



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 99 за 2020 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Васюков, И.Б. Петров,
К.А. Беклемышева, М.В. Якововский,
Ю.А. Повещенко, В.А. Гасилов,
Д.С. Бойков

Модель и расчет
напряженно-деформированного
состояния гидратосодержащей
среды при ее частичном
растеплении

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Модель и расчет напряженно-деформированного состояния гидратосодержащей среды при ее частичном растеплении / А.В. Васюков [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 99. 23 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2020-99>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-99>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

**А.В. Васюков, И.Б. Петров, К.А. Беклемышева, М.В. Якобовский,
Ю.А. Повещенко, В.А. Гасилов, Д.С. Бойков**

**Модель и расчет напряженно-деформированного
состояния гидратосодержащей среды
при ее частичном растеплении**

Москва — 2020

***Васюков А.В., Петров И.Б., Беклемышева К.А., Якобовский М.В.,
Повещенко Ю.А., Гасилов В.А., Бойков Д.С.***

Модель и расчет напряженно-деформированного состояния гидратосодержащей среды при ее частичном растеплении

Рассмотрена комплексная модель, описывающая влияние фильтрации на напряженно-деформированное состояние слоистой пористой среды, изначально содержащей твердые включения газогидратов, при ее растеплении. Численное интегрирование системы уравнений модели выполняется конечно-разностными методами. Приведены примеры решения задач о деформации грунтов.

Ключевые слова: газовые гидраты, деформация, конечно-разностные методы

Alexey Viktorovich Vasyukov, Igor Borisovich Petrov, Katerina Alexandrovna Beklemysheva, Mikhail Vladimirovich Yakobovskiy, Yuri Andreevich Poveschenko, Vladimir Anatolyevich Gasilov, Dmitriy Sergeevich Boykov

Model and calculation of the stress-strain state of a hydrate-containing medium during its partial thawing

A complex model is considered that describes the effect of filtration on the stress-strain state of a layered porous medium initially containing solid inclusions of gas hydrates during its thawing. Numerical solution of the governing system is done by finite difference methods. Examples of modeling problems related to ground deformations are given.

Key words: gas hydrates, deformation, finite difference methods

Работа поддержана грантом РФФ № 16-11-00100п.

Оглавление

1. Введение	3
2. Некоторые сведения из механики деформируемых пористых сред с растепленными газогидратными включениями	4
3. Диссоциация газовых гидратов в пористой среде. Одномерная постановка задачи.....	9
4. Анализ результатов расчетов	11
5. Расчет напряженно-деформированного состояния	17
6. Заключение.....	21
Библиографический список.....	22

1. Введение

При строительстве различного рода объектов, промышленных, социальных, сооружений транспортных систем, разработке месторождений в северных регионах возникают серьезные проблемы, обусловленные техногенным воздействием на грунт. В результате термических и других воздействий возникают фильтрационные газожидкостные потоки, приводящие к нарушениям равновесного напряженно-деформированного состояния грунта, что очевидным образом отражается и на деформациях стоящих на грунте сооружений, скважин и т.п. Подвод тепла, разгрузка вскрытого грунта, стимулируют флюидодинамические явления, возникновение значительных градиентов давления флюида и вмещающей среды, которые, в свою очередь, порождают несбалансированные сдвиговые компоненты тензора напряжений, отсутствующие в геостатике [1, 2].

Если в среде присутствуют разломы, то изменение силового баланса системы грунт-флюид приводит к возникновению сдвиговых деформаций, которые могут инициировать оползание пород на границе разлома. Если процесс разрушения происходит динамически, его крайней формой может стать техногенное землетрясение [3, 4].

В настоящей работе процессы фильтрации в гидратонасыщенных пористых геологических средах, вызванные изменением термобарических условий и сопровождаемые изменением напряженно-деформированного состояния, рассматриваются в рамках квазистационарной модели Био, аналогично [5]. Эта модель описывается связанными уравнением неразрывности для флюида и уравнениями линейной стационарной теории упругости.

Влияние процессов фильтрации на напряженно-деформированное состояние вмещающей пористой среды в различных модификациях модели Био численно исследовалось рядом авторов. В [6, 7] в рамках несвязанной модели Био были получены пространственные распределения давления фильтрующегося флюида, которые затем использовались для определения полей деформаций и напряжений. В [8] на основе данной модели определялась величина относительного изменения объемов составных частей геологической структуры (пористая среда, твердые включения, флюид). В настоящей работе рассматривается упрощенная модель, позволяющая на основе данных о поведении флюида в растепленной гидратосодержащей среде сделать оценки изменений в упругих свойствах грунта и провести соответствующие расчеты напряженно-деформированного состояния. Для анализа влияния растепления грунта в качестве первого шага реализована математическая модель, в которой влияние процессов фильтрации рассчитано на основе несвязанной модели, при последовательном решении уравнений флюидодинамики растепленной среды [6] и уравнений теории упругих деформаций [9].

Особенностью рассматриваемого класса задач применительно к геофизической проблематике является необходимость учета геологической неоднородности среды, обусловленной историей развития: она может состоять из ряда разновозрастных слоев сложной геометрии, резко отличающихся по своим свойствам, порой на несколько порядков. Таким образом, для изучения процессов фильтрации в насыщенных пористых геологических средах необходимо развитие численных методов на нерегулярных сетках, позволяющих учесть сложную слоистую структуру этих сред и резкое изменение количественных характеристик при переходе от одного слоя к другому. В настоящей работе численный алгоритм построен на основе однородной разностной схемы. Согласование разностных аналогов дифференциальных операторов позволяет сохранить для уравнений механики деформируемой сплошной среды такие качества, как консервативность, симметричность и положительность эллиптического оператора [10]. Это дает возможность получать физически корректные результаты на расчетных сетках умеренного размера, а также обеспечивает необходимый порядок аппроксимации в расчетной области в случае негладких коэффициентов и правых частей уравнений.

Конечно-разностная методика на структурно-нерегулярных сетках, ранее развивавшаяся в работах [11-13] и др., послужила основой для создания программного комплекса, предназначенного для численного моделирования напряженно-деформированного состояния слоистых структур [14] в условиях, когда различного рода причины (техногенные и т.п.) приводят к образованию жидкой фазы и меняют упругие свойства изначально равновесной пористой среды с твердыми газогидратными включениями.

Для того чтобы оценить влияние флюидодинамических процессов на грунт, рассмотрена задача о диссоциации газовых гидратов в пористой среде. В первом приближении оценки проведены на основе одномерных моделей. К соответствующим задачам относятся исследование взаимного влияния газовых гидратов и климата, а также важные технолого-экологические задачи о течении в окрестности скважины или разлома.

2. Некоторые сведения из механики деформируемых пористых сред с растепленными газогидратными включениями

Рассмотрим модель деформации насыщенных упругих пористых тел. Пусть пористое тело (скелет) однородно, поры заполнены слабосжимаемой жидкостью плотности $\rho = \rho_0(1 + (p - p_0)/K_f)$, где p — давление жидкости, $K_f = \text{const}$ — коэффициент сжимаемости. Зависимость от температуры не рассматривается.

