



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 113 за 2020 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[О.В. Щерица](#), [О.С. Мажорова](#),
[О.А. Шатров](#)

Анализ структуры
многомасштабного течения
в горизонтальном слое
жидкости с неоднородными
свойствами

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Щерица О.В., Мажорова О.С., Шатров О.А. Анализ структуры многомасштабного течения в горизонтальном слое жидкости с неоднородными свойствами // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 113. 21 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2020-113>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-113>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша
Российской академии наук

О.В. Щерица, О.С. Мажорова, О.А. Шатров

Анализ структуры
многомасштабного течения
в горизонтальном слое жидкости
с неоднородными свойствами

Москва — 2020

Щерица О.В., Мажорова О.С., Шатров О.А.

Анализ структуры многомасштабного течения в горизонтальном слое жидкости с неоднородными свойствами

В работе проведен анализ структуры течения в горизонтальном слое жидкости с неоднородными свойствами. Исследованы среды с нелинейной теплопроводностью, зависящей от температуры, и среды с внутренними источниками тепла. Во всех рассмотренных случаях устанавливался профиль температуры, при котором слой неустойчиво стратифицирован и основной перепад температуры приходился на тонкий верхний подслой. Получено многомасштабное течение, структура которого исследовалась методами вычислительной гомологии и методами на основе теории динамических систем. Рассматривался диапазон значений числа Прандтля от 0,5 до 10. Изучено, как свойства среды влияют на структуру движения жидкости.

Ключевые слова: многомасштабная конвекция, математическое моделирование, вычислительная гомология, аттрактор.

**Olga Vladimirovna Shcheritsa, Olga Semenovna Mazhorova,
Oleg Alexandrovich Shatrov**

Investigation of the multiscale flow structure in a horizontal fluid layer with inhomogeneous properties

The paper provides the study of the flow structure in a horizontal fluid layer with variable thermal diffusivity or with internal heat generation. The media properties are set up to produce a thin boundary sublayer convectively much more unstable than the bulk of the layer. The obtained multiscale flow was studied by computational homology methods and methods based on the theory of dynamical systems. The flows were investigated for the Prandtl number in the range $[0, 5, 10]$. The effect of medium properties on the structure of the fluid motion was studied.

Key words: multiscale convection, mathematical modeling, computational homology, attractor

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-01-00436.

Введение

В данной работе рассматривается класс течений, в которых исходный статический профиль температуры имеет следующий вид: большая часть слоя практически равномерно прогрета. Температура изменяется на величину δT , малую по сравнению с полным перепадом температуры ΔT , а основное изменение температуры приходится на тонкий подслой вблизи верхней границы, толщина которого Δh составляет малую часть полной толщины слоя H . При этом весь слой стратифицирован неустойчиво (см. рис.1). Такое распределение температуры наблюдается в мантии Земли, конвективной зоне Солнца и других астрофизических объектах. Формирование требуемого статического профиля осуществляется двумя способами: за счет нелинейного коэффициента теплопроводности, зависящего от температуры, как это было сделано в работах [1–3], или за счет специального распределения источников тепла, зависящего от температуры среды. Рассматривались течения при высокой надкритичности и различных значений числа Прандтля. Данная работа является продолжением работы [3], посвященной исследованию многомасштабной конвекции.

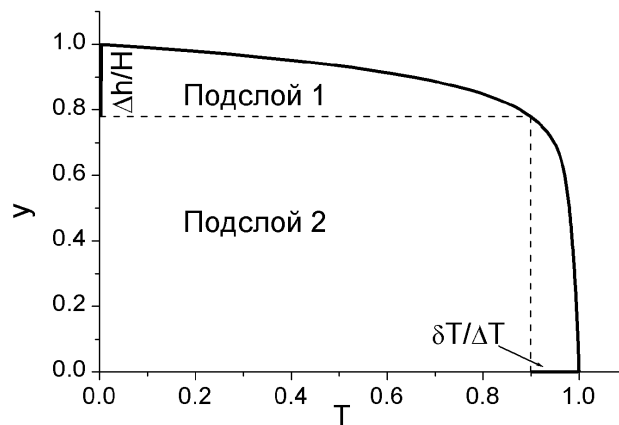


Рис. 1. Статический профиль температуры.

Авторы выражают благодарность д.ф.-м.н А.В. Гетлингу за предложенную постановку задачи о конвекции в слое жидкости с переменной теплопроводностью.

1. Постановка задачи

Рассмотрим конвективное движение в горизонтальном слое жидкости. Прямоугольная область $\Omega = [0, L] \times [0, H]$, $L \gg H$ заполнена вязкой несжимаемой жидкостью. Нижняя и верхняя границы поддерживаются при постоянной температуре, $T_{bot} = 1$ и $T_{top} = 0$ соответственно. Боковые стенки теплоизолированы. Основу математической модели составляют уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение конвективной теплопроводности [4], записанные в безразмерном виде в переменных "функция тока–вихрь":

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x \cdot \omega) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y \cdot \omega) = \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] + Gr \frac{\partial T}{\partial x} e_y, \quad (1)$$

$$\omega = - \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right], \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x \cdot T) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y \cdot T) = \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + \\ + \frac{1}{Pr} Q(T). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь x, y — декартовы координаты, t — время, ω — вихрь, ψ — функция тока, v_x и v_y — компоненты вектора скорости, $Gr = \frac{g\beta H^3 \Delta T}{\nu^2}$ — число Грасгофа, g — модуль ускорения свободного падения, e_y — единичный вектор, направленный вертикально вверх, β — коэффициент теплового расширения, ν — кинематическая вязкость, T — температура, $\kappa(T)$ — коэффициент температуропроводности, $Q(T)$ — функция источника тепла, Pr — число Прандтля, в случае нелинейной теплопроводности число Прандтля определялось по теплопроводности, соответствующей верхней границе области.

Неявная консервативная разностная схема для задачи (1)–(3) была построена методом конечных объемов на разнесенных сетках с использованием переинтерполяций Аракавы [5, 6]. Полученная система сеточных уравнений решалась с помощью стандартной процедуры расщепления по физическим

процессам [7]. Сначала из уравнений Навье–Стокса (1)–(2) с помощью матричного алгоритма [8–10] вычислялось поле скоростей, затем из уравнения теплопроводности (3) определялось распределение температуры в слое.

В работе рассмотрено две задачи:

- 1) задача с нелинейной теплопроводностью. $\kappa(T) = 1 + \alpha T + \beta T^n$, $Q(T) = 0$;
- 2) задача с внутренними источниками тепла. $\kappa(T) = 1$, $Q(T) \neq 0$.

Температурный профиль, приведенный на рисунке 1, является решением стационарной задачи теплопроводности с коэффициентом $\kappa(T) = 1 + \alpha T + \beta T^n$ и может быть представлен в виде неявно заданной функции [3]:

$$\frac{(T - 1) + \frac{\alpha}{2}(T^2 - 1) + \frac{\beta}{n+1}(T^{n+1} - 1)}{1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{n+1}} = \frac{y}{H}. \quad (4)$$

В то же время функция (4) является решением задачи

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Q(T) = 0, \quad y \in [0, 1], \quad T(0) = 1, \quad T(1) = 0, \quad (5)$$

где источник тепла

$$Q(T) = \frac{(\alpha + n\beta T^{n-1}) C^2}{(\kappa(T))^3}, \quad (6)$$

$$C = 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{n+1}.$$

В работах [1–3] использовали параметры $\alpha = 10$, $\beta = 600$, $n = 10$, которые в дальнейшем будем называть параметрами I , соответствующее им распределение источника тепла $Q(T)$ приведено на рисунке 2, максимальное значение источника при температуре в диапазоне от 0 до 1 равно 3655,8, минимальное — 0,0966. Резкое изменение величины источника приходится на достаточно узкий диапазон $T \in [0,99, 1]$.

