



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 16 за 2021 г.

ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

[А.А. Таюрский](#)

Влияние неоднородности  
плазмы с учётом тормозного  
излучения на поглощение  
альфвеновской волны  
диссипативной плазмой

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](#)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Таюрский А.А. Влияние неоднородности плазмы с учётом тормозного излучения на поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 16. 16 с.  
<https://doi.org/10.20948/prepr-2021-16>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-16>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**А.А.Таюрский**

**Влияние неоднородности плазмы  
с учётом тормозного излучения  
на поглощение альфвеновской волны  
диссипативной плазмой**

**Москва — 2021**

*Таюрский А.А.*

**Влияние неоднородности плазмы с учётом тормозного излучения на поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой**

В работе исследована математическая модель затухания альфвеновской волны в неоднородной несжимаемой диссипативной плазме с использованием уравнений двухжидкостной электромагнитной гидродинамики. Показано, что следствием учёта тормозного излучения является конечность глубины проникания альфвеновской волны в неоднородную плазму и установившийся квазистационарный режим затухания. Рассмотрены неоднородности по плотности двух типов – вершины и впадины, которые распределены по гауссову закону. Получены зависимости от величины вершины глубины проникания альфвеновской волны в неоднородную плазму и максимальных температур электронов и ионов. Исследование показало, что увеличение амплитуды падающей волны приводит к увеличению значений максимальных температур электронов и ионов, а также глубины проникания альфвеновской волны в неоднородную диссипативную плазму.

**Ключевые слова:** классическая МГД, электромагнитная гидродинамика (ЭМГД), альфвеновская волна, тормозное излучение

*Aleksei Aleksandrovich Taiurskii*

**Influence of plasma inhomogeneity with allowance for bremsstrahlung on absorption of an Alfvén wave by a dissipative plasma**

The paper investigates a mathematical model of the absorption of an Alfvén wave in an inhomogeneous incompressible dissipative plasma using the equations of two-fluid electromagnetic hydrodynamics. It is shown that a consequence of taking into account bremsstrahlung is the finiteness of the penetration depth of the Alfvén wave into an inhomogeneous plasma and a steady quasi-stationary regime of the Alfvén wave absorption. Density inhomogeneities of two types are considered – hump and hollows, which are distributed according to the Gaussian law. The dependences on the value of the hump of the penetration depth of the Alfvén wave into the inhomogeneous plasma and the maximum temperatures of electrons and ions are obtained. The study showed that an increase in the amplitude of the incident wave leads to an increase in the maximum values of the electron and ion temperatures, as well as the depth of penetration of the Alfvén wave into an inhomogeneous dissipative plasma.

**Key words:** classical MHD, electromagnetic hydrodynamics (EMHD), Alfvén wave, bremsstrahlung

## 1. Введение

Как мы знаем [1], в магнитогидродинамической плазме могут существовать синусоидальные колебания, которые распространяются вдоль магнитного поля, а термодинамические параметры и продольные компоненты векторных величин остаются невозмущёнными. Первым эти волны обнаружил Х. Альфвен [2] в 1942 г., и они получили название альфвеновских.

Настоящее исследование стало следствием предположения [3] о том, что за разогрев солнечной короны до температуры в несколько миллионов градусов ответственно затухание альфвеновских волн, которые образуются в нижних значительно более холодных солнечных слоях (фотосфере и хромосфере) с температурой в несколько тысяч градусов.

Данная работа продолжает исследования затухания альфвеновской волны в диссипативной плазме [4–11] вследствие диссипативных факторов: теплопроводности и гидродинамические вязкости электронов и ионов, магнитная вязкость, теплообмен между плазменными компонентами, а также тормозное излучение. Плазма предполагается несжимаемой, квазинейтральной, полностью ионизованной, состоящей из электронов и ионов. Для исследования динамики электронов и ионов использовались уравнения электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) плазмы [12].

Также была учтена неоднородность плазмы по плотности, т.е. исследовалось влияние неоднородности плазмы по плотности на процесс поглощения альфвеновской волны диссипативной плазмой с учётом тормозного излучения.

В ранее опубликованных работах исследовалось влияние неоднородности с учётом тормозного излучения [10, 11] на малых амплитудах падающей альфвеновской волны, что соответствует нескольким тысячам градусов. В настоящей работе рассматривались амплитуды, увеличенные на порядок, что соответствует температурам в несколько десятков тысяч градусов. Каждый расчёт процесса затухания конкретной альфвеновской волны на персональном компьютере занимал несколько суток. В дальнейшем предполагается использование суперкомпьютерных вычислений с увеличением амплитуд на два порядка для получения температур, близких к реальным температурам солнечной короны.