Под действием внешних сил частицы скелета совершают перемещения $u_i(x)$. Деформация скелета характеризуется тензором деформации

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (2.1)$$

Уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + g_i = 0, \quad (2.2)$$

τ_{ik} — тензор напряжений в пористом теле, g_i — объемная плотность внешних сил. Согласно [3] работа, совершаемая над насыщенным пористым телом, может быть представлена в виде

$$\delta R = \int (\tau_{ik} \delta e_{ik} + p \delta f) dV. \quad (2.3)$$

Здесь интегрирование распространяется на все пористое тело, f — относительное изменение объема жидкости в элементе пористого тела при деформировании. Исключая из рассмотрения тепловые эффекты, связанные с деформированием, считаем, что работа идет на изменение упругой энергии системы, то есть $\delta R = \int \delta U dV$. Так что, если задаться некоторой функцией $U = U(e_{ik}, f)$, то

$$\tau_{ik} = \frac{\partial U}{\partial e_{ik}}, \quad p = \frac{\partial U}{\partial f}. \quad (2.4)$$

Ограничиваясь линейной теорией, принимаем, что с точностью до членов более высокого порядка малости с учетом (2.1) - (2.4) имеем

$$U = \mu e_{ik}^2 + \frac{\nu}{2} e^2 + \frac{\alpha}{2} f^2 - \beta f e. \quad (2.5)$$

Здесь μ, ν, α, β — некоторые постоянные, $e = e_{ii}$.

Таким образом получим выражение для тензора напряжений в виде

$$\tau_{ik} = 2\mu e_{ik} + \nu e \delta_{ik} - \beta f \delta_{ik}, \quad (2.6)$$

а для давления — в виде

$$p = \alpha f - \beta e. \quad (2.7)$$

Подставляя f , выраженное из (3), в (2), получаем тензор напряжений в виде

$$\tau_{ik} = 2\mu e_{ik} + \lambda e \delta_{ik} - \zeta p \delta_{ik}. \quad (2.8)$$

Здесь введены обозначения

$$\zeta = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \lambda = \nu - \zeta \beta = \nu - \frac{\beta^2}{\alpha} \quad (2.9)$$

2.1. Упругие модули деформации пористых тел. Выясним физический смысл феноменологических коэффициентов μ, ν, α, β и их связь с измеримыми модулями упругости. Для этого рассмотрим следующие способы деформирования пористых тел с жидкостью. Так называемое дренажное

деформирование происходит при постоянном давлении жидкости в порах. Недренажное деформирование имеет место при постоянной массе жидкости, содержащейся в пористом теле.

В случае дренажного деформирования, $p = p_0$, тензор напряжений имеет вид

$$\tau_{ik} = 2\mu e_{ik} + \lambda e \delta_{ik} - \zeta p_0 \delta_{ik}.$$

В дальнейшем полагаем $p_0 = 0$. Разлагая произвольную деформацию на сдвиг и всестороннее сжатие, получим модуль сжатия для дренажных условий

$$K_d = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (2.10)$$

При недренажном деформировании не происходит перетекания жидкости через ограничивающую тело поверхность. Подобно телам с «закрытыми порами» в этом случае не происходит смещения жидких частиц относительно скелета, соответственно, $f = 0$. Таким образом, из (3) давление есть

$$p = -\beta e,$$

а тензор напряжения из (2)

$$\tau_{ik} = 2\mu e_{ik} + (\lambda + \zeta \beta) e \delta_{ik}.$$

Модуль объемного сжатия для недренажных условий

$$K_u = \lambda + \frac{2}{3}\mu + \zeta \beta = K_d + \zeta \beta = K_d + \zeta^2 \alpha. \quad (2.11)$$

Преобразуем выражение для энергии из (2.5) к следующему виду:

$$U = \mu \left(e_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} e \right)^2 + \frac{K_d}{2} e^2 + \frac{\alpha}{2} (f - \zeta e)^2.$$

Так как энергия должна иметь минимальное значение при отсутствии деформации ($e_{ik} = 0$) и перетока жидкости ($f = 0$), то должны быть выполнены неравенства

$$\mu \geq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad K_u \geq K_d \geq 0. \quad (2.12)$$

Рассмотрим теперь деформирование насыщенного пористого тела, при котором тело подвергается равномерному всестороннему сжатию с постоянным давлением, равным давлению жидкости. Хотя такое деформирование возможно только для тел специальной структуры, по крайней мере имеющих однородный скелет, рассмотрение такого случая представляет интерес для установления качественных соотношений между модулями сжатия скелета K_s и жидкости K_f как сплошных сред с модулями насыщенного жидкостью пористого тела. С одной стороны, при таком деформировании тензор напряжений одинаков как в скелете (который деформируется однородно), так и в жидкости

$$\tau_{ik} = K_s e \delta_{ik} = -p \delta_{ik},$$

где K_s — модуль объемного сжатия скелета. С другой стороны, так как при всестороннем сжатии тензор деформации имеет вид

$$e_{ij} = \frac{e}{3} \delta_{ik},$$

то из (4) тензор напряжений есть

$$\tau_{ik} = (K_d e - \zeta p) \delta_{ik}. \quad (2.13)$$

Сравнивая эти выражения для тензора напряжений, нетрудно определить коэффициент рыхлости ζ через определяемые экспериментально упругие объемные модули

$$\zeta = 1 - \frac{K_d}{K_s} < 1. \quad (2.14)$$

Отсюда, учитывая связь между упругими модулями (2.10), (2.11), получаем

$$\alpha = \frac{K_u - K_d}{\left(1 - \frac{K_d}{K_s}\right)^2}, \quad \beta = \frac{K_u - K_d}{1 - \frac{K_d}{K_s}}. \quad (2.15)$$

2.2. Флюидонасыщенность. Рассмотрим пористое тело, имеющее в недеформированном состоянии объем V_0 , насыщенное жидкостью массой $m_0 \rho_0 V_0$ при давлении $p_0 = 0$. В деформированном состоянии тело занимает объем V при давлении p . Как было сказано выше, зависимость плотности от давления имеет вид $\rho = \rho_0(1 + p/K_f)$. Масса жидкости плотности ρ , содержащейся в порах насыщенного жидкостью пористого тела, с учетом определения пористости, $m \rho V$. В дальнейшем нас будет интересовать величина,

$$M = \frac{m \rho V}{V_0},$$

имеющая смысл массы жидкости, отнесенной к объему V_0 , занимаемому телом в недеформированном состоянии. Очевидно, флюидонасыщенность M зависит от давления жидкости и относительного изменения объема при деформировании e . Считая деформации малыми и тело изотропным, разложим M в ряд по степеням e и давлению p до членов второго порядка

$$M = M_0 + A e + B p,$$

$M_0 = m_0 \rho_0$, A , B — коэффициенты разложения.