Рассмотрим набор параметров II : $\alpha = 1$, $\beta = 200$, $n = 10$. Соответствующий профиль температуры и распределение источников приведены на рисунках 3 и 4 соответственно. Статические профили температуры для параметров

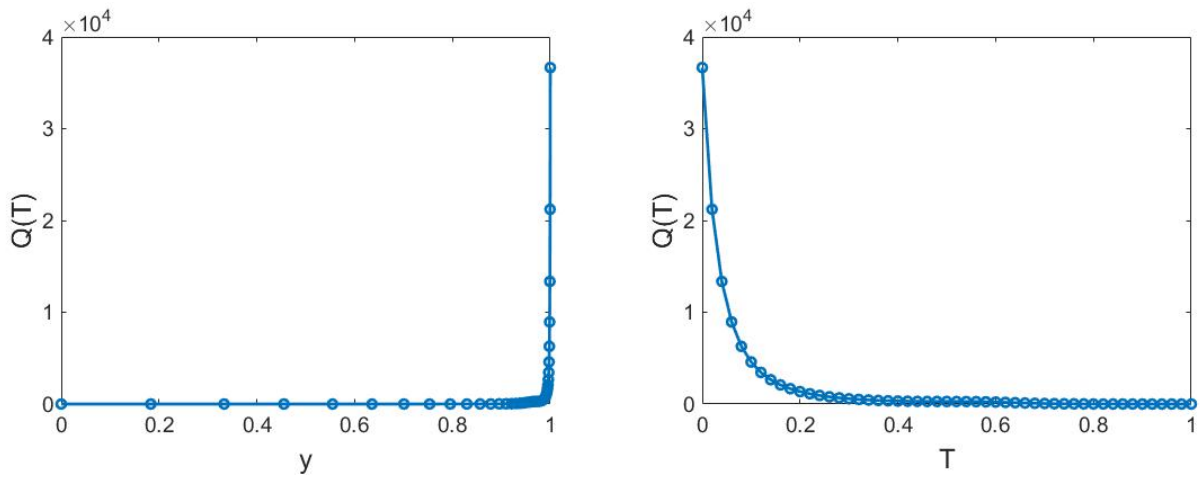


Рис. 2. Распределение источников тепла, $\alpha = 10$, $\beta = 600$, $n = 10$

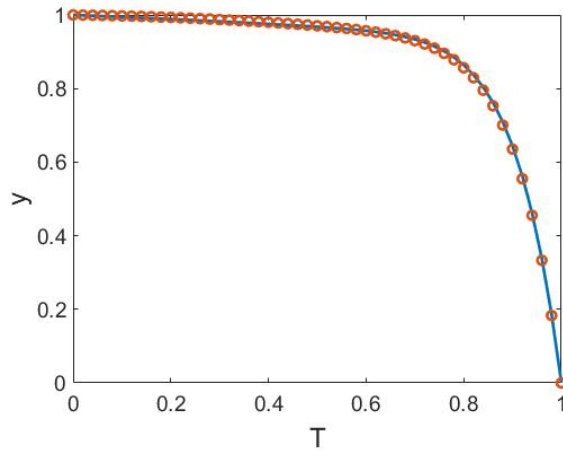


Рис. 3. Статический профиль температуры. Синяя линия — параметры I , красный кружочки — параметры II

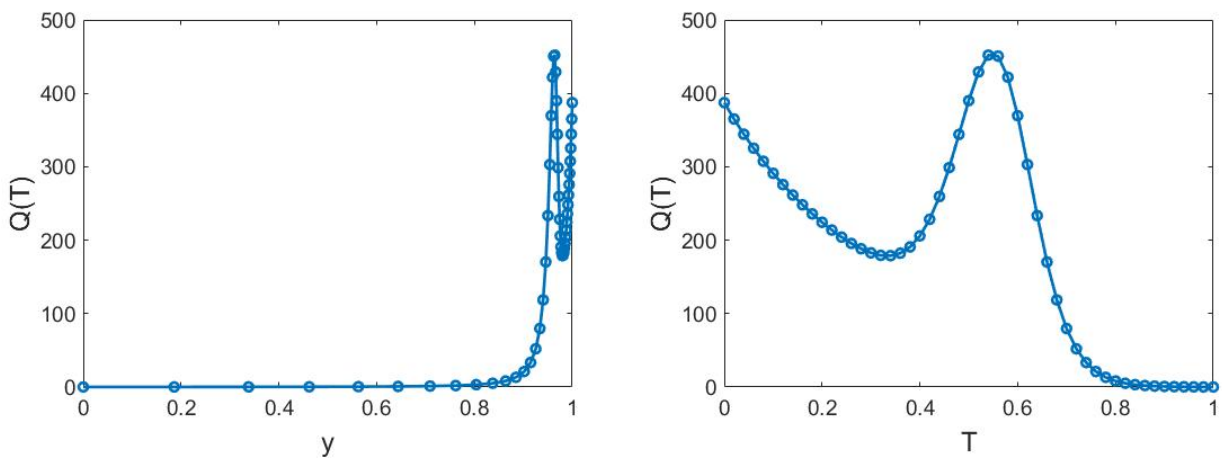


Рис. 4. Распределение источников тепла $Q(T)$, параметры II

I и II практически совпадают, при этом источники $Q(T)$ отличаются. При параметрах II распределение источников изменяется в диапазоне от 0,0940 до 452,0259, при этом максимум достигается при температуре $T = 0,54$.

Рассмотрим прямоугольную область с жесткими границами: $\psi = 0$, $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$, где n — внешняя нормаль.

2. Результаты расчетов

Расчеты проводились в области $[0, 15] \times [0, 1]$ для значения числа Прандтля $Pr \in [0, 5, 10]$ и числа Рэлея $Ra = 120Ra_{cr}$, где Ra_{cr} — критическое число Рэлея. Значения критического числа Рэлея приведены в таблице 1. Использовались пространственные сетки с числом узлов по горизонтали $N_x = 1024$, по вертикали $N_y = 50$ и шагом по времени $\tau = 0,01$.

Таблица 1. Значения критического числа Рэлея

	$\kappa(T)$	$Q(T)$
Параметры I	$5 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^4$
Параметры II	$5,75 \cdot 10^5$	$1,75 \cdot 10^4$

Расчеты проводились с помощью параллельного комплекса программ, разработанного авторами для вычислительного кластера K100, установленного в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

2.1. Нелинейная теплопроводность

На рисунке 5 приведены структуры течения в слое жидкости с температуропроводностью, зависящей от температуры. Течение начинало развиваться в тонком слое вблизи верхней границы, затем холодные струи пробивали всю толщину слоя, практически до самого дна, вовлекая весь слой в движение. Возникали валиковые структуры, размер которых сравним с высотой всей области, между этими валами вблизи горизонтальных границ области наблюдались мелкомасштабные структуры (рис. 5 а, б). Такая же структура

течения была зарегистрирована в работах [2,3], но при более низкой надкритичности ($Ra = 10Ra_{cr}$).

