ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 94 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

В.В. Ивашкин, И.В. Крылов

Оптимизация траекторий космического аппарата с электроракетным двигателем малой тяги

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ивашкин В.В., Крылов И.В. Оптимизация траекторий космического аппарата с электроракетным двигателем малой тяги // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 94. 32 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-94
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-94

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

В.В. Ивашкин, И.В. Крылов

Оптимизация траекторий космического аппарата с электроракетным двигателем малой тяги

Москва — 2020

Ивашкин В.В., Крылов И.В.

Оптимизация траекторий космического аппарата с электроракетным двигателем малой тяги

В работе рассматривается проблема оптимизации траекторий космического аппарата (КА), оснащённого электроракетным двигателем (ЭРД) малой тяги и совершающего прямой перелёт (т.е. перелёт без гравитационных манёвров) между двумя небесными телами. Программа управления ЭРД отыскивается при помощи принципа максимума Понтрягина для двух математических моделей тяги: идеальной и ограниченной. Нелинейная двухточечная краевая задача принципа максимума решается при помощи модифицированного метода Ньютона. Приведены особенности алгоритма решения краевой задачи. При этом принципиальные трудности, обусловленные кусочно-постоянным профилем ограниченной тяги, преодолеваются при помощи метода логарифмического сглаживания. Элементы матрицы чувствительности определяются интегрированием соответствующих систем дифференциальных уравнений в отклонениях. Приводится численный пример, иллюстрирующий применение разработанной методики к задаче оптимизации перелёта КА от Земли к астероиду Апофис.

Ключевые слова: малая тяга, необходимые условия оптимальности, принцип максимума Понтрягина, метод Ньютона, метод логарифмического сглаживания.

Vyacheslav Vasilievich Ivashkin, Igor Valerievich Krylov

Optimization of trajectories for a spacecraft with an electric rocket engine of low thrust

The paper considers a problem of optimizing the trajectories for a spacecraft (SC) with an electric rocket engine and making a direct flight (without the gravity assists) between two celestial bodies. The program of the control for the electric propulsion engine is found using the Pontryagin's maximum principle for two mathematical models of thrust: ideal thrust and limited one. The nonlinear two-point boundary-value problem of the maximum principle is solved using modified Newton's method. The peculiarities of solving this problem are given. The fundamental difficulties caused by a discontinuous profile of limited thrust are overcome using the method of logarithmic smoothing. The elements of the sensitivity matrix are determined by integrating the corresponding systems of differential equations in deviations. There is also given a numerical example that illustrates the application of the developed technique to the problem of optimizing the SC flight from Earth to asteroid Apophis.

Key words: low thrust, necessary conditions for optimality, Pontryagin’s maximum principle, Newton’s method, logarithmic-smoothing method

Введение

Работа посвящена проблеме оптимизации траекторий космических аппаратов (КА), оснащённых электроракетными двигателями (ЭРД). В отличие от обычных химических двигателей, ЭРД развивают сравнительно малую тягу, однако обеспечивают высокую скорость истечения частиц в реактивной струе, поэтому весьма эффективны [1]. Целый ряд космических экспедиций, таких как Deep Space 1, Dawn, SMART-1, Hayabusa, Hayabusa-2, были осуществлены (или осуществляются) при помощи ЭРД.

Алгоритмы решения задач траекторной оптимизации для КА с ЭРД базируются на методах теории оптимальных процессов. Традиционно эти методы подразделяются на две большие группы: прямые и непрямые [2]. Прямые методы основываются на анализе поведения функционала в окрестности заданной траектории и не используют необходимые или достаточные условия оптимальности [2 - 4]. Непрямые методы строятся на непосредственном использовании необходимых или достаточных условий оптимальности. К их числу относят принцип максимума Понтрягина, метод динамического программирования Беллмана, метод Кротова и т.д [5 - 7]. Непрямые методы позволяют проводить траекторную оптимизацию с высокой точностью и относительно небольшими вычислительными затратами, однако весьма чувствительны к выбору начального приближения. Отметим, что показал свою эффективность предложенный Охоцимским Д.Е. комплексный пионерский метод, основанный на определении дифференциала функционала [8].

В данной работе траекторная оптимизация КА с ЭРД выполняется при помощи одного из самых популярных непрямых методов – принципа максимума Понтрягина [5]. Как известно, он позволяет сводить поиск минимума функционала для процесса, описываемого системой обыкновенных дифференциальных уравнений, к решению двухточечной краевой задачи (КЗ).

Поскольку для большинства нелинейных объектов аналитическое решение КЗ отсутствует, недостающие краевые условия отыскивают при помощи тех или иных численных методов. В нашем случае численное решение КЗ отыскивается методом Ньютона [2, 9].

Можно выделить следующие факторы, оказывающие заметное влияние на работоспособность метода Ньютона применительно к проблеме траекторной оптимизации КА с ЭРД: степень близости начальных значений искомых параметров краевой задачи к их точным значениям, вид математической модели тяги ЭРД [10], а также способ вычисления элементов матрицы чувствительности. В настоящем препринте рассматриваются две основные модели тяги: идеальная (ИТ) и ограниченная (ОТ) тяга. В рамках модели ИТ полагается, что мощность ЭРД ограничена ($0 \le N_e \le N_{e\max}$), а на модуль тяги никаких ограничений не накладывается [1]. В рамках модели ОТ ограничена тяга ($0 \le F \le F_{\max}$) и задаётся скорость истечения W_e.

Использование метода Ньютона для ИТ, как правило, не вызывает затруднений при условии, что нулевое приближение для начального вектора сопряжённых переменных выбрано правильно [11]. Иначе обстоит дело с ОТ. В этом случае нулевое приближение обычно отыскивается либо на основе результатов, полученных в рамках оптимального импульсного решения задачи, либо с использованием ИТ. При этом возникают принципиальные трудности, обусловленные кусочно-постоянным профилем тяги, а также изменением структуры управления (т.е. числа активных и пассивных участков) [12]. В настоящей работе указанные трудности преодолеваются при помощи специального метода логарифмического сглаживания, развитого в работах [13 - 14]. Кроме того, для улучшения сходимости итерационного процесса применяется плавный переход (гомотопия) между уже имеющимся решением задачи ИТ и отыскиваемым решением сглаженной задачи [10].

Элементы матрицы чувствительности для моделей ИТ, ОТ, а также логарифмического сглаживания, могут вычисляться либо методом конечных разностей, либо посредством интегрирования соответствующих систем дифференциальных уравнений в отклонениях, либо при помощи метода комплексного шага [10, 14]. В данной работе был использован метод интегрирования систем в отклонениях.

Практическое применение описываемой методики иллюстрируется на примере траекторной оптимизации перелёта КА, оснащённого электроракетным двигателем, от Земли к астероиду Апофис. При этом полагается, что начальный гиперболический избыток скорости КА создается химическими двигателями большой тяги разгонного блока «Фрегат».

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимизации траекторий прямого (т.е. без гравитационных манёвров) перелёта КА, оснащённого ЭРД, между двумя небесными телами. Пусть *OXYZ* – некоторая прямоугольная не вращающаяся система координат (СК), связанная с центральным телом. Полагаем, что математическая модель движения КА в *OXYZ* имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \frac{\mathbf{F}}{m}, \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v}, \end{aligned} \tag{1}$$

где t – текущее время, $\mathbf{r} = [r_x, r_y, r_z]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^{\mathrm{T}}$ – радиус-вектор и вектор скорости КА в СК *OXYZ*, $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ – вектор ускорения силы тяготения центрального тела, $r = |\mathbf{r}|$, μ – гравитационный параметр тела, $\mathbf{F}$ – сила тяги ЭРД, m – масса КА, которая определяется по формуле:

$$dm/dt = -\frac{F}{W_e}, \tag{2}$$

$F = |\mathbf{F}|$, W_e – эффективная скорость истечения частиц в реактивной струе. Пусть для системы (1) заданы некоторые краевые условия в форме:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0), \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0) + V_\infty \mathbf{e}_v, \tag{3}$$

$$m_0 = m_0(V_\infty), \tag{4}$$

$$\mathbf{r}_\text{T} = \mathbf{r}(T), \mathbf{v}_\text{T} = \mathbf{v}(T), \tag{5}$$

где t_0 и T – моменты начала и конца перелёта; $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{r}_T$, $\mathbf{v}_T$ – векторы положения и скорости КА в начальный и конечный моменты t_0 и T; $\mathbf{r}(t_0)$, $\mathbf{v}(t_0)$, $\mathbf{r}(T)$, $\mathbf{v}(T)$ – фиксированные векторы положения и скорости небесного тела отлёта и прилёта, соответственно, в начальный и конечный моменты t_0 и T; $|\mathbf{e}_v| = 1$; V_∞^{opt} – гиперболический избыток скорости КА при отлёте от небесного тела при t_0; $m_0(V_\infty)$ – некоторая известная функция, определяющая начальную массу КА по скорости V_∞. Здесь полагаем, что гиперболический избыток скорости КА подлёта к конечному телу при T равен нулю. Тогда оптимизационная задача может быть сформулирована следующим образом.

Основная задача. Для фиксированных значений t_0 и T необходимо найти величину V_∞^{opt}, вектор $\mathbf{e}_v^{opt}$ и определённую на некотором допустимом множестве вектор-функцию $\mathbf{F}^{opt}(t)$, доставляющие максимум конечной массе $m_T = m(T)$, при условии, что движение КА описывается системой (1), (2) и удовлетворяет соотношениям (3) – (5).