В случае недренажного деформирования рассматриваемая масса постоянна $M = M_0$. Подставляя в (8) выражение для давления p из (3) для недренажного деформирования ($f = 0$), имеем

$$0 = A e + B \zeta \alpha e,$$

так что $A = B \zeta \alpha$.

Рассматривая дренажное деформирование ($p = 0$), получим

$$M = M_0 + A e.$$

С другой стороны, масса втекшей жидкости на единицу недеформированного объема есть

$$M - M_0 = \rho_0 f = \zeta \rho_0 e.$$

Таким образом, $A = \zeta \rho_0$, $B = A/(\zeta \alpha) = \rho_0/\alpha$ и выражение для флюидонасыщенности принимает вид

$$M = M_0 + \rho_0 \left(\zeta e + \frac{p}{\alpha} \right) = M_0 + \rho_0 \left(\zeta e + \frac{\zeta^2 p}{K_u - K_d} \right). \quad (2.16)$$

С учетом (7) выражение в скобках есть f . Для массы жидкости, заключенной в элементе δV деформируемого пористого тела, справедливо уравнение

$$\frac{d}{dt} m \rho \delta V = \delta V_0 \frac{dM}{dt} = -\delta V \operatorname{div} \rho \mathbf{W}, \quad (2.17)$$

где δV_0 , δV — объемы элемента до и после деформирования, \mathbf{W} — скорость фильтрации. Ограничиваясь линейной теорией, заменяем

$$V \rightarrow V_0, \quad \rho \rightarrow \rho_0, \quad \frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}$$

и получаем уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_0 \mathbf{W} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{W} = 0.$$

Система уравнений, приведенная выше, замыкается уравнением движения жидкости в пористой среде в форме закона Дарси [1]

$$\mathbf{W} = -\frac{k}{\eta} (\operatorname{grad} p - \rho \mathbf{g}), \quad (2.18)$$

где \mathbf{W} — скорость фильтрации, k — проницаемость среды, η — вязкость жидкости, ρ — плотность жидкости, \mathbf{g} — ускорение силы тяжести.

Соотношения (2.6)–(2.18) рассмотренной нами модели описывают фильтрацию и вызываемое ею изменение напряженно-деформированного состояния пористой среды. Модель квазистатическая, поскольку описывает медленное течение флюида в пористом теле, и каждый момент времени система «флюид+вмещающая среда» находится в состоянии, близком к механическому равновесию.

В дальнейшем напряжения, деформации и давление будем отсчитывать от состояния, в котором внешние (гравитационные) силы компенсируются геостатическими напряжениями. Окончательно рассматриваемые уравнения принимают вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{W} = 0, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{W} = -\frac{k}{\eta} \operatorname{grad} p, \quad f = \frac{M - M_0}{\rho_0} = \zeta e + \frac{\zeta^2 p}{K_u - K_d}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (2.21)$$

$$\tau_{ik} = 2\mu e_{ik} + \lambda e \delta_{ik} - \zeta p \delta_{ik}, \quad e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (2.22)$$

Здесь p , e_{ik} , τ_{ik} , u_i суть отклонения соответствующих величин от начальных геостатических равновесных значений, λ , μ — коэффициенты Ламе, $\zeta = 1 - K_d/K_s$ — коэффициент рыхлости, K_s , K_u , K_d — модули объемного сжатия пористой среды.

3. Диссоциация газовых гидратов в пористой среде. Одномерная постановка задачи

Важный для практических приложений класс задач, для которых одномерное математическое моделирование может оказаться полезным — это задачи о скважинах, в том числе — о тепловом воздействии скважины на газовый гидрат [15-17]. При недостаточной теплоизоляции скважины вокруг нее может происходить диссоциация газовых гидратов, сопровождающаяся повышением давления, способным приводить к разрушению скважины и выбросам газа. Задачу о тепловом воздействии скважины на газовый гидрат в первом приближении также можно рассматривать как одномерную осесимметричную. Задачи подобного рода применяются также при исследовании возможности подземного хранения гидратов природного газа в зоне многолетней мерзлоты [18].

Для математического описания диссоциации газовых гидратов в пористой среде используем уравнения механики сплошной среды, выражающие законы сохранения массы, импульса и энергии. Замыкающие уравнения используем согласно закону Дарси. Отметим, что большие градиенты давления флюида в призабойной зоне могут потребовать учета нелинейности, например, в форме уравнения Форхгеймера, содержащего квадратичную по скорости добавку, в отличие от уравнения Дарси. Однако для оценок влияния растепления гидрата на НДС грунта в первом приближении вполне достаточно ограничиться линейной связью скорости фильтрации и градиента давления флюида, следующей из классической теории.

Область фильтрации естественным образом делится на две зоны: трехфазную, где присутствуют газ, вода и гидрат, и талую — с отсутствием газогидратов. Системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движение флюидов, в каждой зоне свои, и для единого описания всей области фильтрации необходимо произвести сшивку решений систем уравнений газогидратной флюидодинамики для всех областей плоскости P , T в рамках единой вычислительной схемы. Это достигается путем исследования методом характеристик аналитических условий согласованности систем уравнений.

Задача решается для области равновесного состояния газовых гидратов.

В трехфазной зоне система уравнений имеет вид [16, 17]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ m(S_v S_w \rho_w + (1-S_v) \rho_v \beta_w) \right\} + \operatorname{div}[\rho_w \mathbf{V}_w] + q_w = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ m(S_v(1-S_w) \rho_g + (1-S_v) \rho_v(1-\beta_w)) \right\} + \operatorname{div}[\rho_g \mathbf{V}_g] + q_g = 0, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{V}_w = -\frac{k k_{rw}}{\mu_w} (\nabla P - g \rho_w \mathbf{k}), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{V}_g = -\frac{k k_{rg}}{\mu_g} (\nabla P - g \rho_g \mathbf{k}), \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ m(S_v(S_w \rho_w \varepsilon_w + (1-S_w) \rho_g \varepsilon_g) + (1-S_v) \rho_v \varepsilon_v) + (1-m) \rho_s \varepsilon_s \right\} + \quad (3.5)$$

$$+ \operatorname{div} \left\{ \rho_w \varepsilon_w \mathbf{V} + \rho_g \varepsilon_g \mathbf{V}_g + P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g) \right\} + \operatorname{div} \mathbf{W} + q_\varepsilon = 0,$$

$$\mathbf{W} = -\left\{ m(S_v(S_w \lambda_w + (1-S_w) \lambda_g) + (1-S_v) \lambda_v) + (1-m) \lambda_s \right\} \nabla T, \quad (3.6)$$

$$T = A \ln P + B. \quad (3.7)$$

Здесь формулы (3.1), (3.2) – уравнения неразрывности; (3.3), (3.4) – закон Дарси; (3.5), (3.6) – уравнение энергии; (3.7) – соотношение фазового равновесия для гидратов (вместо (3.7) в ряде работ используют другие формулы, для которых разработанная методика также применима). Индексы $l = g, w, v, s$ относятся к газу, воде, гидрату, скелету пористой среды; l – индекс, указывающий фазу; P – давление; S_w – водонасыщенность; ν – гидратонасыщенность; $S_v = 1 - \nu$ – растепленность; $\rho_l(P, T)$ – плотности фаз; β_w – массовая доля воды в гидрате; \mathbf{r} – радиус-вектор; t – время; \mathbf{k} – вертикальный координатный орт; g – ускорение свободного падения; $k(\mathbf{r}, S_v, P)$ – абсолютная проницаемость; $m(\mathbf{r}, P)$ – пористость; $k_{rg}(S_w)$, $k_{rw}(S_w)$ – фазовые проницаемости; $\mu_g(P, T)$, $\mu_w(P, T)$ – вязкости, $q_g(t, \mathbf{r}, S_w, S_v, P)$, $q_w(t, \mathbf{r}, S_w, S_v, P)$ – плотности источников; $\varepsilon_l(P, T)$ – внутренние энергии фаз; $\lambda_l(P, T)$ – коэффициенты теплопроводности фаз, A и B – эмпирические константы, входящие в соотношение фазового равновесия для гидрата (7).