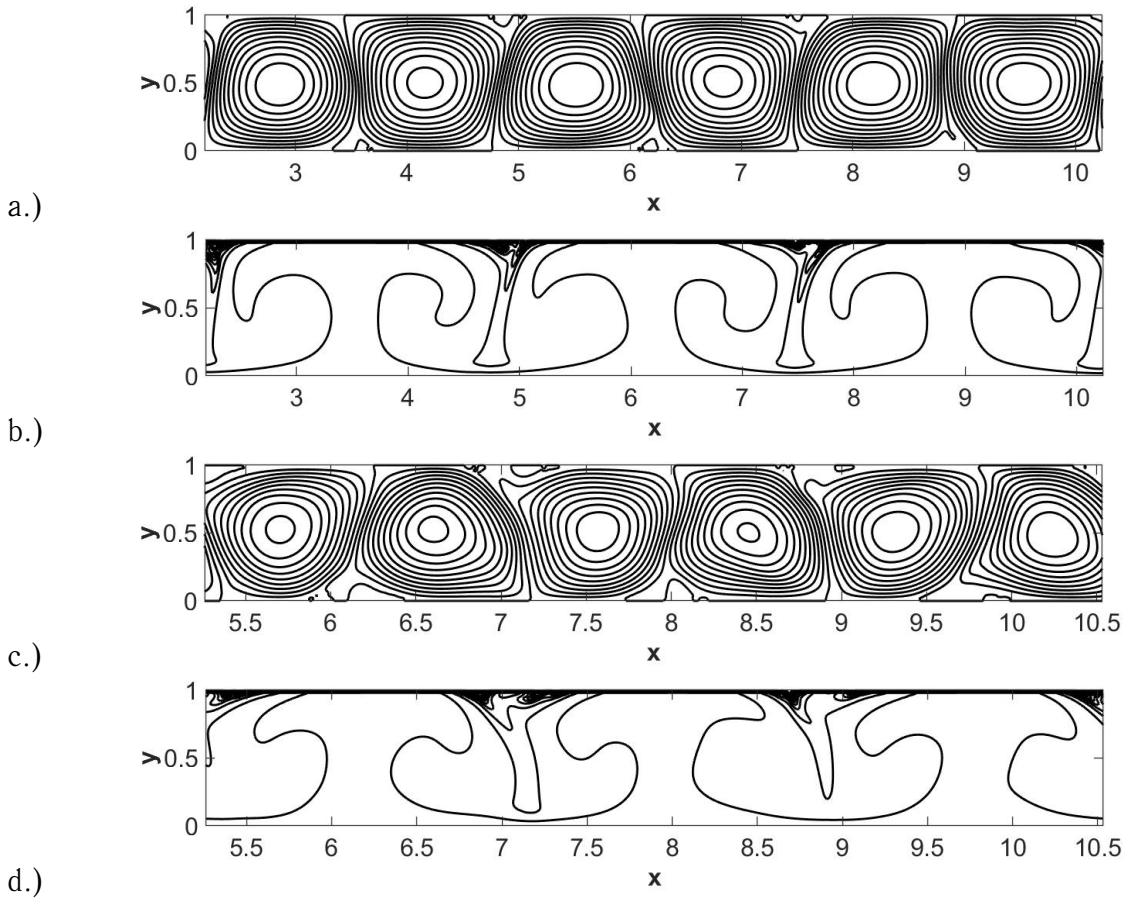


Рис. 5. Структура течения, нелинейная теплопроводность, $Pr = 1$. а.) Функция тока. Параметры I , б.) Распределение температуры. Параметры I , с.) Функция тока. Параметры II , d.) Распределение температуры. Параметры II .

Течения, приведенные на рисунке 5, имеют один и тот же статический профиль и одинаковую надкритичность. В случае параметров I в области длиной $L = 15$ разместилось 12 крупномасштабных структур, при параметрах II — 17. На рисунке 5 изображена часть расчетной области. В обоих случаях установилось периодическое течение с постоянным числом крупномасштабных структур.

Рассмотрим траектории движения частиц (рис. 6). В фазовом пространстве (y, V_y) траектории образуют циклы: большой цикл соответствует крупномасштабным структурам, пара небольших вблизи горизонтальных границ ($y = 0, 1$) — мелкому масштабу (рис. 6, б). Заметим, что при параметрах II восходящая скорость в 1,8 раз больше, чем при параметрах I , нисходя-

щая – в 1,4 раза больше. Мелкомасштабные структуры вблизи дна ($y = 0$) при параметрах I практически в два раза крупнее, чем при параметрах II (рис. 6, с).

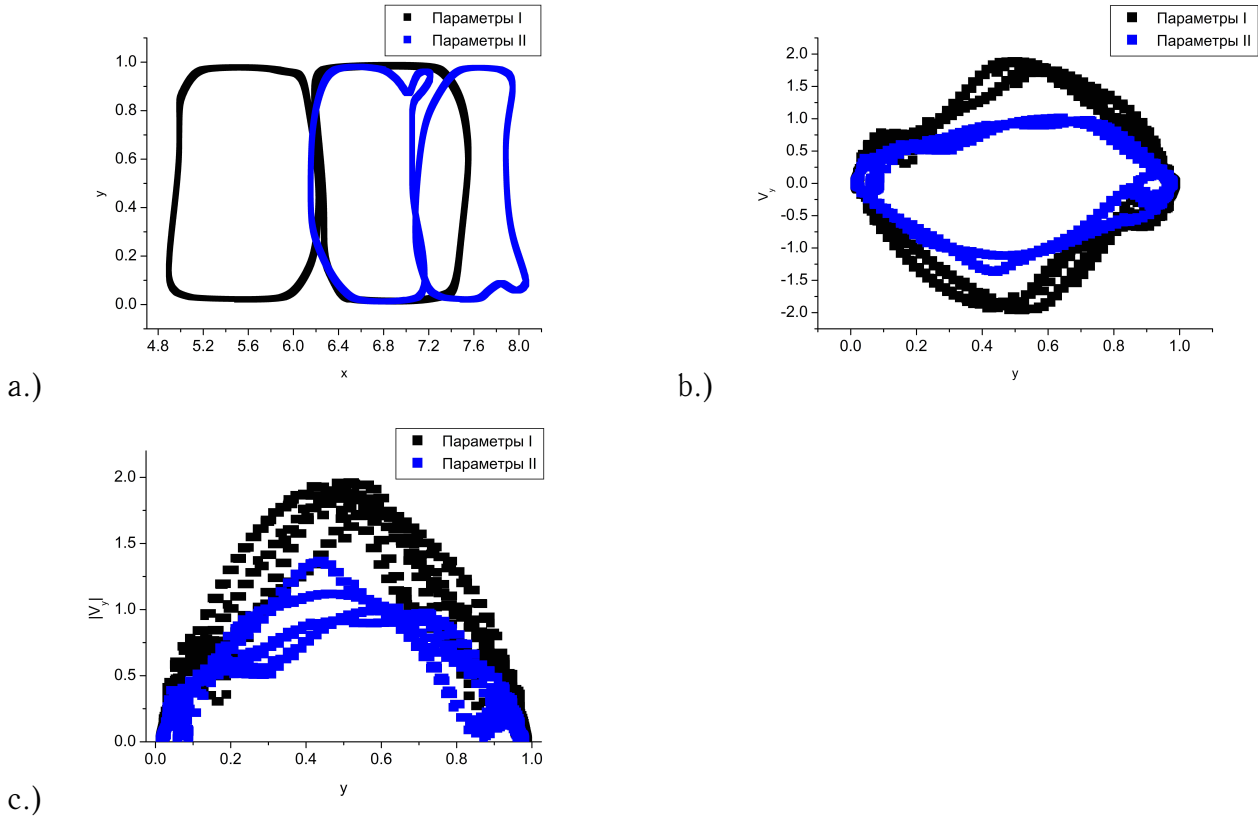


Рис. 6. Нелинейная теплопроводность, $Pr = 1$. а.) Траектории движения частиц; б.) Траектории движения частиц в фазовом пространстве (y, V_y) ; с.) Траектории движения частиц в фазовом пространстве $(y, |V_y|)$.

2.2. Внутренние источники тепла

На рисунке 7 приведены структуры течения в слое жидкости с внутренними источниками тепла. Течение развивалось так же, как и в случае нелинейной теплопроводности. При параметрах I и II установилось течение с двадцатью двумя крупными валами практически одного размера. В поле температуры можно наблюдать замкнутые изолинии. В установившемся течении источник действует только вблизи верхней горизонтальной границы (рис. 8).