Ниже неоднородность определяется гауссовым распределением  $\rho(x)/\rho_0 = 1 + A \exp\left[-(x - x_0)^2 / D\right]$ ,  $D > 0$ ,  $x_0 > 0$ . Для  $A > 0$  функция  $\rho(x)$  задаёт неоднородность типа вершины, а для  $0 > A > -1$  – типа впадины. Все остальные возможные неоднородности, как показано в [10, 11], являются комбинацией указанных гауссовых распределений.

## 2. Основные уравнения

Для исследования динамики электронов и ионов используются уравнения несжимаемой электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) [12]:

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \rho = 0, \quad \frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{Div} \Pi = \operatorname{Div} P,$$

$$\mathbf{E} + \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi \rho} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{U}, \mathbf{H}] + \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} W, \quad (1)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Тензоры плотности потока импульса  $\Pi$ , вязких напряжений  $P$  и “холловских слагаемых”  $W$  имеют вид:

$$\Pi = \Pi^h + \Pi^p + \Pi^c, \quad P = \Pi_*^{(c)} + \Pi^{(U)},$$

$$W = (\lambda_- - \lambda_+) (\Pi^p + \Pi^c) + (\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-) I_3 + \lambda_+ \lambda_- (\mathbf{j} \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{j}) - \Pi_*^{(U)} - \Pi^{(c)}, \quad (2)$$

$$\Pi^h = \rho \mathbf{U} \mathbf{U} + p_\Sigma I_3, \quad \Pi^p = \frac{H^2}{8\pi} I_3 - \frac{\mathbf{H} \mathbf{H}}{4\pi}, \quad \Pi^c = \lambda_+ \lambda_- \frac{\mathbf{j} \mathbf{j}}{\rho}.$$

Здесь и далее индексы  $\pm$  относятся к параметрам ионов и электронов  $\lambda_\pm = m_\pm / e_\pm$ ,  $\lambda_\Sigma = \lambda_+ + \lambda_-$ ,  $p_\Sigma = p_+ + p_-$ ,  $m_\Sigma = m_+ + m_-$ ,  $\rho = \rho_+ + \rho_-$ ,  $\mathbf{U} = (\rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-) / \rho$ ,  $I_3$  – единичный трёхмерный тензор,  $\sigma$  – проводимость плазмы. Тензоры вязких напряжений с учётом несжимаемости плазмы равны:

$$\Pi^{(U)} = 2\mu_\Sigma D^U, \quad \Pi_*^{(U)} = 2\mu_* D^U, \quad \Pi^{(c)} = 2\mu^* D^c - \frac{2}{3} \mu^* \mathbf{j} \cdot \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right) I_3,$$

$$\Pi_*^{(c)} = 2\mu_* D^c - \frac{2}{3} \mu_* \mathbf{j} \cdot \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right) I_3, \quad \Pi_\pm = 2\mu_\pm D_\pm \mp \frac{2}{3} \mu_\pm \lambda_\pm \mathbf{j} \cdot \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right) I_3, \quad (3)$$

где  $D^U = \operatorname{def} \mathbf{U}$ ,  $D^c = \operatorname{def} (\mathbf{j} / \rho)$ ,  $D_\pm = \operatorname{def} \mathbf{v}_\pm$  – тензоры деформаций,  $\mu_\Sigma = \mu_+ + \mu_-$ ,  $\mu_* = \lambda_- \mu_+ - \lambda_+ \mu_-$ ,  $\mu^* = \lambda_-^2 \mu_+ + \lambda_+^2 \mu_-$ ,  $\mu_\pm$  – гидродинамические вязкости электронов и ионов. При этом вторые вязкости электронов и ионов считаются равными нулю. Для плоских течений, которые рассматриваются ниже,  $\mathbf{j} \cdot \nabla (1 / \rho) = 0$  и выражения (3) сильно упрощаются. Учитывая зависимость (см. ниже) проводимости плазмы  $\sigma$ , гидродинамических вязкостей  $\mu_\pm$  и других коэффициентов переноса от температур электронов и ионов  $T_\pm$ , необходимо дополнить систему (1)–(3) уравнениями для температур [13]

$$\rho_{\pm} c_p^{\pm} \left[ \frac{\partial T_{\pm}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} T_{\pm} \right] = \text{div}(\chi_{\pm} \nabla T_{\pm}) + \text{tr}(\Pi_{\pm} D_{\pm}) + \frac{m_{\mp} j^2}{m_{\Sigma} \sigma} \pm b(T_{-} - T_{+}) - p_T^{\pm}, \quad (4)$$

