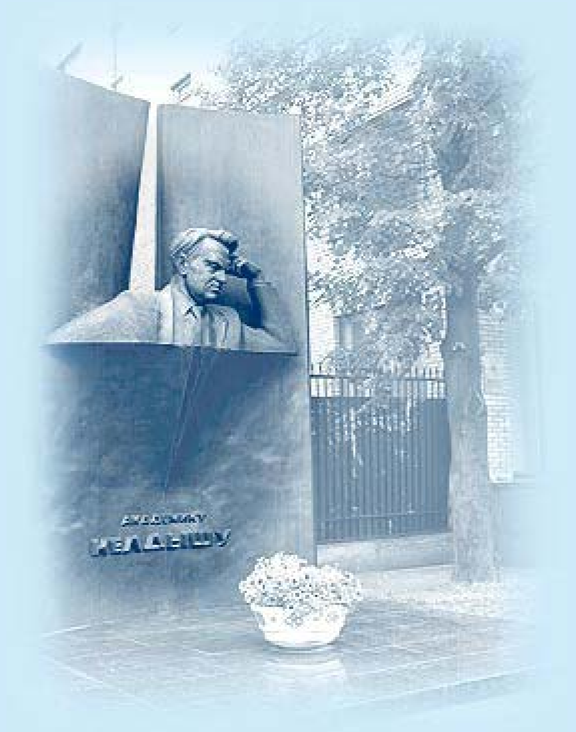
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 98 за 2020 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

И.О. Резниченко, П.А. Крутицкий

О квадратурной формуле для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя в трёхмерном случае

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Резниченко И.О., Крутицкий П.А. О квадратурной формуле для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя в трёхмерном случае // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 98. 31 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2020-98
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-98

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

И. О. Резниченко, П. А. Крутицкий

О квадратурной формуле для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя в трёхмерном случае

Москва — 2020

УДК 519.644.5+517.956.224

Игорь Олегович Резниченко, Павел Александрович Крутицкий
О квадратурной формуле для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя в трёхмерном случае. Препринты института прикладной математики им. М. В. Келдыша, Москва, 2020.

Для широкого класса гладких поверхностей выводится улучшенная квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя с гладкой плотностью. Новая квадратурная формула обеспечивает более высокую точность вычислений, чем стандартная квадратурная формула. Полученная квадратурная формула может быть использована при численном решении краевых задач для уравнений математической физики методом граничных интегральных уравнений.

Ключевые слова: Прямое значение нормальной производной, потенциал простого слоя, квадратурная формула.

Igor Olegovich Reznichenko, Pavel Aleksandrovich Krutitskii
On a quadrature formula for the direct value of the normal derivative of a simple layer potential in a 3D case.

The improved quadrature formula for the direct value of the normal derivative of a simple layer potential with smooth density is derived for a wide class of smooth surfaces. Novel quadrature formula provides higher accuracy of computations than usual formula. The derived quadrature formula can be used for numerical solving of boundary value problems for equations of mathematical physics by the method of boundary integral equations.

Key words: Direct value of the normal derivative, simple layer potential, quadrature formula.

Работа поддержана РФФИ, грант № 18–01–00422а.

e-mail: `liorb@mail.ru`

1. Введение

В двумерном случае улучшенная квадратурная формула для гармонического потенциала простого слоя построена в [1], [2] для решения краевых задач вне разомкнутых кривых, когда плотность в потенциале имеет степенную особенность на концах кривых. Эта формула может применяться при нахождении численных решений краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца вне разрезов и разомкнутых кривых на плоскости с использованием метода потенциалов и граничных интегральных уравнений. Такие задачи изучались указанным методом в [3], [4], [5], [6], [7].

В настоящей работе построена улучшенная квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя на поверхности в трёхмерном пространстве. Стандартные квадратурные формулы для потенциала простого слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца, используемые в инженерных расчетах, не дают равномерной аппроксимации потенциала вблизи поверхности Г, на которой задана плотность потенциала, и даже стремятся к бесконечности, когда точка, в которой вычисляется квадратурная формула, стремится к определенным точкам на поверхности Г [8, Глава 2], тогда как сам потенциал непрерывен во всем пространстве, в том числе во всех точках на поверхности Г. Следовательно, стандартные квадратурные формулы не сохраняют важнейшее свойство потенциала, а именно его ограниченность и непрерывность на поверхности Г. В статье [9] предложена продвинутая квадратурная формула, которая сохраняет указанное свойство потенциала простого слоя. В настоящей работе подход из этой статьи применяется с целью вывода продвинутой квадратурной формулы для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя на поверхности Г. Такая формула может применяться, в частности, при численном решении интегральных уравнений, возникающих при решении краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца методом потенциалов.

2. Постановка задачи

Введем в пространстве декартову систему координат $x = (x_1,x_2,x_3) \in R^3$. Пусть Г — простая гладкая замкнутая либо ограниченная разомкнутая поверхность класса C^2, содержащая свои предельные точки [10, Глава 14, § 1]. Если поверхность Г замкнутая, то она должна ограничивать объёмно-односвязную внутреннюю область [11, с. 201]. Предположим, что поверхность Г параметризована так, что на нее отображается прямоугольник:

$$y = (y_1,y_2,y_3) \in \Gamma, \quad y_1 = y_1(u,v),\ y_2 = y_2(u,v),\ y_3 = y_3(u,v);$$

$$u \in [0,A], \quad v \in [0,B];$$
$$y_j(u,v) \in C^2([0,A] \times [0,B]), \quad j = 1,2,3. \tag{2.1}$$

Сферу, поверхность эллипсоида, гладкие поверхности фигур вращения, поверхность тора и многие другие более сложные поверхности можно параметризовать таким образом. Введём N точек u_n с шагом h на отрезке $[0,A]$ и M точек v_m на отрезке $[0,B]$ и рассмотрим разбиение прямоугольника $[0,A] \times [0,B]$, который отображается на поверхность Γ

$$A = Nh, \quad B = MH,$$

$$u_n = (n + 1/2)h, \quad n = 0,...,N - 1; \quad v_m = (m + 1/2)H, \quad m = 0,...,M - 1.$$

Тем самым прямоугольник $[0,A] \times [0,B]$ разбивается на $N \times M$ маленьких прямоугольничков, и через (u_n,v_m) обозначены серединки этих прямоугольничков. Точки $y(u_n,v_m)$, расположенные на Γ для всевозможных n,m, будем называть узлами.

Известно [10, Глава 14, § 1], что компоненты вектора нормали (не единичного) $\eta(y) = (\eta_1(y),\eta_2(y),\eta_3(y))$ в точке поверхности $y = (y_1,y_2,y_3) \in \Gamma$ выражаются через определители второго порядка формулами:

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} (y_2)_u & (y_3)_u \\ (y_2)_v & (y_3)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} (y_3)_u & (y_1)_u \\ (y_3)_v & (y_1)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} (y_1)_u & (y_2)_u \\ (y_1)_v & (y_2)_v \end{vmatrix}. \qquad (2.2)$$

Положим $|\eta(y)| = \sqrt{(\eta_1(y))^2 + (\eta_2(y))^2 + (\eta_3(y))^2}$. Известно [10, Глава 14, § 1–2], что

$$\int_\Gamma F(y)ds_y = \int_0^A du \int_0^B dvF(y(u,v))|\eta(y(u,v))|.$$

Заметим, что если $|\eta(y(u,v))| = 0$ в некоторой точке, то функция $|\eta(y(u,v))|$ может быть недифференцируемой в этой точке. Поэтому дополнительно потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u,v))| \in C^1([0,A] \times [0,B]). \qquad (2.3)$$

Тогда для всех возможных n, m при $u \in [u_n - h/2,u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2,v_m + H/2]$ функция $|\eta(y(u,v))|$ может быть разложена по формуле Тейлора с остаточным членом 1-го порядка

$$|\eta(y(u,v))| = |\eta(y(u_n,v_m))| + O(h + H). \qquad (2.4)$$

Кроме того, потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u,v))| > 0, \quad \forall\ (u,v) \in ((0,A) \times (0,B)). \qquad (2.5)$$

Из условия (2.5) следует, что $|\eta(y(u,v))| \in C^1((0,A) \times (0,B))$, но условие (2.3) не следует.

Потенциал простого слоя для уравнения Гельмгольца с заданной на поверхности Γ плотностью $\mu(y) \in C^1(\Gamma)$ имеет вид

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\mu(y) e^{\mathrm{i}k|x-y|}}{|x-y|} ds_y =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^A du \int_0^B dv \frac{\mu(y(u,v)) \exp(\mathrm{i}k|x - y(u,v)|)}{|x - y(u,v)|} |\eta(y(u,v))|, \qquad (2.6)$$

где $|x - y(u,v)| = \sqrt{(x_1 - y_1(u,v))^2 + (x_2 - y_2(u,v))^2 + (x_3 - y_3(u,v))^2}$, и для простоты константа $k \geq 0$; если же $k = 0$, то потенциал $\mathcal{V}_k[\mu](x)$ переходит в гармонический потенциал $\mathcal{V}_0[\mu](x)$ для уравнения Лапласа.

Пусть $\mathbf{n}_x = \eta(x)/|\eta(x)|$ — вектор единичной нормали в точке $x \in \Gamma$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{e^{\mathrm{i}k|x-y|}}{|x-y|} = |\eta(x)|^{-1} (\eta(x), \nabla_x) \frac{e^{\mathrm{i}k|x-y|}}{|x-y|} =$$

$$= \frac{1}{|\eta(x)|} \frac{\exp(\mathrm{i}k|x-y|)(\mathrm{i}k|x-y| - 1)}{|x-y|^2} \sum_{j=1}^{3} \frac{\eta_j(x)(x_j - y_j)}{|x-y|}.$$

Прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя $\mathcal{V}_k[\mu](x)$ в точке $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma$ имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{e^{\mathrm{i}k|x-y|}}{|x-y|} ds_y =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \mu(y) \frac{1}{|\eta(x)|} \frac{\exp(\mathrm{i}k|x-y|)(\mathrm{i}k|x-y| - 1)}{|x-y|^2} \sum_{j=1}^{3} \frac{\eta_j(x)(x_j - y_j)}{|x-y|} ds_y =$$

$$= \frac{1}{4\pi |\eta(x)|} \int_0^A du \int_0^B dv\, \mu(y(u,v)) |\eta(y(u,v))| \exp(\mathrm{i}k|x - y(u,v)|) \times$$

$$\times (\mathrm{i}k|x - y(u,v)| - 1) \sum_{j=1}^{3} \frac{\eta_j(x)(x_j - y_j(u,v))}{|x - y(u,v)|^3} =$$

$$= \frac{1}{4\pi |\eta(x)|} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{u_n - h/2}^{u_n + h/2} du \int_{v_m - H/2}^{v_m + H/2} dv\, \mu(y(u,v)) |\eta(y(u,v))| \times$$

$$\times \exp(\mathrm{i}k|x - y(u,v)|)(\mathrm{i}k|x - y(u,v)| - 1) \sum_{j=1}^{3} \frac{\eta_j(x)(x_j - y_j(u,v))}{|x - y(u,v)|^3}. \qquad (2.7)$$

Известно [12, §27.5], что прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя в наших предположениях является непрерывной на Γ функцией.