Конкретные методы решения основной задачи во многом определяются характером математической модели тяги ЭРД. На практике наиболее часто используются модели идеальной (ИТ) и ограниченной (ОТ) тяги. В рамках модели ИТ мощность ЭРД полагается ограниченной [1], а на величину F никаких ограничений не накладывается. В рамках модели ОТ считается, что модуль тяги ЭРД ограничен, $0 \le F \le F_{\max}$, а скорость истечения задана. Из анализа этих задач для случая максимизации конечной массы КА тогда следует, что для модели ИТ мощность максимальна, $N_e = N_{e\max}$, а для модели ОТ тяга F (при отсутствии особых режимов управления) может либо принимать максимальное значение, $F = F_{\max}$, либо быть равной нулю, F=0. Следует отметить, что обе модели имеют свои области применения. Так, результаты, полученные в рамках ИТ, не зависят от массовых параметров КА и поэтому могут быть использованы на ранних этапах проектирования, когда технические характеристики КА ещё находятся в стадии уточнения. Кроме того, эти результаты можно использовать в качестве хорошего начального приближения на более поздних этапах, когда оптимизацию следует проводить уже в рамках ОТ, которая наиболее адекватно отражает возможности большинства современных ЭРД. В данной работе решение основной задачи будем отыскивать как для ИТ, так и для ОТ.

2. Формулировка и решение задачи для ИТ

В рамках модели ИТ будем полагать, что реактивная мощность ЭРД

$$N_e = \frac{FW_e}{2}$$

постоянна, а величина гиперболического избытка скорости равна нулю. Следовательно, при заданном t_0, величина $m_0 = m_0(0) = \mathrm{const}$. Обозначим символом:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

вектор управляющего ускорения ЭРД. Выражая из формулы для N_e скорость истечения W_e и подставляя её в выражение (2), получим:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m^2 |\boldsymbol{\alpha}|^2}{2N_e}, \tag{6}$$

Решая дифференциальное уравнение (6), определим конечную массу КА [1, 15]:

$$m_T = \frac{2N_e m_0}{2N_e + m_0 J_\alpha},$$

где J_α имеет вид:

$$J_{\alpha} = \int_{\vartheta}^{T} |\boldsymbol{\alpha}|^2 dt. \tag{7}$$

Очевидно, что при заданной мощности N_e величина m_T тем больше, чем меньше значение функционала (7). Тогда *основная задача* трансформируется к следующему виду.

Задача ИТ. Для фиксированных значений t_0, T, при $V_{\infty} = 0$, необходимо найти вектор-функцию $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{opt}}(t)$, доставляющую минимум функционалу (7), при условии, что движение КА описывается системой уравнений (1) и удовлетворяет соотношениям (3), (5) .

Решение задачи ИТ будем отыскивать при помощи принципа максимума Понтрягина. В соответствии с [5] имеем гамильтониан:

$$H = \psi_0 |\boldsymbol{\alpha}|^2 + \boldsymbol{\psi}_v^{\mathrm{T}} (\mathbf{g}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\psi}_r^{\mathrm{T}} \mathbf{v},$$

где векторы сопряжённых переменных $\boldsymbol{\psi}_r$ и $\boldsymbol{\psi}_v$ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}_v}{dt} = -\boldsymbol{\psi}_r, \qquad \frac{d\boldsymbol{\psi}_r}{dt} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\psi}_v, \tag{8}$$

$\psi_0 = -1$ – константа,

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} -\frac{\mu}{r^3}\left(1 - 3\tilde{x}^2\right); & 3\frac{\mu}{r^3}\tilde{x}\tilde{y}; & 3\frac{\mu}{r^3}\tilde{x}\tilde{z}; \\ 3\frac{\mu}{r^3}\tilde{x}\tilde{y}; & -\frac{\mu}{r^3}\left(1 - 3\tilde{y}^2\right); & 3\frac{\mu}{r^3}\tilde{y}\tilde{z}; \\ 3\frac{\mu}{r^3}\tilde{x}\tilde{z}; & 3\frac{\mu}{r^3}\tilde{y}\tilde{z}; & -\frac{\mu}{r^3}\left(1 - 3\tilde{z}^2\right); \end{Vmatrix},$$

$\tilde{x} = x/r$, $\tilde{y} = y/r$, $\tilde{z} = z/r$. Оптимальное управление $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{opt}}$, найденное из условия максимума функции H по управлению, удовлетворяет соотношению:

$$\boldsymbol{\alpha}^{opt} = -\frac{\boldsymbol{\psi}_v}{2\psi_0}. \tag{9}$$

Обозначим:

$$\boldsymbol{\psi}_\alpha = \left[\boldsymbol{\psi}_v{}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\psi}_r{}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}.$$

Таким образом, решение задачи ИТ сводится к отысканию вектора $\boldsymbol{\psi}_\alpha(t_0)$, переводящего систему уравнений (1), (8), (9) из состояния (3) в состояние (5), т.е. к нелинейной двухточечной краевой задаче принципа максимума.

Анализ показывает, что $\boldsymbol{\psi}_\alpha(t_0)$ для задачи ИТ можно отыскать только численно [15]. Применён следующий алгоритм итерационного решения КЗ.

1. Зададимся индексом итерации $j = 0$ и вектором $\mathbf{p}_\alpha^{(0)}$ нулевого приближения $\boldsymbol{\psi}_\alpha(t_0)$.

2. Проинтегрируем систему (1), (8), (9) от t_0 до T с начальными условиями (3), $\mathbf{p}_\alpha^{(j)}$ и, получив реализации $\mathbf{r}^{(j)} = \mathbf{r}\left(T, \mathbf{p}_\alpha^{(j)}\right)$, $\mathbf{v}^{(j)} = \mathbf{v}\left(T, \mathbf{p}_\alpha^{(j)}\right)$, вычислим невязку:

$$\sigma\left(\mathbf{p}_\alpha^{(j)}\right) = \left(\frac{\left|\mathbf{v}_N - \mathbf{v}^{(j)}\right|}{q_v}\right)^2 + \left(\frac{\left|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}^{(j)}\right|}{q_r}\right)^2,$$

где q_v, q_r – масштабные коэффициенты, величины которых определяются спецификой рассматриваемой задачи.

3. Если величина $\sigma\left(\mathbf{p}_\alpha^{(j)}\right)$ меньше заданного значения ε_σ, то положим $\boldsymbol{\psi}_\alpha(t_0) = \mathbf{p}_\alpha^{(j)}$ и выходим из алгоритма. В противном случае, значение невязки необходимо уменьшить до заданного уровня. Очевидно, что невязка достигает своего минимума при условии:

$$\boldsymbol{\Delta}\left(\mathbf{p}_\alpha^{(j)}\right) = \left[\frac{\partial\sigma}{\partial v_x^{(j)}}, \frac{\partial\sigma}{\partial v_y^{(j)}}, \ldots, \frac{\partial\sigma}{\partial r_z^{(j)}}\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}.$$

Данное условие фактически эквивалентно (с точностью до нормировки) обычным условиям равенства нулю разности координат конечного вектора фазового состояния $\mathbf{r}^{(j)} = \mathbf{r}\left(T, \mathbf{p}_\alpha^{(j)}\right)$, $\mathbf{v}^{(j)} = \mathbf{v}\left(T, \mathbf{p}_\alpha^{(j)}\right)$ и их заданных значений $\mathbf{r}_T$, $\mathbf{v}_T$.

4. При помощи модифицированного (“демпфированного”) метода Ньютона [2, 9] определим:

$$\mathbf{p}_\alpha^{(j+1)} = \mathbf{p}_\alpha^{(j)} - \kappa_j \left(\boldsymbol{\Delta}'_\alpha\right)^{-1} \boldsymbol{\Delta}\left(\mathbf{p}_\alpha^{(j)}\right), \tag{10}$$

где $\boldsymbol{\Delta}'_\alpha = \left\| \dfrac{\partial \boldsymbol{\Delta}\left(\mathbf{p}_\alpha^{(j)}\right)}{\partial \mathbf{p}_\alpha^{(j)}} \right\|$ – матрица чувствительности, κ_j – скалярный множитель (шаг метода), лежащий в диапазоне от нуля до единицы. В данной работе величина κ_j выбирается из ряда 1, ½, ¼,… таким образом, чтобы обеспечить монотонное убывание невязки $\sigma\left(\mathbf{p}_\alpha^{(j+1)}\right) < \sigma\left(\mathbf{p}_\alpha^{(j)}\right)$.

5. Увеличиваем индекс $j = j+1$ и переходим к шагу 2.

Элементы матрицы чувствительности для описанной выше вычислительной схемы будем отыскивать при помощи системы уравнений в отклонениях. Обозначим через $\mathbf{v}^{(j)}(t)$, $\mathbf{r}^{(j)}(t)$, $\boldsymbol{\psi}_r^{(j)}(t)$, $\boldsymbol{\psi}_v^{(j)}(t)$ траекторию, полученную в результате интегрирования (1), (8), (9) на *j*-ой итерации. Тогда система уравнения в отклонениях для элементов возмущённой траектории $\delta\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^{(j)}$, $\delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}$, $\delta\boldsymbol{\psi}_r = \boldsymbol{\psi}_r - \boldsymbol{\psi}_r^{(j)}$, $\delta\boldsymbol{\psi}_v = \boldsymbol{\psi}_v - \boldsymbol{\psi}_v^{(j)}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{d(\delta\mathbf{v})}{dt} &= \mathbf{A}\delta\mathbf{r} - \frac{\delta\boldsymbol{\psi}_v}{2\psi_0}, \\
\frac{d(\delta\mathbf{r})}{dt} &= \delta\mathbf{v}, \\
\frac{d(\delta\boldsymbol{\psi}_v)}{dt} &= -\delta\boldsymbol{\psi}_r, \\
\frac{d(\delta\boldsymbol{\psi}_r)}{dt} &= -\mathbf{B}\delta\mathbf{r} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\psi}_v,
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\mathbf{B} = \left\| \begin{matrix}
[g_{xxx}, g_{yxx}, g_{zxx}]\boldsymbol{\psi}_v; & [g_{xxy}, g_{yxy}, g_{zxy}]\boldsymbol{\psi}_v; & [g_{xxz}, g_{yxz}, g_{zxz}]\boldsymbol{\psi}_v; \\
[g_{xyx}, g_{yyx}, g_{zyx}]\boldsymbol{\psi}_v; & [g_{xyy}, g_{yyy}, g_{zyy}]\boldsymbol{\psi}_v; & [g_{xyz}, g_{yyz}, g_{zyz}]\boldsymbol{\psi}_v; \\
[g_{xzx}, g_{yzx}, g_{zzx}]\boldsymbol{\psi}_v; & [g_{xzy}, g_{yzy}, g_{zzy}]\boldsymbol{\psi}_v; & [g_{xzz}, g_{yzz}, g_{zzz}]\boldsymbol{\psi}_v;
\end{matrix} \right\|,$$