Анализ траекторий движения частиц показал, что крупномасштабные структуры при параметрах I и II имеют не только одинаковые размеры, но и

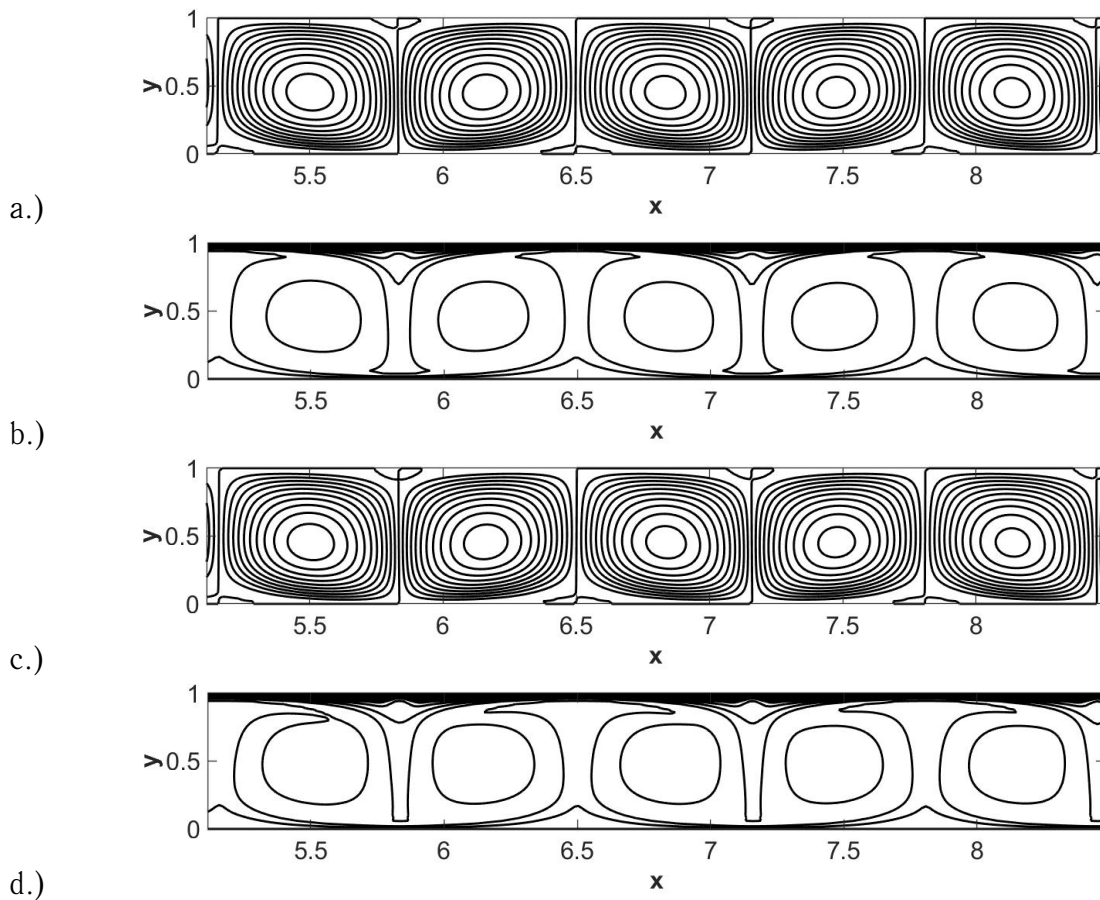


Рис. 7. Структура течения, внутренние источники тепла, $Pr = 1$. а.) Функция тока. Параметры I , б.) Распределение температуры. Параметры I , с.) Функция тока. Параметры II , д.) Распределение температуры. Параметры II .

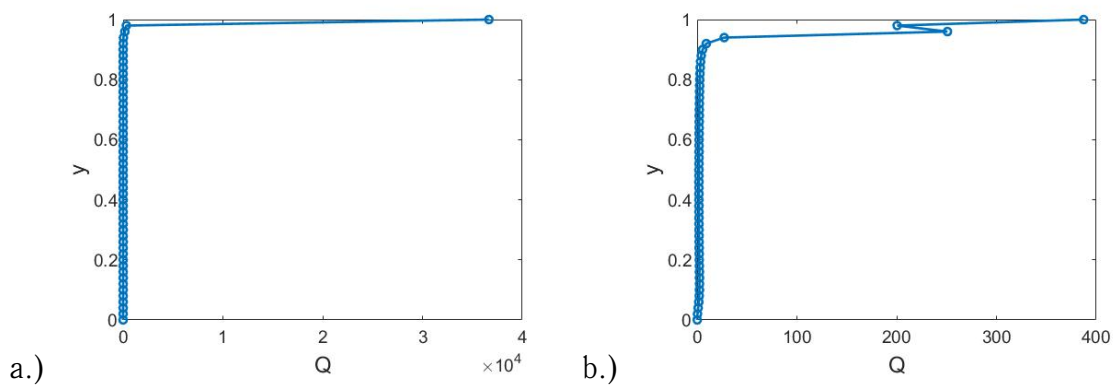


Рис. 8. Распределение внутренних источников тепла, построенное по усредненному полю температуры, $Pr = 1$. а.) Параметры I ; б.) Параметры II .

скорости изменяются в одинаковом диапазоне (рис. 9 а). Это объясняется тем, что в результате установившегося распределения температуры источник действует только в верхней части слоя (рис. 8). Структуры отличаются толь-

ко диапазоном изменения температуры. При параметрах I $T \in [0.342, 0.955]$, при параметрах II — $T \in [0, 539, 0, 930]$ (рис. 9 б).

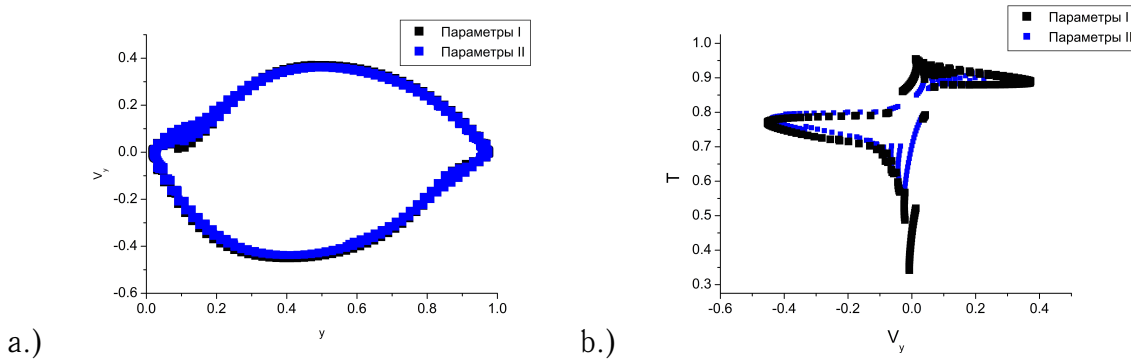


Рис. 9. Внутренние источники тепла, $Pr = 1$. а.) Траектории движения частиц в фазовом пространстве (y, V_y) ; б.) Траектории движения частиц в фазовом пространстве (V_y, T) .

2.3. Структура течения в зависимости от значения числа Pr

В случае нелинейной теплопроводности с ростом значения числа Прандтля размер крупномасштабных структур уменьшается (см. рис. 10). Методами вычислительной гомологии [3, 11–16] можно оценить количество мелкомасштабных структур, которые локализованы вблизи горизонтальных границ области. Для этого в поле вертикальной компоненты скорости выделим два топологических пространства, соответствующие нисходящим и восходящим потокам. На рисунке 11 приведен пример такого представления поля скорости для параметров I $Pr = 10$. Видно, что вблизи горизонтальных границ внутри сплошного белого цвета есть включения маленьких черных пятен, и наоборот, включение белых пятен в черные области. То есть внутри восходящих потоков есть включения нисходящих и наоборот. Количество этих пятен изменяется с изменением значения числа Прандтля и надкритичности. С помощью пакета СНотР [17] были вычислены топологические инварианты, числа Бетти. Первое число Бетти — это количество связанных областей в пространстве, второе число Бетти — количество независимых циклов, то есть отверстий. На рисунке 12 а. приведено изменение первого числа Бетти топологического пространства, соответствующего нисходящим потокам, для разных значений числа Прандтля. Это значение числа Бетти включает в себя области крупных потоков, идущих от самого верха до дна, и те, которые