Так же как и в [9], можно показать, что при $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$

$$|x - y(u,v)| = |x - y(u_n,v_m)| + O(h + H),$$

$$\exp(\mathrm{i}k|x - y(u,v)|) = \exp(\mathrm{i}k|x - y(u_n,v_m)|) + O(h + H),$$
$$\mu(y(u,v)) = \mu_{nm} + O(h + H),$$

где $\mu_{nm} = \mu(y(u_n,v_m))$. Константы в оценках функций, обозначенных $O(h + H)$, не зависят от n,m и от расположения x в узлах Γ, поэтому можно записать

$$\mu(y)\exp(\mathrm{i}k|x - y(u,v)|)(\mathrm{i}k|x - y(u,v)| - 1) =$$

$$= \mu_{nm}\exp(\mathrm{i}k|x - y(u_n,v_m)|)(\mathrm{i}k|x - y(u_n,v_m)| - 1) + f_{n,m}(\mu; u,v,x),$$

где для функции $f_{n,m}(\mu; u,v,x)$ справедлива оценка

$$|f_{n,m}(\mu; u,v,x)| \leq \text{ const } \|\mu(y(u,v))\|_{C^1([0,A]\times[0,B])}(h + H), \tag{2.8}$$

которая выполняется при любом расположении x в узлах Γ сразу для всех возможных n,m. Представим (2.7), в виде

$$\frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} = \tilde{\mathcal{S}}_k(x) + \tilde{\sigma}_k(x), \tag{2.9}$$

где

$$\tilde{\mathcal{S}}_k(x) = \frac{1}{4\pi|\eta(x)|}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\mu_{nm}\exp(\mathrm{i}k|x - y(u_n,v_m)|)(\mathrm{i}k|x - y(u_n,v_m)| - 1)\times$$

$$\times\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2}du\int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2}dv|\eta(y(u,v))|\sum_{j=1}^{3}\frac{\eta_j(x)(x_j - y_j(u,v))}{|x - y(u,v)|^3}, \tag{2.10}$$

$$\tilde{\sigma}_k(x) = \frac{1}{4\pi|\eta(x)|}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2}du\int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2}dv\,|\eta(y(u,v))|f_{n,m}(\mu; u,v,x)\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{3}\frac{\eta_j(x)(x_j - y_j(u,v))}{|x - y(u,v)|^3}.$$

Поскольку поверхность Γ принадлежит классу C^2, то для всех $x,y \in \Gamma$ справедливо неравенство [13, Теорема 2.2]: $|\eta(x),(x-y)| \leq \ const\, |x-y|^2$. Учитывая это соотношение и неравенство (2.8), получаем, что для $\tilde{\sigma}_k(x)$ имеет место оценка

$$|\tilde{\sigma}_k(x)| \leq \frac{c_1}{4\pi} \|\mu(y(u,v))\|_{C^1([0,A]\times[0,B])}(h+H) \int_0^A du \int_0^B dv \frac{|\eta(y(u,v))|}{|x-y(u,v)|},$$

где константа $c_1 > 0$. Заметим, что

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^A du \int_0^B dv \frac{|\eta(y(u,v))|}{|x-y(u,v)|} = \mathcal{V}_0[1](x)$$

— гармонический потенциал простого слоя (2.6) с единичной плотностью, он непрерывен и равномерно ограничен для всех $x \in R^3$ (см. [12, § 27]), поэтому

$$|\tilde{\sigma}_k(x)| \leq c_2 \|\mu(y(u,v))\|_{C^1([0,A]\times[0,B])}(h+H), \tag{2.11}$$

где константа $c_2 > 0$, и оценка выполняется при любом расположении x в узлах Γ. Следовательно, $\tilde{\sigma}_k(x) = O(h+H)$ при любом возможном положении x.

Согласно (2.9), нахождение квадратурной формулы для нормальной производной потенциала простого слоя сводится к нахождению квадратурной формулы для $\tilde{\mathcal{S}}_k(x)$, а чтобы построить эту квадратурную формулу, надо вычислить интеграл в (2.10), который, в силу (2.4), можно записать в виде

$$\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv |\eta(y(u,v))| \sum_{j=1}^{3} \frac{\eta_j(x)(x_j - y_j(u,v))}{|x-y(u,v)|^3} \approx$$

$$\approx -|\eta(y(u_n,v_m))| \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \sum_{j=1}^{3} \frac{\eta_j(x)(y_j(u,v) - x_j)}{|x-y(u,v)|^3}. \tag{2.12}$$

Последний интеграл будем называть каноническим, при его вычислении будем различать 2 случая.

В первом случае $(\hat{n},\hat{m}) = (n,m)$, т.е. $x = y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}}) = y(u_n,v_m)$, канонический интеграл обозначим $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$

$$\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} = \int_{u_{\hat{n}}-h/2}^{u_{\hat{n}}+h/2} du \int_{v_{\hat{m}}-H/2}^{v_{\hat{m}}+H/2} dv \sum_{j=1}^{3} \frac{\eta_j(x)(y_j(u,v) - x_j)}{|x-y(u,v)|^3}.$$

Во втором случае $(\hat{n},\hat{m}) \neq (n,m)$, т.е. $x = y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}}) \neq y(u_n,v_m)$, канонический интеграл обозначим $T_{nm}(x)$

$$T_{nm}(x) = \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \sum_{j=1}^{3} \frac{\eta_j(x)(y_j(u,v) - x_j)}{|x-y(u,v)|^3}. \tag{2.13}$$

Используя обозначения для канонического интеграла, формулу (2.10) для $\tilde{\mathcal{S}}_k(x)$ можно преобразовать к следующему виду

$$\tilde{\mathcal{S}}_k(x)\Big|_{x=y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})\in\Gamma} \approx \frac{1}{4\pi}\mu_{\hat{n}\hat{m}}\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}+$$

$$+\frac{1}{4\pi|\eta(x)|}\sum_{\substack{n=0,\,m=0\\(n,m)\neq(\hat{n},\hat{m})}}^{n=N-1,\,m=M-1}\mu_{nm}|\eta(y(u_n,v_m))|\exp(\mathrm{i}k|x-y(u_n,v_m)|)\times$$

$$\times(1-\mathrm{i}k|x-y(u_n,v_m)|)T_{nm}(x). \tag{2.14}$$

Перейдём к вычислению канонического интеграла.

3. Вычисление интеграла $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$

В данном случае интегрирование ведется по прямоугольничку с центром в точке $(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})$, которой отвечает точка $y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}}) = x$ на поверхности Г. Применяя формулу Тейлора с центром в точке $(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})$, находим

$$|y(u,v)-x|^2 = |y(u,v)-y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})|^2 \approx \sum_{j=1}^{3}((y_j)'_u(u-u_{\hat{n}})+(y_j)'_v(v-v_{\hat{m}}))^2 =$$

$$=\sum_{j=1}^{3}(((y_j)'_u)^2(u-u_{\hat{n}})^2+((y_j)'_v)^2(v-v_{\hat{m}})^2+2(y_j)'_u(y_j)'_v(u-u_{\hat{n}})(v-v_{\hat{m}})) =$$

$$=\alpha^2(u-u_{\hat{n}})^2+\beta^2(v-v_{\hat{m}})^2+2\delta(u-u_{\hat{n}})(v-v_{\hat{m}}),$$

$$\alpha^2=\sum_{j=1}^{3}((y_j)'_u)^2, \quad \beta^2=\sum_{j=1}^{3}((y_j)'_v)^2, \quad \delta=\sum_{j=1}^{3}(y_j)'_u(y_j)'_v,$$

где $(y_j)'_u$ и $(y_j)'_v$ берутся в точке $(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})$. Заметим, что $\alpha^2\beta^2-\delta^2=|\eta(x)|^2$ согласно [10, Гл. 14, § 1], поэтому $\alpha^2>0$ и $\beta^2>0$ в силу условия (2.5). Далее

$$y_j-x_j \approx (y_j)'_u(u-u_{\hat{n}})+(y_j)'_v(v-v_{\hat{m}})+\frac{1}{2}(y_j)''_{uu}(u-u_{\hat{n}})^2+$$

$$+\frac{1}{2}(y_j)''_{vv}(v-v_{\hat{m}})^2+(y_j)''_{uv}(u-u_{\hat{n}})(v-v_{\hat{m}}),$$

все производные по u,v берутся в точке $(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})$. Легко проверить [10, Глава 14, § 1.2], что

$$\sum_{j=1}^{3}\eta_j(x)(y_j)'_u=\sum_{j=1}^{3}\eta_j(x)(y_j)'_v=0,$$

следовательно

$$\sum_{j=1}^{3}\eta_j(x)(y_j-x_j)\approx\xi_1(u-u_{\hat n})^2+\xi_2(v-v_{\hat m})^2+\xi_3(u-u_{\hat n})(v-v_{\hat m}),$$

$$\xi_1=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\eta_j(x)(y_j)''_{uu},\quad \xi_2=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\eta_j(x)(y_j)''_{vv},\quad \xi_3=\sum_{j=1}^{3}\eta_j(x)(y_j)''_{uv}.$$

Канонический интеграл $\mathcal{J}_{\hat n\hat m}$ принимает вид

$$\mathcal{J}_{\hat n\hat m}=\int_{u_{\hat n}-h/2}^{u_{\hat n}+h/2}du\int_{v_{\hat m}-H/2}^{v_{\hat m}+H/2}dv\frac{\sum_{j=1}^{3}\eta_j(x)(y_j-x_j)}{|x-y|^3}\approx$$

$$\approx\int_{u_{\hat n}-h/2}^{u_{\hat n}+h/2}du\int_{v_{\hat m}-H/2}^{v_{\hat m}+H/2}dv\times$$

$$\times\frac{\xi_1(u-u_{\hat n})^2+\xi_2(v-v_{\hat m})^2+\xi_3(u-u_{\hat n})(v-v_{\hat m})}{\left(\alpha^2(u-u_{\hat n})^2+\beta^2(v-v_{\hat m})^2+2\delta(u-u_{\hat n})(v-v_{\hat m})\right)^{3/2}}=$$

$$=\int_{-h/2}^{h/2}dU\int_{-H/2}^{H/2}dV\frac{\xi_1U^2+\xi_2V^2+\xi_3UV}{\left(\alpha^2U^2+\beta^2V^2+2\delta UV\right)^{3/2}},$$