где  $c_p = T(\partial S / \partial T)_p$  – теплоёмкость при постоянном давлении,  $\chi_{\pm}$  – теплопроводности электронов и ионов,  $\pm b(T_{-} - T_{+})$  – тепло, передаваемое компонентами плазмы друг другу при упругих столкновениях,  $p_T^{\pm}$  – потери на тормозное излучение электронов и ионов. Для идеального политропного газа с общим показателем адиабаты  $\gamma$  имеем  $c_p = \frac{k_B}{(\gamma - 1)m} = \text{const}$ , где  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $m$  – масса частицы газа. Именно этим случаем мы ниже ограничимся, считая  $c_p^{\pm} = k_B / ((\gamma - 1)m_{\pm})$ .

При этом надо учесть выражения гидродинамических параметров электронов и ионов через  $\rho$ ,  $U$ ,  $j$ :

$$\mathbf{v}_{\pm} = U \pm \frac{\lambda_{\mp}}{\rho} \mathbf{j}, \quad \rho_{\pm} = \frac{\lambda_{\pm}}{\lambda_{\Sigma}} \rho. \quad (5)$$

С учётом зависимостей  $\sigma$ ,  $\mu_{\pm}$ ,  $\chi_{\pm}$ ,  $b$ ,  $p_T^{\pm}$  от остальных параметров плазмы, в первую очередь температур  $T_{\pm}$ , приводимых ниже, уравнения (1)–(4) образуют замкнутую определённую систему уравнений относительно  $\rho$ ,  $p_{\pm}$ ,  $T_{\pm}$ ,  $U$ ,  $H$ ,  $E$ .

Коэффициенты переноса  $\mu_{\pm}$ ,  $\chi_{\pm}$ ,  $\sigma$ ,  $b$  получаются приближённым решением кинетических уравнений [14] и для  $Z = 1$  считаются равными [13-19]

$$\mu_{+} = 3.44 \cdot 10^{-18} \left( \frac{m_{+}}{m_{-}} \right)^{1/2} T_{+}^{5/2}, \quad \mu_{-} = 1.857 \cdot 10^{-18} T_{-}^{5/2}, \quad \sigma = 0.906 \cdot 10^7 T_{-}^{3/2},$$

$$b = 1.353 \cdot 10^{40} \left( \frac{m_{-}}{m_{+}} \right)^3 \frac{\rho^2}{T_{-}^{3/2}},$$

$$\chi_{-} = 0.244 \cdot 10^{-5} T_{-}^{5/2}, \quad \chi_{+} = 0.429 \cdot 10^{-5} \left( \frac{m_{-}}{m_{+}} \right)^{1/2} T_{+}^{5/2},$$

$$p_T^{-} = 6.777 \cdot 10^{-21} n_{+} n_{-} T_{-}^{1/2},$$

где  $p_T^{+} = 0$ ,  $T_{\pm}$  вычисляются в кельвинах,  $p_T^{-}$  – в эрг / (с · см<sup>3</sup>).

Отметим также, что в представленных ниже результатах считалось  $\mu_- = 0$ , поскольку теоретическое значение электронной вязкости, приведённое в данном пункте, оказалось как минимум на 2-3 порядка завышенным. Поглощение альфвеновской волны для реального значения электронной вязкости  $\mu_-$  требует дополнительных исследований.

Более подробные формулы для диссипативных коэффициентов см. в [12].

### 3. Альфвеновские волны в ЭМГД

В бездиссипативном случае и плоской геометрии ЭМГД-уравнения имеют точные решения вида [4]

$$U_{\perp} = u(t)e^{ikx}, H_{\perp} = h(t)e^{ikx}, E_{\perp} = e(t)e^{ikx}, T_{\pm} = \text{const}, \rho = \text{const}, U_x = 0, \quad (6)$$

которые называются *плоскими альфвеновскими волнами*. В (6)  $\kappa > 0$  – произвольное и использованы комплексные обозначения  $U_{\perp} = U_y + iU_z$ ,  $H_{\perp} = H_y + iH_z$ ,  $E_{\perp} = E_y + iE_z$ . При этом  $H_x = \text{const}$ , а  $e(t)$  выражается в явном виде через  $u(t)$  и  $h(t)$ :

$$e(t) = \left( \frac{iH_x}{c} u(t) + \frac{i\kappa \Lambda v_A}{\omega_p} h(t) \right) (1+r^2)^{-1}, r = \frac{\kappa c}{\omega_p}, \Lambda = \sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}} - \sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}, v_A = \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (7)$$

