помощью уравнения (23) нужно сначала найти электрическое поле $E_l^{n+1}$. Для этого воспользуемся уравнениями (14), (15):

$$\varepsilon^2 \left[\frac{E_l^{n+1} - 2E_l^n + E_l^{n-1}}{\triangle t^2}\right] + E_l^{n+1}\, \rho_l^n = -\frac{\triangle P_l^n}{\triangle x}\,.$$

Тогда для определения поля получим формулу

$$E_l^{n+1} = \frac{1}{\frac{\varepsilon^2}{\triangle t^2} + \rho_l^n}\left[-\frac{\triangle P_l^n}{\triangle x} + \frac{\varepsilon^2}{\triangle t^2}\left(2E_l^n - E_l^{n-1}\right)\right]\,. \tag{25}$$

Формула (25) для вычисления поля содержит параметр $0 \le \varepsilon \le 1$, естественным образом включая предельные значения. При $\varepsilon(t) \to 0$ мы приходим к системе (16). Этот алгоритм для вычисления поля был предложен в [12] и других работах, одной из целей которых было построение асимптотически корректных численных схем. В принципе, параметр $\varepsilon(t)$ может меняться со временем в ходе рассматриваемого динамического процесса.

*Замечание.* Продифференцируем (в конечно-разностном смысле) разностное уравнение Ампера (13), не расшифровывая значения производной по $x_l$,

$$\varepsilon^2 \frac{E_l^{n+1} - E_l^n}{\triangle t} = -j_l$$

следующим образом, используя соотношение (24),

$$\varepsilon^2 \frac{1}{\triangle t} \frac{\triangle E_l^{n+1}}{\triangle x} = \varepsilon^2 \frac{1}{\triangle t} \frac{\triangle E_l^n}{\triangle x} - \frac{\triangle j_l}{\triangle x} = \varepsilon^2 \frac{1}{\triangle t} \frac{\triangle E_l^n}{\triangle x} - \frac{\triangle \rho_l}{\triangle t} \ ,$$

а также аппроксимацию производной (20). Тогда

$$\varepsilon^2 \frac{\triangle E_l^{n+1}}{\triangle x} = \varepsilon^2 \frac{\triangle E_l^n}{\triangle x} - \rho_l^{n+1} + \rho_l^n = \cdots = 1 - \rho_l^{n+1} \, ,$$

т. е. получим аппроксимацию уравнения Гаусса (Пуассона) (9).

*Алгоритм расчета.*

1. На $n$ шаге вычисляем $\triangle P_l^n / \triangle x$ по формуле (21).
2. Вычисляем поле $E_l^{n+1}$ из уравнения (25).
3. Вычисляем функцию распределения из уравнения (23) на $n+1$ шаге.

# Вычислительные аспекты

Введем параметр $p = \triangle t^2/\varepsilon^2$, который нам понадобится ниже. Перепишем систему уравнений (23), (25) в следующем виде

$$f_{l,k}^{n+1} = f_{l,k}^n - \triangle t \, \hat{I}_x \, f_{l,k}^n \ + \ \triangle t \, \hat{I}_v f_{l,k}^n \ , \tag{26}$$

$$\begin{aligned} E_l^{n+1} &= \frac{1}{p \, \rho_l^n + 1} \left[ - p \, \frac{\triangle P_l^n}{\triangle x} \ + \ \left( 2 E_l^n - E_l^{n-1} \right) \right] \ , \quad \varepsilon \neq 0 \, ; \\ E_l^{n+1} &= - \frac{\triangle P_l^n}{\triangle x} \ , \quad \varepsilon = 0 \, . \end{aligned} \tag{27}$$

Решаем начальную задачу с градиентом начальной температуры в области $x_l \in [0, \, 2\,\pi]$, $v_k \in [-15, 15]$ с шагами сетки $\triangle x = 0.1$, $\triangle v = 0.1$. Максвелловская функция распределения $f(x, v, 0)$ зависит от $x$ только через температуру $T_0(x_l)$:

$$f_{l,k}^0 = \frac{1}{[2\,\pi \, T_0(x_l)]^{1/2}} \ \exp \left( - \frac{v_k^2}{2 \, T_0(x_l)} \right) \ , \quad T_0(x_l) = 1 \ + \ A \cos x_l \, ,$$

где амплитуда $A$ и $\varepsilon$ — исходные параметры физической задачи. Граничные условия для функции распределения по $x$ периодические. В граничных точках по скорости $v_1, v_{K_m}$ функция равна (машинному) нулю. На нулевом шаге $E_l^0 = 0$. Начальная плотность равна $\rho_0 = 1$. Шаг по времени $\triangle t$ ограничен условием Куранта, приблизительно $\triangle t \lesssim 0.005$.

Рассмотрим поведение электрического поля на больших временах для двух значений параметра $A = 0.5$ и $A = 0.1$ и для нескольких вариантов параметра $\varepsilon = 1, 0.5, 0.25, 0.1, 0.04, 0.01, 0$.

Сначала приведем результат расчета для $\varepsilon = 0$. В этом случае используем для вычисления поля $E$ формулу (25), (27) . Напомним, что в этом случае ток должен быть равен нулю (12). Ниже на рис. 1 приведена зависимость тока от пространства в различные моменты времени, начальная амплитуда $A = 0.5$. Значения тока равны машинному нулю.