где $U=u-u_{\hat n},\ V=v-v_{\hat m}$. Переходя к полярным координатам

$$\rho=\sqrt{U^2+V^2},\qquad U=\rho\cos\varphi,\qquad V=\rho\sin\varphi,$$

получим

$$\mathcal{J}_{\hat n\hat m}\approx\int_{u_{\hat n}-h/2}^{u_{\hat n}+h/2}du\int_{v_{\hat m}-H/2}^{v_{\hat m}+H/2}dv\frac{\xi_1\cos^2\varphi+\xi_2\sin^2\varphi+\xi_3\cos\varphi\sin\varphi}{\rho(\alpha^2\cos^2\varphi+\beta^2\sin^2\varphi+2\delta\cos\varphi\sin\varphi)^{3/2}}=$$

$$=2\int_{-\operatorname{arctg}(H/h)}^{\operatorname{arctg}(H/h)}d\varphi\int_0^{h/(2\cos\varphi)}\rho d\rho\frac{\xi_1\cos^2\varphi+\xi_2\sin^2\varphi+\xi_3\cos\varphi\sin\varphi}{\rho(\alpha^2\cos^2\varphi+\beta^2\sin^2\varphi+2\delta\cos\varphi\sin\varphi)^{3/2}}+$$

$$+2\int_{\operatorname{arcctg}(h/H)}^{\pi-\operatorname{arcctg}(h/H)}d\varphi\int_0^{H/(2\sin\varphi)}\rho d\rho\frac{\xi_1\cos^2\varphi+\xi_2\sin^2\varphi+\xi_3\cos\varphi\sin\varphi}{\rho(\alpha^2\cos^2\varphi+\beta^2\sin^2\varphi+2\delta\cos\varphi\sin\varphi)^{3/2}}.$$

Коэффициент 2 возник из-за того, что подынтегральная функция в исходном интеграле не меняется при замене $U,\ \ V$ на $-U,\ \ -V$, поэтому интеграл по прямоугольнику равен удвоенному интегралу по треугольнику, который лежит над главной диагональю в прямоугольнике. Сокращая ρ и вычисляя интеграл по ρ, получим

$$\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} \approx h\int_{-\operatorname{arctg}(H/h)}^{\operatorname{arctg}(H/h)} \frac{\xi_1\cos^2\varphi+\xi_2\sin^2\varphi+\xi_3\cos\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi(\alpha^2\cos^2\varphi+\beta^2\sin^2\varphi+2\delta\cos\varphi\sin\varphi)^{3/2}}\,d\varphi+$$

$$+H\int_{\operatorname{arcctg}(h/H)}^{\pi-\operatorname{arcctg}(h/H)} \frac{\xi_1\cos^2\varphi+\xi_2\sin^2\varphi+\xi_3\cos\varphi\sin\varphi}{\sin\varphi(\alpha^2\cos^2\varphi+\beta^2\sin^2\varphi+2\delta\cos\varphi\sin\varphi)^{3/2}}\,d\varphi=$$

$$=h\int_{-\operatorname{arctg}(H/h)}^{\operatorname{arctg}(H/h)} \frac{\xi_1+\xi_2\operatorname{tg}^2\varphi+\xi_3\operatorname{tg}\varphi}{\cos^2\varphi(\alpha^2+\beta^2\operatorname{tg}^2\varphi+2\delta\operatorname{tg}\varphi)^{3/2}}\,d\varphi+$$

$$+H\int_{\operatorname{arcctg}(h/H)}^{\pi-\operatorname{arcctg}(h/H)} \frac{\xi_1\operatorname{ctg}^2\varphi+\xi_2+\xi_3\operatorname{ctg}\varphi}{\sin^2\varphi(\alpha^2\operatorname{ctg}^2\varphi+\beta^2+2\delta\operatorname{ctg}\varphi)^{3/2}}\,d\varphi=$$

$$=h\int_{-\operatorname{arctg}(H/h)}^{\operatorname{arctg}(H/h)} \frac{(\xi_1+\xi_2\operatorname{tg}^2\varphi+\xi_3\operatorname{tg}\varphi)d\operatorname{tg}\varphi}{(\alpha^2+\beta^2\operatorname{tg}^2\varphi+2\delta\operatorname{tg}\varphi)^{3/2}}-$$

$$-H\int_{\operatorname{arcctg}(h/H)}^{\pi-\operatorname{arcctg}(h/H)} \frac{(\xi_1\operatorname{ctg}^2\varphi+\xi_2+\xi_3\operatorname{ctg}\varphi)d\operatorname{ctg}\varphi}{(\alpha^2\operatorname{ctg}^2\varphi+\beta^2+2\delta\operatorname{ctg}\varphi)^{3/2}}.$$

Полагая $t=\operatorname{tg}\varphi$ в 1-ом интеграле и $t=\operatorname{ctg}\varphi$ во 2-ом, получим

$$\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} \approx h\int_{-H/h}^{H/h}\frac{\xi_1+\xi_2t^2+\xi_3t}{(\alpha^2+\beta^2t^2+2\delta t)^{3/2}}\,dt-H\int_{h/H}^{-h/H}\frac{\xi_1t^2+\xi_2+\xi_3t}{(\alpha^2t^2+\beta^2+2\delta t)^{3/2}}\,dt=$$

$$=\frac{h}{\beta^3}\int_{-H/h}^{H/h}dt\left(\frac{\xi_2(t+\delta/\beta^2)^2+(t+\delta/\beta^2)(\xi_3-2\xi_2\delta/\beta^2)}{((\alpha/\beta)^2+(t+\delta/\beta^2)^2-(\delta/\beta^2)^2)^{3/2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{-\xi_2(\delta/\beta^2)^2+\xi_1-\delta/\beta^2(\xi_3-2\xi_2\delta/\beta^2)}{((\alpha/\beta)^2+(t+\delta/\beta^2)^2-(\delta/\beta^2)^2)^{3/2}}\right)-$$

$$-\frac{H}{\alpha^3}\int_{h/H}^{-h/H}dt\left(\frac{\xi_1(t+\delta/\alpha^2)^2+(t+\delta/\alpha^2)(\xi_3-2\xi_1\delta/\alpha^2)}{((t+\delta/\alpha^2)^2-(\delta/\alpha^2)^2+(\beta/\alpha)^2)^{3/2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{-\xi_1(\delta/\alpha^2)^2+\xi_2-\delta/\alpha^2(\xi_3-2\xi_1\delta/\alpha^2)}{((t+\delta/\alpha^2)^2-(\delta/\alpha^2)^2+(\beta/\alpha)^2)^{3/2}}\right).$$

Сделаем замену $z=t+\delta/\alpha^2$ и воспользуемся интегралами 1.2.43.17—1.2.43.19 из книги [14]. Тогда получим

$$\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} \approx \frac{h}{\beta^3}\int_{-H/h+\delta/\beta^2}^{H/h+\delta/\beta^2}dz\times$$

$$\times \frac{\xi_2 z^2 + z(\xi_3 - 2\xi_2\delta/\beta^2) - \xi_2(\delta/\beta^2)^2 + \xi_1 - \delta/\beta^2(\xi_3 - 2\xi_2\delta/\beta^2)}{(z^2 + (\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2)^{3/2}} -$$

$$-\frac{H}{\alpha^3}\int_{h/H+\delta/\alpha^2}^{-h/H+\delta/\alpha^2} dz \times$$

$$\times \frac{\xi_1 z^2 + z(\xi_3 - 2\xi_1\delta/\alpha^2) - \xi_1(\delta/\alpha^2)^2 + \xi_2 - \delta/\alpha^2(\xi_3 - 2\xi_1\delta/\alpha^2)}{(z^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{h}{\beta^3}\Bigg(- \frac{\xi_2 z}{\sqrt{z^2 + (\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2}} + \xi_2 \ln\left| z + \sqrt{z^2 + (\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2}\right| -$$

$$-\frac{\xi_3 - 2\xi_2\delta/\beta^2}{\sqrt{z^2 + (\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2}} +$$

$$+z\, \frac{\xi_2(\delta/\beta^2)^2 + \xi_1 - \xi_3\delta/\beta^2}{((\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2)\sqrt{z^2 + (\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2}}\Bigg)\Bigg|_{-H/h+\delta/\beta^2}^{H/h+\delta/\beta^2} -$$

$$-\frac{H}{\alpha^3}\Bigg(- \frac{\xi_1 z}{\sqrt{z^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2}} + \xi_1 \ln\left| z + \sqrt{z^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2)^2}\right| -$$

$$-\frac{\xi_3 - 2\xi_1\delta/\alpha^2}{\sqrt{z^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2}} +$$

$$+z\, \frac{\xi_1(\delta/\alpha^2)^2 + \xi_2 - \xi_3\delta/\alpha^2}{(-(\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2)\sqrt{z^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2}}\Bigg)\Bigg|_{h/H+\delta/\alpha^2}^{-h/H+\delta/\alpha^2}.$$

Таким образом, интеграл $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ приближенно вычислен в явном виде.