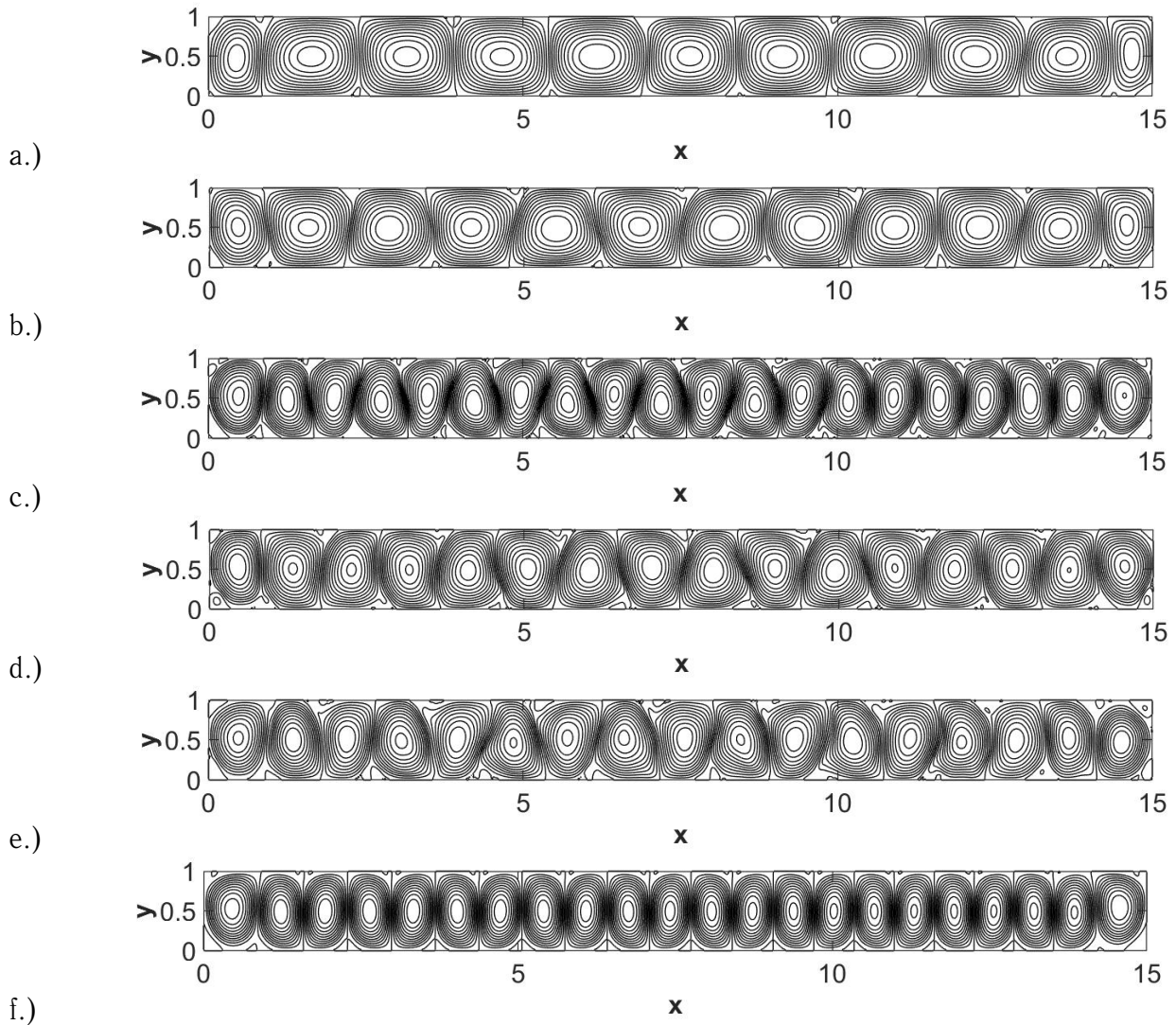


Рис. 10. Нелинейная теплопроводность. Функция тока. Параметры I : a.) $Pr = 0.5$; b.) $Pr = 1$; c.) $Pr = 10$; Параметры II : d.) $Pr = 0.5$; e.) $Pr = 1$; f.) $Pr = 10$.

оказались внутри больших восходящих потоков, то есть маленькие черные пятнышки. С ростом значения числа Прандтля количество мелкомасштабных структур увеличивается.

С помощью анализа поля температуры можно оценить количество крупных структур в области. Выделим топологическое пространство, состоящее из точек, в которых температура выше средней температуры в горизонтальном сечении [3]. На рисунке 12 б. приведены значения второго числа Бетти для разных значений числа Прандтля. Вторые числа Бетти — это количество отверстий, то есть это области более холодные. Сравнение данных рисунков 12 б и 10 показывает, что второе число Бетти совпадает с количеством крупных структур в течении.

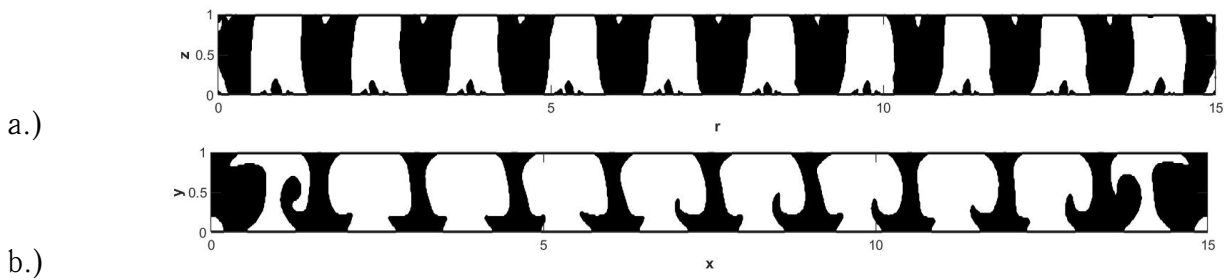


Рис. 11. Нелинейный коэффициент теплопроводности, параметры I , $Pr = 10$. а.) Поле скоростей. Белый цвет соответствует области восходящих потоков. Черный – нисходящим. б.) Поле температуры. Белый цвет соответствует области температур выше средней температуры в горизонтальном сечении (T_{mean}). Черный – областям температур ниже средней.

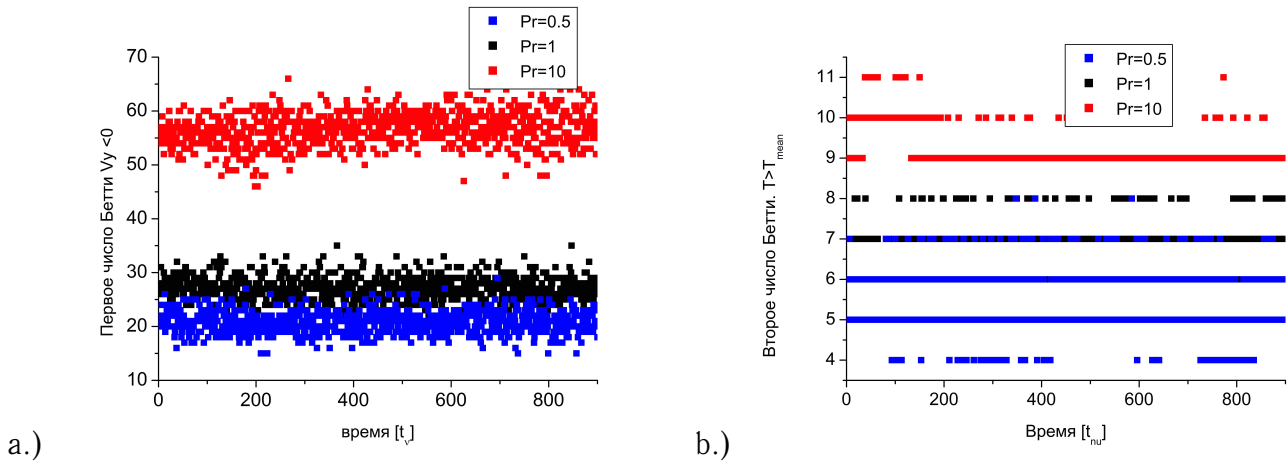


Рис. 12. Нелинейный коэффициент теплопроводности. Параметры I , t_ν – конвективное время. а.) Первое число Бетти области нисходящих потоков. б.) Второе число Бетти более теплого подпространства.