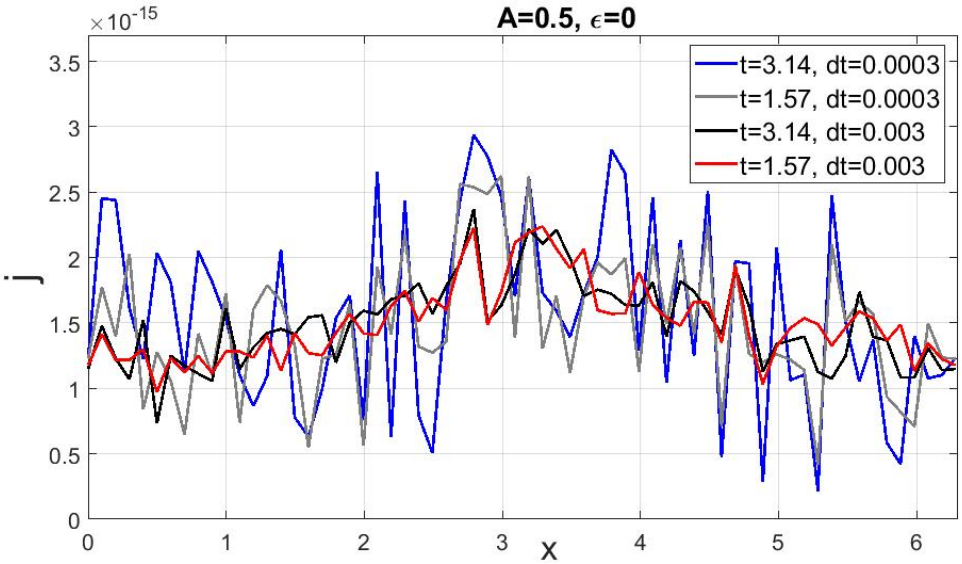


Рис. 1

Зависимость поля от времени, которое мгновенно изменяется от начального нулевого значения, приведены в двух фиксированных (симметричных) точках $x = 1.5\pi$ и $x = 0.5\pi$ на рис. 2.

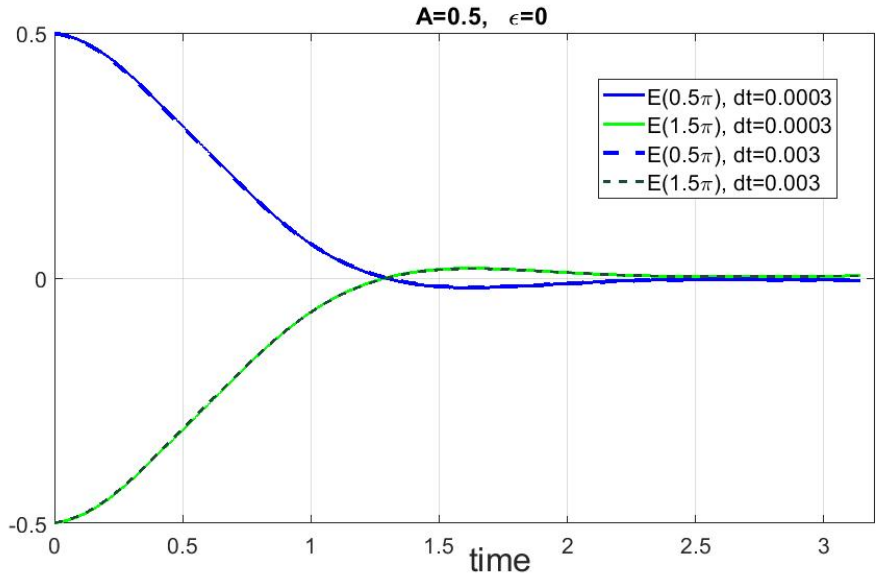


Рис. 2

Шаги по времени не входят в формулу для определения поля (16), (27) и ограничены лишь условием Куранта. Изменения в 10 раз шага по времени, как видно из рисунка, не повлияли на поведение и величину поля во времени. Максимальное значение поля равно амплитуде $A = 0.5$. Колебания поля затухают на интервале времени $t \backsimeq 2$.

Для дальнейшего анализа расчетов мы будем использовать параметр $p$, связывающий параметр задачи $\varepsilon$ и шаг по времени. Фактически параметр $p$, определяющий желаемую точность расчета, задает зависимость шага по времени $\triangle t(\varepsilon)$. Следующий расчет приведен для предельного значения $\varepsilon = 1$. Ниже приведены графики зависимости поля от времени, рис. 3, и зависимости тока от $x$ в различные моменты времени на рис. 4.

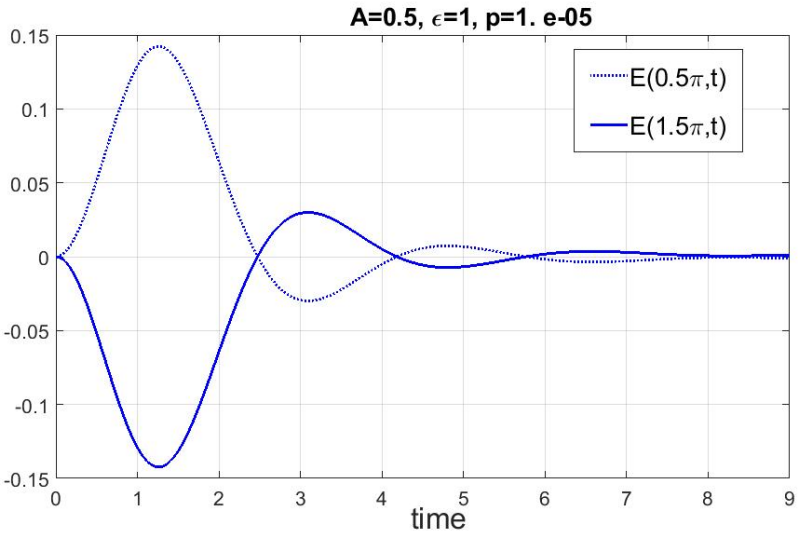


Рис. 3

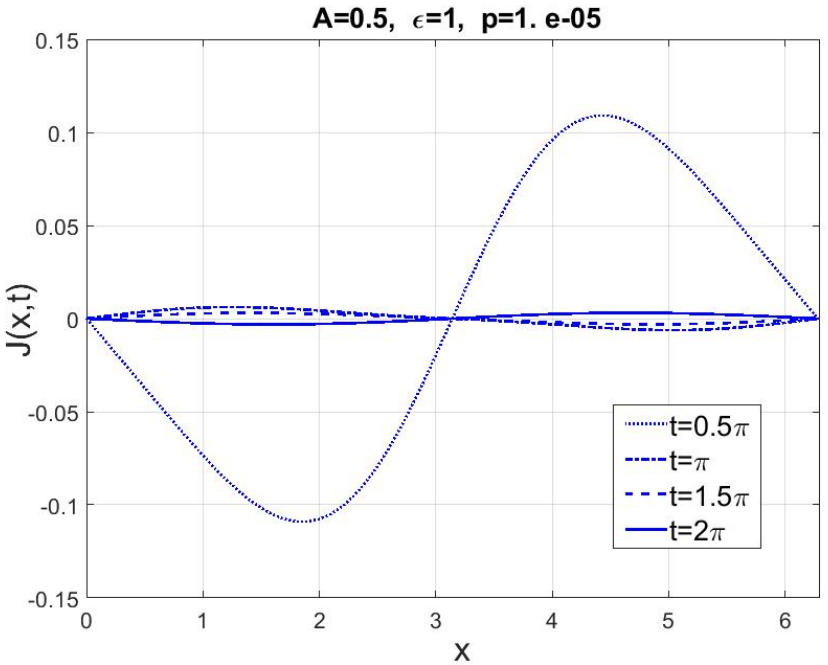


Рис. 4

В этом случае $p = \triangle t^2$, и уменьшение шага по времени также не ведет к заметным изменения результатов расчета. Из формулы для поля (27) понятно, что главная часть в ней — это величина поля с предыдущих временных слоев ($\rho \sim 1$)