Функции  $u(t)$ ,  $h(t)$  имеют вид:

$$u(t) = C_1 e^{i\omega_+ t} + C_2 e^{i\omega_- t}, \quad h(t) = \frac{(4\pi\rho)^{1/2}}{\kappa v_A} \{C_1 \omega_+ e^{i\omega_+ t} + C_2 \omega_- e^{i\omega_- t}\}. \quad (8)$$

Здесь  $\omega_p = (4\pi\rho)^{1/2} (\lambda_+ \lambda_-)^{-1/2}$  – плазменная частота,  $C_1, C_2$  – произвольные комплексные константы. Поперечная компонента плотности тока  $j_{\perp} = j_y + ij_z$  также изменяется по закону  $j_{\perp} = j(t)e^{ikx}$ , а  $j_x = 0$ , где  $j(t) = -\frac{\kappa c}{4\pi} h(t)$ . Наконец,

$$\omega_{\pm} = \omega_{\pm}(\kappa) = \frac{\kappa v_A}{2} \left\{ \frac{r\Lambda}{1+r^2} \pm \left[ \frac{r^2 \Lambda^2}{(1+r^2)^2} + \frac{4}{1+r^2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (9)$$

Обратная к формуле (9):

$$\kappa = \kappa(\omega) = \frac{\omega_p}{c} \cdot \left| \omega \left( \frac{v_A^2 \omega_p^2}{c^2} + \frac{\omega_p v_A}{c} \Lambda \omega - \omega^2 \right) \right|^{-1/2}, \quad (10)$$

где  $-\omega_c^+ < \omega < \omega_c^-$  для  $H_x > 0$  и  $-\omega_c^- < \omega < \omega_c^+$  для  $H_x < 0$ .

#### 4. Постановка задачи о пространственном поглощении

Пусть плоская альфвеновская волна, бегущая в области  $x < 0$  слева направо, набегаёт на границу  $x = 0$  диссипативной плазмы, которая заполняет полупространство  $x > 0$ . Далее альфвеновская волна, распространяясь в области  $x > 0$ , затухает в этой области, что и является предметом изучения. Из предыдущего пункта следует, что если продольное магнитное поле  $H_x < 0$ , то частота набегающей альфвеновской волны  $\omega$  меняется в диапазоне  $-\omega_c^- = \frac{H_x}{\lambda_- c} < \omega < 0$ , а если  $H_x > 0$  – то в диапазоне  $-\omega_c^+ = -\frac{H_x}{\lambda_+ c} < \omega < 0$ . Ниже

рассматривается первый вариант. Плазма в области  $x \geq 0$  считается замагниченной покоящейся изотермической с заданным распределением плотности  $\rho(x)$ . Таким образом, в начальный момент времени в области  $x > 0$  имеем:

$$U_{\perp}|_{t=0} = 0, \quad U_x|_{t=0} = 0, \quad T_{\pm}|_{t=0} = T^0, \quad \rho|_{t=0} = \rho(x), \quad H_{\perp}|_{t=0} = 0, \quad (11)$$

где распределение плотности  $\rho(x)$  имеет конечный предел  $\rho > 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ , причём константа  $\rho$  и продольное магнитное поле  $H_x = \text{const}$  те же, что и в области  $x \leq 0$ , откуда набегаёт альфвеновская волна.

Значения параметров диссипативной плазмы на границе  $x = 0$  и значения на границе  $x = 0$  параметров альфвеновской волны совпадают. Согласно формулам (6)–(10), они определяются следующим образом:

$$U_{\perp}|_{x=0} = U_0 e^{i\omega t}, \quad H_{\perp}|_{x=0} = U_0 \frac{\sqrt{4\pi\rho}}{\kappa v_A} \omega e^{i\omega t}, \quad (12)$$

$$E_{\perp}|_{x=0} = \frac{iU_0}{1 + (\kappa c / \omega_p)^2} \left( \frac{H_x}{c} + \Lambda \sqrt{\lambda_+ \lambda_-} \omega \right) e^{i\omega t}, \quad j_{\perp}|_{x=0} = -U_0 \frac{\omega c \rho}{H_x} e^{i\omega t}.$$

На бесконечности параметры диссипативной плазмы совпадают с параметрами невозмущённой плазмы:

$$U_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad H_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad T_{\pm}|_{x=+\infty} = T^0, \quad E_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad j_{\perp}|_{x=+\infty} = 0. \quad (13)$$