Внутреннюю энергию гидрата можно выразить через энергии создающих его газа и воды, используя следующее соотношение:

$$\beta_w i_w + (1 - \beta_w) i_g = i_v + h, \quad (3.8)$$

где h – скрытая теплота фазового перехода единицы массы гидрата, $i_l = \varepsilon_l + P/\rho_l$ – энтальпия.

В силу соотношения (3.7), в выражениях для всех параметров, где встречается зависимость от T , ее можно свести к зависимости от P .

Исходная система уравнений преобразуется в двухблочную систему с расщеплением по физическим процессам [17], включающую в себя блок с системой гиперболических уравнений относительно водонасыщенности и растепленности на фоне фиксированных скоростей фильтрации, и блок, содержащий уравнение пьезопроводности для определения давления в пласте с газогидратными включениями.

В двухфазной зоне система уравнений принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{mS_w \rho_w\} + \text{div}(\rho_w \mathbf{V}_w) + q_w = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{m(1-S_w) \rho_g\} + \text{div}(\rho_g \mathbf{V}_g) + q_g = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{m(S_w \rho_w \varepsilon_w + (1-S_w) \rho_g \varepsilon_g) + (1-m) \rho_s \varepsilon_s\} + \quad (3.11)$$

$$+ \text{div}\{\rho_w \varepsilon_w \mathbf{V} + \rho_g \varepsilon_g \mathbf{V}_g + P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g)\} + \text{div} \mathbf{W} + q_\varepsilon = 0,$$

$$\mathbf{W} = -\{m(S_w \lambda_w + (1-S_w) \lambda_g) + (1-m) \lambda_s\} \nabla T. \quad (3.12)$$

Здесь независимыми переменными являются давление, водонасыщенность и температура.

Система (3.9) – (3.12) также преобразуется к виду, содержащему гиперболическую и параболическую части [17].

4. Анализ результатов расчетов

Для численного решения задачи используется методика построения единого алгоритма расчета течения во всей области фильтрации, включающей двух- и трехфазную зоны, предложенная в работе [15]. Согласование уравнений на границе зон проводится при помощи метода двойной каркасности [16].

В качестве модельной задачи рассматривается задача о воздействии вертикального разлома на горизонтальный пласт. Предполагается, что первоначально поровое пространство пласта частично заполнено газовым гидратом, а остальная часть – газом и водой. В начальный момент времени $S_v = 0,75$, $S_w = 0,6$. Начальное давление $P_0 = 3 \text{ МПа}$, что соответствует глубине 300 м, на которой в районах распространения криолитозоны возможно существование термодинамически равновесных газовых гидратов. Пренебрегая весом столба газа, принимаем, что давление на границе разлома равно атмосферному.

Для расчета были выбраны следующие значения параметров, характерные для Мессояхского газогидратного месторождения:

$$\rho_w = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{см}^3}, \rho_v = 910 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \rho_s = 2800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \beta_w = 0.9, A = 7.28K, B = 169.7K,$$

$$\mu_w = 10^{-3} \text{Па} \cdot \text{с}, \mu_g = 0.014 \cdot 10^{-3} \text{Па} \cdot \text{с}, c_w = 4165 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, c_g = 2500 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}},$$

$$c_s = 873 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{м}}, M = 0.016 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}, h = 514810 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}, R = 8.31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}},$$

$$m = 0.35, k(S_v) = k_0 \cdot S_v^3, k_0 = 10 \text{мД} = 10^{-14} \text{м}^2,$$

$$k_{rw}(S_w) = \begin{cases} 0, S_w < S_{w,\min} \\ 1.477S_w^5 - 1.587S_w^6 + 1.11S_w^7 - 0.0473, S_{w,\min} < S_w < S_{w,\max} \\ k_{rw}(S_{w,\max}), S_w > S_{w,\max} \end{cases},$$

$$k_{rg}(S_w) = \begin{cases} k_{rg}(S_{w,\min}), S_w < S_{w,\min} \\ 1.044 - 1.7S_w + 0.6S_w^2, S_{w,\min} < S_w < S_{w,\max} \\ 0, S_w > S_{w,\max} \end{cases}$$

$$S_{w,\max} = 0.9, S_{w,\min} = 0.55.$$

Длина модельного расчетного участка полагается равной l , $l = 1\text{м}$, шаг по пространственной координате h , $h = 0.01\text{м}$. Разлому соответствует правая граница участка, $P|_{x=l} = 0.1\text{МПа}$.

На рис. 1 приведены графики распределения растепленности в разные моменты времени до момента $t=12000$ с (далее весь гидрат диссоциирует, растепленность становится равной единице и больше не меняется). Из них видно, как диссоциация гидрата, начинающаяся вблизи границы с пониженным давлением, постепенно распространяется на всю область, приводя к полному его исчезновению. На графиках выделяются два фронта. Основной, соответствующий $S_v=0.97$, обусловлен переходом от трехфазной зоны, содержащей гидрат, газ и воду, к двухфазной, содержащей только газ и воду. Второй связан с интервалом изменения S_v от 0.97 до 1, обусловлен методом расчета и на протекание процесса практически не влияет.

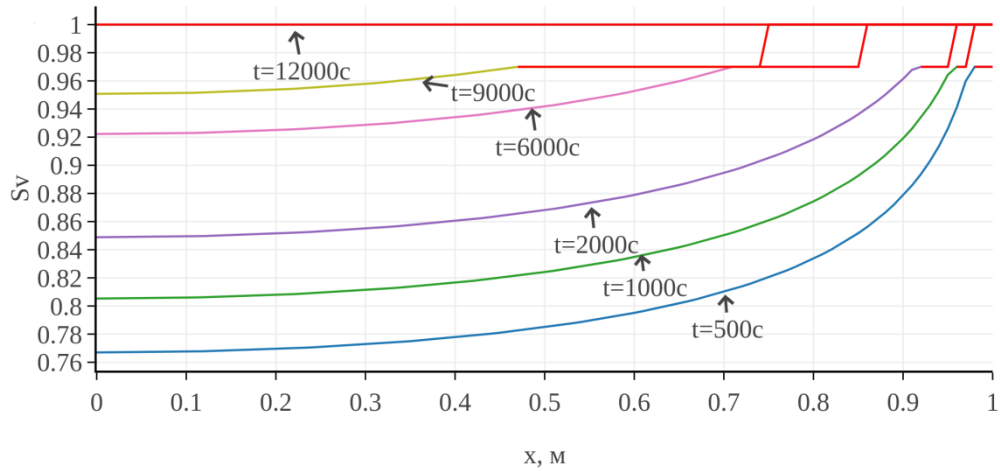


Рис. 1. Распределение растепленности для моментов времени 500, 1000, 2000, 6000, 9000, 12000 с.