На рисунке 13 приведены структуры течения, возникающие для различных значений числа Прандтля в задаче с внутренними источниками тепла. При больших значениях Прандтля течение не вышло на квазистационарный режим, мелкомасштабные структуры перемещаются вдоль горизонтальных границ и кажется, что они проскальзывают вниз вместе с мощными нисходящими струями. На рисунке 14 приведены результаты исследования методами вычислительной гомологии. С ростом значения числа Прандтля крупномасштабные структуры увеличиваются в размере. Когда ширина валов становится значительно больше высоты вала, течение теряет свою строгую регулярность, выхода на стационар не происходит. Крупные структуры

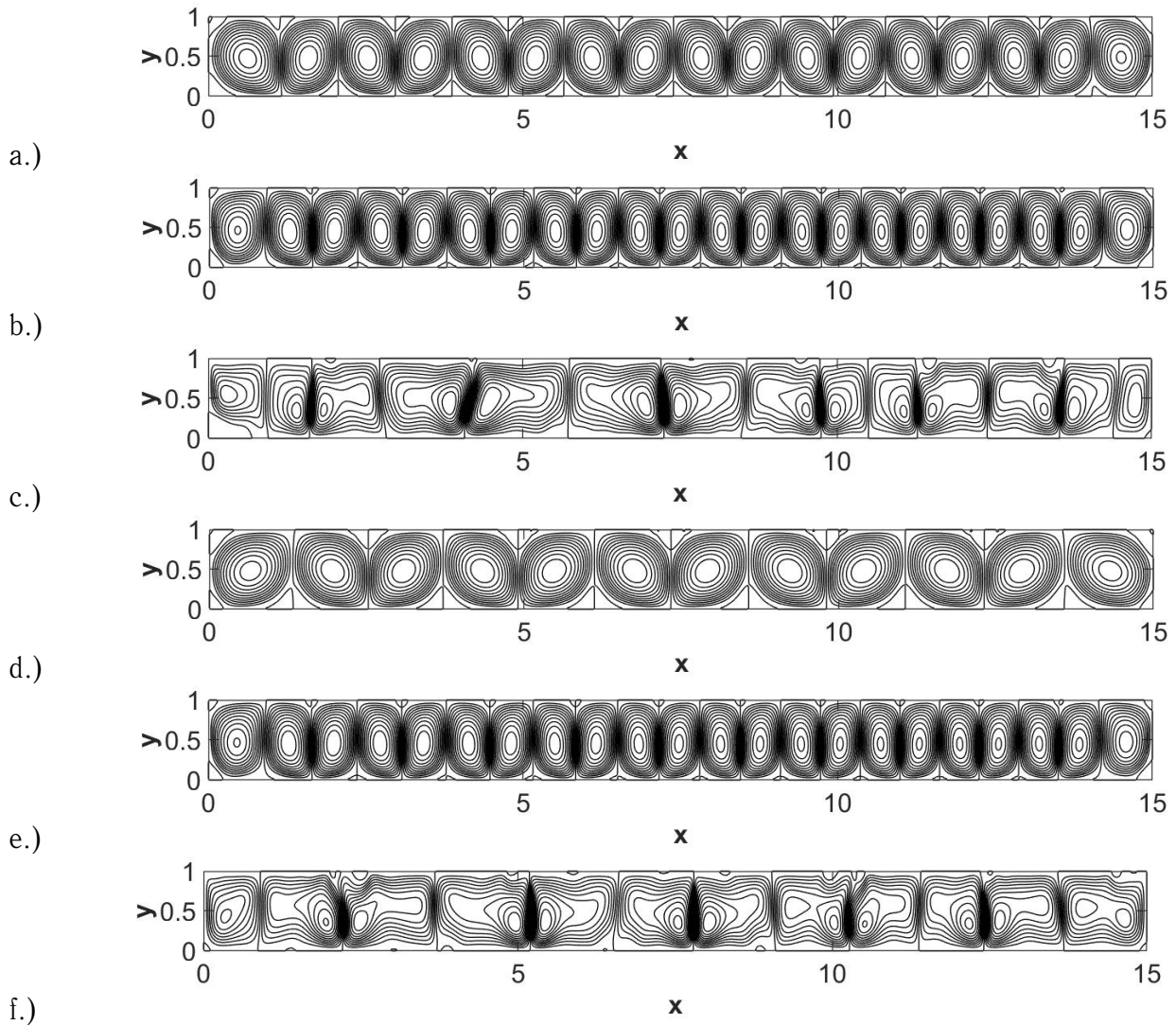


Рис. 13. Внутренние источники тепла. Функция тока. Параметры I : a.) $Pr = 0.5$; b.) $Pr = 1$; c.) $Pr = 10$; Параметры II : d.) $Pr = 0.5$; e.) $Pr = 1$; f.) $Pr = 10$.

имеют разные размеры (13 с, f). На рисунках 15 приведены соответствующие распределения температуры. При $Pr = 10$ наблюдается много мелкомасштабных структур вблизи горизонтальных границ, что и отразилось в большом изменении значений чисел Бетти (см. рис. 14). В каждой маленькой структуре есть и нисходящий поток, и восходящий, есть область с температурой выше и ниже средней температуры горизонтального сечения. Представление методами гомологии в случае $Pr = 10$ позволяет говорить о том, что мелких структур много, течение далеко от регулярной структуры. Более интересные результаты дает анализ траекторий движения частиц.

На рисунках 16, 17 приведены траектории движения частиц в течении при $Pr = 10$ и параметра I и II . Траектория обходит одну из крупных вали-

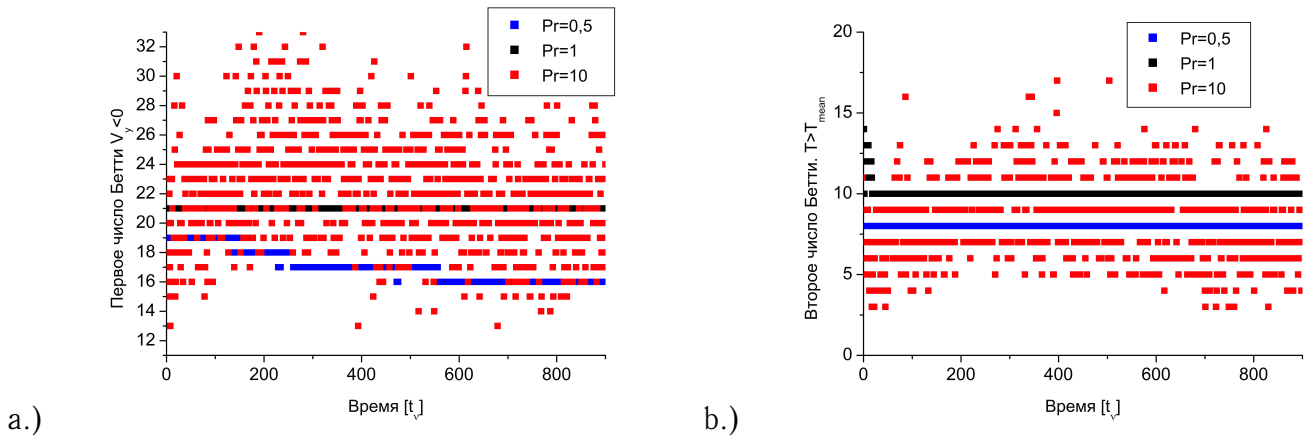


Рис. 14. Внутренние источники тепла. Параметры I , t_ν – конвективное время. а.) Первое число Бетти области нисходящих потоков. б.) Второе число Бетти более теплого подпространства.

ковых структур в течении. Верхняя и нижняя ее границы имеют волнистую форму, что подтверждает тот факт, что вблизи верхней и нижней границы, вдоль крупных структур перемещаются мелкомасштабные структуры, которые заметны на рисунках 13 с, f. Траектории в фазовом пространстве (y, V_y) образуют крупный цикл, размер которого сравним с высотой области, и малые циклы вблизи горизонтальных границ. В случае параметров I аттрактор похож на аналогичный аттрактор для задачи с нелинейной теплопроводностью (рис. 6 б). При параметрах II вблизи верхней границы наблюдается два маленьких вихря (рис. 17 с). Их появление можно объяснить структурой распределения источника, которое устанавливается, когда весь слой жидкости прогревается (рис. 8 б). Появление таких мелких масштабов, один над другим, и создает иллюзию, что структуры проскальзывают вниз. Нам не удалось зарегистрировать такое движение. Мелкомасштабные структуры локализованы вблизи горизонтальных границ. Вблизи верхней границы они могут располагаться в два ряда, это подтверждается большим диапазоном изменения чисел Бетти (рис. 14). Толщина слоев, в которых локализуются эти структуры, определяется распределением внутренних источников.