$$g_{xxx} = \frac{3\mu\tilde{x}}{r^4}\left(3 - 5\tilde{x}^2\right),$$

$$g_{yyy} = \frac{3\mu\tilde{y}}{r^4}\left(3 - 5\tilde{y}^2\right),$$

$$g_{zzz}=\frac{3\mu\tilde{z}}{r^4}\left(3-5\tilde{z}^2\right),$$

$$g_{xxy}=\frac{3\mu\tilde{y}}{r^4}\left(1-5\tilde{x}^2\right),$$

$$g_{xxz}=\frac{3\mu\tilde{z}}{r^4}\left(1-5\tilde{x}^2\right),$$

$$g_{yyx}=\frac{3\mu\tilde{x}}{r^4}\left(1-5\tilde{y}^2\right),$$

$$g_{yxx}=g_{xyx}=g_{xxy}=g_{zxx}=g_{xzx}=g_{xxz}=g_{xyy}=g_{yxy}=g_{yyx},$$

$$g_{yyz}=\frac{3\mu\tilde{z}}{r^4}\left(1-5\tilde{y}^2\right),$$

$$g_{zzx}=\frac{3\mu\tilde{x}}{r^4}\left(1-5\tilde{z}^2\right),$$

$$g_{zzy}=\frac{3\mu\tilde{y}}{r^4}\left(1-5\tilde{z}^2\right),$$

$$g_{zyy}=g_{yzy}=g_{yyz}=g_{xzz}=g_{zxz}=g_{zzx}=g_{yzz}=g_{zyz}=g_{zzy},$$

$$g_{xyz}=-\frac{15\mu}{r^4}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z},$$

$$g_{yzx}=g_{zxy}=g_{yxz}=g_{zyx}=g_{xzy}=g_{xyz}.$$

Положив начальные величины отклонений равными нулю и задаваясь поочерёдно единичными начальными возмущениями для каждой компоненты векторов $\delta\boldsymbol{\psi}_r(t_0)$, $\delta\boldsymbol{\psi}_v(t_0)$, интегрируем (1), (8), (9) совместно с (11) и используем полученные таким образом компоненты векторов $\delta\mathbf{v}(T)$, $\delta\mathbf{r}(T)$ в качестве элементов соответствующих столбцов матрицы $\boldsymbol{\Delta}'_\alpha$.

Следует отметить, что эффективность описанного выше алгоритма во многом определяется качеством нулевого приближения для начального вектора сопряжённых переменных. Выбор такого приближения (одного или нескольких) представляет собой самостоятельную задачу, которую, в общем случае, следует решать с учётом её многоэкстремального характера [10, 16, 17].

3. Формулировка и решение задачи для ОТ

В рамках модели ОТ представим тягу ЭРД в виде:

$$\mathbf{F} = F_{\max}\delta_S\mathbf{e}_f ,$$

где $\mathbf{e}_f$ – единичный вектор вдоль тяги $|\mathbf{e}_f| = 1$, $F_{\max}$ – максимальная величина тяги, δ_S – функция тяги, которая принимает два значения: ноль на пассивном участке траектории или единица на активном участке траектории. Будем полагать, что на активных участках реактивная мощность N_e и скорость истечения W_e ЭРД постоянны. Тогда, с учётом (2), можно заключить, что величина конечной массы КА будет тем больше, чем меньше значение функционала:

$$J_f = \int_{t_0}^{T} \frac{F_{\max}\delta_S}{W_e}\, dt, \tag{12}$$

а основная задача трансформируется к следующему виду.

Задача ОТ. Для фиксированных значений t_0 и T необходимо найти величину V_∞^{opt}, векторы $\mathbf{e}_v^{opt}$ и $\mathbf{e}_f^{opt}$, а также функцию $\delta_S^{opt}(t)$, доставляющие минимум (12), при условии, что движение КА описывается системой уравнений (1), (2) и удовлетворяет соотношениям (3) – (5).

Решение задачи ОТ будем отыскивать при помощи принципа максимума Понтрягина. В соответствии с [5] гамильтониан имеет вид:

$$H = \psi_0 \frac{F_{\max}\delta_S}{W_e} + \boldsymbol{\psi}_v^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{f}(\mathbf{r}) + \frac{F_{\max}\delta_S\mathbf{e}_f}{m}\right) + \boldsymbol{\psi}_r^{\mathrm{T}}\mathbf{v} - \psi_m \frac{F_{\max}\delta_S}{W_e}.$$

Максимизируя его по управлению, получим:

$$\mathbf{e}_f^{opt} = \frac{\boldsymbol{\psi}_v}{|\boldsymbol{\psi}_v|},$$

$$\delta_S^{opt} = \begin{cases} 1, & \text{если } S > 0, \\ 0, & \text{если } S \le 0, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$S = \frac{|\boldsymbol{\psi}_v|}{m} - \frac{1+\psi_m}{W_e}, \tag{14}$$

а уравнение для сопряженной переменной записывается в форме:

$$\frac{d\psi_m}{dt} = \frac{F_{\max}\delta_S|\boldsymbol{\psi}_v|}{m^2}.$$

Кроме того, поскольку конечная масса КА не фиксирована, определим из условий трансверсальности [2, 5] конечное значение переменной ψ_m:

$$\psi_m(T) = 0, \tag{15}$$

и вектор направления гиперболического избытка скорости V_∞:

$$\mathbf{e}_v^{opt} = \frac{\boldsymbol{\psi}_v(t_0)}{|\boldsymbol{\psi}_v(t_0)|}. \tag{16}$$

Обозначим:

$$\boldsymbol{\psi}_f = \left[\boldsymbol{\psi}_v^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\psi}_r^{\mathrm{T}}, \psi_m\right]^{\mathrm{T}}.$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений, описывающая движение КА в рамках задачи ОТ, имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \frac{F_{\max}\delta_S\boldsymbol{\psi}_v}{m|\boldsymbol{\psi}_v|},\\
&\frac{dm}{dt} = -\frac{F_{\max}\delta_S}{W_e},\\
&\frac{d^2\boldsymbol{\psi}_v}{dt^2} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}_v,\\
&\frac{d\psi_m}{dt} = \frac{F_{\max}\delta_S|\boldsymbol{\psi}_v|}{m^2},
\end{aligned} \tag{17}$$

а решение задачи ОТ сводится к отысканию вектора $\boldsymbol{\psi}_f(t_0)$, который при заданном значении гиперболического избытка скорости V_∞ переводит систему уравнений (17) из состояния (3), (4) в состояние (5), (16), т.е. к нелинейной двухточечной краевой задаче принципа максимума (КЗ).

Вектор $\boldsymbol{\psi}_f(t_0)$ для задачи ОТ можно отыскать только численно. Принят следующий алгоритм решения КЗ.

1. Зададимся индексом итерации $j=0$ и вектором $\mathbf{p}_f^{(0)}$ нулевого приближения $\boldsymbol{\psi}_f(t_0)$.

2. Проинтегрируем систему (17) от t_0 до T с начальными условиями (3), (4) и, получив реализации $\mathbf{r}^{(j)}=\mathbf{r}\left(T,\mathbf{p}_f^{(j)}\right)$, $\mathbf{v}^{(j)}=\mathbf{v}\left(T,\mathbf{p}_f^{(j)}\right)$, $\psi_m^{(j)}=\psi_m^{(j)}\left(T,\mathbf{p}_f^{(j)}\right)$, вычислим функцию невязки:

$$\sigma\left(\mathbf{p}_f^{(j)}\right)=\left(\frac{\left|\mathbf{v}_T-\mathbf{v}^{(j)}\right|}{q_v}\right)^2+\left(\frac{\left|\mathbf{r}_T-\mathbf{r}^{(j)}\right|}{q_r}\right)^2+\left(\frac{\psi_m(T)}{q_\psi}\right)^2, \tag{18}$$

где q_ψ – масштабный коэффициент.

3. Если окажется, что величина (18) меньше заданного значения ε_σ, то положим $\boldsymbol{\psi}_f(t_0)=\mathbf{p}_f^{(j)}$ и выходим из алгоритма. В противном случае значение невязки необходимо уменьшить до заданного уровня. Очевидно, что (18) достигает своего минимума при условии:

$$\boldsymbol{\Delta}\left(\mathbf{p}_f^{(j)}\right)=\left[\frac{\partial\sigma}{\partial v_x^{(j)}},\frac{\partial\sigma}{\partial v_y^{(j)}},...,\frac{\partial\sigma}{\partial\psi_m^{(j)}}\right]^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}\,.$$

4. При помощи модифицированного метода Ньютона [2, 9] определим:

$$\mathbf{p}_f^{(j+1)}=\mathbf{p}_f^{(j)}-\kappa_j\left(\boldsymbol{\Delta}'_f\right)^{-1}\boldsymbol{\Delta}\left(\mathbf{p}_f^{(j)}\right), \tag{19}$$

где $\boldsymbol{\Delta}'_f=\left\|\dfrac{\partial\boldsymbol{\Delta}\left(\mathbf{p}_f^{(j)}\right)}{\partial\mathbf{p}_f^{(j)}}\right\|$ – матрица чувствительности, κ_j – скалярный множитель (шаг метода), лежащий в диапазоне от нуля до единицы. Величина κ_j выбирается из ряда 1, ½, ¼,… таким образом, чтобы обеспечить монотонное убывание невязки $\sigma\left(\mathbf{p}_f^{(j+1)}\right)<\sigma\left(\mathbf{p}_f^{(j)}\right)$. κ_j – скалярный множитель (шаг метода), лежащий в диапазоне от нуля до единицы. Величина κ_j выбирается из ряда 1, ½, ¼,… таким образом, чтобы обеспечить монотонное убывание невязки $\sigma\left(\mathbf{p}_f^{(j+1)}\right)<\sigma\left(\mathbf{p}_f^{(j)}\right)$.