На рис. 2, 3 представлено распределение давления в разные моменты времени.

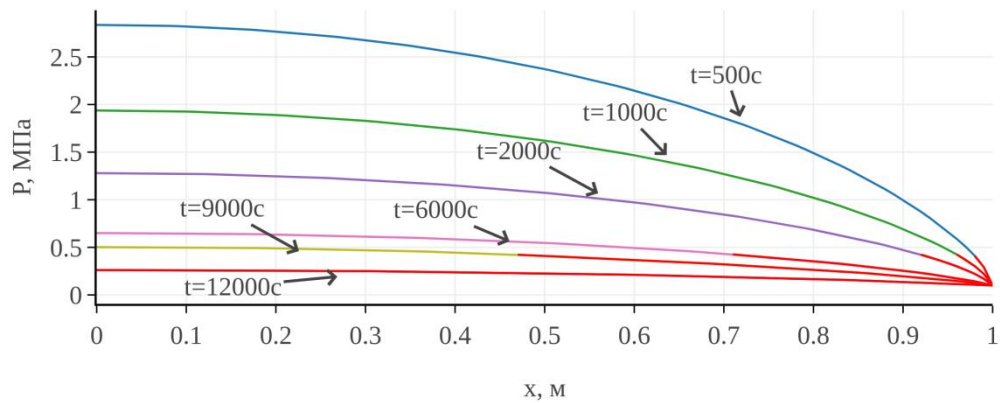


Рис. 2. Распределение давления для моментов времени 500, 1000, 2000, 6000, 9000, 12000 с.

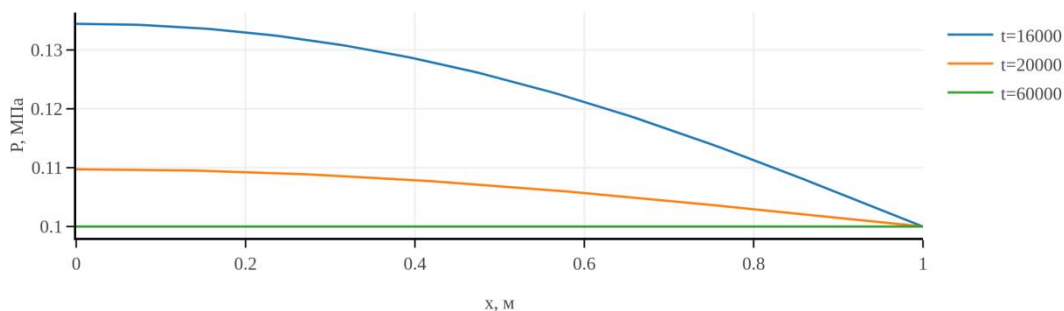


Рис. 3. Распределение давления для моментов времени 16000, 20000, 60000 с.

Из графиков видно, что на характер распределения давления наличие фронтов водонасыщенности и растепленности оказывает малое влияние, и давление изменяется почти как в однофазном случае, графики для которого (в задаче теплопроводности, аналогичной задаче однофазного упругого режима фильтрации) приведены в [16]. Давление стремится к постоянному, и, соответственно, скорости фильтрации газа и воды, пропорциональные градиенту давления, и зависящие от них члены уравнений стремятся к нулю. Таким образом, решение стабилизируется, растепленность во всей области становится равной единице, что соответствует полному разложению газового гидрата на газ и воду, а остаточные малые отклонения температуры от постоянной также медленно релаксируют к константе.

Сравнение графиков распределения температуры (рис. 4, 5) с графиками распределения растепленности показывает, что при переходе от трехфазной зоны к двухфазной на графиках наблюдается излом. Он связан с переходом от системы уравнений (1) – (7) с температурой, являющейся функцией давления, к системе (9) – (12), в которой температура является независимой переменной. Более детально это показано на рис. 6, 7, где представлена зависимость температуры от давления в разные моменты времени. На этих графиках выделяются два участка, один из которых соответствует зависимости (7), а другой – случаю отсутствия этой функциональной зависимости.

Из графиков видно, что в процессе диссоциации гидрата и фильтрационного движения флюидов при заданных в расчетах условиях, температура в некоторых частях области становится отрицательной. В этом случае модель должна усложняться изменением коэффициентов в формуле (7) для отрицательных температур, а также учетом эффекта самоконсервации газового гидрата [18]. Поскольку расчеты носят методический характер, здесь эти эффекты не учитывались.

При практическом отсутствии фильтрации на конечной стадии процесса остаточная динамика температуры (доли градуса) определяется теплопроводностью.

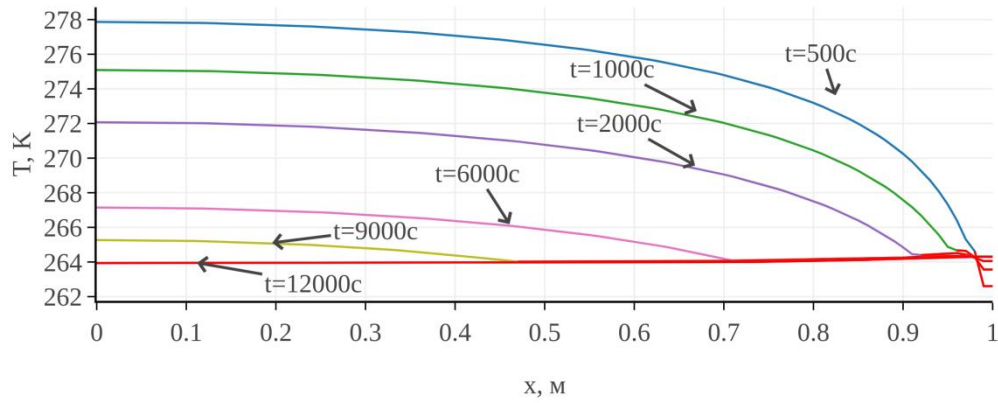


Рис. 4. Распределение температуры для моментов времени 500, 1000, 2000, 6000, 9000, 12000 с.