$$E_l^{n+1} \approx -\triangle t^2 \, \frac{\triangle P_l^n}{\triangle x} \; + \; \left(2E_l^n - E_l^{n-1}\right) \; .$$

Здесь тоже можно выделить, условно, начальную стадию колебаний на интервале времени $t \sim 2$.

Следующий пример расчета показывает важность значения малости шага по времени $\triangle t$ для корректного определения зависимости колебаний электрического поля от времени в случае малых значений $\varepsilon$.

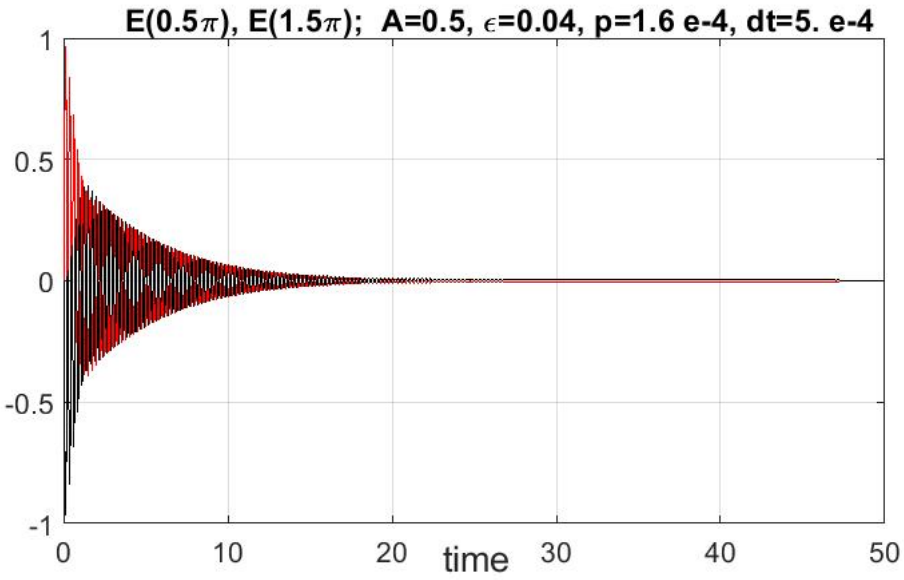


Рис. 5

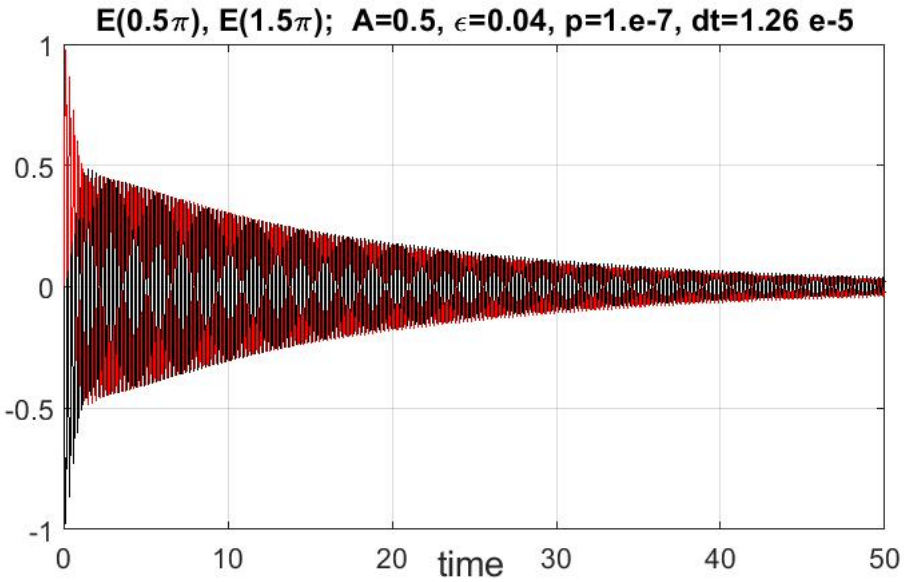


Рис. 6

Для $\varepsilon = 0.04$ представлены графики поля для двух значений шага по времени (рис. 5, рис. 6). Красной линией обозначено поле $E(0.5, t)$, а черной — $E(1.5, t)$. На первом рисунке видно, что поле затухает за период времени $t \sim 15$, в то время как для меньшего шага по времени затухание происходит на значительно большем промежутке $t \gtrsim 60$. Заметим, что шаги $\triangle t$ отличаются в 40 раз, а соответствующие значения параметров $p$ в 1000 раз.

Для значения параметра $\varepsilon = 0.1$ на рис. 7 представлены графики поля $E(0.75,\, t)$ и тока в фиксированный момент времени $j(x,\, 31.4)$ ($j = -\,<v>$) для двух значений $p$.