5. Увеличиваем индекс $j = j + 1$ и переходим к шагу 2.

Элементы матрицы чувствительности для описанной выше вычислительной схемы будем отыскивать при помощи системы уравнений в отклонениях. Обозначим $\mathbf{v}^{(j)}(t)$, $\mathbf{r}^{(j)}(t)$, $m^{(j)}(t)$, $\boldsymbol{\psi}_r^{(j)}(t)$, $\boldsymbol{\psi}_v^{(j)}(t)$, $\psi_m^{(j)}(t)$ траекторию, полученную в результате интегрирования (17) на *j*-ой итерации. Тогда система уравнений в отклонениях для элементов возмущённой траектории $\delta\mathbf{v}$, $\delta\mathbf{r}$, $\delta m = m - m^{(j)}$, $\delta\boldsymbol{\psi}_r$, $\delta\boldsymbol{\psi}_v$, $\delta\psi_m = \psi_m - \psi_m^{(j)}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{d(\delta\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{A}\delta\mathbf{r} + \mathbf{C}\delta\boldsymbol{\psi}_v + \mathbf{f}_1\delta m,\\
&\frac{d(\delta\mathbf{r})}{dt} = \delta\mathbf{v},\\
&\frac{d(\delta m)}{dt} = 0,\\
&\frac{d(\delta\boldsymbol{\psi}_v)}{dt} = -\delta\boldsymbol{\psi}_r,\\
&\frac{d(\delta\boldsymbol{\psi}_r)}{dt} = -\mathbf{B}\delta\mathbf{r} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\psi}_v,\\
&\frac{d(\delta\psi_m)}{dt} = -\mathbf{f}_1^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\psi}_v - \frac{2F_{\max}\delta_S|\boldsymbol{\psi}_v|}{m^3}\delta m,
\end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\mathbf{C} = \frac{F_{\max}\delta_S}{m|\boldsymbol{\psi}_v|}\begin{Vmatrix} 1-\tilde{\psi}_1^2; & -\tilde{\psi}_1\tilde{\psi}_2; & -\tilde{\psi}_1\tilde{\psi}_3;\\ -\tilde{\psi}_1\tilde{\psi}_2; & 1-\tilde{\psi}_2^2; & -\tilde{\psi}_2\tilde{\psi}_3;\\ -\tilde{\psi}_1\tilde{\psi}_3; & -\tilde{\psi}_2\tilde{\psi}_3; & 1-\tilde{\psi}_3^2; \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1 = -\frac{F_{\max}\delta_S}{m^2}\left[\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_3\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\tilde{\psi}_k = \frac{(\boldsymbol{\psi}_v)_k}{|\boldsymbol{\psi}_v|}, k = 1,2,3.$$

При определении элементов матрицы чувствительности необходимо учитывать следующее обстоятельство. Пусть на номинальной траектории $\mathbf{v}^{(j)}(t)$, $\mathbf{r}^{(j)}(t)$, $m^{(j)}(t)$, $\boldsymbol{\psi}_r^{(j)}(t)$, $\boldsymbol{\psi}_v^{(j)}(t)$, $\psi_m^{(j)}(t)$ существуют N точек τ_i, для которых $S(m, \boldsymbol{\psi}_v, \psi_m) = 0$. В результате варьирования начальных условий моменты переключения тяги τ_i^δ, соответствующие возмущённой функции $S^\delta(m + \delta m, \boldsymbol{\psi}_v + \delta\boldsymbol{\psi}_v, \psi_m + \delta\psi_m)$, будут несколько отличаться от исходных (см. рис. 1). Влияние сдвигов $\delta t_i = \tau_i^\delta - \tau_i$ на производные в уравнениях (20) может быть учтено добавлением поправок к отклонениям:

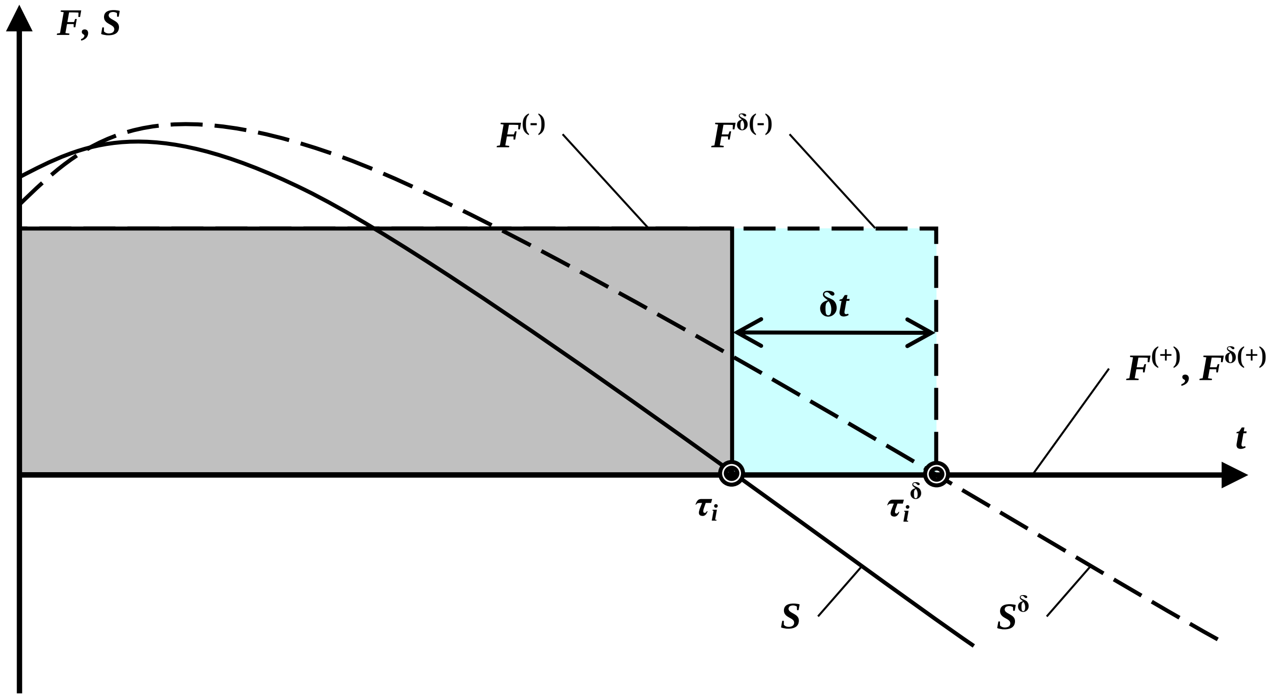

Рис. 1. Вариация момента переключения режима тяги

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{v}^{(+)} &= \delta\mathbf{v}^{(-)} + \frac{F_{\max}\boldsymbol{\psi}_v}{m|\boldsymbol{\psi}_v|}\left(\delta_S^{(-)} - \delta_S^{(+)}\right)\delta t_i, \\
\delta m^{(+)} &= \delta m^{(-)} - \frac{F_{\max}}{W_e}\left(\delta_S^{(-)} - \delta_S^{(+)}\right)\delta t_i, \\
\delta\psi_m^{(+)} &= \delta\psi_m^{(-)} + \frac{F_{\max}|\boldsymbol{\psi}_v|}{m^2}\left(\delta_S^{(-)} - \delta_S^{(+)}\right)\delta t_i,
\end{aligned} \tag{21}$$

где символ $(..)^{(-)}$ означает значение элемента $(..)$ до переключения, а символ $(..)^{(+)}$ означает значение элемента $(..)$ после переключения. Определим теперь величину δt_i.

В линейном приближении имеем:

$$S^{\delta}(\tau_i + \delta t_i) \approx S^{\delta}(\tau_i) + \frac{dS^{\delta}(\tau_i)}{dt}\delta t_i = 0$$

и, следовательно:

$$\delta t_i = -\frac{S^{\delta}(\tau_i)}{\left(\frac{dS^{\delta}(\tau_i)}{dt}\right)}. \tag{22}$$

Разлагая функцию $S^{\delta}(\tau_i)$ в ряд Тейлора и удерживая члены не выше первого порядка, с учётом $S(\tau_i) = 0$ получим:

$$S^{\delta}(\tau_i) \approx \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial S(\tau_i)}{\partial(\boldsymbol{\psi}_v)_k}\delta(\boldsymbol{\psi}_v)_k + \frac{\partial S(\tau_i)}{\partial \psi_m}\delta\psi_m + \frac{\partial S(\tau_i)}{\partial m}\delta m, \tag{23}$$

где

$$\frac{\partial S(\tau_i)}{\partial(\boldsymbol{\psi}_v)_k} = \frac{\tilde{\psi}_k}{m},$$

$$\frac{\partial S(\tau_i)}{\partial \psi_m} = -\frac{1}{W_e},$$

$$\frac{\partial S(\tau_i)}{\partial m} = -\frac{|\boldsymbol{\psi}_v|}{m^2}.$$

Знаменатель выражения (22) можно представить в виде:

$$\frac{dS^{\delta}(\tau_i)}{dt} \approx \frac{dS(\tau_i)}{dt} \approx \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial S(\tau_i)}{\partial(\boldsymbol{\psi}_v)_k}\frac{d(\boldsymbol{\psi}_v)_k}{dt} + \frac{\partial S(\tau_i)}{\partial \psi_m}\frac{d\psi_m}{dt} + \frac{\partial S(\tau_i)}{\partial m}\frac{dm}{dt}.$$