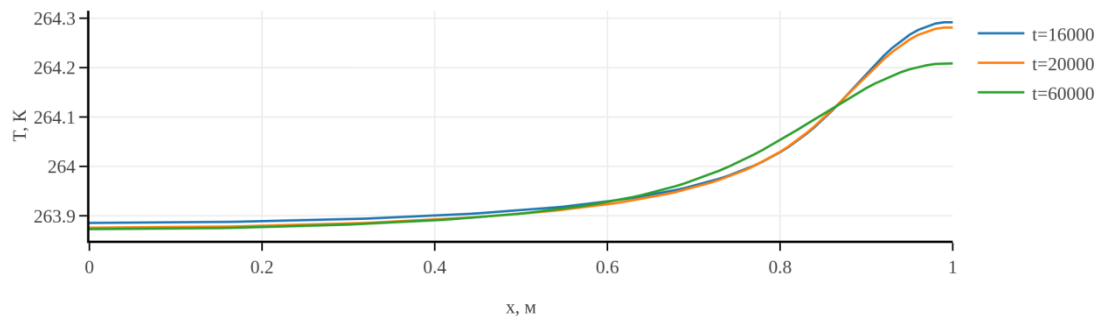


Рис. 5. Распределение температуры для моментов времени 16000, 20000, 60000 с.

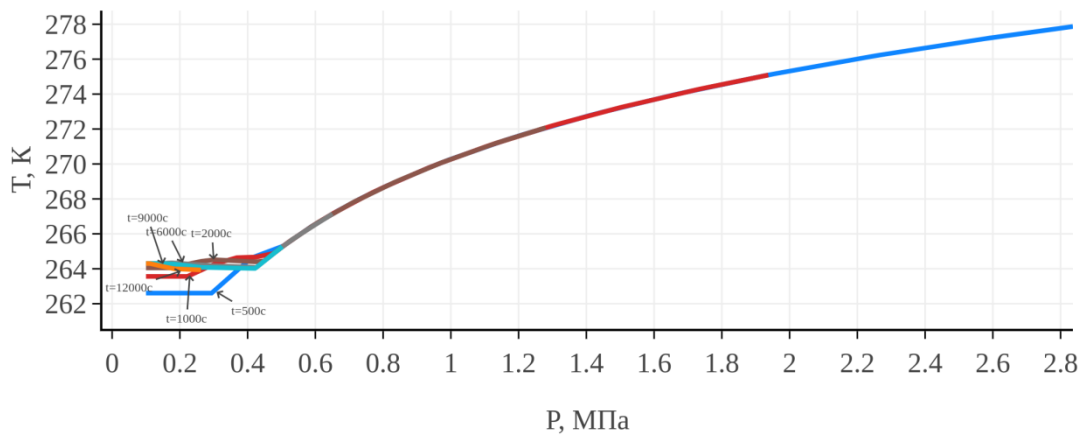


Рис. 6. Зависимость температуры от давления в разные моменты времени.

На рис. 7, 8 показано распределение водонасыщенности для различных моментов времени.

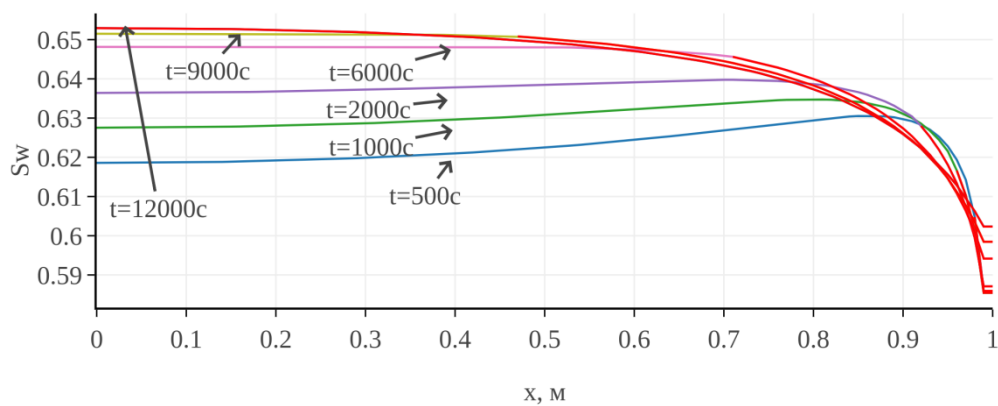


Рис. 7. Распределение водонасыщенности для моментов времени 500, 1000, 2000, 6000, 9000, 12000 с.

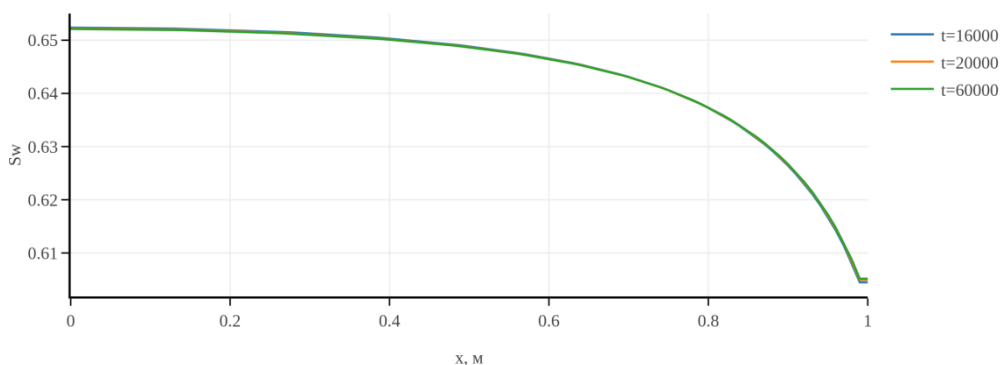


Рис. 8. Распределение водонасыщенности для моментов времени 16000, 20000, 60000 с.

Из графиков видно, что водонасыщенность на ранних и средних этапах процесса изменяется немонотонно, постепенно переходя к монотонному стационарному остаточному распределению.

Проведенные расчеты показывают динамику взаимодействия трехфазной зоны, содержащей гидрат, газ и воду, и двухфазной, содержащей только газ и воду, демонстрируют возможность выхода на неоднородное стационарное решение. Полученные результаты соответствуют физике процесса и показывают возможность применения разработанных методов к реальным задачам, связанным с газовыми гидратами.

5. Расчет напряженно-деформированного состояния

Данные, приведенные в разделе 4 работы, использованы для вычислительных экспериментов по расчету НДС многофазной среды, состоящей из твердого скелета грунта, вмещающего твердые либо растепленные гидратные включения. Объемная доля гидратов в среде m имеет характерные количественные значения $m \sim 0.1-0.3$. Гидратные включения могут быть в замороженном или в растаявшем состоянии, при этом объемная доля растепленных гидратов s_v имеет характерные количественные значения $s_v \sim 0.3-0.7$. С учетом введенных обозначений для элементарного объема среды δV можно записать выражение

$$\delta V = (1 - m)\delta V + m s_v \delta V + m(1 - s_v)\delta V. \quad (5.1)$$

В этой записи $(1 - m)\delta V$ – объем твердого скелета грунта, $m s_v \delta V$ – объем растепленного гидрата, $m(1 - s_v)\delta V$ – объем гидрата в твердой фазе. Твердый скелет грунта и гидрат в твердой фазе в рамках данной работы описываются как упругие среды, а растепленный гидрат – как жидкость, которая

воспринимает гидростатические нагрузки, но не сопротивляется сдвигу. Для описания напряженно-деформированного состояния среды используется модель Био. Параметры среды задаются в каждом элементе расчетной сетки по подсчитанным значениям растепленности. Для единой твердой фазы в рамках модели Био применяются эффективные механические параметры композиции скелета грунта и гидрата в твердом состоянии, осредненные с учетом их объемных долей в данной точке пространства.