4. Вычисление интеграла $T_{nm}(x)$

В данном случае интегрирование ведется по прямоугольничку с центром в точке (u_n,v_m), которой отвечает точка $y(u_n,v_m)$ на поверхности Г. При этом точка x расположена в другом узле на поверхности Г, т.е. $x = y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}}) \neq y(u_n,v_m)$. Разложим $y_j(u,v)$ по формуле Тейлора с центром в точке (u_n,v_m) до членов первого порядка, тогда для $j = 1,2,3$ получим

$$y_j(u,v) = y_j(u_n,v_m) + D_j + O(H^2 + h^2),$$

где

$$D_j = (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m).$$

Все производные берутся в точке (u_n,v_m). Положим

$$r^2 = |x - y(u_n,v_m)|^2 = \sum_{j=1}^{3} r_j^2 \neq 0, \quad r_j = y_j(u_n,v_m) - x_j, \quad j = 1,2,3,$$

тогда

$$y_j(u,v) - x_j = r_j + D_j + O(H^2 + h^2), \quad j = 1,2,3.$$

Следовательно,

$$|x - y(u,v)|^2 = \sum_{j=1}^{3}(x_j - y_j(u,v))^2 \approx \sum_{j=1}^{3}(r_j^2 + 2r_jD_j + D_j^2) =$$

$$= r^2+2P(u-u_n)+2Q(v-v_m)+\alpha^2(u-u_n)^2+\beta^2(v-v_m)^2+2\delta(u-u_n)(v-v_m) =$$
$$= \beta^2(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^2 + \alpha^2U^2 + 2PU + r^2,$$

где $U = u - u_n,\ V = v - v_m$,

$$P = \sum_{j=1}^{3} r_j(y_j)'_u, \ \ Q = \sum_{j=1}^{3} r_j(y_j)'_v,$$

$$\alpha^2 = \sum_{j=1}^{3}((y_j)'_u)^2, \ \ \beta^2 = \sum_{j=1}^{3}((y_j)'_v)^2, \ \ \delta = \sum_{j=1}^{3}(y_j)'_u(y_j)'_v,$$

производные по u и v берутся в точке $u = u_n,\ v = v_m$. Для вычисления

$$\sum_{j=1}^{3}\eta_j(x)(y_j - x_j)$$

разложим $y_j(u,v)$ по формуле Тейлора с центром в точке (u_n,v_m) до членов второго порядка

$$y_j - x_j \approx r_j + (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m) + \frac{1}{2}(y_j)''_{uu}(u - u_n)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}(y_j)''_{vv}(v - v_m)^2 + (y_j)''_{uv}(u - u_n)(v - v_m),$$

тогда

$$\sum_{j=1}^{3}\eta_j(x)(y_j - x_j) = R + \xi_4U + \xi_5V + \xi_1U^2 + \xi_2V^2 + \xi_3UV,$$

где

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\eta_j(x)(y_j)''_{uu}, \quad \xi_2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\eta_j(x)(y_j)''_{vv}, \quad \xi_3 = \sum_{j=1}^{3}\eta_j(x)(y_j)''_{uv},$$

$$\xi_4 = \sum_{j=1}^{3}\eta_j(x)(y_j)'_{u}, \quad \xi_5 = \sum_{j=1}^{3}\eta_j(x)(y_j)'_{v}, \quad R = \sum_{j=1}^{3}\eta_j(x)r_j.$$

Производные по u, v берутся в точке (u_n, v_m), а компоненты вектора нормали определены в (2.2). Таким образом,

$$T_{nm}(x) = \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{\sum_{j=1}^{3}\eta_j(x)(y_j - x_j)}{|x-y|^3} \approx$$

$$\approx \int\limits_{-h/2}^{h/2} dU \int\limits_{-H/2}^{H/2} dV \times$$

$$\times \frac{R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV}{\beta^3((V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^4 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2)/\beta^2)^{3/2}}. \tag{4.1}$$

4.1. Вычисление интегралов по dV. Введём обозначения

$$z = V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta = V + c, \quad c = \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2, \tag{4.2}$$

$$a = -c^2 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2)/\beta^2 =$$
$$= -(\delta U + Q)^2/\beta^4 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2)/\beta^2 =$$
$$= \frac{1}{\beta^4}\left((\alpha^2\beta^2 - \delta^2)U^2 + 2(P\beta^2 - \delta Q)U + r^2\beta^2 - Q^2\right).$$

Можно показать [10, Гл. 14, § 1], что

$$\alpha^2\beta^2 - \delta^2 = |\eta(y(u_n, v_m))|^2.$$

Согласно условию (2.5), $|\eta(y(u_n, v_m))| > 0$ для всех возможных n, m, поэтому

$$\alpha^2\beta^2 - \delta^2 > 0. \tag{4.3}$$

Отсюда следует, что $\alpha^2 > 0$ и $\beta^2 > 0$. Кроме того, отсюда следует, что $a \not\equiv 0$, поскольку a представлено квадратичным полиномом по U, в котором коэффициент при U^2 положителен: $(\alpha^2\beta^2 - \delta^2)/\beta^4 > 0$.

Покажем, что $a \geq 0$. Положим $\tilde{D}_j = (y_j)'_u U - (y_j)'_v c$, где c определено в (4.2), и рассмотрим преобразования с учетом введенных обозначений

$$\sum_{j=1}^{3}(r_j + \tilde{D}_j)^2 = \sum_{j=1}^{3}(r_j^2 + 2r_j\tilde{D}_j + \tilde{D}_j^2) = r^2 + 2\sum_{j=1}^{3} r_j\tilde{D}_j + \sum_{j=1}^{3}\tilde{D}_j^2 =$$

$$= r^2 + 2PU - 2Qc + \alpha^2U^2 + \beta^2c^2 - 2\delta Uc =$$

$$= \beta^2\left(c^2 - 2\frac{\delta U + Q}{\beta^2}c + \left(\frac{\delta U + Q}{\beta^2}\right)^2\right) - \frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^2} + \alpha^2U^2 + 2PU + r^2 =$$

$$= \beta^2\left(-c + \frac{\delta U + Q}{\beta^2}\right)^2 - \frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^2} + \alpha^2U^2 + 2PU + r^2 =$$

$$= -\frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^2} + \alpha^2U^2 + 2PU + r^2 = a\beta^2 \geq 0.$$

Как отмечено выше $\beta^2 > 0$, поэтому, поделив полученное соотношение на β^2, заключаем, что $a \geq 0$. Следовательно, квадратичный полином, обозначенный через a, *неотрицательный*.

Положим

$$b = \xi_2c^2 - \xi_5c - \xi_3Uc + R + \xi_4U + \xi_1U^2 =$$

$$= U^2\left(\xi_2\frac{\delta^2}{\beta^4} + \xi_1 - \xi_3\frac{\delta}{\beta^2}\right) + U\left(2\xi_2\frac{\delta Q}{\beta^4} + \xi_4 - \xi_3\frac{Q}{\beta^2} - \xi_5\frac{\delta}{\beta^2}\right) + R - \frac{\xi_5Q}{\beta^2} + \xi_2\frac{Q^2}{\beta^4},$$

$$z_\pm = \pm H/2 + c = \pm H/2 + (\delta U + Q)/\beta^2.$$

Применяя введенные обозначения, вычислим в (4.1) интеграл по V, переходя к переменной z

$$\int\limits_{-H/2}^{H/2} dV \times$$

$$\times\frac{R + \xi_4U + \xi_5V + \xi_1U^2 + \xi_2V^2 + \xi_3UV}{\beta^3((V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^4 + (\alpha^2U^2 + 2PU + r^2)/\beta^2)^{3/2}} =$$

$$= \int\limits_{-H/2}^{H/2} dV\frac{\xi_2(V + c - c)^2 + (\xi_3U + \xi_5)(V + c - c) + R + \xi_4U + \xi_1U^2}{\left((V + c)^2 + a\right)^{3/2}} =$$

$$= \int\limits_{z_-}^{z_+} dz\frac{\xi_2z^2 + (\xi_3U + \xi_5 - 2\xi_2c)z + b}{\left(z^2 + a\right)^{3/2}} =$$

$$= \left(\left(\frac{b}{a} - \xi_2 \right) z - \xi_3 U - \xi_5 + 2\xi_2 c \right) \frac{1}{\sqrt{z^2 + a}} \bigg|_{z_-}^{z_+} +$$

$$+\xi_2 \ln \left| z + \sqrt{z^2 + a} \right| \bigg|_{z_-}^{z_+},$$

где использованы интегралы 1.2.43.17—1.2.43.19 из книги [14]. Заметим, что

$$\xi_2 \int_{-h/2}^{h/2} dU \; \ln \left| z + \sqrt{z^2 + a} \right| \bigg|_{z_-}^{z_+} = \xi_2 \beta \theta_{nm}(x),$$

где функция $\theta_{nm}(x)$ найдена в явном виде в работе [9]. Интеграл в (4.1) можно записать в виде

$$T_{nm}(x) = \frac{1}{\beta^3} \left(\xi_2 \beta \theta_{nm}(x) + J(H) - J(-H) \right).$$

Поскольку функция $\theta_{nm}(x)$ найдена в [9], задача сводится к вычислению интеграла

$$J(\pm H) = \int\limits_{-h/2}^{h/2} dU \; \frac{(b/a - \xi_2) z_\pm - \xi_3 U - \xi_5 + 2\xi_2 c}{\sqrt{z_\pm^2 + a}} =$$

$$= \int\limits_{-h/2}^{h/2} dU \; \frac{(b/a - \xi_2)(\pm H/2 + c) - \xi_3 U - \xi_5 + 2\xi_2 c}{\sqrt{(\pm H/2 + c)^2 + a}}.$$

Достаточно вычислить интеграл $J(H)$. Интеграл $J(-H)$ вычисляется по тем же формулам, что и интеграл $J(H)$, в которых H надо заменить на $-H$. Вычислим интеграл $J(H)$. Распишем величины, входящие в подынтегральную функцию, в виде многочленов по U :

$$a = C_2 U^2 + C_1 U + C_0,$$

$$C_2 = (\alpha^2 - \delta^2/\beta^2)/\beta^2, \quad C_1 = (2P - 2\delta Q/\beta^2)/\beta^2, \quad C_0 = (r^2 - Q^2/\beta^2)/\beta^2;$$

$$z_+^2 + a = B_2 U^2 + B_1 U + B_0,$$

$$B_2 = \alpha^2/\beta^2, \quad B_1 = (H\delta + 2P)/\beta^2, \quad B_0 = H^2/4 + (HQ + r^2)/\beta^2;$$

$$b = A_2 U^2 + A_1 U + A_0,$$

$$A_2 = \xi_1 - \xi_3 \delta/\beta^2 + \xi_2 \delta^2/\beta^4, \quad A_1 = \xi_4 - \xi_5 \delta/\beta^2 - \xi_3 Q/\beta^2 + 2\xi_2 \delta Q/\beta^4,$$

$$A_0 = R - \xi_5 Q/\beta^2 + \xi_2 Q^2/\beta^4;$$

$$b z_+ = (A_2 U^2 + A_1 U + A_0)(\delta U/\beta^2 + H/2 + Q/\beta^2) =$$

$$= E_3U^3 + E_2U^2 + E_1U + E_0,$$
$$E_3 = A_2\delta/\beta^2, \quad E_2 = A_2(H/2 + Q/\beta^2) + A_1\delta/\beta^2,$$
$$E_1 = A_1(H/2 + Q/\beta^2) + A_0\delta/\beta^2, \quad E_0 = A_0(H/2 + Q/\beta^2);$$
$$\xi_2 z_+ + \xi_3 U + \xi_5 - 2\xi_2 c = F_1U + F_2,$$
$$F_1 = \xi_3 - \xi_2\delta/\beta^2, \quad F_0 = \xi_5 - \xi_2 Q/\beta^2 + \xi_2 H/2.$$

Применяя введенные обозначения, запишем интеграл $J(H)$ в виде

$$J(H) = J_1 - J_2,$$
$$J_1 = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{E_3U^3 + E_2U^2 + E_1U + E_0}{(C_2U^2 + C_1U + C_0)\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}},$$
$$J_2 = \int_{-h/2}^{h/2} dU \, \frac{F_1U + F_0}{\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}} \, .$$