Приводя подобные члены, запишем:

$$\frac{dS^{\delta}(\tau_i)}{dt} \approx -\frac{\boldsymbol{\psi}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}_r}{m|\boldsymbol{\psi}_v|}. \tag{24}$$

Таким образом, алгоритм формирования матрицы чувствительности имеет следующий вид. Задаваясь поочерёдно единичными начальными возмущениями для каждой компоненты векторов $\delta\boldsymbol{\psi}_r(t_0)$, $\delta\boldsymbol{\psi}_v(t_0)$ и $\delta\psi_m(t_0)$, интегрируем систему (17) совместно с (20) на интервале $[\tau_0, \tau_1]$. При достижении конца интервала по формулам (22)-(24) определяем величину δt_i и вычисляем вариации (21), которые используем в качестве новых начальных условий для (20) на $[\tau_1, \tau_2]$. Затем интегрируем (17) совместно с (20) на интервале $[\tau_1, \tau_2]$ и т.д. вплоть до момента T. Полученные таким образом компоненты векторов $\delta\mathbf{v}(T)$, $\delta\mathbf{r}(T)$, $\delta\psi_m(T)$ используем в качестве элементов соответствующих столбцов матрицы $\mathbf{\Delta}'_f$. При этом следует учитывать, что если $V_\infty \neq 0$, то здесь и далее

$$\delta\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{\Psi}(t_0)\delta\boldsymbol{\psi}_v(t_0),$$

где

$$\mathbf{\Psi}(t_0) = \frac{V_\infty}{|\boldsymbol{\psi}_v|}\begin{Vmatrix} 1-\tilde{\psi}_1^2(t_0); & -\tilde{\psi}_1(t_0)\tilde{\psi}_2(t_0); & -\tilde{\psi}_1(t_0)\tilde{\psi}_3(t_0); \\ -\tilde{\psi}_1(t_0)\tilde{\psi}_2(t_0); & 1-\tilde{\psi}_2^2(t_0); & -\tilde{\psi}_2(t_0)\tilde{\psi}_3(t_0); \\ -\tilde{\psi}_1(t_0)\tilde{\psi}_3(t_0); & -\tilde{\psi}_2(t_0)\tilde{\psi}_3(t_0); & 1-\tilde{\psi}_3^2(t_0); \end{Vmatrix}$$

Правильность приведенных формул для матрицы чувствительности проверена совпадением ее элементов с результатами, полученными вычислениями по конечным разностям.

4. Метод логарифмического сглаживания

Следует отметить, что описанный выше алгоритм решения задачи ОТ имеет достаточно ограниченную область применения. Рассмотрим в качестве примера типичный график изменения величины невязки краевых условий (18) в зависимости от шага κ_j модифицированного метода Ньютона, показанный на рис. 2. Желаемый минимум функции $\sigma\left(\mathbf{p}_f^{(j)}\right)$, очевидно, достигается в точке *A*. Однако именно в точке *A* производная функции невязки по искомым краевым условиям $\boldsymbol{\psi}_f(t_0)$ претерпевает разрыв, поскольку программа управления $\delta_S(t)$ меняет свою структуру (на участке *OA* траектория КА имеет три, а на участке *AB* - четыре активных участка). Таким образом, одно из условий теоремы Канторовича о сходимости метода Ньютона (двукратная непрерывная дифференцируемость функции, для которой отыскиваются нули) нарушается, и метод расходится.

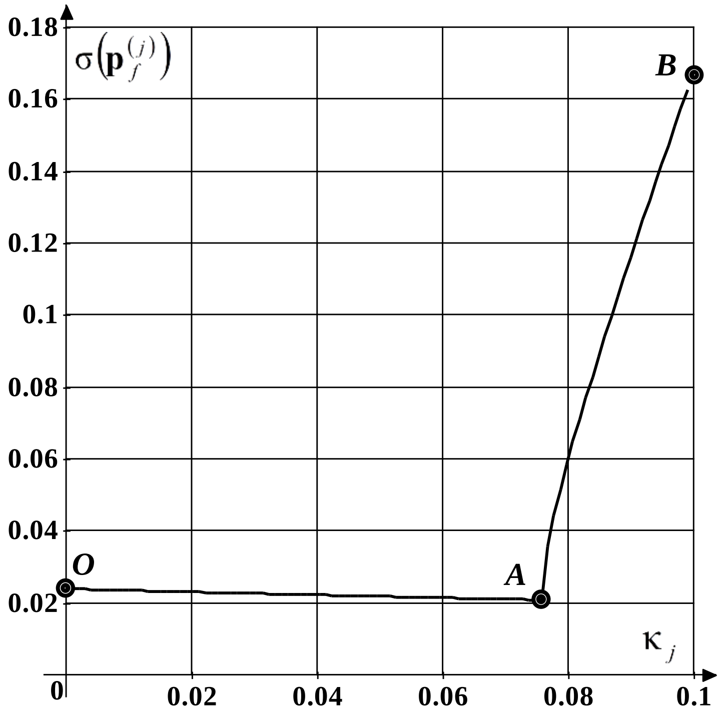

Рис. 2. Зависимость невязки $\sigma\left(\mathbf{p}_f^{(j)}\right)$ от шага метода Ньютона

Поэтому способ решения задачи, изложенный в предшествующем пункте, можно применять только при условии постоянства структуры управления $\delta^{\text{opt}}(t)$ на всем протяжении итерационного процесса (19) (т.е. при условии, что число активных и пассивных участков траектории не меняется). Поскольку подобрать начальное приближение $\mathbf{p}_f^{(0)}$, с самого начала позволяющее удовлетворить этому условию, затруднительно, прибегают к аппроксимации кусочно-постоянного профиля $\delta_S(t)$ некоторой гладкой функцией [10, 13, 14]. В данной работе такую аппроксимацию будем выполнять при помощи метода логарифмического сглаживания [14]. Введём в рассмотрение функционал:

$$J_f = \int_{t_0}^{T} \left(\frac{F_{\max}\delta_S}{W_e} + \varepsilon \frac{F_{\max}}{W_e} \left(\delta_S \log\delta_S + (1-\delta_S)\log(1-\delta_S) \right) \right) dt, \qquad (25)$$

где ε – параметр сглаживания, $0 < \varepsilon \leq 1$. При этом полагаем, что на функцию $\delta_S(t)$ никаких ограничений не накладывается. В соответствии с [5], имеем:

$$H = \boldsymbol{\psi}_v^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{g}(\mathbf{r}) + \frac{F_{\max}\delta_S \mathbf{e}_f}{m}\right) + \boldsymbol{\psi}_r^{\mathrm{T}}\mathbf{v} - \psi_m \frac{F_{\max}\delta_S}{W_e} +$$
$$\psi_0\left(\frac{F_{\max}\delta_S}{W_e} + \varepsilon\frac{F_{\max}}{W_e}\left(\delta_S \log\delta_S + (1-\delta_S)\log(1-\delta_S)\right)\right).$$

Тогда искомые оптимальные управления имеют вид:

$$\mathbf{e}_f^{opt} = \frac{\boldsymbol{\psi}_v}{|\boldsymbol{\psi}_v|},$$
$$\delta_S^{opt} = \frac{1}{\left(1 + 10^{-\frac{W_e}{\varepsilon}S}\right)}, \tag{26}$$

а система дифференциальных уравнений движения КА описывается соотношениями (17). Очевидно, что при $\varepsilon \to 0$ функционал (25) плавно переходит в (12), а δ_S^{opt} с заданной точностью аппроксимирует кусочно-непрерывный профиль функции тяги для ОТ. Кроме того, для улучшения сходимости будем в дальнейшем использовать гомотопию между решением основной задачи ИТ и решением сглаженной задачи [10]. Тогда уравнения движения КА можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g}(\mathbf{r}) + (1-\varepsilon)\frac{F_{\max}\delta_S\boldsymbol{\psi}_v}{m|\boldsymbol{\psi}_v|} - \varepsilon\frac{\boldsymbol{\psi}_v}{2\psi_0},$$
$$\frac{dm}{dt} = -\left((1-\varepsilon)\frac{F_{\max}\delta_S}{W_e} + \varepsilon\frac{m^2|\boldsymbol{\psi}_v|^2}{8N_e\psi_0^2}\right),$$
$$\frac{d^2\boldsymbol{\psi}_v}{dt^2} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}_v, \tag{27}$$
$$\frac{d\psi_m}{dt} = (1-\varepsilon)\frac{F_{\max}\delta_S|\boldsymbol{\psi}_v|}{m^2}.$$

Алгоритм определения вектора $\boldsymbol{\psi}_f(t_0)$ для КЗ принимает следующий вид.

1. Зададимся параметром $\varepsilon = 1$, величиной шага h_ε и вектором $\mathbf{p}_f^{(0)}$, построенным на основе решения ИТ (см. ниже).
2. Зададимся индексом $j = 0$.

3. Проинтегрируем систему (27) от t_0 до T с начальными условиями (3), (4), а также начальным вектором сопряженных переменных и, получив реализации $\mathbf{r}^{(j)} = \mathbf{r}\left(T, \mathbf{p}_f^{(j)}\right)$, $\mathbf{v}^{(j)} = \mathbf{v}\left(T, \mathbf{p}_f^{(j)}\right)$, $\psi_m^{(j)} = \psi_m^{(j)}\left(T, \mathbf{p}_f^{(j)}\right)$, вычислим функцию невязки (18).

4. Если окажется, что величина (18) меньше заданного значения ε_σ, то переходим к шагу 6. В противном случае при помощи (19) определим $\mathbf{p}_f^{(j+1)}$.

5. Увеличиваем индекс $j = j+1$ и переходим к шагу 3.

6. Если $\varepsilon \le h_\varepsilon$, то положим $\boldsymbol{\psi}_f(t_0) = \mathbf{p}_f^{(j)}$ и выходим из алгоритма. Иначе уменьшим $\varepsilon = \varepsilon - h_\varepsilon$, присвоим $\mathbf{p}_f^{(0)} = \mathbf{p}_f^{(j)}$ и перейдём к шагу 2.