Следует сразу отметить, что в используемой модели не рассматриваются долговременные эффекты механики грунтов, такие как ползучесть грунта, его консолидация при изменении влажности, а также влияние данных процессов на длительную прочность. Используемая в данной работе модель ориентирована на расчеты деформирования многофазной среды непосредственно после ее растепления, а рассмотрение более длительных процессов является отдельной задачей. В рамках данной работы используется расщепление по физическим процессам – термические и механические процессы рассматриваются отдельно. Сначала рассматривается растепление гидратов и вызванные им изменения фазового состава среды. Полученные зависимости используются как входные данные для расчетов деформаций.

Рассматривается геометрия расчетной области, приведенная на рисунке 9 – слой осадочной породы толщиной 1.6 км, нефтеносное ложе толщиной 0.2 км, подстилающий фундамент толщиной 1.2 км. Нижние и боковые границы расчетной области жестко зафиксированы по обеим осям, верхняя граница является свободной. Вся область находится в поле силы тяжести. Эффективные начальные параметры материалов слоев: слой осадочной породы имеет плотность $\rho = 2100 \text{ кг/м}^3$, модуль упругости $E = 3.6 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.31$. Параметры нефтеносного ложа $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$, $E = 3.2 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\nu = 0.31$, подстилающего фундамента $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$, $E = 4.54 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\nu = 0.33$. Принимается, что гидраты содержатся в слое осадочной породы, пористость данного слоя принимается равной 0.3. На рисунке 10 показана зависимость вертикальной компоненты напряжений от глубины в исходном состоянии, до начала растепления гидратов. Напряжения обусловлены нахождением среды в поле силы тяжести.



Рис. 9. Общий вид геометрии расчетной области.

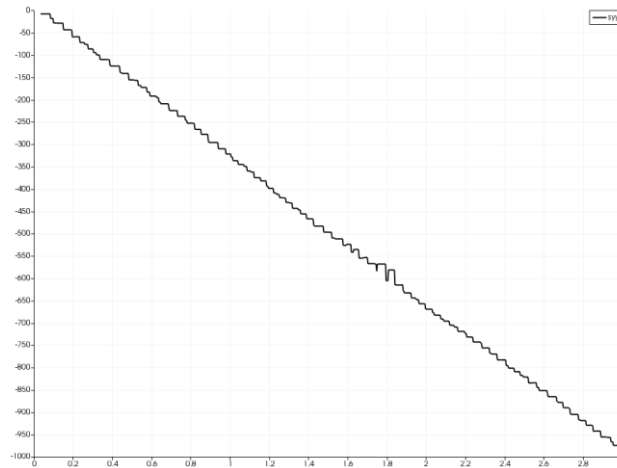


Рис. 10. Зависимость вертикальной компоненты тензора напряжений от глубины.

На рис. 11 показана зависимость вертикальной компоненты тензора деформации от глубины для исходного нерастепленного состояния, видны три реологически различных слоя с разными механическими характеристиками.

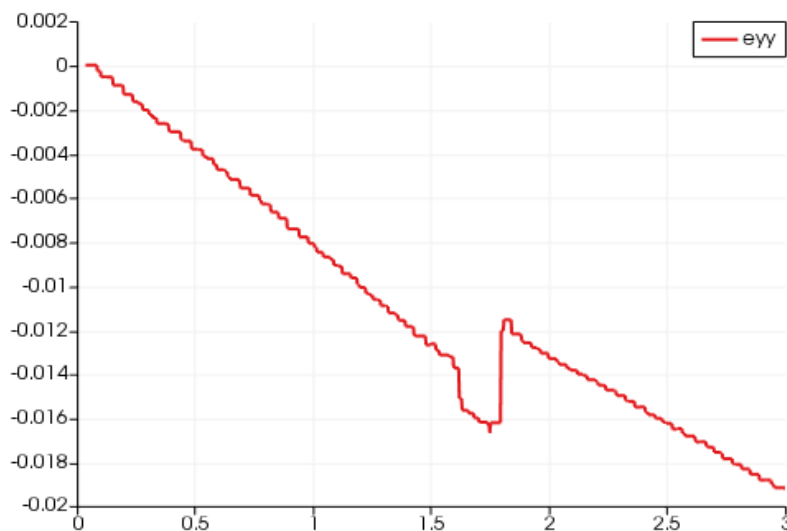


Рис. 11. Зависимость вертикальной компоненты тензора напряжений от глубины в исходном состоянии.

Далее для нескольких постановок показаны распределение эффективных упругих свойств по расчетной области после растепления и распределение деформаций по глубине. На рис. 12 и 13 показаны результаты расчетов для случая одномерного распределения растепленности. В данной постановке тепло распространяется от нефтеносного пласта вверх, зависимость растепленности от горизонтальной координаты отсутствует. Распределение растепленности одномерное, зависит только от глубины, захватывает четверть слоя вышележащей породы.



Рис. 12. Распределение эффективных упругих свойств для одномерного распределения растепленности.

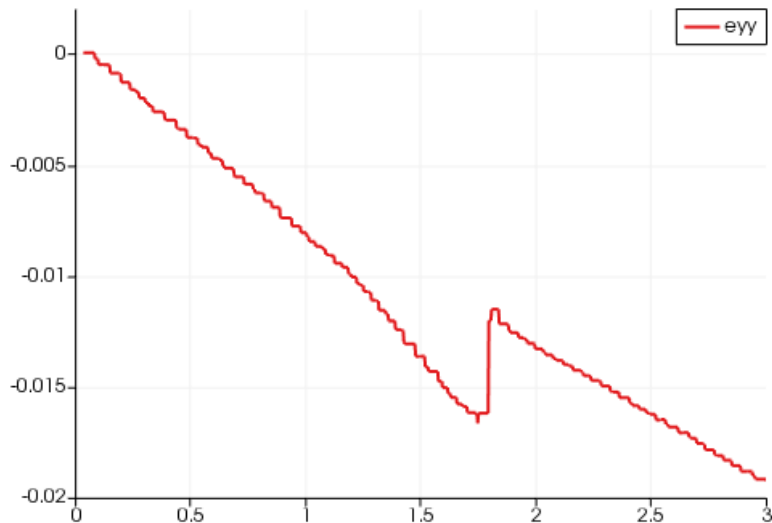


Рис. 13. Зависимость вертикальной компоненты тензора напряжений от глубины для одномерного распределения растепленности.