4.2. Вычисление интегралов по dU. Используя деление многочленов и учитывая, что $C_2 > 0$ в силу (4.3), приведем интеграл J_1 к виду

$$J_1 = J_{11} + J_{12},$$
$$J_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{L_1U + L_0}{\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}},$$
$$J_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{S_1U + S_0}{(C_2U^2 + C_1U + C_0)\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}}, \tag{4.4}$$

где

$$L_1 = \frac{E_3}{C_2}, \quad L_0 = \frac{E_2C_2 - E_3C_1}{C_2^2}, \quad S_1 = E_1 - \frac{E_3C_0}{C_2} - \frac{C_1(E_2C_2 - E_3C_1)}{C_2^2},$$
$$S_0 = E_0 - \frac{C_0(E_2C_2 - E_3C_1)}{C_2^2}.$$

Поскольку $B_2 > 0$, интегралы J_{11} и J_2 находятся с помощью табличных интегралов 2.261 и 2.264 из книги [15]

$$J_{11} = \frac{L_1}{B_2}\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0} +$$
$$+\left(L_0 - \frac{L_1B_1}{2B_2}\right)\frac{1}{\sqrt{B_2}} \ln\left|2B_2U + B_1 + 2\sqrt{B_2}\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}\right| \Bigg|_{U=-h/2}^{U=h/2},$$

$$J_2 = \frac{F_1}{B_2}\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0} +$$

$$+\left(F_0 - \frac{F_1B_1}{2B_2}\right)\frac{1}{\sqrt{B_2}}\ln\left|2B_2U + B_1 + 2\sqrt{B_2}\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}\right|\Bigg|_{U=-h/2}^{U=h/2}.$$

Остается вычислить интеграл J_{12}. Способ вычисления интеграла зависит от знака дискриминанта квадратного трехчлена $C_2U^2 + C_1U + C_0$, стоящего в знаменателе подынтегральной функции.

Первый случай: $C_1^2 - 4C_2C_0 > 0$. Выше показано, что квадратичный полином, обозначенный как a, — неотрицательный, следовательно, его дискриминант неположительный: $C_1^2 - 4C_2C_0 \leq 0$, поэтому первый случай не реализуется.

Второй случай: $C_1^2 - 4C_2C_0 = 0$. В этом случае $C_2U^2 + C_1U + C_0 = C_2(U - U_1)^2$, где $U_1 = -C_1/(2C_2)$ — корень многочлена. Применяя соотношение

$$\frac{S_1U + S_0}{(U - U_1)^2} = \frac{S_1(U - U_1) + S_0 + U_1S_1}{(U - U_1)^2} = \frac{S_1}{U - U_1} + \frac{S_0 + U_1S_1}{(U - U_1)^2},$$

получим

$$J_{12} = \int_{-h/2}^{h/2}\frac{S_1dU}{C_2(U - U_1)\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}} +$$

$$+\frac{S_0 + U_1S_1}{C_2}\int_{-h/2}^{h/2}\frac{dU}{(U - U_1)^2\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}}.$$

Сделав замену $t = 1/(U - U_1)$, находим [11, ч.1, гл. 7, §10, пункт 5]:

$$J_{12} = -\frac{1}{C_2}\int_{U=-h/2}^{U=h/2}\frac{S_1\cdot dt}{\sqrt{(U_1^2B_2 + U_1B_1 + B_0)t^2 + (2B_2U_1 + B_1)t + B_2}} -$$

$$-\frac{S_0 + U_1S_1}{C_2}\int_{U=-h/2}^{U=h/2}\frac{t\cdot dt}{\sqrt{(U_1^2B_2 + U_1B_1 + B_0)t^2 + (2B_2U_1 + B_1)t + B_2}} =$$

$$= -\frac{S_1}{C_2}\int_{U=-h/2}^{U=h/2}\frac{dt}{\sqrt{\omega_2t^2 + \omega_1t + B_2}} - \frac{S_0 + U_1S_1}{C_2}\int_{U=-h/2}^{U=h/2}\frac{t\cdot dt}{\sqrt{\omega_2t^2 + \omega_1t + B_2}},$$

где $\omega_1 = 2B_2U_1 + B_1$, $\omega_2 = U_1^2B_2 + U_1B_1 + B_0$. Как показано выше, $a \geq 0$, поэтому и $\omega_2 \geq 0$. Если $\omega_2 > 0$, то с помощью табличных интегралов 2.261 и 2.264 из книги [15], получаем

$$J_{12} = \frac{-S_1}{C_2\sqrt{\omega_2}}\ln\left|2\omega_2t + \omega_1 + 2\sqrt{\omega_2}\sqrt{\omega_2t^2 + \omega_1t + B_2}\right|\Bigg|_{t(U=-h/2)}^{t(U=h/2)} -$$

$$-\frac{S_0+U_1S_1}{C_2}\left(\frac{1}{\omega_2}\sqrt{\omega_2t^2+\omega_1t+B_2}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\omega_1}{2\omega_2}\frac{1}{\sqrt{\omega_2}}\ln\left|2\omega_2t+\omega_1+2\sqrt{\omega_2}\sqrt{\omega_2t^2+\omega_1t+B_2}\right|\right)\right|_{t(U=-h/2)}^{t(U=h/2)}.$$

Если $\omega_2=0$, а $\omega_1\neq 0$, то, пользуясь интегралами 1.2.18.5, 1.2.18.6 из книги [14], находим

$$J_{12}=-\frac{S_1}{C_2}\cdot\frac{2}{\omega_1}\sqrt{\omega_1t+B_2}\,\Big|_{t(U=-h/2)}^{t(U=h/2)}-$$

$$-\frac{S_0+U_1S_1}{C_2}\cdot\frac{2(\omega_1t-2B_2)}{3\omega_1^2}\sqrt{\omega_1t+B_2}\,\Big|_{t(U=-h/2)}^{t(U=h/2)}.$$

Если $\omega_2=0$ и $\omega_1=0$, то

$$J_{12}=-\frac{S_1}{C_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{B_2}}\,t\,\Big|_{t(U=-h/2)}^{t(U=h/2)}-\frac{S_0+U_1S_1}{C_2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{B_2}}\,t^2\,\Big|_{t(U=-h/2)}^{t(U=h/2)}.$$

Третий случай: $C_1^2-4C_2C_0<0$. В этом случае многочлен $C_2U^2+C_1U+C_0$ неприводимый. Рассмотрим различные варианты вычисления интеграла J_{12} из (4.4), воспользовавшись методом, предложенным в [11, ч.1, гл. 7, §10, пункт 5, (7.75)] или в [15, раздел 2.25].

Вариант 1. Если $B_1=B_2C_1/C_2$, то в интеграле J_{12} достаточно сделать замену $U=t-C_1/2C_2$. Пусть, кроме того,

$$t_1=\frac{h}{2}+\frac{C_1}{2C_2},\quad t_2=-\frac{h}{2}+\frac{C_1}{2C_2},\quad t_2<t_1,$$

тогда

$$J_{12}=\int\limits_{t_2}^{t_1}\frac{\Big[S_1t+\Big(-S_1C_1/(2C_2)+S_0\Big)\Big]\,dt}{C_2\Big[t^2+C_0/C_2-C_1^2/(4C_2^2)\Big]\sqrt{B_2t^2+B_0-B_2C_1^2/(4C_2^2)}}=$$

$$=\frac{1}{C_2}\left(\frac{S_1}{2}\int_{t=t_2}^{t=t_1}\frac{dt^2}{[t^2+\sigma_1]\sqrt{B_2t^2+\sigma_2}}+\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{S_1C_1}{2C_2}+S_0\right)\int_{t_2}^{t_1}\frac{dt}{[t^2+\sigma_1]\sqrt{B_2t^2+\sigma_2}}\right),$$

где

$$\sigma_1 = \frac{C_0}{C_2} - \frac{C_1^2}{4C_2^2} > 0, \qquad \sigma_2 = B_0 - \frac{B_2 C_1^2}{4C_2^2}.$$

Вводя обозначение

$$J_{121} = \frac{S_1}{2C_2} \int_{t=t_2}^{t=t_1} \frac{dt^2}{\left[t^2 + \sigma_1\right]\sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2}},$$

получим

$$J_{12} = J_{121} - \frac{1}{2C_2}\Big(-\frac{S_1 C_1}{2C_2} + S_0\Big) \int_{t=t_2}^{t=t_1} \frac{t^3 d(1/t^2)}{t^2\left[1 + \sigma_1(1/t^2)\right]\sqrt{t^2}\sqrt{B_2 + \sigma_2(1/t^2)}} =$$

$$= J_{121} - \frac{1}{2C_2}\Big(-\frac{S_1 C_1}{2C_2} + S_0\Big) \int_{t=t_2}^{t=t_1} \frac{\mathrm{sgn}(t)\, d(1/t^2)}{\left[1 + \sigma_1(1/t^2)\right]\sqrt{B_2 + \sigma_2(1/t^2)}}.$$

Положим

$$J_{122}(\tau_2,\tau_1) = -\frac{1}{2C_2}\Big(-\frac{S_1 C_1}{2C_2} + S_0\Big) \int_{t=\tau_2}^{t=\tau_1} \frac{d(1/t^2)}{\left[1 + \sigma_1(1/t^2)\right]\sqrt{B_2 + \sigma_2(1/t^2)}},$$

тогда формула для вычисления интеграла J_{12} будет зависеть от знаков t_1 и t_2

$$J_{12} = \begin{cases} J_{121} - J_{122}(t_2,t_1) & t_1 < 0, \\ J_{121} + J_{122}(t_2,t_1) & t_1 > 0,\ t_2 > 0, \\ J_{121} - J_{122}(t_2,0) + J_{122}(0,t_1) & t_2 < 0,\ t_1 > 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Заметим, что подынтегральная функция в J_{121} представляет собой линейную иррациональность относительно t^2, а в J_{122} — относительно $1/t^2$. Используя табличный интеграл 2.246 из книги [15], находим интеграл J_{121} в явном виде.

1. Если $\sigma_1 B_2 - \sigma_2 > 0$, то

$$J_{121} = \frac{S_1}{C_2\sqrt{\sigma_1 B_2 - \sigma_2}} \,\mathrm{arctg}\Big(\frac{\sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1 B_2 - \sigma_2}}\Big)\Big|_{t_2}^{t_1}.$$

2. Если $\sigma_1 B_2 - \sigma_2 < 0$, то

$$J_{121} = \frac{S_1}{2C_2\sqrt{\sigma_2 - \sigma_1 B_2}} \ln\left|\frac{\sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2} - \sqrt{\sigma_2 - \sigma_1 B_2}}{\sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2} + \sqrt{\sigma_2 - \sigma_1 B_2}}\right|\Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

3. Если $\sigma_1 B_2 - \sigma_2 = 0$, то

$$J_{121} = -\frac{S_1}{C_2\sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2}}\Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

Аналогично находим интеграл $J_{122}(\tau_2,\tau_1)$.