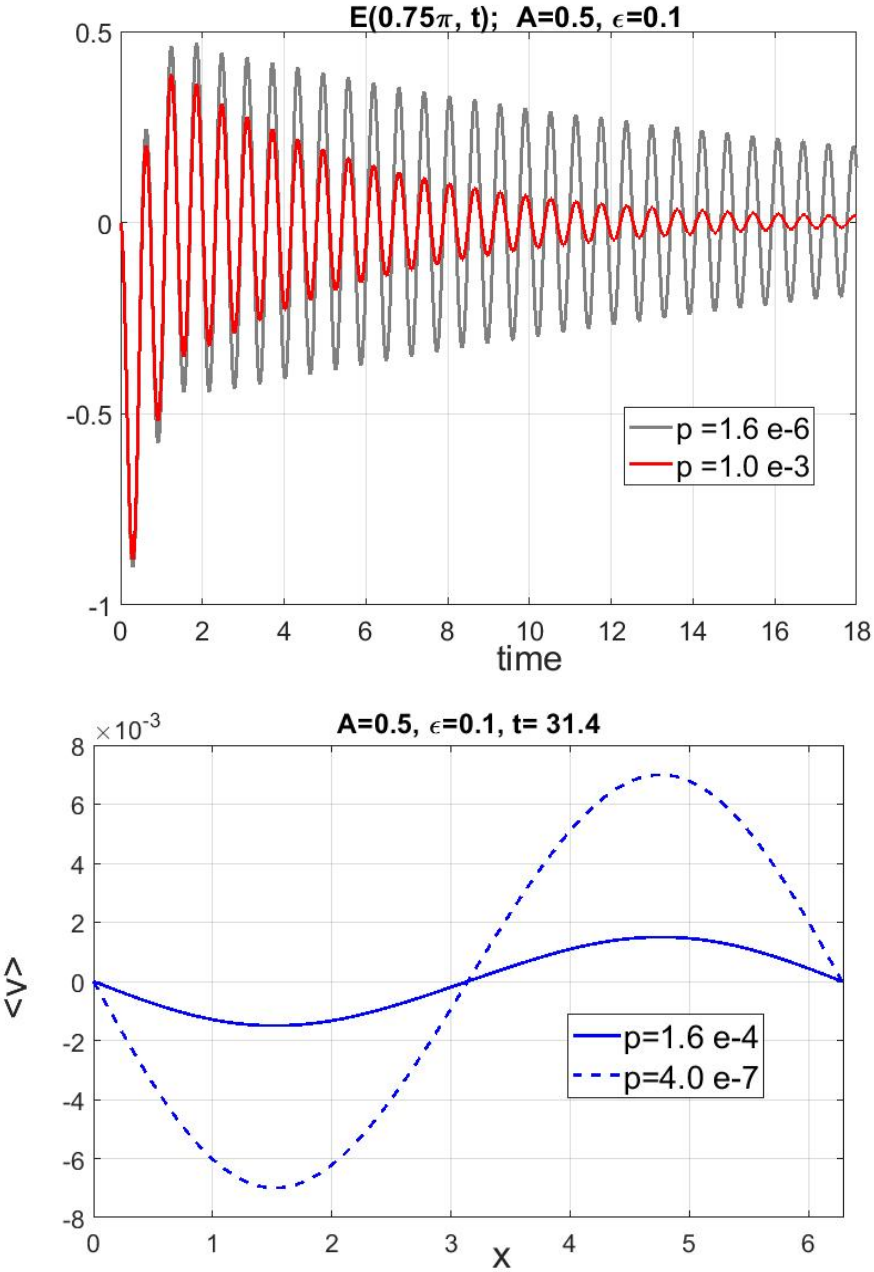


Рис. 7

Для тока можно видеть разницу (накопленную ошибку к моменту времени $t = 31.4$) в 4 раза для разных значений $p$.

Шаги по времени должны удовлетворять условию $\triangle t \ll \varepsilon \ll 1$. Из численных расчетов можно заключить, что решение перестает меняться с уменьшением шага по времени, когда $p \lesssim 10^{-6}$. Для больших значений $\varepsilon = 1,\ 0.5$ малость шага по времени практически обеспечена ограничением Куранта. Для малых $\varepsilon$ в самом начале расчета значения поля не сильно отличаются. Однако чем меньше $\varepsilon$, тем заметнее накапливается ошибка со временем. Поэтому далее мы будем представляем расчеты, которые проводятся, как правило, с достаточной точностью.

# Асимптотика длинноволновых колебаний

В работе [1] получена оценочная формула для электрического поля для линеаризованного случая

$$E = S(x,t) - S(x,0)\, cos\frac{t}{\varepsilon} \ + (\simeq O(1)); \quad S(x,t) \simeq \frac{\partial P}{\partial x}\,. \tag{28}$$

Проведем сравнение поведения электрического поля, полученного из численных расчетов, с асимптотической аналитической формулой (28). Амплитуда $A$ в начальном распределении температуры соответствует $S(x,0)$.

Рис. 8 показывает сравнение зависимости поля от времени для $\varepsilon = 0.25$ и двух начальных распределений температур со значениями амплитуд $A = 0.5$ и $A = 0.1$. Легко видеть соответствие формуле (28).

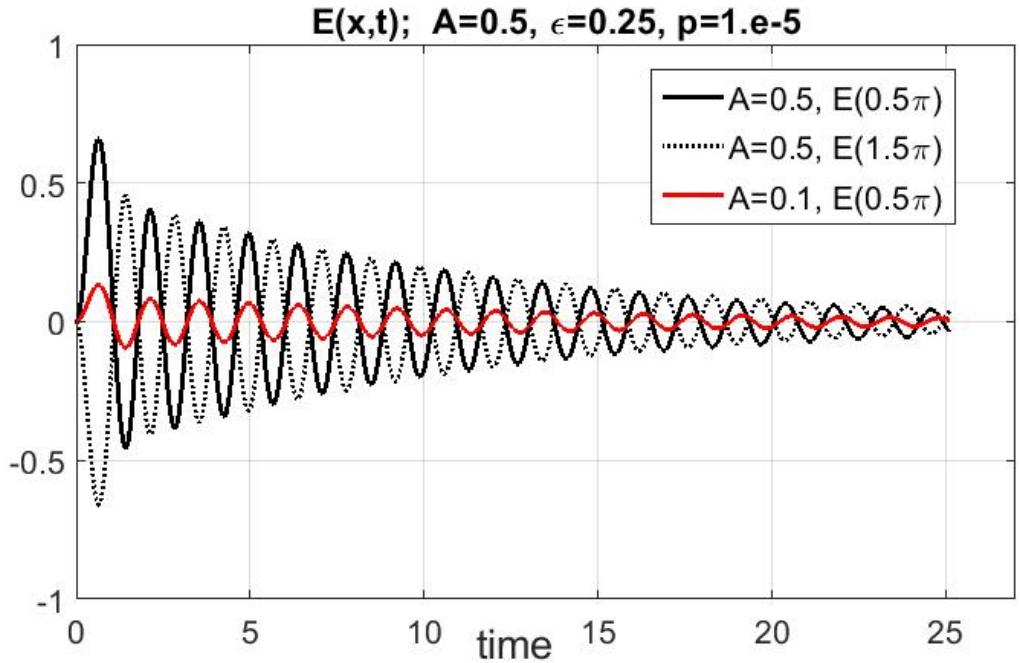


Рис. 8

На рис. 9 приведен график для $\partial\rho/\partial t = \partial j/\partial x$ для тех же значений параметра $A = 0.5,\ 0.1$ в момент времени $t = 25$.