На рис. 14 и 15 показаны результаты расчетов для случая двумерного распределения растепленности. В данной постановке растепленность зависит как от глубины, так и от горизонтальной координаты. По глубине растепленность распространяется на весь слой породы, по горизонтали область растепленности занимает четверть расчетной области.



Рис. 14. Распределение эффективных упругих свойств для двумерного распределения растеplенности.

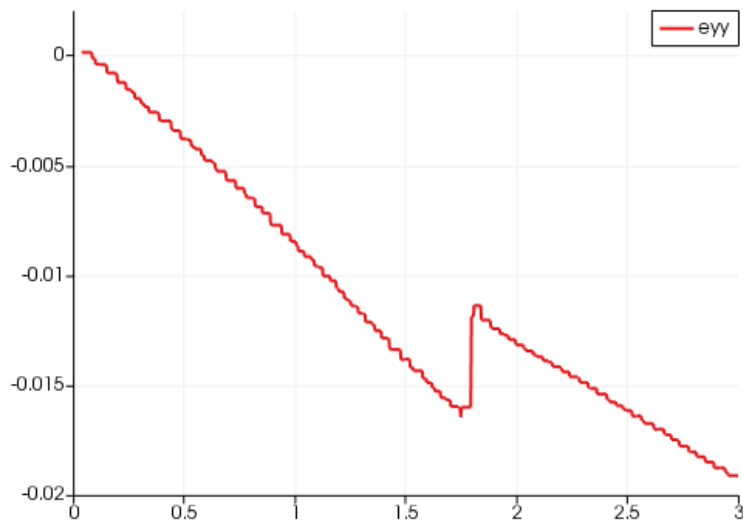


Рис. 15. Зависимость вертикальной компоненты тензора напряжений от глубины для двумерного распределения растеplенности.

6. Заключение

Приведенные расчеты по упрощенной модели показывают, что она позволяет получить качественно верную и количественно удовлетворительную информацию о проседании поверхности и возможных повреждениях расположенных на ней сооружений.

На основе полученных данных можно сделать оценки кривизны просевшего слоя – зависимость деформации в вертикальном направлении Y от координаты X по горизонтали. Вдоль поверхности – будет оценка кривизны после проседания.

В дальнейшем для развития работы представляется важным рассмотреть вопрос о граничных условиях, поскольку жесткая фиксация на краях расчетной области порождает некоторую кривизну грунтовых слоев до начала таяния, что, вообще говоря, не всегда соответствует физике изучаемых процессов. Также представляется важным изучить иные постановки задач, например,

относящиеся к деформациям грунтов в окрестности депрессионных воронок, в областях около добывающих скважин.

Авторы благодарят О.Г. Ольховскую за полезное обсуждение постановок задач и численных методик их решения. Авторы благодарны О.В. Фроловой за помощь в подготовке рукописи данной работы.

Библиографический список

1. Biot M.A. *Mechanics of Incremental Deformation*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1965.
2. Biot M.A. *Mechanics of Deformation and Propagation in Porous Media*. – *J. Appl. Phys.*, 1962, V.33, No 4, p. 1482-1489.
3. Глобальные проблемы / Яншин А.Л., Будыко М.И., Израэль Ю.А. Глобальное потепление и его последствия биосферы. М.: Наука, 2003.
4. Hjort J., Karjalainen O., Aalto J. et al. Degrading permafrost puts Arctic infrastructure at risk by mid-century // *Nature Communications*. 2018. Vol. 9. Article № 5147. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/s41467-018-07557-4>.
5. Rice R. and Cleary M.P. Some Basic, Stress Diffusion Solutions for Fluid-Saturated Elastic Porous Media with Compressible Constituents // *Review of Geophysics, Space Physics*, Vol. 14, No. 2, 1976, pp. 227-241. doi:10.1029/RG014i002p00227
6. Авербух А.З., Ахияров В.Х., Жиркевин В.Ю., Колдоба А.В., Кузнецов О.Н., Попов Ю.П., Пергамент А.Х., Повещенко Ю.А., Хозяинов М.С. Математическое моделирование процессов подземной гидродинамики в напряженно-деформированных средах // *ДАН*, 1995, т.340, БР 1, С.51-56.
7. Гнедин Ю.И., Колдоба А.В., Мясников В.П., Пергамент А.Х., Повещенко Ю.А., Попов С.Б., Симус Н.А. Процессы фильтрации в напряженно-деформированных средах / Сборник трудов ИАПУ ДВО РАН. — Владивосток: 1996, 14 с.
8. Desrocher J., Detoumay E., Lenoach B., Papanastasiou P., Cheng A. The crack tip region in hydraulic fracturing // *Proc.R.Soc.Lond*. 1994, A 447, p.39-48.
9. George E. Mase. *Theory and Problems of Continuum Mechanics*. McGraw-Hill Publ., New-York, 1970.
10. Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. — Минск: ЗАО "Критерий", 1996. - 276 с.
11. Петров И.Б., Лобанов А.И. Математическое моделирование нелинейных процессов. – Учебник. М.: 2020. Сер. 76 Высшее образование.
12. Стогний П.В., Хохлов Н.И., Петров И.Б. Численное моделирование волновых процессов в слоистых средах с газонасыщенными включениями: сравнение двумерных и трехмерных моделей. Доклады Академии наук. 2019. Т. 489. № 4. С. 351-354.

13. Беклемышева К.А., Васюков А.В., Голубев В.И., Петров И.Б. Численное моделирование воздействия сейсмической активности на подводный композитный трубопровод // Математическое моделирование. 2019. Т. 31. № 1. С. 103-113.
14. Sharova Y.S., Boykov D.S., Beklemysheva K.A., Vasyukov A.V., Petrov I.B. The fracture of materials under intensive short-time loads. В сб.: AIP Conference Proceedings. 45. Сер. "Proceedings of the 45th International Conference on Application of Mathematics in Engineering and Economics, AMEE 2019" 2019. С. 070019.
15. Рагимли П. И., Рагимли О. Р., Повещенко Ю. А., Подрыга В. О., Гасилова И. В. Программное обеспечение для моделирования флюидодинамики и трансфазных процессов в коллекторах, содержащих газогидраты // *Матем. моделирование*, 31:2 (2019), 95–111.
16. Повещенко Ю. А., Подрыга В. О., Попов И. В., Попов С. Б., Рагимли П. И., Казакевич Г. И. Численное моделирование диссоциации газогидратов в пористой среде в одномерной постановке // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 161:2 (2019), 205–229.
17. Рагимли П. И., Повещенко Ю. А., Рагимли О. Р., Подрыга В. О., Казакевич Г. И., Гасилова И. В. Использование расщепления по физическим процессам для моделирования диссоциации газовых гидратов // *Матем. моделирование*, 29:7 (2017), 133–144.
18. Бондарев Э.А., Рожин И.И., Попов В.В., Аргунова К.К. Оценка возможности подземного хранения гидратов природного газа в зоне многолетней мерзлоты // *Криосфера Земли*, 2015, Т. XIX, No 4, с. 64-74.