1. Если $\sigma_2/\sigma_1 - B_2 > 0$, то

$$J_{122}(\tau_2,\tau_1) = -\frac{1}{\sigma_1 C_2}\left(-\frac{S_1 C_1}{2C_2} + S_0\right)\frac{1}{\sqrt{\sigma_2/\sigma_1 - B_2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{B_2 + \sigma_2(1/t^2)}}{\sqrt{\sigma_2/\sigma_1 - B_2}}\right)\Bigg|_{\tau_2}^{\tau_1}.$$

2. Если $\sigma_2/\sigma_1 - B_2 < 0$, то

$$J_{122}(\tau_2,\tau_1) = -\frac{1}{\sigma_1 C_2}\left(-\frac{S_1 C_1}{2C_2} + S_0\right)\frac{1}{2\sqrt{B_2 - \sigma_2/\sigma_1}}\times$$

$$\times \ln\left|\frac{\sqrt{B_2 + \sigma_2(1/t^2)} - \sqrt{B_2 - \sigma_2/\sigma_1}}{\sqrt{B_2 + \sigma_2(1/t^2)} + \sqrt{B_2 - \sigma_2/\sigma_1}}\right|\Bigg|_{\tau_2}^{\tau_1}.$$

3. Если $\sigma_2/\sigma_1 - B_2 = 0$, то

$$J_{122}(\tau_2,\tau_1) = \frac{1}{\sigma_1 C_2}\left(-\frac{S_1 C_1}{2C_2} + S_0\right)\frac{1}{\sqrt{B_2 + \sigma_2(1/t^2)}}\Bigg|_{\tau_2}^{\tau_1}.$$

Итак, в этом варианте интеграл J_{12} из (4.4) вычисляется явно по формуле (4.5).

Вариант 2. Пусть $B_1 \neq B_2 C_1/C_2$. В [9, пункт 3] показано, что квадратный трехчлен под корнем в (4.4) неотрицателен (этот результат вытекает также и из приведенных в пункте 4.1 выкладок), поэтому его дискриминант неположителен, т.е. $B_1^2/4B_2^2 - B_0/B_2 \leq 0$. Положим $\chi_1^2 = B_0/B_2 - B_1^2/(4B_2^2) \geq 0$. Далее рассмотрим 2 варианта: **2а** и **2б**.

Вариант 2а: $\chi_1 > 0$. Преобразуем

$$B_2 U^2 + B_1 U + B_0 = B_2\left[\left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)^2 + \chi_1^2\right] =$$

$$= B_2\chi_1^2\left[\left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)^2/\chi_1^2 + 1\right] = B_2\chi_1^2\left(\mathrm{sh}^2\, t + 1\right),$$

где сделана гиперболическая замена

$$\mathrm{sh}\, t = \left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)/\chi_1, \quad U = \chi_1\,\mathrm{sh}\, t - \frac{B_1}{2B_2}, \quad t = \mathrm{arcsh}\left[\left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)/\chi_1\right].$$

Теперь рассмотрим второй квадратный трехчлен в знаменателе (учитывая условие, принятое в **третьем случае**) и линейную функцию в числителе:

$$C_2U^2+C_1U+C_0=C_2\left(\chi_1^2\operatorname{sh}^2 t-\frac{\chi_1 B_1}{B_2}\operatorname{sh} t+\frac{B_1^2}{4B_2^2}\right)+C_1\chi_1\operatorname{sh} t+C_0-\frac{B_1C_1}{2B_2}=$$

$$=C_2\chi_1^2\operatorname{sh}^2 t+\left(C_1\chi_1-\frac{\chi_1B_1C_2}{B_2}\right)\operatorname{sh} t+\frac{B_1^2C_2}{4B_2^2}-\frac{B_1C_1}{2B_2}+C_0=$$

$$=\nu_2\operatorname{sh}^2 t+\nu_1\operatorname{sh} t+\nu_0>0,$$

$$S_1U+S_0=S_1\chi_1\operatorname{sh} t-\frac{B_1S_1}{2B_2}+S_0=\varepsilon_1\operatorname{sh} t+\varepsilon_0,$$

где

$$\nu_2=C_2\chi_1^2>0,\quad \nu_1=C_1\chi_1-\chi_1B_1C_2/B_2,$$
$$\nu_0=B_1^2C_2/(4B_2^2)-B_1C_1/(2B_2)+C_0,$$
$$\varepsilon_1=S_1\chi_1,\quad \varepsilon_0=S_0-B_1S_1/(2B_2).$$

Поскольку $\nu_2\operatorname{sh}^2 t+\nu_1\operatorname{sh} t+\nu_0>0$, дискриминант этого квадратного трехчлена относительно $\operatorname{sh} t$ отрицательный, т.е.

$$\nu_1^2-4\nu_2\nu_0<0. \tag{4.6}$$

Кроме того, $\nu_1\neq 0$ в силу условий, принятых в **варианте 2** и в **варианте 2a**.

Учитывая, что $dU=\chi_1\operatorname{ch} t\,dt$ и $\operatorname{sh}^2 t+1=\operatorname{ch}^2 t$, запишем

$$J_{12}=\frac{1}{\sqrt{B_2}}\int_{t_-}^{t_+}\operatorname{ch} t\cdot dt\frac{\varepsilon_1\operatorname{sh} t+\varepsilon_0}{\left(\nu_2\operatorname{sh}^2 t+\nu_1\operatorname{sh} t+\nu_0\right)\operatorname{ch} t},$$

$$t_\pm=\operatorname{arcsh}\left[\left(\pm\frac{h}{2}+\frac{B_1}{2B_2}\right)/\chi_1\right].$$

Разобьём знаменатель на произведение двух линейных функций от $\operatorname{sh} t$ с комплексными коэффициентами

$$J_{12}=\frac{1}{\sqrt{B_2}}\int_{t_-}^{t_+}dt\frac{\varepsilon_1\operatorname{sh} t+\varepsilon_0}{\nu_2(\operatorname{sh} t-G_-)(\operatorname{sh} t-G_+)}=$$

$$=\frac{1}{\nu_2\sqrt{B_2}}\int_{t_-}^{t_+}dt\left(\frac{\lambda_-}{\operatorname{sh} t-G_-}+\frac{\lambda_+}{\operatorname{sh} t-G_+}\right),$$

где $G_-,\ G_+$ — комплексные корни уравнения $\nu_2\operatorname{sh}^2 t+\nu_1\operatorname{sh} t+\nu_0=0$ относительно $\operatorname{sh} t$:

$$G_-=\frac{-\nu_1-\sqrt{\nu_1^2-4\nu_2\nu_0}}{2\nu_2}=g_1-\mathrm{i}g_2,\qquad G_+=\frac{-\nu_1+\sqrt{\nu_1^2-4\nu_2\nu_0}}{2\nu_2}=g_1+\mathrm{i}g_2,$$

$$g_1 = -\frac{\nu_1}{2\nu_2} \neq 0, \qquad g_2 = \frac{\sqrt{|\nu_1^2 - 4\nu_2\nu_0|}}{2\nu_2} > 0, \quad g_1, g_2 \in R; \qquad G_+ = \overline{G_-}. \tag{4.7}$$

Отметим, что $g_2 \neq 0$ в силу (4.6). Коэффициенты $\lambda_\pm$ зависят от $G_\pm$:

$$\lambda_- = \frac{\varepsilon_1 G_- + \varepsilon_0}{G_- - G_+} = \frac{\varepsilon_1 G_- + \varepsilon_0}{-2g_2 \mathrm{i}}, \qquad \lambda_+ = \frac{\varepsilon_1 G_+ + \varepsilon_0}{G_+ - G_-} = \frac{\varepsilon_1 G_+ + \varepsilon_0}{2g_2 \mathrm{i}}. \tag{4.8}$$

Рассмотрим

$$\frac{\lambda_\pm}{\operatorname{sh} t - G_\pm} = \frac{\lambda_\pm}{(e^t - e^{-t})/2 - G_\pm} \cdot \frac{e^t}{e^t} = \frac{2\lambda_\pm e^t}{e^{2t} - 2G_\pm e^t - 1}.$$

Тогда, перейдя к замене $\zeta = e^t,\ d\zeta = e^t dt,\ dt = d\zeta/\zeta$,

$$\zeta_1 = \exp\left(\operatorname{arcsh}\left[\left(-\frac{h}{2} + \frac{B_1}{2B_2}\right)/\chi_1\right]\right), \quad \zeta_2 = \exp\left(\operatorname{arcsh}\left[\left(\frac{h}{2} + \frac{B_1}{2B_2}\right)/\chi_1\right]\right), \tag{4.9}$$

получим

$$J_{12} = \frac{1}{\nu_2\sqrt{B_2}} \int_{t_-}^{t_+} dt \left(\frac{2\lambda_- e^t}{e^{2t} - 2G_- e^t - 1} + \frac{2\lambda_+ e^t}{e^{2t} - 2G_+ e^t - 1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\nu_2\sqrt{B_2}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{\zeta} \cdot \left(\frac{2\lambda_- \zeta}{\zeta^2 - 2G_-\zeta - 1} + \frac{2\lambda_+ \zeta}{\zeta^2 - 2G_+\zeta - 1}\right) =$$

$$= \frac{2}{\nu_2\sqrt{B_2}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \left(\frac{\lambda_-}{\zeta^2 - 2G_-\zeta - 1} + \frac{\lambda_+}{\zeta^2 - 2G_+\zeta - 1}\right).$$

В данном случае нельзя применить стандартные формулы для нахождения первообразной от вещественных подынтегральных функций, поскольку в нашем случае коэффициенты комплексные. Введём обозначения: $Z_{1-} = G_- - \sqrt{G_-^2 + 1}$, $Z_{1+} = G_- + \sqrt{G_-^2 + 1}$,

$$Z_{2-} = G_+ - \sqrt{G_+^2 + 1}, \qquad Z_{2+} = G_+ + \sqrt{G_+^2 + 1}, \tag{4.10}$$

$$\gamma_- = \frac{1}{2\sqrt{G_-^2 + 1}}, \qquad \gamma_+ = \frac{1}{2\sqrt{G_+^2 + 1}}. \tag{4.11}$$