Запишем систему (1)–(4) в безразмерном виде в случае плоской симметрии ( $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$ ), используя обозначения  $U = U_{\perp} = U_y + iU_z$ ,  $H = H_{\perp} = H_y + iH_z$ ,  $E = E_{\perp} = E_y + iE_z$ ,  $j = j_{\perp} = j_y + ij_z$

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( H_x H - \mu_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial x} - \xi \mu_* \frac{\partial j}{\partial x} \frac{j}{\rho} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + i \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad j = i \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$E - \frac{\xi^2}{\rho} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \xi \zeta \frac{j}{\sigma} + i H_x U + \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \Lambda H_x H - \mu_* \frac{\partial U}{\partial x} - \xi \mu^* \frac{\partial j}{\partial x} \frac{1}{\rho} \right], \quad (14)$$

$$\frac{\partial T_{\pm}}{\partial t} = \frac{2Z_{\pm}(\gamma-1)}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi_{\pm} \frac{\partial T_{\pm}}{\partial x} \right) + \frac{m_{\mp}}{m_{\Sigma}} \frac{\xi \zeta}{\sigma} |j|^2 + \frac{\zeta}{\xi} C_0 \rho^2 \frac{T_{\mp} - T_{\pm}}{T_{\pm}^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{T_{\pm}^{5/2}}{R_{\pm}} \left[ \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^2 + \frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}} \frac{\xi^2}{\rho^2} \left| \frac{\partial j}{\partial x} \right|^2 \pm 2 \frac{\xi}{\rho} \sqrt{\frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}}} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \overline{\frac{\partial j}{\partial x}} \right) \right] \right\} -$$

$$-\frac{(1 \mp 1)}{4} \frac{\xi_T}{\xi} (\gamma-1) Z_{\mp}^2 \rho T_{\pm}^{1/2},$$

где  $Z_+ = Z$ ,  $Z_- = 1$ ,  $\mu_{\Sigma} = \mu_+ + \mu_-$ ,  $\mu_* = (\lambda_- / \lambda_+)^{1/2} \mu_+ - (\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2} \mu_-$ ,  $\mu^* = (\lambda_- / \lambda_+) \mu_+ + (\lambda_+ / \lambda_-) \mu_-$ ,  $\mu_{\pm} = T_{\pm}^{5/2} / R_{\pm}$ ,  $\sigma = \sigma_0 T_{\pm}^{3/2}$ ,  $\chi_{\pm} = C_{\pm} (\xi / \zeta) T_{\pm}^{5/2}$ , а значения  $\sigma_0$ ,  $C_0$ ,  $R_{\pm}$ ,  $C_{\pm}$  равны:

$$\sigma_0 = 2,59, C_0 = \frac{m_e}{m_i}, R_+ = 1,108 \cdot \frac{\zeta}{\xi} \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2}, R_- = 2,053 \cdot \frac{\zeta}{\xi},$$

$$C_- = 2,11 \frac{m_i}{m_e}, C_+ = 3,7 \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2}.$$

Наконец,  $\xi$ ,  $\zeta$ ,  $\xi_T$  – числа подобия, равные

$$\xi = \frac{\ell_c}{L_0} = \frac{c \sqrt{\lambda_+ \lambda_-}}{\sqrt{4\pi \rho_0} L_0}, \quad \zeta = \frac{(4\pi \rho_0)^{5/2}}{H_0^4} \cdot \frac{c e^3}{m_+^2} L Z^3 \left( 1 + Z \frac{m_-}{m_+} \right)^{-3/2},$$

$$\xi_T = \frac{\rho_0^{3/2}}{H_0^2} \frac{10^7 e^5}{c^2 \hbar m_+ m_-} \frac{64 \sqrt{\pi}}{3^{3/2}} \left( 1 + Z \frac{m_-}{m_+} \right)^{-3/2},$$

где  $\ell_c = c / \omega_p$  – скин-длина,  $L_0$ ,  $\rho_0$ ,  $H_0$  и т.д. – характерные масштабы длины плотности, напряжённости магнитного поля и т.д. При обезразмеривании считалось  $t_0 = L_0 / v_0$ ,  $v_0 = v_A = H_0 / \sqrt{4\pi \rho_0}$ ,  $E_0 = v_0 H_0 / c$ ,  $j_0 = c H_0 / (4\pi L_0)$ ,  $T_0 = v_A^2 \lambda_{\Sigma} e / (2k_B)$ .