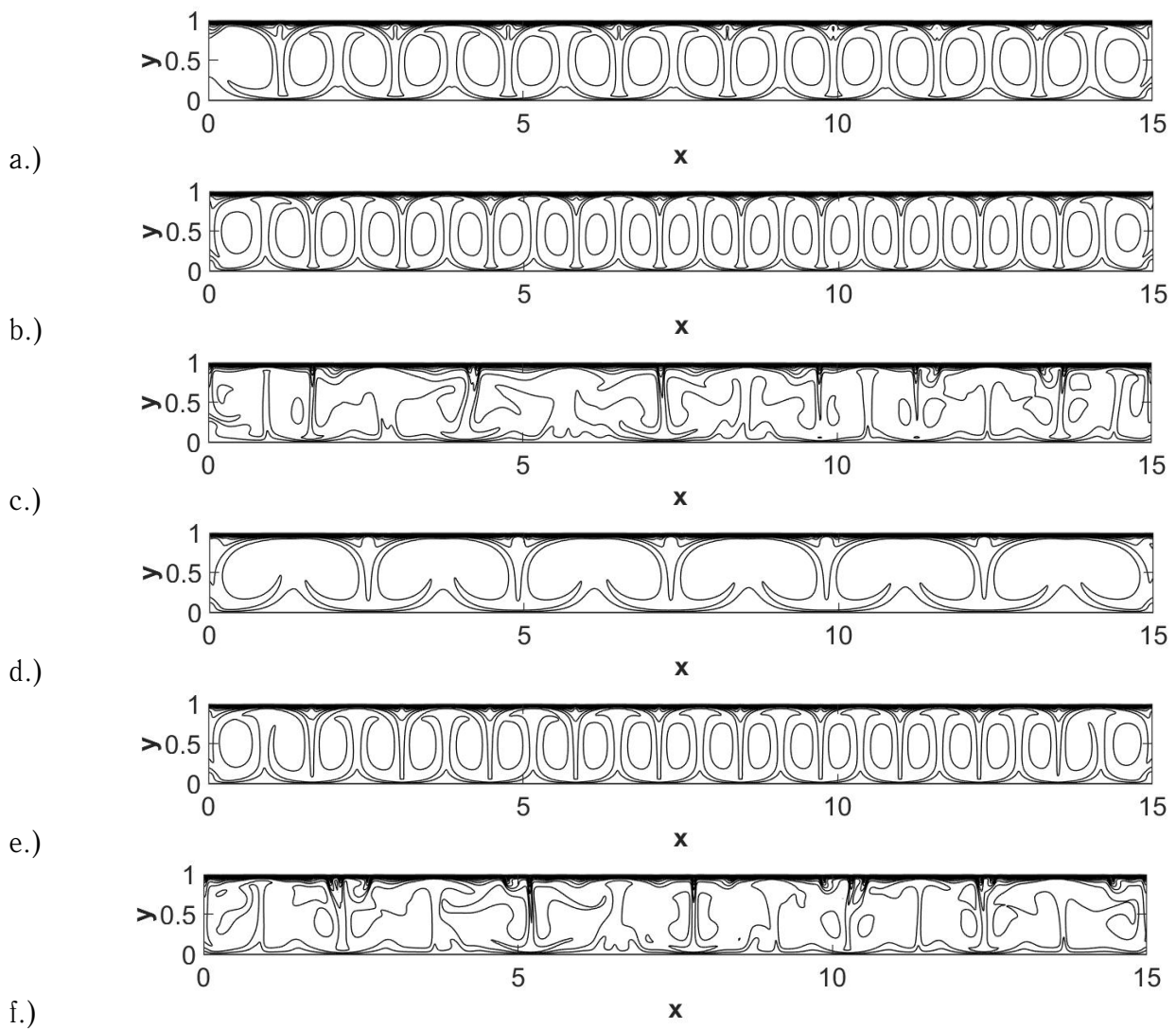


Рис. 15. Внутренние источники тепла. Распределение температуры. Параметры *I*: a.) $Pr = 0.5$; b.) $Pr = 1$; c.) $Pr = 10$; Параметры *II*: d.) $Pr = 0.5$; e.) $Pr = 1$; f.) $Pr = 10$.

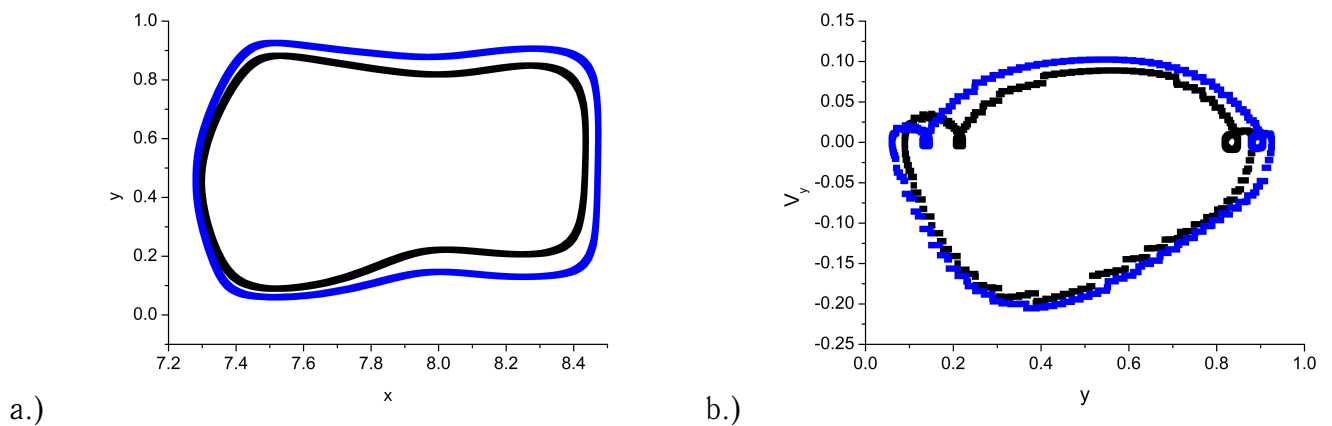


Рис. 16. Внутренние источники тепла. Параметры *I*. $Pr = 10$ – конвективное время. a.) Траектория частицы; b.) Траектория частицы в фазовом пространстве (y, V_y) .