Знаменатель в (4.11) не обращается в ноль, т.к. $g_1 \neq 0$, как отмечено выше. В результате

$$J_{12} = \frac{2}{\nu_2\sqrt{B_2}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \left(\frac{\lambda_-}{(\zeta - Z_{1-})(\zeta - Z_{1+})} + \frac{\lambda_+}{(\zeta - Z_{2-})(\zeta - Z_{2+})}\right) =$$

$$= \frac{-2}{\nu_2\sqrt{B_2}}\left[\lambda_-\gamma_-\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta\left(\frac{1}{\zeta - Z_{1-}} - \frac{1}{\zeta - Z_{1+}}\right) + \right.$$

$$\left. + \lambda_+\gamma_+\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta\left(\frac{1}{\zeta - Z_{2-}} - \frac{1}{\zeta - Z_{2+}}\right)\right].$$

Принимая во внимание выражения (4.7), (4.8), (4.10), (4.11), получаем

$$\lambda_- = \overline{\lambda_+}, \quad Z_{1-} = \overline{Z_{2-}}, \quad Z_{1+} = \overline{Z_{2+}}, \quad \gamma_+ = \overline{\gamma_-}.$$

Тогда

$$J_{12} = \frac{-2}{\nu_2\sqrt{B_2}}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta\left[\overline{\lambda_+\gamma_+\left(\frac{1}{\zeta - Z_{2-}} - \frac{1}{\zeta - Z_{2+}}\right)} + \right.$$

$$\left. + \lambda_+\gamma_+\left(\frac{1}{\zeta - Z_{2-}} - \frac{1}{\zeta - Z_{2+}}\right)\right].$$

Так как $\zeta_1, \zeta_2 \in R$, то под интегралом находится сумма двух комплексно сопряженных функций, поэтому интеграл J_{12} вещественный

$$J_{12} = \frac{-4}{\nu_2\sqrt{B_2}} \cdot \operatorname{Re}\left[\lambda_+\gamma_+\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta\left(\frac{1}{\zeta - Z_{2-}} - \frac{1}{\zeta - Z_{2+}}\right)\right].$$

В итоге

$$J_{12} = \frac{-4}{\nu_2\sqrt{B_2}}\times$$

$$\times \operatorname{Re}\left[\lambda_+\gamma_+\Big(\ln(Z_{2-} - \zeta_2) - \ln(Z_{2-} - \zeta_1) - \ln(Z_{2+} - \zeta_2) + \ln(Z_{2+} - \zeta_1)\Big)\right]. \tag{4.12}$$

Логарифмы с комплексными аргументами $Z_{2\pm} - \zeta_l$, где $l = 1{,}2$, преобразуются по формуле

$$\ln(Z_{2\pm} - \zeta_l) = \ln|Z_{2\pm} - \zeta_l| + \mathrm{i}\arg(Z_{2\pm} - \zeta_l), \qquad l = 1{,}2. \tag{4.13}$$

Рассмотрим величины, входящие в (4.10) и (4.11).

Поскольку $g_2 = \operatorname{Im} G_+ > 0$, то можно считать, что $\arg G_+ \in (0,\pi)$, тогда $\arg\left(G_+^2 + 1\right) \in (0, 2\pi)$ и

$$\arg\sqrt{G_+^2 + 1} = (1/2)\arg(G_+^2 + 1) \in (0, \pi),$$

поэтому $\operatorname{Im}(\sqrt{G_+^2 + 1}) > 0$. Более того, если $\arg G_+ \in (0,\pi/2)$, то

$$\arg\sqrt{G_+^2 + 1} \in (0,\pi/2),$$

а если $\arg G_+ \in (\pi/2,\pi)$, то

$$\arg\sqrt{G_+^2+1} \in (\pi/2,\pi).$$

Следовательно

$$\operatorname{sgn}(\operatorname{Re}\sqrt{G_+^2+1}) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} G_+) = \operatorname{sgn} g_1.$$

Положим

$$G_+^2+1 = g_1^2 - g_2^2 + 1 + 2g_1g_2\mathrm{i} = |G_+^2+1|\exp(\mathrm{i}\Psi), \qquad \Psi = \arg(G_+^2+1),$$

$$\cos\Psi = \frac{g_1^2-g_2^2+1}{|G_+^2+1|}, \qquad |G_+^2+1| = \sqrt{(g_1^2-g_2^2+1)^2+4g_1^2g_2^2}. \tag{4.14}$$

Используя тригонометрические формулы [16], получим

$$\sqrt{G_+^2+1} = \sqrt{|G_+^2+1|}\exp(\mathrm{i}\Psi/2) = \sqrt{|G_+^2+1|}\left(\cos\frac{\Psi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\Psi}{2}\right),$$

$$\cos\frac{\Psi}{2} = \operatorname{sgn}(g_1)\sqrt{\frac{1+\cos\Psi}{2}} = \operatorname{sgn}(g_1)\sqrt{\frac{|G_+^2+1|+g_1^2-g_2^2+1}{2|G_+^2+1|}},$$

$$\sin\frac{\Psi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\Psi}{2}} = \sqrt{\frac{|G_+^2+1|-(g_1^2-g_2^2+1)}{2|G_+^2+1|}}. \tag{4.15}$$

Поскольку $\arg\sqrt{G_+^2+1} = \Psi/2 \in (0,\pi)$, то $(-\Psi/2) \in (-\pi,0)$. Следовательно,

$$\gamma_+ = \frac{1}{2\sqrt{G_+^2+1}} = \frac{\exp(-\mathrm{i}\Psi/2)}{2\sqrt{|G_+^2+1|}},$$

$$\operatorname{Re}\gamma_+ = \frac{\cos(\Psi/2)}{2\sqrt{|G_+^2+1|}} = \operatorname{sgn}(g_1)\frac{\sqrt{|G_+^2+1|+g_1^2-g_2^2+1}}{2\sqrt{2}\,|G_+^2+1|},$$

$$\operatorname{Im}\gamma_+ = -\frac{\sin(\Psi/2)}{2\sqrt{|G_+^2+1|}} = -\frac{\sqrt{|G_+^2+1|-(g_1^2-g_2^2+1)}}{2\sqrt{2}\,|G_+^2+1|}, \tag{4.16}$$

где g_1 и g_2 определяются в (4.7), а $|G_+^2+1|$ в (4.14).

Лемма. *Пусть $G_+ = g_1 + \mathrm{i}g_2$, где g_1, g_2 — вещественные числа и $g_2 > 0$, тогда*

$$g_2 = \operatorname{Im} G_+ > |\operatorname{Im}\sqrt{G_+^2+1}|.$$

Доказательство. Используя обозначения и соотношения из (4.14), (4.15), находим

$$\operatorname{Im}\sqrt{G_+^2+1}=\sqrt{|G_+^2+1|}\sin\frac{\Psi}{2}=$$

$$=\sqrt{|G_+^2+1|}\sqrt{\frac{|G_+^2+1|-(g_1^2-g_2^2+1)}{2|G_+^2+1|}}=\sqrt{\frac{|G_+^2+1|-(g_1^2-g_2^2+1)}{2}}. \quad (4.17)$$

Поскольку $g_2>0$, можно проверить, что

$$|G_+^2+1|=\sqrt{(g_1^2-g_2^2+1)^2+4g_1^2g_2^2}<g_1^2+g_2^2+1,$$

поэтому

$$\frac{1}{2}(|G_+^2+1|-(g_1^2-g_2^2+1))<g_2^2.$$

Из (4.17) вытекает, что

$$(\operatorname{Im}\sqrt{G_+^2+1})^2=\frac{1}{2}(|G_+^2+1|-(g_1^2-g_2^2+1)).$$

Следовательно,

$$(\operatorname{Im}\sqrt{G_+^2+1})^2<g_2^2,$$

откуда $|\operatorname{Im}\sqrt{G_+^2+1}|<g_2$. Лемма доказана.

Следствие. *Если выполнены условия леммы, то*

$$\operatorname{Im}(Z_{2\pm}-\zeta_l)=\operatorname{Im}(G_+\pm\sqrt{G_+^2+1})>0, \quad l=1{,}2.$$

Поскольку $Z_{2\pm}=(G_+\pm\sqrt{G_+^2+1})$ согласно (4.10), а ζ_1 и ζ_2 — вещественные числа, находим

$$Z_{2\pm}-\zeta_l=\operatorname{Re}(Z_{2\pm}-\zeta_l)+\mathrm{i}\operatorname{Im}(Z_{2\pm}-\zeta_l),$$

$$\operatorname{Re}(Z_{2\pm}-\zeta_l)=g_1\pm\sqrt{|G_+^2+1|}\cos\frac{\Psi}{2}-\zeta_l,$$

$$\operatorname{Im}(Z_{2\pm}-\zeta_l)=g_2\pm\sqrt{|G_+^2+1|}\sin\frac{\Psi}{2},$$

$$|Z_{2\pm}-\zeta_l|=\sqrt{\left(g_1\pm\sqrt{|G_+^2+1|}\cos\frac{\Psi}{2}-\zeta_l\right)^2+\left(g_2\pm\sqrt{|G_+^2+1|}\sin\frac{\Psi}{2}\right)^2}, \quad (4.18)$$

где $l = 1{,}2$. По следствию к лемме, $\operatorname{Im}(Z_{2\pm} - \zeta_l) > 0$, поэтому можно считать, что $\arg(Z_{2\pm} - \zeta_l) \in (0{,}\pi)$, где $l = 1{,}2$. Следовательно,

$$\arg(Z_{2\pm} - \zeta_l) = \arccos \frac{\operatorname{Re}(Z_{2\pm} - \zeta_l)}{|Z_{2\pm} - \zeta_l|} = \arccos \frac{g_1 \pm \sqrt{|G_+^2 + 1|}\,\cos(\Psi/2) - \zeta_l}{|Z_{2\pm} - \zeta_l|}, \tag{4.19}$$

где $l = 1{,}2$. В (4.18), (4.19), используются обозначения из (4.7), (4.9), (4.14), (4.15).