Элементы матрицы чувствительности для описанной выше вычислительной схемы будем отыскивать при помощи системы уравнений в отклонениях. Введём в рассмотрение вектор

$$\boldsymbol{\xi} = \left[\boldsymbol{\psi}_v^{\mathrm{T}}, \psi_m, m\right]^{\mathrm{T}}.$$

Тогда система уравнения в отклонениях для элементов возмущённой траектории может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{d(\delta\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{A}\delta\mathbf{r} + (1-\varepsilon)\mathbf{D}\delta\boldsymbol{\xi} - \varepsilon\frac{\delta\boldsymbol{\psi}_v}{2\psi_0},\\
&\frac{d(\delta\mathbf{r})}{dt} = \delta\mathbf{v},\\
&\frac{d(\delta m)}{dt} = (1-\varepsilon)\mathbf{f}_2^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\xi} - \varepsilon\left(\mathbf{f}_3^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\psi}_v + \frac{\partial\psi_m}{\partial m}\delta m\right),\\
&\frac{d(\delta\boldsymbol{\psi}_v)}{dt} = -\delta\boldsymbol{\psi}_r,\\
&\frac{d(\delta\boldsymbol{\psi}_r)}{dt} = -\mathbf{B}\delta\mathbf{r} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\psi}_v,\\
&\frac{d(\delta\boldsymbol{\psi}_m)}{dt} = (1-\varepsilon)\mathbf{f}_4^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\xi},
\end{aligned} \tag{28}$$

где $\mathbf{D}$ – матрица размерности [3х5] с элементами $d_{i,j}$:

$$d_{i,j} = \frac{f_i' g - f_i g'}{g^2},$$

$$f_i = F_{\max}\delta_S\left(\boldsymbol{\psi}_v\right)_i,$$

$$f_i' = F_{\max}\left(\left(\boldsymbol{\psi}_v\right)_i \log(10)\delta_S\left(1-\delta_S\right)\frac{W_e}{\varepsilon}S' + \delta_S\delta_i\right),$$

$$g = m\left|\boldsymbol{\psi}_v\right|,$$

$$g' = \delta_5\left|\boldsymbol{\psi}_v\right| + m\psi_v',$$

$$S' = \frac{m\psi_v' - \left|\boldsymbol{\psi}_v\right|\delta_5}{m^2} - \frac{\delta_4}{W_e},$$

$$\psi_v' = \begin{cases} \dfrac{\left(\boldsymbol{\psi}_v\right)_j}{\left|\boldsymbol{\psi}_v\right|}, & \text{если } j = 1,2,3, \\ 0, & \text{если } j = 4,5, \end{cases}$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \quad \delta_4 = \begin{cases} 1, & \text{если } j = 4, \\ 0, & \text{если } j \neq 4, \end{cases} \quad \delta_5 = \begin{cases} 1, & \text{если } j = 5, \\ 0, & \text{если } j \neq 5, \end{cases}$$

$\mathbf{f}_2$ – вектор с элементами:

$$\left(\mathbf{f}_2\right)_j = -\frac{F_{\max}\log(10)\delta_S\left(1-\delta_S\right)S'}{\varepsilon},$$

$$\mathbf{f}_3 = \frac{m^2\left|\boldsymbol{\psi}_v\right|}{4N\psi_0^2}\left[\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_3\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\frac{\partial\psi_m}{\partial m} = \frac{m\left|\boldsymbol{\psi}_v\right|^2}{4N\psi_0^2},$$

$\mathbf{f}_4$ – вектор с элементами:

$$\left(\mathbf{f}_4\right)_j = \frac{F_{\max}\left(\left|\boldsymbol{\psi}_v\right|\log(10)\delta_S\left(1-\delta_S\right)\frac{W_e}{\varepsilon}S' + \delta_S\psi_v'\right)}{m^2} - \frac{2F_{\max}\delta_S\left|\boldsymbol{\psi}_v\right|}{m^3}\delta_5.$$

Как отмечалось выше, для улучшения сходимости метода Ньютона при решении задачи ОТ методом логарифмического сглаживания следует использовать гомотопию между решением основной задачи ИТ и решением сглаженной задачи. Поэтому естественно нулевое приближение КЗ задавать на основе найденного вектора $\boldsymbol{\psi}_{\alpha}(t_0)$ для ИТ. Делать это будем следующим образом. Пусть из решения соответствующей задачи ИТ (см. п. 3) известна функция $\boldsymbol{\psi}_v^{\alpha}(t)$. Тогда, получив $m^{\alpha}(t)$ при помощи уравнения (6), по формуле $\mathbf{F}^{\alpha}(t)=\dfrac{m^{\alpha}(t)\left|\boldsymbol{\psi}_v^{\alpha}(t)\right|}{2}$ определим идеальную тягу $\mathbf{F}^{\alpha}(t)$. Подставляя $\mathbf{F}^{\alpha}(t)$ и $m^{\alpha}(t)$ в соотношение

$$\frac{d\psi_m}{dt}=\frac{\left|\mathbf{F}^{\alpha}(t)\right|}{m^{\alpha}(t)^2}$$

и интегрируя его в обратном времени от T до t_0 при условии (15), найдем $\psi_m^{\alpha}(t)$, а также $\psi_m^{(0)}(t_0)=\psi_m^{\alpha}(t_0)$.

Составим вектор начального приближения $\mathbf{p}_f^{(0)}$ из $\boldsymbol{\psi}_{\alpha}(t_0)$ и $\psi_m^{(0)}(t_0)$. При этом оказывается, что такой $\mathbf{p}_f^{(0)}$ нуждается в масштабировании, поскольку функция

$$S^{\alpha}=\frac{W_e\left|\boldsymbol{\psi}_v^{\alpha}(t)\right|}{m^{\alpha}(t)}-\psi_m^{\alpha}(t) \tag{29}$$

везде существенно меньше единицы и, в соответствии с (14), тяга ЭРД оказывается полностью выключенной на всей траектории нулевого приближения. Однако, в силу однородности системы сопряженных переменных (8), одновременное умножение константы ψ_0 и векторных функций $\boldsymbol{\psi}_r$ и $\boldsymbol{\psi}_v$ на некоторое произвольное число не оказывает влияния на оптимальное управление $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{opt}}$. Поэтому полагаем, что

$$\mathbf{p}_f^{(0)}=k_{\psi}^{opt}\left[\boldsymbol{\psi}_{\alpha}(t_0)^{\mathrm{T}},\psi_m^{(0)}(t_0)\right]^{\mathrm{T}},$$

k_{ψ}^{opt} – масштабный коэффициент, который в данной работе определяется в процессе решения следующей оптимизационной задачи:

$$k_{\psi}^{opt} = \arg\min_{k_{\psi}} \int_{t_0}^{T} \left(F_{\max} \delta_k \left(k_{\psi} \right) - \left| \mathbf{F}^{\alpha}(t) \right| \right)^2 dt,$$

$$\delta_k \left(k_{\psi} \right) = \begin{cases} 1, \text{ если } S_k \left(k_{\psi} \right) > 0, \\ 0, \text{ если } S_k \left(k_{\psi} \right) \le 0, \end{cases}$$

$$S_k \left(k_{\psi} \right) = k_{\psi} \frac{\left| \boldsymbol{\psi}_v^{\alpha}(t) \right|}{m^{\alpha}(t)} - \frac{1 + k_{\psi} \psi_m^{(0)}(t)}{W_e}.$$

Определим минимум $S_{\min}^{\alpha}$ и максимум $S_{\max}^{\alpha}$ известной функции (29) на временном отрезке $\left[t_0, T \right]$. Если задать k_{ψ} таким образом, что $k_{\psi} S_{\min}^{\alpha} = 1$, то

$$k_{\psi} S^{\alpha}(t) \ge 1, \ \forall t \in \left[t_0, T \right].$$

Если же задать k_{ψ} таким образом, что $k_{\psi} S_{\max}^{\alpha} = 1$, то

$$k_{\psi} S^{\alpha}(t) \le 1, \ \forall t \in \left[t_0, T \right].$$

Таким образом, величина коэффициента k_{ψ} должна варьироваться в пределах интервала $\left[\frac{1}{S_{\max}^{\alpha}}, \frac{1}{S_{\min}^{\alpha}} \right]$.

Вектор $\boldsymbol{\psi}_f \left(t_0 \right)$, определённый методом логарифмического сглаживания, можно использовать в качестве начального приближения $\mathbf{p}_f^{(0)}$ для решения исходной задачи ОТ. Поскольку гладкая функция δ_S^{opt} из (26) с высокой точностью аппроксимирует кусочно-непрерывный профиль ОТ, его структура в процессе итераций не меняется (уточняются лишь направление вектора тяги и моменты включения/выключения активных участков) и поэтому проблем со сходимостью не возникает.

5. Численные результаты

Практическое использование описанной выше методики проиллюстрируем на примере построения одной траектории сопровождения (т.е. траектории, на которой гиперболический избыток скорости КА у планеты назначения равен нулю) для прямого перелёта КА с ЭРД от Земли к астероиду Апофис. Выберем в качестве *OXYZ* гелиоцентрическую эклиптическую прямоугольную систему координат, ось *OX* которой направлена в точку весеннего равноденствия, ось *OZ* указывает на северный полюс эклиптики, ось *OY* дополняет систему до правой. Будем полагать, что дата старта t_0 = 24.VI.2025 (JD = 2460850.5), а также продолжительность перелёта $T-t_0$ = 3 года (94608000 секунд) заданы. Тогда, в проекциях на оси *OXYZ,* получим: $r_x(t_0)$ = 6253161.09 км, $r_y(t_0)$ = -151925580.8 км, $r_z(t_0)$ = 0.0 км, $v_x(t_0)$ = 29.27846031 км/сек, $v_y(t_0)$ = 1.113516264 км/сек, $v_z(t_0)$ = 0.0 км/сек, $r_x(T)$ = -83098031.45 км, $r_y(T)$ = -108484767.5 км, $r_z(T)$ = 3746930.54 км, $v_x(T)$ = 28.02092939 км/сек, $v_y(T)$ = -13.88183433 км/сек, $v_z(T)$ = 1.41060229 км/сек.