Таким образом, требуется решить начально-краевую задачу для системы (14) на полупрямой  $x \geq 0$ : найти функции  $H(t, x)$ ,  $E(t, x)$ ,  $U(t, x)$ ,  $T_{\pm}(t, x)$ ,

удовлетворяющие для  $x \geq 0$ ,  $t \geq 0$  уравнениям системы (14), при  $t=0$  – безразмерным начальным условиям

$$U|_{t=0} = 0, \quad H|_{t=0} = 0, \quad E|_{t=0} = 0, \quad T_{\pm}|_{t=0} = T^0, \quad x \geq 0, \quad (15)$$

а при  $x=0$  и  $x=+\infty$  – безразмерным краевым условиям:

$$U|_{x=0} = U_0 e^{i\omega t}, \quad H|_{x=0} = \frac{\rho U_0 \omega}{\kappa H_x} e^{i\omega t}, \quad j|_{x=0} = -\frac{\rho U_0 \omega}{H_x} e^{i\omega t},$$

$$E|_{x=0} = \frac{iU_0}{1 + \kappa^2 \xi^2} (H_x + \xi \Lambda \omega) e^{i\omega t} = \frac{iU_0}{H_x} (H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega^2) e^{i\omega t}, \quad (16)$$

$$U|_{x=+\infty} = 0, \quad H|_{x=+\infty} = 0, \quad E|_{x=+\infty} = 0, \quad j|_{x=+\infty} = 0, \quad T_{\pm}|_{x=+\infty} = T^0,$$

причём при  $H_x > 0$  имеем  $-H_x(\lambda_- / \lambda_+)^{1/2} < \omega \xi < 0$ , при  $H_x < 0$  имеем  $H_x(\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2} < \omega \xi < 0$ . Здесь  $\omega, \rho, H_x \in \mathbb{R}$ ,  $U_0 \in \mathbb{C}$  – безразмерные параметры задачи и в безразмерном виде

$$\kappa = \kappa(\omega) = \frac{|\omega| \sqrt{\rho}}{\sqrt{H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega^2}}.$$

## 5. Численный метод решения задачи о пространственном поглощении

Рассмотрим неявную разностную схему численного решения задачи (14)–(16). Счётная область – отрезок  $[0, L]$  с достаточно большим  $L$ , в котором выбраны две сетки узлов  $x_{\kappa} = \kappa h$ ,  $0 \leq \kappa \leq N$ ,  $x_{\kappa+1/2} = (\kappa + 1/2)h$ ,  $0 \leq \kappa < N$ ,  $h = L/N$ . В целых узлах аппроксимируются величины  $j$ ,  $U$ ,  $E$ , в дробных –  $H$ ,  $T_{\pm}$ . Переход с нижнего на верхний временной слой  $T_{\pm}^0, U^0, H^0 \rightarrow T_{\pm}^1, U^1, H^1$  за время  $\tau$ ,  $t \rightarrow t + \tau$ , реализуется неявной разностной схемой, где для простоты считаем  $Z = 1$

$$1) \rho_{\kappa} \frac{U_{\kappa}^1 - U_{\kappa}^0}{\tau} - \frac{1}{h} \left[ \mu_{\Sigma, \kappa+1/2}^0 \frac{U_{\kappa+1}^1 - U_{\kappa}^1}{h} - \mu_{\Sigma, \kappa-1/2}^0 \frac{U_{\kappa}^1 - U_{\kappa-1}^1}{h} \right] -$$

$$- H_x \frac{H_{\kappa+1/2}^0 - H_{\kappa-1/2}^0}{h} - \frac{\xi}{\rho_{\kappa}} \frac{1}{h} \left( \mu_{*, \kappa+1/2}^0 \frac{j_{\kappa+1}^0 - j_{\kappa}^0}{h} - \mu_{*, \kappa-1/2}^0 \frac{j_{\kappa}^0 - j_{\kappa-1}^0}{h} \right) = 0,$$

$$0 < \kappa < N,$$

$$U_N^1 = 0, \quad U_0^1 = U_0 e^{i\omega(t+\tau)}, \quad j_N^0 = 0, \quad j_0^0 = -\frac{\rho U_0 \omega}{H_x} e^{i\omega t},$$

$$j_k^0 = i \frac{H_{k+1/2}^0 - H_{k-1/2}^0}{h}, \quad 0 < k < N.$$

$$2) \frac{H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa+1/2}^0}{\tau} + i \frac{E_{\kappa+1} - E_{\kappa}}{h} = 0, \quad 0 \leq \kappa < N,$$