Из (4.8) вытекает

$$\lambda_+ = \frac{\varepsilon_1 G_+ + \varepsilon_0}{G_+ - G_-} = \frac{\varepsilon_1(g_1 + \mathrm{i}g_2) + \varepsilon_0}{2\mathrm{i}g_2} = \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{\varepsilon_1 g_1 + \varepsilon_0}{2g_2}\mathrm{i},$$

поэтому

$$\operatorname{Re}\lambda_+ = \frac{\varepsilon_1}{2}, \qquad \operatorname{Im}\lambda_+ = -\frac{\varepsilon_1 g_1 + \varepsilon_0}{2g_2}.$$

Положим

$$\lambda_+\gamma_+ = \Lambda_1 + \mathrm{i}\Lambda_2,$$

$$\Lambda_1 = \frac{\varepsilon_1}{2}\operatorname{Re}\gamma_+ + \frac{\varepsilon_1 g_1 + \varepsilon_0}{2g_2}\operatorname{Im}\gamma_+, \quad \Lambda_2 = \frac{\varepsilon_1}{2}\operatorname{Im}\gamma_+ - \frac{\varepsilon_1 g_1 + \varepsilon_0}{2g_2}\operatorname{Re}\gamma_+,$$

где $\operatorname{Re}\gamma_+$ и $\operatorname{Im}\gamma_+$ однозначно определяются в (4.16) с использованием (4.7), (4.14). Применяя формулу (4.18), находим сумму логарифмов

$$s_1 = \ln|Z_{2-} - \zeta_2| - \ln|Z_{2-} - \zeta_1| - \ln|Z_{2+} - \zeta_2| + \ln|Z_{2+} - \zeta_1| =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(-1)^{q+l}\times$$

$$\times \ln\left[\left(g_1 + (-1)^q\sqrt{|G_+^2 + 1|}\,\cos\frac{\Psi}{2} - \zeta_l\right)^2 + \left(g_2 + (-1)^q\sqrt{|G_+^2 + 1|}\,\sin\frac{\Psi}{2}\right)^2\right].$$

Используя формулу (4.19), вычисляем сумму аргументов

$$s_2 = \arg(Z_{2-} - \zeta_2) - \arg(Z_{2-} - \zeta_1) - \arg(Z_{2+} - \zeta_2) + \arg(Z_{2+} - \zeta_1) =$$

$$= -\sum_{q=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(-1)^{q+l}\times$$

$$\times \arccos\left[\left(g_1 + (-1)^q\sqrt{|G_+^2 + 1|}\,\cos(\Psi/2) - \zeta_l\right)\Big/\right.$$

$$/ \sqrt{\left(g_1 + (-1)^q \sqrt{|G_+^2 + 1|} \cos\frac{\Psi}{2} - \zeta_l\right)^2 + \left(g_2 + (-1)^q \sqrt{|G_+^2 + 1|} \sin\frac{\Psi}{2}\right)^2}\,\Bigg] .$$

В формулах для s_1, s_2 использованы обозначения из (4.7), (4.9), (4.14), (4.15). Согласно (4.12) и (4.13), получим

$$J_{12} = \frac{-4}{\nu_2\sqrt{B_2}} \cdot \mathrm{Re}\,\left[\lambda_+\gamma_+(s_1 + \mathrm{i}s_2)\right] = \frac{-4}{\nu_2\sqrt{B_2}} \cdot \mathrm{Re}\,\left[(\Lambda_1 + \mathrm{i}\Lambda_2)(s_1 + \mathrm{i}s_2)\right].$$

В итоге

$$J_{12} = \frac{-4}{\nu_2\sqrt{B_2}} \cdot (\Lambda_1 s_1 - \Lambda_2 s_2)\,.$$

Таким образом, в **варианте 2а** интеграл J_{12} вычислен явно.

Вариант 2б: $\chi_1 = 0$. В этом случае

$$B_2U^2 + B_1U + B_0 = B_2\left[\left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)^2 + \chi_1^2\right] = B_2\left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)^2 = B_2\,(U+\Omega)^2\,,$$

где $\Omega = B_1/(2B_2)$. Тогда

$$J_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{S_1U + S_0}{(C_2U^2 + C_1U + C_0)\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{B_2}} \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{sgn}\,(U+\Omega)\,\frac{(S_1U + S_0)dU}{(C_2U^2 + C_1U + C_0)\,(U+\Omega)}.$$

Введём обозначение

$$J_{12}^*(t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{B_2}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{(S_1U + S_0)dU}{(C_2U^2 + C_1U + C_0)\,(U+\Omega)}.$$

Тогда

$$J_{12} = \begin{cases} J_{12}^*(-h/2, h/2) & \Omega > h/2, \\ -J_{12}^*(-h/2, h/2) & \Omega < -h/2, \\ -J_{12}^*(-h/2, 0) + J_{12}^*(0, h/2) & \Omega \in (-h/2, h/2). \end{cases} \tag{4.20}$$

Положим

$$p_3 = \frac{S_1\Omega - S_0}{C_1\Omega - C_0 - C_2\Omega^2}, \quad p_2 = \frac{S_0}{\Omega} - \frac{C_0}{\Omega}p_3, \quad p_1 = -C_2p_3.$$

Несложно проверить, что

$$J_{12}^*(t_1,t_2)=\frac{1}{\sqrt{B_2}}\Bigg[p_1\int_{t_1}^{t_2}\frac{UdU}{C_2U^2+C_1U+C_0}+$$

$$+p_2\int_{t_1}^{t_2}\frac{dU}{C_2U^2+C_1U+C_0}+p_3\int_{t_1}^{t_2}\frac{dU}{U+\Omega}\Bigg]. \tag{4.21}$$

Интегралы в (4.21) табличные. Воспользуемся формулами (1.2.8.19) и (1.2.8.13) из [14]. Учитывая, что $C_1^2-4C_2C_0<0$, находим

$$J_{12}^*(t_1,t_2)=\frac{1}{\sqrt{B_2}}\Bigg[p_3\ln|U+\Omega|+\frac{p_1}{2C_2}\ln\left|C_2U^2+C_1U+C_0\right|+$$

$$+\left(2p_2-\frac{C_1}{C_2}p_1\right)\frac{1}{\sqrt{4C_2C_0-C_1^2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2C_2U+C_1}{\sqrt{4C_2C_0-C_1^2}}\right)\Bigg]\Bigg|_{U=t_1}^{U=t_2}. \tag{4.22}$$

Таким образом, в **варианте 2б** при помощи (4.20), (4.22) интеграл J_{12} вычислен явно.

5. Основной результат

Сформулируем основной результат этой работы в виде теоремы.

Теорема. *Пусть* Γ *— простая гладкая замкнутая либо ограниченная разомкнутая поверхность класса* C^2*, содержащая свои предельные точки (если поверхность* Γ *замкнутая, то она должна ограничивать объёмно-односвязную внутреннюю область), допускающая параметризацию* (2.1) *со свойствами* (2.3), (2.5)*. Пусть* $\mu(y)\in C^1(\Gamma)$*, а точка* x *расположена в одном из узлов на* Γ*. Тогда для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя для уравнения Гельмгольца* (2.7) *справедливо представление* (2.9)*, где для* $\tilde{\sigma}_k(x)$ *при любом расположении* x *в узлах* Γ *выполняется оценка* (2.11)*. Кроме того, для* $\tilde{S}_k(x)$ *имеет место квадратурная формула* (2.14)*, где интегралы* $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ *и* $T_{nm}(x)$ *приближённо вычислены в пунктах 3 и 4 в явном виде.*

Результаты для прямого значения нормальной производной гармонического потенциала получаются из приведенных результатов в частном случае $k=0$.

6. Стандартная квадратурная формула

Квадратурная формула (2.14) является альтернативой стандартной квадратурной формуле для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя $K_k(x)$, используемой в инженерных расчётах [8, Глава 2]

$$K_k(x)|_{x=y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})\in\Gamma} = \frac{1}{4\pi|\eta(x)|} \sum_{\substack{n=0,\, m=0\\ (n,m)\neq(\hat{n},\hat{m})}}^{n=N-1,\, m=M-1} \mu_{nm}|\eta(y(u_n,v_m))|\times$$

$$\times \exp(\mathrm{i}k|x-y(u_n,v_m)|)(1-\mathrm{i}k|x-y(u_n,v_m)|) \sum_{j=1}^{3} \frac{\eta_j(x)(y_j(u_n,v_m)-x_j)}{|x-y(u_n,v_m)|^3} hH.$$

Стандартная квадратурная формула получается из формулы (2.14) обнулением $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ и заменой канонического интеграла $T_{nm}(x)$ из (2.13) на его следующее приближенное значение

$$hH \sum_{j=1}^{3} \frac{\eta_j(x)(y_j(u_n,v_m)-x_j)}{|x-y(u_n,v_m)|^3}.$$

Обнуление интеграла $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ можно обосновать следующим образом. Интеграл в (2.12) равен интегралу по кусочку поверхности Γ с центром в точке $x = y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})$, а он, в свою очередь, приближенно равен интегралу от той же функции по кусочку касательной плоскости, проведенной в точке x. Вектор нормали η к поверхности в точке x будет и вектором нормали к касательной плоскости. На касательной плоскости вектор $(y(u,v)-x)$ ортогонален вектору нормали η, поэтому их скалярное произведение, стоящее в числителе в (2.12), тождественно равно нулю для всех y, а значит, и интеграл по кусочку касательной плоскости равен нулю. Поскольку этот интеграл приближенно равен интегралу $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$, умноженному на взятую со знаком минус длину вектора нормали η в точке x, то можно считать, что и интеграл $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ приближенно равен нулю.

Авторы благодарят А.Б. Батхина за большую помощь при подготовке этой работы.

Список литературы

[1] *Krutitskii P. A., Kwak D. Y., Hyon Y. K.* Numerical treatment of a skew-derivative problem for the Laplace equation in the exterior of an open arc. Journal of Engineering Mathematics, 2007, v. 59, p. 25–60.

[2] *Крутицкий П.А., Колыбасова В.В.* Численный метод решения интегральных уравнений в задаче с наклонной производной для уравнения Лапласа вне разомкнутых кривых. Дифференциальные уравнения, 2016, т. 52, N 9, с. 1262–1276.

[3] *Крутицкий П.А.* Смешанная задача для уравнения Лапласа вне разрезов на плоскости. Дифференциальные уравнения, 1997, т. 33, N 9, с. 1181–1190.

[4] *Krutitskii P.A.* The 2-dimensional Dirichlet problem in an external domain with cuts. Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen, 1998, v. 17, N 2, p. 361–378.

[5] *Krutitskii P.A.* The Dirichlet problem for the two-dimensional Laplace equation in a multiply connected domain with cuts. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 2000, v. 43, N 2, p. 325–341.

[6] *Krutitskii P.A.* Wave propagation in a 2-D external domain with cuts. Applicable Analysis, 1996, v. 62, N 3-4, p. 297— 309.

[7] *Krutitskii P.A.* The Neumann problem for the 2-D Helmholtz equation in a multiply connected domain with cuts. Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen, 1997, v. 16, N 2, p. 349–361.

[8] *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.

[9] *Крутицкий П.А., Федотова А.Д., Колыбасова В.В.* Квадратурная формула для потенциала простого слоя. Дифференциальные уравнения, 2019, т. 55, N 9, с. 1269–1284.

[10] *Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А.* Математический анализ в вопросах и задачах. — М.: Физматлит, 2000.

[11] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Часть 1 и 2. М.: Физматлит, 1973.

[12] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — М.: Физматлит, 1981.

[13] *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. — М.: Мир, 1987.

[14] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Физматлит, 1981.

[15] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963.

[16] *Цыпкин А.Г., Цыпкин Г.Г.* Математические формулы. М.: Физматлит, 1985.

Содержание