На первом этапе расчётов определим оптимальную траекторию сопровождения для модели ИТ. Для этого воспользуемся методом, предложенным в работе [17], и получим вектор нулевого приближения $\mathbf{p}_\alpha^{(0)}$ с координатами: $\left(\mathbf{p}_\alpha^{(0)}\right)_1$ = 4.477545176×10^{-8}, $\left(\mathbf{p}_\alpha^{(0)}\right)_2$ = 3.853973317×10^{-9}, $\left(\mathbf{p}_\alpha^{(0)}\right)_4$ = $-2.698597091\times10^{-16}$, $\left(\mathbf{p}_\alpha^{(0)}\right)_5$ = $-6.427588098\times10^{-15}$, $\left(\mathbf{p}_\alpha^{(0)}\right)_3$ = $\left(\mathbf{p}_\alpha^{(0)}\right)_6$ = 0. Решая «задачу ИТ» (см. раздел «Формулировка и решение задачи для ИТ»), получим, что J_α = 0.2727056291 м^2/сек^3, $\boldsymbol{\psi}_\alpha(t_0)$ имеет компоненты: $\left(\boldsymbol{\psi}_\alpha(t_0)\right)_1$ = 1.045553431×10^{-7}, $\left(\boldsymbol{\psi}_\alpha(t_0)\right)_2$ = 3.342163802×10^{-8}, $\left(\boldsymbol{\psi}_\alpha(t_0)\right)_3$ = 3.133048553 $\times10^{-8}$, $\left(\boldsymbol{\psi}_\alpha(t_0)\right)_4$ = $-5.653891751\times10^{-15}$, $\left(\boldsymbol{\psi}_\alpha(t_0)\right)_5$= $-1.547415812\times10^{-14}$, $\left(\boldsymbol{\psi}_\alpha(t_0)\right)_6$ =$1.244348059\times10^{-14}$, а траектория КА совершает два дополнительных витка вокруг Солнца. При этом следует отметить, что рассматриваемая задача по своей природе многоэкстремальна [16, 17]. Поэтому неудачно заданный вектор $\mathbf{p}_\alpha^{(0)}$ может оказаться внутри области притяжения одного из локальных экстремумов, не совпадающих с истинным минимумом функционала (7). Так, при $\mathbf{p}_\alpha^{(0)}=\mathbf{0}$ метод Ньютона сойдётся к решению: $\left(\boldsymbol{\psi}_\alpha(t_0)\right)_1$ = -6.151613822

$\times 10^{-7}$, $(\boldsymbol{\psi}_\alpha(t_0))_2$ = $1.775322327\times 10^{-7}$, $(\boldsymbol{\psi}_\alpha(t_0))_3$ = $4.492577036\times 10^{-8}$, $(\boldsymbol{\psi}_\alpha(t_0))_4$ = -$4.056565694\times 10^{-14}$, $(\boldsymbol{\psi}_\alpha(t_0))_5$= $1.299330783\times 10^{-13}$, $(\boldsymbol{\psi}_\alpha(t_0))_6$=$1.635583480\times 10^{-14}$. Функционал J_α = 3.825961890 м^2/сек^3, соответствующий этому решению, почти в пятнадцать раз превысит реальный оптимум. Выбор корректного нулевого приближения $\mathbf{p}_\alpha^{(0)}$ представляет собой отдельную проблему, рассмотренную в работах [10, 17].

Далее зададимся весовыми и энергетическими параметрами КА и оценим величину массы КА у астероида Апофис для случая ИТ. Будем полагать, что на низкую околоземную орбиту высотой H_E = 200 км выведена транспортная система массой m_0 = 4000 кг в составе КА и разгонного блока «Фрегат». В заданный момент времени «Фрегат», при помощи химического двигателя большой тяги с удельным импульсом 332.2 сек, разгоняет связку до второй космической скорости и, выработав топливо, отделяется от КА. При этом сухая масса разгонного блока m_B составляет 980 кг. Тогда массу КА в момент начала гелиоцентрического движения t_0 можно оценить по формуле:

$$m(t_0) = m_0 \exp\left(-\frac{\Delta V}{W_B}\right) - m_B, \tag{30}$$

где $\Delta V = \sqrt{V_\infty^2 + 2\frac{\mu_\mathrm{E}}{R_\mathrm{E} + H_\mathrm{E}}} - \sqrt{\frac{\mu_\mathrm{E}}{R_\mathrm{E} + H_\mathrm{E}}}$, μ_E – гравитационный параметр Земли, R_E – радиус Земли, W_B – скорость истечения частиц в реактивной струе «Фрегата». При $V_\infty = 0$ получим $m(t_0)$ = 511.6 кг, требуемая масса топлива разгонного блока 2508.4 кг (предельная масса топлива для «Фрегата» составляет 5600 кг). Будем также полагать, что на гелиоцентрическом участке траектории КА управляется при помощи ЭРД, характеристики которого близки к характеристикам ионного двигателя $\mu 10$ миссии Hayabusa 2: максимальная тяга $F_{\max}$ = 28 мН, удельный импульс 3000 секунд. Рассчитав по формуле

$N_e = \dfrac{FW_e}{2}$ мощность двигателя в реактивной струе, получим, что величина массы КА у Апофиса для модели ИТ $m(T)$ = 437.5 кг, а требуемая масса ксенона составляет 74.1 кг (для сравнения, стартовая масса КА Hayabusa 2 составляет 609 кг, «сухая» масса 490 кг). Оптимальный график изменения модуля ИТ приводится на рис. 3.

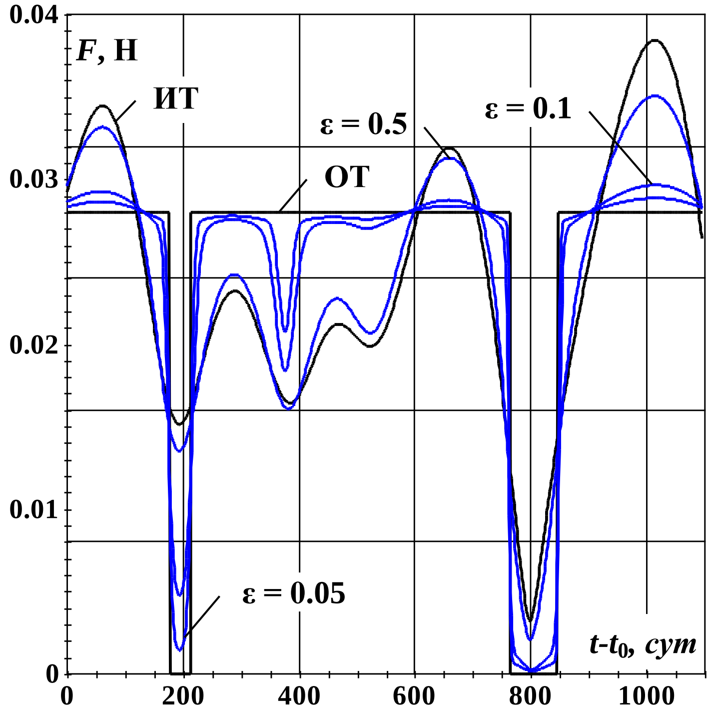

Рис. 3. Функции тяги для ИТ, ОТ и логарифмического сглаживания

На втором этапе расчётов перейдём к отысканию оптимальной траектории перелёта КА в рамках ОТ. Для этого сформируем вектор нулевого приближения $\mathbf{p}_f^{(0)}$. Следуя алгоритму, описанному в разделе «Масштабирование решения задачи ИТ», вычислим значение $\psi_m^{(0)}(t_0)$ = -1.156251018×10^{-9}, а также границы диапазона изменения коэффициента масштабирования k_ψ: $\left(S_{\max}^{\alpha}\right)^{-1}$= 87069854.62, $\left(S_{\min}^{\alpha}\right)^{-1}$= 736802040.1. Затем, решая соответствующую вспомогательную задачу оптимизации, определим k_ψ^{opt} = 203371915.8. Тогда вектор нулевого приближения $\mathbf{p}_f^{(0)}$ имеет координаты: $\left(\mathbf{p}_f^{(0)}\right)_1$ = 21.26362043,

$\left(\mathbf{p}_f^{(0)}\right)_2$ = 6.797022553, $\left(\mathbf{p}_f^{(0)}\right)_3$ = 6.371740865, $\left(\mathbf{p}_f^{(0)}\right)_4$ = -1.149842797$\times 10^{-6}$, $\left(\mathbf{p}_f^{(0)}\right)_5$ = -3.147009182$\times 10^{-6}$, $\left(\mathbf{p}_f^{(0)}\right)_6$ = 2.530654487$\times 10^{-6}$, $\left(\mathbf{p}_f^{(0)}\right)_7$ = -0.2351489848. Применяя метод логарифмического сглаживания (см. раздел «Метод логарифмического сглаживания») и уменьшая параметр ε от 1.0 до 0.005 с шагом 0.05, получим вектор $\boldsymbol{\psi}_f(t_0)$ с компонентами: $\left(\boldsymbol{\psi}_f(t_0)\right)_1$ = 25.99211320, $\left(\boldsymbol{\psi}_f(t_0)\right)_2$ = 7.310775091, $\left(\boldsymbol{\psi}_f(t_0)\right)_3$ = 5.078818947, $\left(\boldsymbol{\psi}_f(t_0)\right)_4$ = -1.229100161$\times 10^{-6}$, $\left(\boldsymbol{\psi}_f(t_0)\right)_5$= -4.057827093$\times 10^{-6}$, $\left(\boldsymbol{\psi}_f(t_0)\right)_6$=2.528811158$\times 10^{-6}$, $\left(\boldsymbol{\psi}_f(t_0)\right)_7$ = -0.274082332. Графики изменения модуля тяги ЭРД для ε = 0.5, ε = 0.1 и ε = 0.05 приводятся на рис. 3. Финальный график тяги ЭРД, соответствующий ε = 0.005, фактически сливается с кривой ОТ.