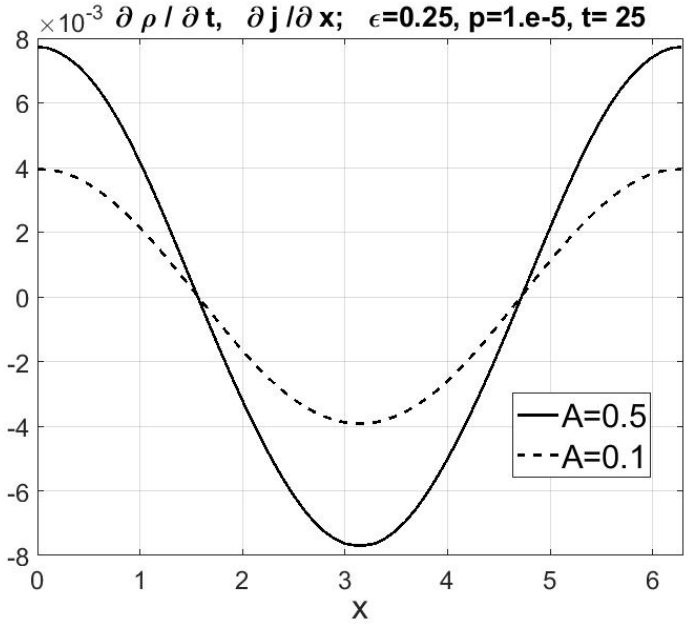


Рис. 9

Для оценки скорости затухания колебаний поля во времени введем важную характеристику — амплитуду затухания

$$dE(t;\varepsilon) = |E_{max}(t) - E_{min}(t)|\,, \quad m\,T_{osc} \le t \le (m+1)\,T_{osc},\ m = 1, 2, \dots\,,$$

вычисленную на периоде колебаний $T_{osc} = 2\,\pi\,\varepsilon$.

Для наглядности на рис. 10 на одном графике показаны зависимость от времени колебания поля $E(1.5\pi, t)$ и $dE(t;\varepsilon)$ для $\varepsilon = 0.5$ (достаточно грубый шаг по времени).

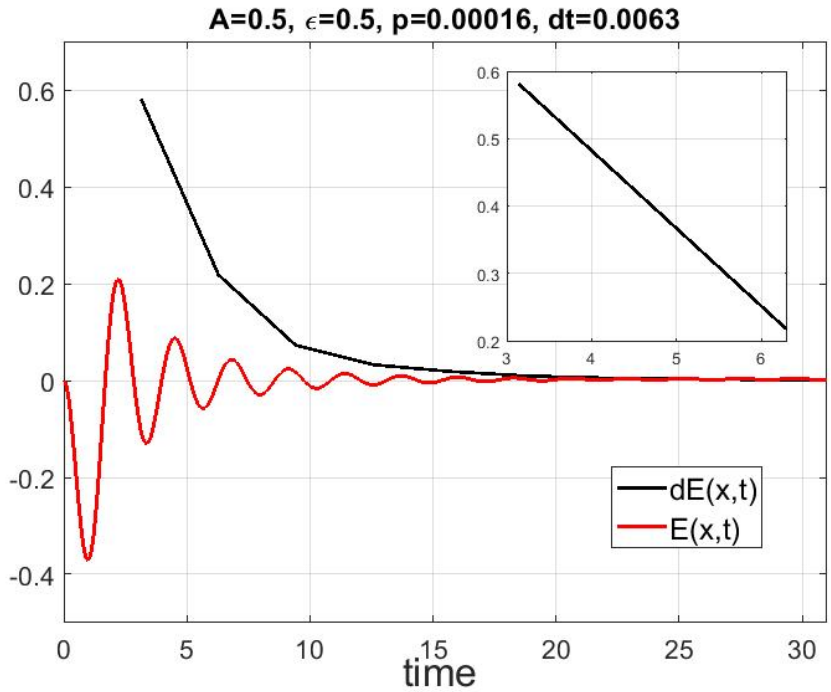


Рис. 10

Для параметра $\varepsilon = 0.01$ приведены графики зависимости поля $E(1.5\pi, t)$ (рис. 11) и соответствующей амплитуды затухания $dE(t)$ (рис. 12) от времени и четырех значений $p$. На графике можно выделить начальную стадию колебаний электрического поля с амплитудой $2|A|$=1 на интервале $0 < t \leq 2$, после которой идет экспоненциальное затухание, скорость которого зависит от величины параметра $p$.