$$E_{\kappa} - \frac{\xi^2}{\rho_{\kappa}} \frac{E_{\kappa+1} - 2E_{\kappa} + E_{\kappa-1}}{h^2} = \frac{i\xi\xi}{\sigma_0(T_{-, \kappa}^0)^{3/2}} \cdot \frac{H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa-1/2}^1}{h} + iH_x U_{\kappa}^1 +$$

$$+ \frac{\xi \Lambda H_x}{\rho_{\kappa}} \frac{H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa-1/2}^1}{h} - \frac{\xi}{\rho_{\kappa} h} \left[ \mu_{*, \kappa+1/2}^0 \frac{U_{\kappa+1}^1 - U_{\kappa}^1}{h} - \mu_{*, \kappa-1/2}^0 \frac{U_{\kappa}^1 - U_{\kappa-1}^1}{h} \right] -$$

$$- \frac{\xi^2}{\rho_{\kappa}^2 h} \left[ \mu_{\kappa+1/2}^{*0} \frac{j_{\kappa+1}^0 - j_{\kappa}^0}{h} - \mu_{\kappa-1/2}^{*0} \frac{j_{\kappa}^0 - j_{\kappa-1}^0}{h} \right],$$

$$0 < \kappa < N, \quad E_N = 0, \quad E_0 = \frac{iU_0}{H_x} (H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega^2) e^{i\omega(t+\tau/2)},$$

$$3) \frac{T_{\pm, \kappa+1/2}^1 - T_{\pm, \kappa+1/2}^0}{\tau} = \frac{2(\gamma-1)}{\rho_{\kappa}} \left\{ \frac{1}{h} \left[ \chi_{\kappa+1}^{\pm} \frac{T_{\pm, \kappa+3/2}^1 - T_{\pm, \kappa+1/2}^1}{h} - \right. \right.$$

$$\left. - \chi_{\kappa}^{\pm} \frac{T_{\pm, \kappa+1/2}^1 - T_{\pm, \kappa-1/2}^1}{h} \right] + \frac{m_{\mp}}{m_{\Sigma}} \frac{\xi \xi}{\sigma_0(T_{-, \kappa+1/2}^0)^{3/2}} \left| \frac{j_{\kappa}^1 + j_{\kappa+1}^1}{2} \right|^2 \pm$$

$$\pm \frac{\xi}{\xi} C_0 \rho_{\kappa}^2 \frac{T_{-, \kappa+1/2}^0 - T_{+, \kappa+1/2}^0}{(T_{-, \kappa+1/2}^0)^{3/2}} + \frac{(T_{\pm, \kappa+1/2}^0)^{5/2}}{R_{\pm}} \left[ \left| \frac{U_{\kappa+1}^1 - U_{\kappa}^1}{h} \right|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}} \frac{\xi^2}{\rho_{\kappa}^2} \left| \frac{j_{\kappa+1}^1 - j_{\kappa}^1}{h} \right|^2 \pm 2 \frac{\xi}{\rho_{\kappa}^2} \sqrt{\frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}}} \operatorname{Re} \left( \frac{U_{\kappa+1}^1 - U_{\kappa}^1}{h} \cdot \frac{j_{\kappa+1}^1 - j_{\kappa}^1}{h} \right) \right] \left. \right\} - p_{\kappa+1/2}^{\pm},$$

$$p_{\kappa+1/2}^+ = 0, \quad p_{\kappa+1/2}^- = \frac{\xi \tau}{\xi} (\gamma-1) \rho_{\kappa} (T_{-, \kappa+1/2}^0)^{1/2},$$

$$0 \leq k < N, \quad T_{\pm, 1/2}^1 = T^0, \quad T_{\pm, N+1/2}^1 = T^0.$$

Шаг  $\tau$  выбирается из условия устойчивости

$$\tau = kh / U_{\varphi}, \quad U_{\varphi} = \max_{0 \leq \kappa < N} \left( \left| H_{\kappa+1/2}^0 \right|^2 / \rho_{\kappa} + T_{+, \kappa+1/2}^0 + T_{-, \kappa+1/2}^0 \right)^{1/2},$$

где  $0 < k < 1$  – коэффициент запаса, подбираемый экспериментально. Порядок вычислений по схеме 1)–3) следующий. Сначала из 1) прогонкой определяется