Выберем найденный таким образом вектор $\boldsymbol{\psi}_f(t_0)$ в качестве начального приближения $\mathbf{p}_f^{(0)}$ для «задачи ОТ». Решая указанную задачу в соответствии с методикой, изложенной в разделе «Формулировка и решение задачи для ОТ», окончательно имеем: $\left(\boldsymbol{\psi}_f(t_0)\right)_1$ = 25.99142797, $\left(\boldsymbol{\psi}_f(t_0)\right)_2$ = 7.310815774, $\left(\boldsymbol{\psi}_f(t_0)\right)_3$ = 5.078890127, $\left(\boldsymbol{\psi}_f(t_0)\right)_4$ = -1.229114636$\times 10^{-6}$, $\left(\boldsymbol{\psi}_f(t_0)\right)_5$= -4.057693321$\times 10^{-6}$, $\left(\boldsymbol{\psi}_f(t_0)\right)_6$=2.528791756$\times 10^{-6}$, $\left(\boldsymbol{\psi}_f(t_0)\right)_7$ = -0.274081684. При этом масса КА у Апофиса для модели ОТ $m(T)$ = 431.2 кг, т.е. на 6.3 кг меньше, чем для модели ИТ, а требуемая масса ксенона равна 80.4 кг. Оптимальный график изменения модуля ОТ приводится на рис. 3.

Наконец, на третьем этапе расчётов оценим оптимальную величину гиперболического избытка скорости в рамках модели ОТ. Для этого будем варьировать величину V_∞ в диапазоне от нуля до 1 км/сек с шагом в 0.05 км/сек. Определяя по формуле (30) начальную массу КА для каждой конкретной реализации V_∞ и решая задачу логарифмического сглаживания, а также «задачу ОТ», получим множество значений конечной массы КА $m(T)$. График изменения $m(T)$ в зависимости от V_∞ приводится на рис. 4. Сравнивая указанные значения между собой, определим, что искомый оптимальный гиперболический избыток скорости равен V_∞ = 0.45 км/сек, а вектор $\boldsymbol{\psi}_f(t_0)$ имеет компоненты: $(\boldsymbol{\psi}_f(t_0))_1$ = 12.11071931, $(\boldsymbol{\psi}_f(t_0))_2$ = 7.292729079, $(\boldsymbol{\psi}_f(t_0))_3$ = 4.566846979, $(\boldsymbol{\psi}_f(t_0))_4$ = -1.314641954$\times 10^{-6}$, $(\boldsymbol{\psi}_f(\vartheta))_5$ = -1.653591292$\times 10^{-6}$, $(\boldsymbol{\psi}_f(t_0))_6$=2.475372431$\times 10^{-6}$, $(\boldsymbol{\psi}_f(t_0))_7$ = -0.201379612. При этом масса КА у Апофиса $m(T)$ = 437.7 кг, что на 0.2 кг больше, чем для ИТ с нулевым гиперболическим избытком скорости, а требуемая масса ксенона составляет 73.9 кг. Таким образом, можно заключить, что в данном случае решение задачи ИТ позволило не только получить начальное приближение для задачи ОТ, но и обеспечило корректную оценку величины конечной массы КА. Оптимальная траектория КА для модели ОТ и V_∞ = 0.45 км/сек показана на рис. 5.

Выводы

В работе рассмотрена задача оптимизации траекторий космических аппаратов (КА), оснащённых электроракетными двигателями (ЭРД). Оптимальная программа управления отыскивается при помощи непрямого метода оптимизации – принципа максимума Понтрягина для двух математических моделей тяги: идеальной и ограниченной. Краевая задача принципа максимума решается численно, методом Ньютона. Описаны основные особенности алгоритма решения задачи. Принципиальные проблемы сходимости, обусловленные кусочно-постоянным профилем тяги, а также изменением структуры управления (т.е. числа активных и пассивных участков), преодолеваются при помощи метода логарифмического сглаживания. Получены и приведены все формулы, необходимые для формирования соответствующих систем дифференциальных уравнений в отклонениях, необходимых для вычисления элементов матрицы чувствительности. Работоспособность методики проверена на примере оптимизации траекторий перелёта КА, оснащённого электроракетным двигателем, от Земли к Апофису.

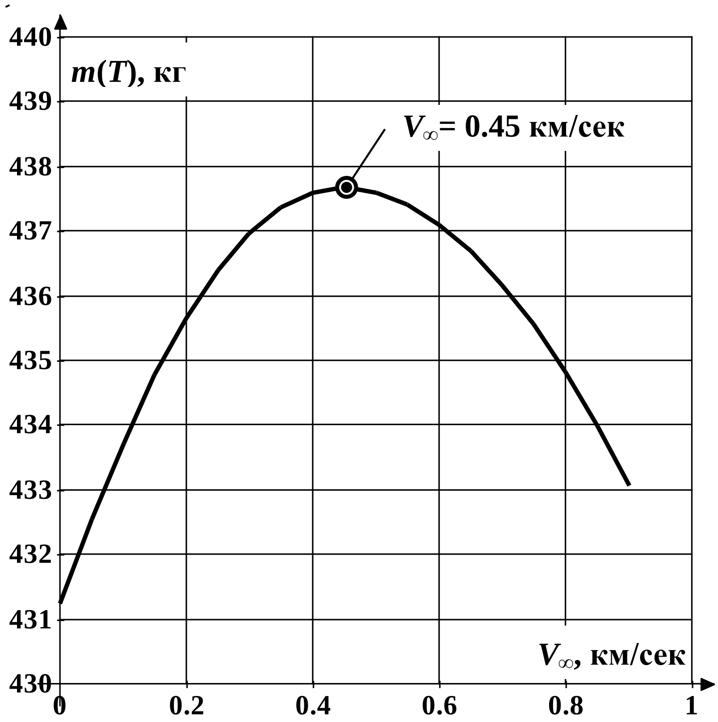

Рис. 4. Зависимость $m(T)$ от величины V_∞

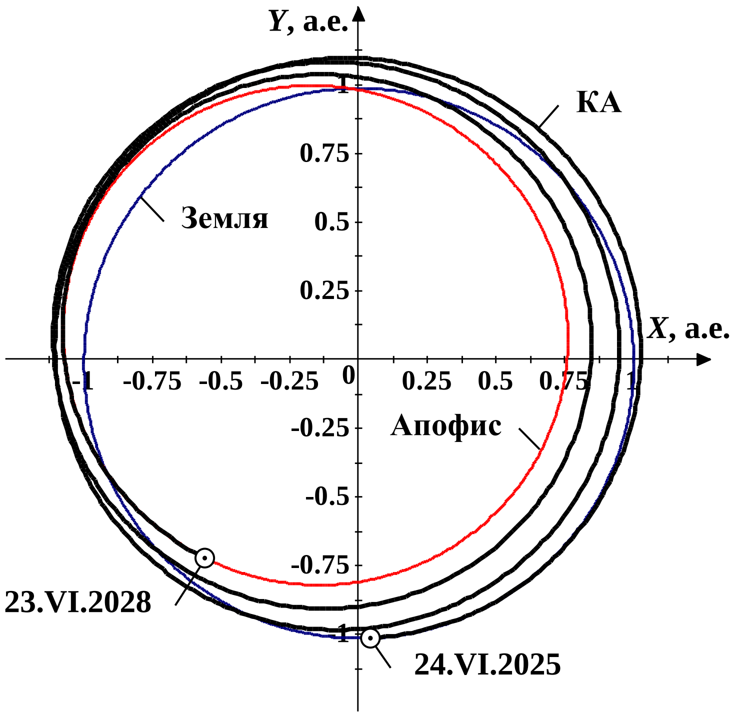

Рис. 5. Оптимальная траектория перелёта КА к Апофису

Библиографический список

1. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975. –704 с.
2. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. – 424 с.
3. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. М.: Наука, 1973. – 240 с.
4. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. – 552 с.
5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматиздат, 1983. – 392 с.
6. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с.
7. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. – 448 с.
8. Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // УФН. 1957, т. 63, вып. 1, с. 5-32.
9. Поляк Б. Т. Метод Ньютона и его роль в оптимизации и вычислительной математике. Труды ИСА РАН 2006. Т. 28, с. 48-66.
10. Константинов М.С., Петухов В.Г., Тейн М. Оптимизация траекторий гелиоцентрических перелётов. М.: Изд-во МАИ, 2015. –260 с.
11. Ивашкин В.В., Чернов А.В. Оптимизация траекторий перелетов космического аппарата к сближающемуся с Землей астероиду при использовании малой тяги // Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша, 1996 г., №62, 30 с.
12. Чернов А.В. Анализ оптимальных перелетов космического аппарата к сближающемуся с Землей астероиду с кусочно-постоянной электрореактивной тягой // Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша. 2001 г., № 86. 24 с.
13. Bertrand R., Epenoy R. New smoothing techniques for solving bang–bang optimal control problems—numerical results and statistical interpretation. Optimal Control Applications and Methods, 2002, pp. 171-197.
14. Taheri E., Kolmanovsky I., Atkins E. Enhanced Smoothing Technique for Indirect Optimization of Minimum-Fuel Low-Thrust Trajectories // Journal of guidance, control, and dynamics, Vol. 39, №11, 2016.
15. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. М.: Издательство ЛКИ, 2009. – 432 с.
16. Ивашкин В.В., Крылов И.В. Решение многоэкстремальной задачи оптимизации перелета космического аппарата с малой тягой к астероиду Апофис // ДАН, 2015, том 464, №1, с. 39–43.

17. Крылов И.В. Метод решения многоэкстремальной задачи оптимизации траекторий космического аппарата с электроракетной тягой // Космические исследования, 2020, том 58, № 3, с. 235–248.

Оглавление