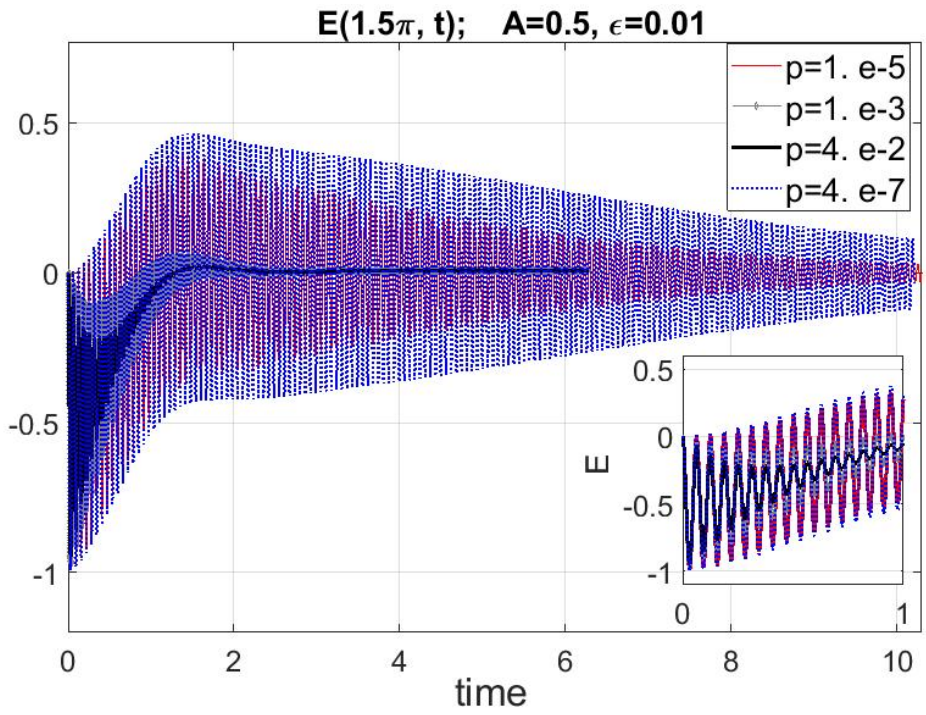


Рис. 11

На рис. 12 график $dE(t)$ приведен в логарифмическом масштабе.

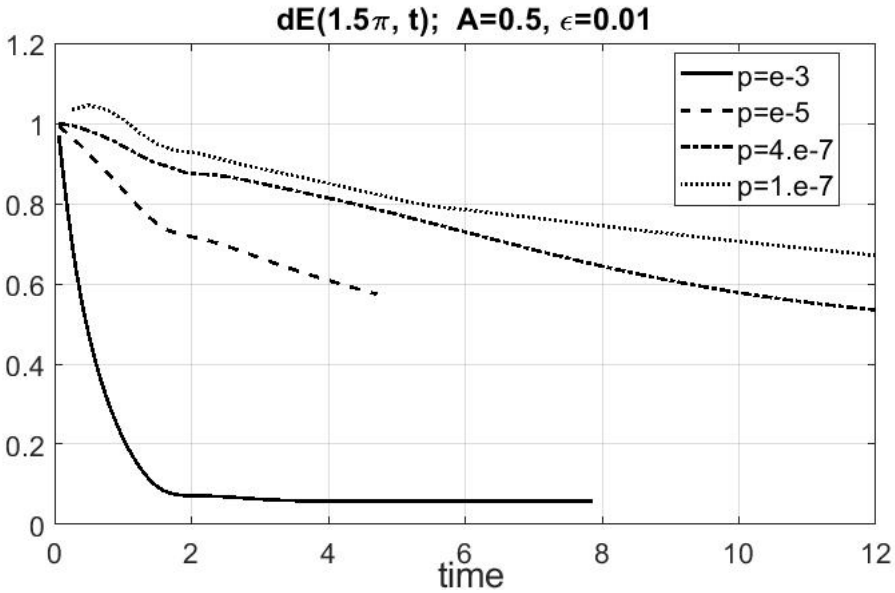


Рис. 12

Как легко видеть, для больших шагов по времени колебания электрического поля заканчиваются практически на начальной стадии процесса.

На следующем рисунке изображены графики электрического поля в зависимости от времени для различных значений параметра $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Также на нем приведено сравнение поля $E(t)$ для $\varepsilon = 0$ и $E(t)$ для $\varepsilon = 0.01$ с $p = 0.04$, $\triangle t = 0.002$.

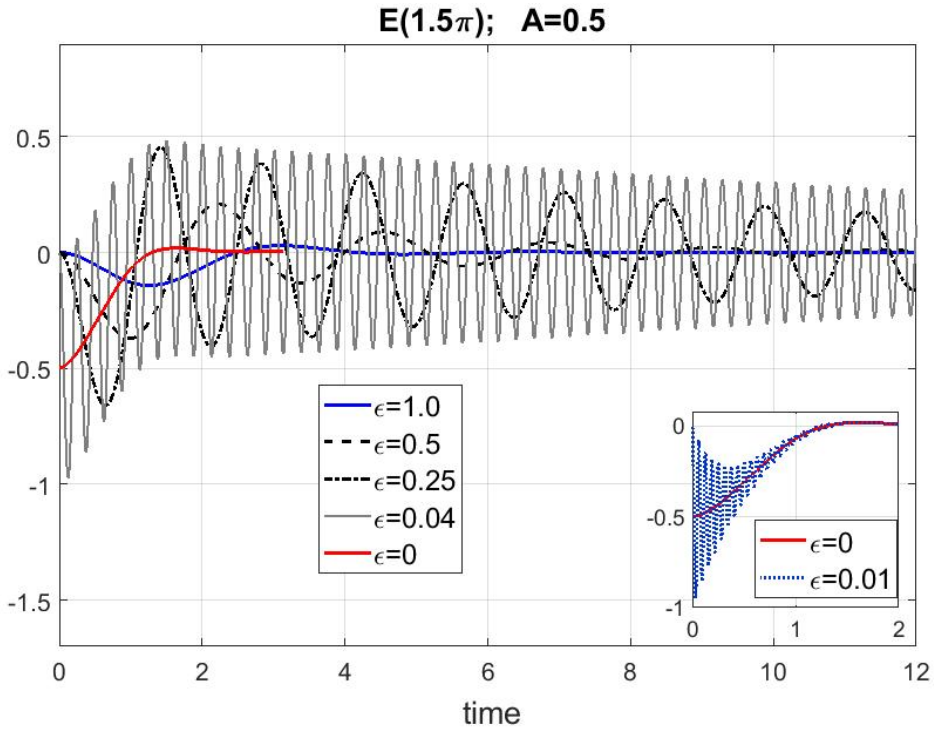


Рис. 13

Зависимость амплитуды затухания $dE(t)$ приведена на рис. 14.