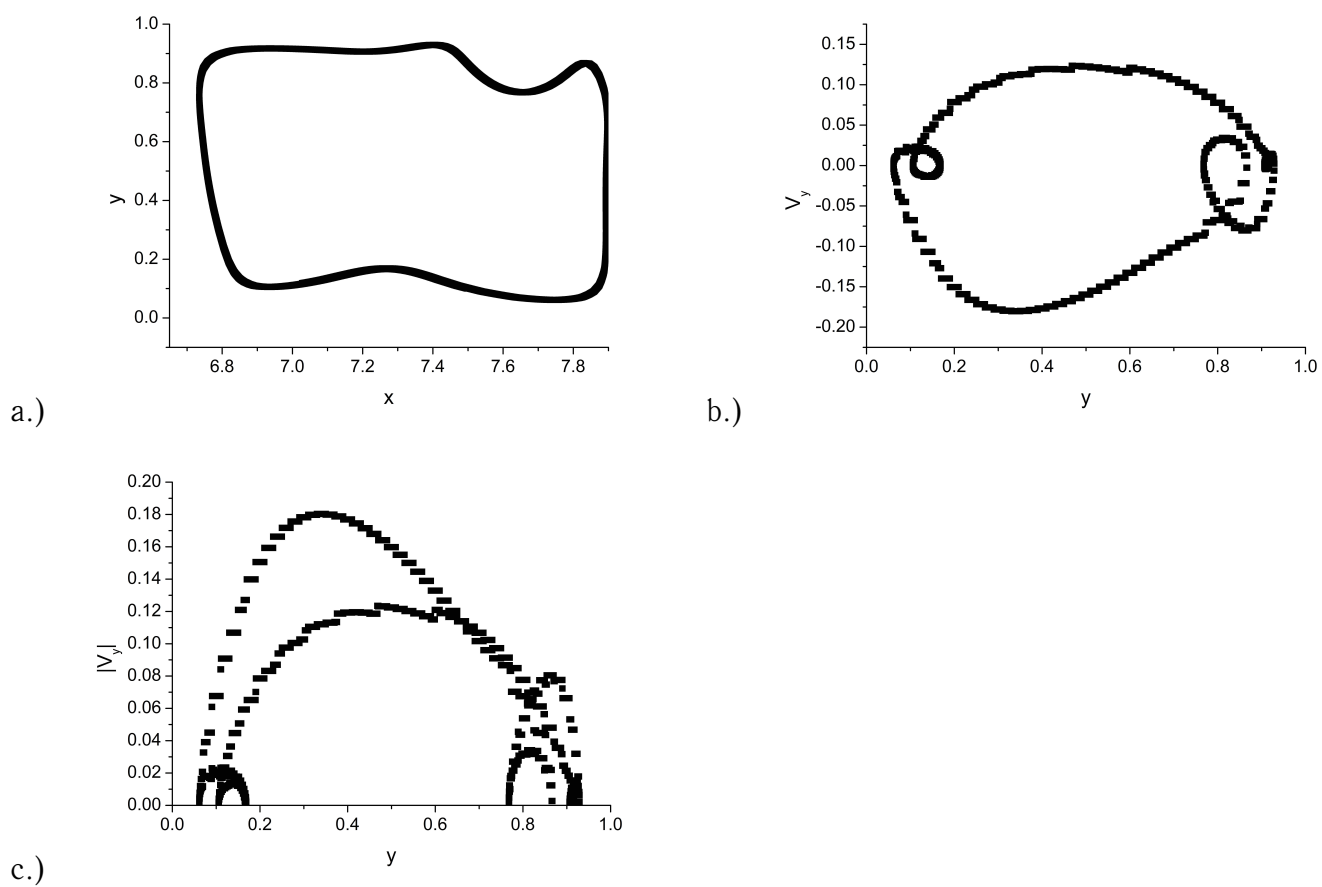


Рис. 17. Внутренние источники тепла. Параметры II . $Pr = 10$ – конвективное время. а.) Траектория частицы; б.) Траектория частицы в фазовом пространстве (y, V_y) ; с.) Траектория частицы в фазовом пространстве $(y, |V_y|)$.

3. Заключение

В работе проведен анализ структуры течения в горизонтальном слое жидкости с неоднородными свойствами. Рассмотрены две задачи: в одной задаче теплопроводность зависела от температуры, в другой — при постоянной температуропроводности были заданы внутренние источники тепла, зависящие от температуры. В обоих случаях устанавливался один и тот же статический профиль температуры, при котором весь слой неустойчиво стратифицирован и основной перепад температуры находится в тонком верхнем подслое. Рассматривалась высокая надкритичность ($Ra = 120Ra_{cr}$), значение числа Прандтля варьировалось от 0,5 до 10, в случае нелинейной теплопроводности число Прандтля определялось по теплопроводности на верхней границе области. В расчетах наблюдалось многомасштабное течение. Крупномасштабные структуры по высоте сравнимы с толщиной слоя, мелкомасштабные локализованы вблизи горизонтальных границ. Если течение выходит на стационар, то мелкомасштабные структуры локализуются между крупными структурами и не перемещаются по области. С ростом значения числа Прандтля размер структур уменьшается, нисходящие потоки становятся уже. В задаче с внутренними источниками тепла при $Pr = 10$ течение теряет регулярную структуру. Крупномасштабные структуры имеют разную ширину, превосходящую толщину слоя. Между горизонтальными границами и крупномасштабными структурами постоянно перемещаются мелкомасштабные. Методы вычислительной гомологии позволяют оценить количество мелкомасштабных структур. Анализ аттракторов (представления траекторий в различных фазовых пространствах) дает оценку размеров структур, диапазонов изменения температуры и скорости внутри этих структур. При одном и том же статическом профиле аттрактор в фазовом пространстве (y, V_y) качественно имеет одинаковую структуру: один цикл, размеры которого сравнимы с толщиной области, и маленькие циклы вблизи горизонтальных границ. При этом размеры этих маленьких циклов, мелкомасштабных структур, определяются свойствами среды, коэффициентом теплопроводности или распределением источников тепла в зависимости от задачи.

Список литературы

1. Getling A.V., Mazhorova O.S., Shcheritsa O.V. Effects of variable thermal diffusivity on the structure of convection // *Physics Letters A*. 2018. Vol. 382. P. 639–645. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2018.01.009>.
2. Getling A.V., Mazhorova O.S., Shcheritsa O.V. Concerning the multiscale structure of solar convection // *Geomagnetism and Aeronomy*. 2013. Vol. 53, no. 7. Pp. 904–908. <https://doi.org/10.1134/S0016793213070074>.
3. Щерица О.В., Мажорова О.С. Методы исследования конвективных течений со сложной структурой // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2018. № 241. 34 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2018-241>.
4. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло– и массообмена. Москва: Наука, 1984.
5. Мажорова О.С. Разностные методы решения уравнения динамики вязкой жидкости. Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Том VII-I. Математическое моделирование в низкотемпературной плазме. Часть 2. Под ред. Попова Ю.П. М.: Янус-К. 2008. 333 с.
6. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. Москва: Мир, 1980.
7. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Отв. ред. Ю.И. Шокин. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1981. 304 с.
8. Мажорова О.С., Попов Ю.П. Матричный итерационный метод численного решения двумерных уравнений Навье – Стокса // *ДАН СССР*. 1981. Vol. 259, no. 3. Pp. 535 – 540. <http://mi.mathnet.ru/dan44622>.
9. Мажорова О.С., Попов Ю.П. О методах численного решения уравнений Навье – Стокса // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1980. Vol. 20, no. 4. Pp. 1005 – 1020. <http://mi.mathnet.ru/zvmmf5184>.

10. Мажорова О.С., Попов Ю.П., Похилко В.И. Матричный алгоритм численного решения нестационарных задач концентрационной конвекции для многокомпонентных сред. В сб. Математическое моделирование. Получение монокристаллов и полупроводниковых структур. Под ред. Самарского А.А., Попова Ю.П., Мажоровой О.С. Москва: Наука, 1986. С. 19–31.
11. Gameiro Marcio, Pilarczyk Pawel. Automatic Homology Computation with Application to Pattern Classification // RIMS Kokyuroku Bessatsu. 2007. Vol. B3. Pp. 1 – 10.
12. Krishan Kapilanjana, Kurtuldu Huseyin, Schatz Michael F. Homology and symmetry breaking in Rayleigh-Benard convection: Experiments and simulations // Physics of Fluids. 2007. no. 17105.
13. Krishan Kapilanjana, Kurtuldu Huseyin, Schatz Michael F. Topological characterization of spatial-temporal chaos // Physical review. 2004. no. 035203(R). <https://doi.org/10.1063/1.2800365>.
14. Emran Mohammad S., Schumacher Jörg. Large-scale mean patterns in turbulent convection // Journal of Fluid Mechanics. 2015. Vol. 776. P. 96–108. <https://doi.org/10.1017/jfm.2015.316>.
15. Kramár Miroslav, Levanger Rachel, Tithof Jeffrey et al. Analysis of Kolmogorov flow and Rayleigh–Bénard convection using persistent homology // Physica D. 2016. Vol. 334. P. 82–98. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2016.02.003>.
16. Grindrod P., Harrington H.A., Otter N., Porter M.A. A roadmap for the computation of persistent homology. arXiv:1506.08903. 2015. 45 p.
17. CHomP, Computational Homology Project. <http://chomp.rutgers.edu>.

Содержание

Введение	3
1. Постановка задачи	4
2. Результаты расчетов	7
2.1. Нелинейная теплопроводность	7
2.2. Внутренние источники тепла	9
2.3. Структура течения в зависимости от значения числа Pr	11
3. Заключение	18