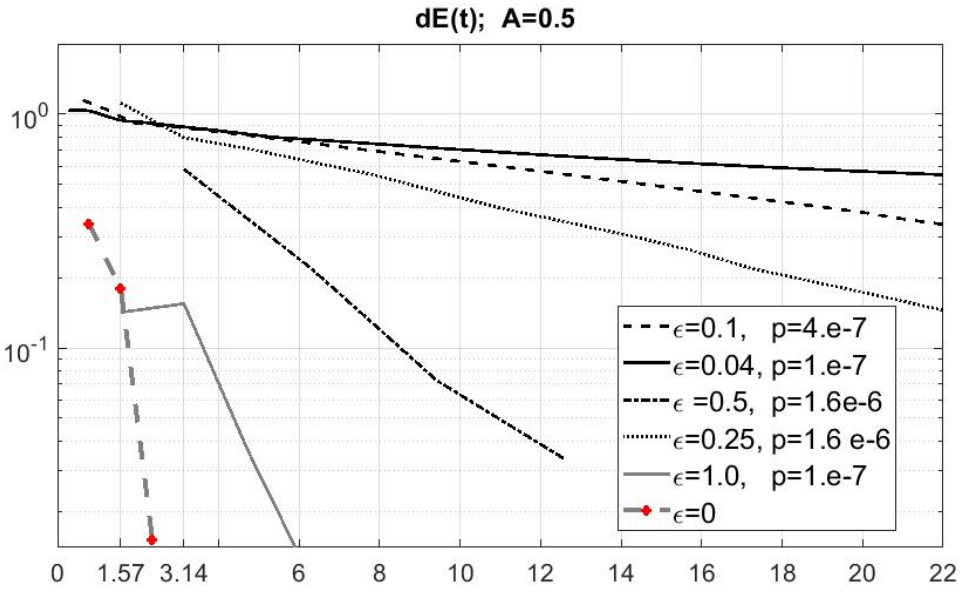


Рис. 14

Графики $dE(t)$ приведены в логарифмическом масштабе для шести значений $\varepsilon$. Очевидно, что для $\varepsilon = 0$ зависимость $dE(t)$ неверна.

Для полноты описания приведем графики $P(x,t)$ (энергии) для $\varepsilon = 0.04$ и двух различных $p$, рис. 15.

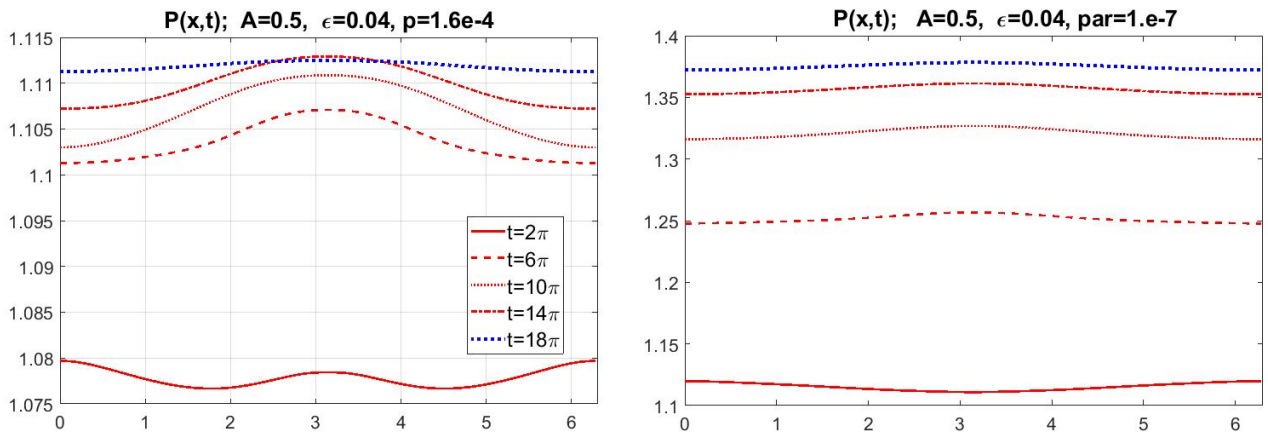


Рис. 15

На рис. 16 приведена функция $P(t) = \int dx[P(x,t) - P(x,0)]$ для двух значений $p$.

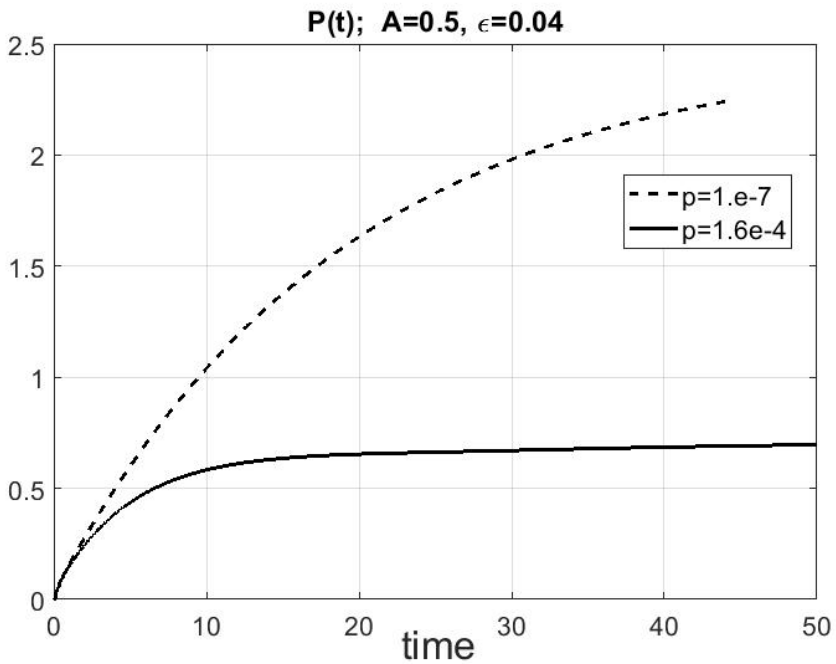


Рис. 16

Естественно, что более грубые шаги по времени заметно занижают энергию. Функция распределения (рис. 17) для меньших шагов по времени имеет, соответственно, более горячие хвосты.

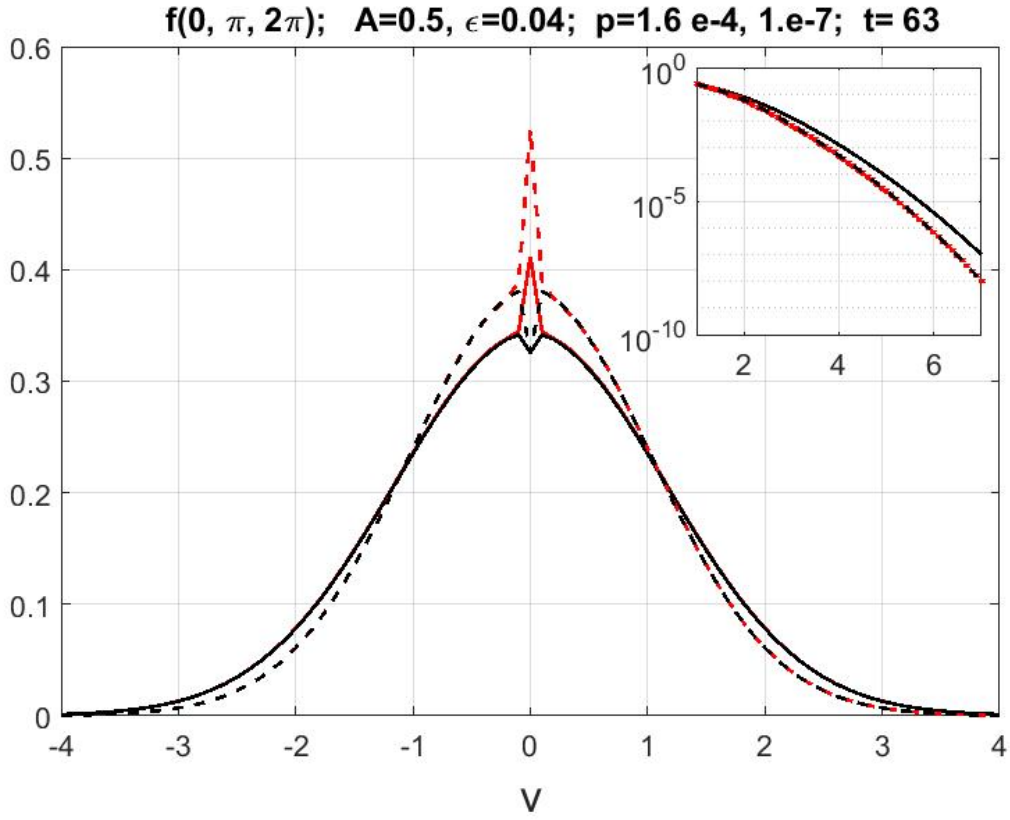


Рис. 17

# Заключение

Плазма электронов на нейтрализующем ионном фоне моделируется одномерным уравнением Власова. Температура в начальном максвелловском распределении неоднородна по пространству: $T(x) = 1 + A\cos x$. Рассматриваются характерные длины $r_D \ll L_0 \ll \lambda_{ei}$, так что столкновительные члены не учитываются.

Проводится сравнение с аналитической формулой, полученной в [1] для осциллирующего электрического поля для линеаризованного случая (малых отклонений от равновесия) (28). Численные расчеты, проведенные для нелинейного случая, подтверждают формулу (28). Для оценки скорости затухания введена величина амплитуды поля $dE(t) = |E_{max} - E_{min}|$, вычисленная на периоде колебаний $T_{osc} = 2\pi\varepsilon$ . В начале процесса $dE(t) \sim 2|A|$. Показано, что длинноволновые осцилляции электрического поля $E \sim A\cos t/\varepsilon$ практически не затухают для малых значений параметра $\varepsilon$ на длительных временах.

Для корректных расчетов чрезвычайно важен шаг по времени, малость которого зависит от $\varepsilon$. Из численных расчетов показано, что для получения корректных результатов параметр $p = \triangle t^2/\varepsilon^2$ должен не превышать значений $p \leq 10^{-6}$. В противном случае скорость затухания завышается, что при-

водит, в частности, к искажению таких макроскопических величин, как температура, ток и т.д. Это существенное обстоятельство необходимо учитывать при соответствующем кинетическом моделировании слабо столкновительной плазмы.

Автор благодарит А. Бобылева за полезные дискуссии. Особая благодарность А. Русскову за помощь, оказанную при подготовке работы.

# Библиографический список

[1] Bobylev A.V., Potapenko I.F. Long wave asymptotics forthe Vlasov–Poisson–Landau kinetic equation, J. Stat. Physics. 175 (2019), 1.

[2] Vlasov A.A. On vibrational properties of electron gas (in Russian), J. Exp. Theor Phys. (JETP) 8 (1938), 291.

[3] Vlasov A.A. Vibrational properties of electron gas and their applications (in Russian), Uchyonye zapiski MGU, Fizika, Vyp. 75 (1945), Moscow State University.

[4] Landau L.D. On vibrations of electron plasma, J. Phys. USSR 10 (1946) 25. English translation: JETP, 16 (1946), 574.

[5] Feix M.R., Hohl F., Staton L.D. Nonlinear effects in plasmas, Eds. Kalman and Feix, Gordon and Breach, pp. 3–21, 1969.

[6] Bardos C., Besse N. The Cauchy problem for the Vlasov-Dirac-Benney equation and related issues in fluid mechanics and semi classical limits, Kin. Relat. Models 6 (4), pp. 893–917, 2013.

[7] Epperlein E.M., Short R.W. A practical nonlocal model for electron heat transport in laser plasmas. Phy.Fluids B, 3, p. 3092, 1991.

[8] Bychenkov V. Yu., Rozmus W., Tikhonchuk V. T., Brantov A. V. Nonlocal electron transport in a plasma. Phys. Rev. Lett., 75, p. 4405, 1995.

[9] Batishchev O.V., Bychenkov V.Yu., Detering F., Rozmus W., Sydora R., Capjack C.E., Novikov V.N. Heat transport and electron distribution function in laser produced with hot spots. Physics of Plasmas, 9, pp. 2302–2310, 2002.

[10] Brantov A.V., Bychenkov V.Yu., Batishchev O.V., Rozmus W. Nonlocal heat wave propagation due to skin layer plasma heating by short laser pulses. Computer Physics communications, 164, pp. 67–72, 2004.

[11] Bobylev A., Brantov A., Bychenkov V., Karpov S., Potapenko I. DSMC modeling of a single hot spot evolution using the Landau-Fokker-Planck equation, Acta Appl. Math., 8, 132(1), DOI 10.1007/s10440-014-9940-x, 2014.

[12] Guisset S., Brull S., Dubroca B., d' Humieres E., Karpov S. and Potapenko I. Asymptotic-preserving scheme for the M1-Maxwell system in the quasi-neutral regime, Communications in Computational Physics, 19(2), pp. 301–328, 2016.

[13] Ichimaru S. Basic Principles of Plasma Physics, CRC Press,1974.

[14] Lifshitz E.M., Pitaevskii L.P. Physical kinetics, Butterworth-Helnemann, 1981.