величина  $U_\kappa^1$ ,  $0 \leq \kappa \leq N$ . После этого по формулам 2) находятся значения  $H_{\kappa+1/2}^1$ ,  $0 \leq \kappa < N$ ,  $E_\kappa$ ,  $0 \leq \kappa \leq N$ . Для этого посредством первого равенства 2) исключается из числа неизвестных  $H_{\kappa+1/2}^1 = H_{\kappa+1/2}^0 - \frac{i\tau}{h}(E_{\kappa+1} - E_\kappa)$ ,  $0 \leq \kappa < N$ , и полученные выражения подставляются во второе равенство 2), после чего величины  $E_\kappa$ ,  $0 \leq \kappa \leq N$ , ищутся прогонкой и по найденным значениям восстанавливаются  $H_{\kappa+1/2}^1$ ,  $0 \leq \kappa < N$ . На завершающем этапе прогонками ищутся  $T_{\mp, \kappa+1/2}^1$ ,  $0 \leq \kappa < N$ . При этом  $j_\kappa^1$  вычисляются по очевидным формулам  $j_\kappa^1 = i(H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa-1/2}^1)/h$ ,  $0 < \kappa < N$ ,  $j_N^1 = 0$ ,  $j_0^1 = -\rho U_0 \omega H_x^{-1} e^{i\omega(t+\tau)}$ . Значения  $\chi_\kappa^\pm$  получаются интерполяцией  $\chi_\kappa^\pm = (\chi_{\kappa+1/2}^\pm + \chi_{\kappa-1/2}^\pm)/2$ ,  $0 < \kappa < N$ ,  $\chi_0^\pm = \chi_{1/2}^\pm$ ,  $\chi_N^\pm = \chi_{N-1/2}^\pm$ , при этом  $\chi_{\kappa+1/2}^\pm$ ,  $0 \leq \kappa < N$  берутся на нулевом слое.

## 6. Анализ результатов расчётов

Рассмотрим решение задачи нелинейного поглощения альфвеновской волны с учётом тормозного излучения и неоднородности по плотности применительно к параметрам солнечной короны  $\rho_0 = 10^{-12} \text{ г/см}^3$ ,  $H_0 = 1 \text{ Гс}$ ,  $Z = 1$ , тогда из п. 4 следует, что  $\zeta = 3 \cdot 10^3$ ,  $\xi_T = 3$ , а скин-длина  $\ell_c = c/\omega_p \approx 1 \text{ см}$ . Учитывая мелкомасштабность ( $\sim \ell_c$ ) процессов при поглощении альфвеновской волны, положим  $L_0 = \ell_c$ , тогда  $\xi = 1$ . Принимая во внимание оценку толщины плазменной части солнечной короны [8]  $\approx 300 - 400 \text{ км}$ , тем самым будет учтена мелкомасштабная динамика плазмы. Для указанных параметров фоновой диссипативной плазмы альфвеновская скорость  $v_A = H_0 / \sqrt{4\pi\rho_0} = 2.8 \cdot 10^5 \text{ см/с}$ ,  $t_0 = L_0 / v_A = c\sqrt{\lambda_+ \lambda_-} / H_0 = 3.45 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ ,  $T_0 \approx 10^3 \text{ }^\circ\text{K}$ . Дебаевский радиус  $r_D = (kT_0)^{1/2} / (2\pi^{1/2} \rho_0 n_0^{1/2}) \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ см} \ll L_0$  и много меньше шагов использованной разностной сетки, поэтому условие квазинейтральности выполнено с высокой точностью. Считаем, что  $n_0 = \rho_0 / m_+$ ,  $m_+ = 2m_p$ .

Кроме того, амплитуда падающей альфвеновской волны предполагается равной  $|U_0| = 1$  и считается  $H_x = -1$ . Частота волны  $\omega$  изменяется в диапазоне  $-61 \cong -(\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2} < \omega < 0$ . Вариант однородной плазмы  $\rho(x) \equiv 1$  с тормозным излучением был исследован в работах [6, 8]. Для данного варианта мы получили глубину прогрева  $d = 168.4$ , а максимальные температуры электронов и ионов  $T_- = 24.87$  и  $T_+ = 13.09$ .

Теперь, учитывая распределение плотности диссипативной плазмы в области  $x \geq 0$  в виде вершины,  $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x - x_0)^2 / D]$ ,  $x_0 = 8$ ,  $D = 1$ ,  $A = 5$ ,  $\omega = -30$ , как видно на графиках (рис. 1, 2), можно сделать следующие выводы. Во-первых, альфвеновская волна, как и в случае с однородной плазмой [6, 8], проникает в диссипативную плазму на конечную глубину. Во-вторых, с течением времени параметры альфвеновской волны выходят на квазистационарный режим. В частности, наступает стабилизация профилей температур электронов и ионов со временем, причём для электронов стабилизация наступает гораздо быстрее, чем для ионов.

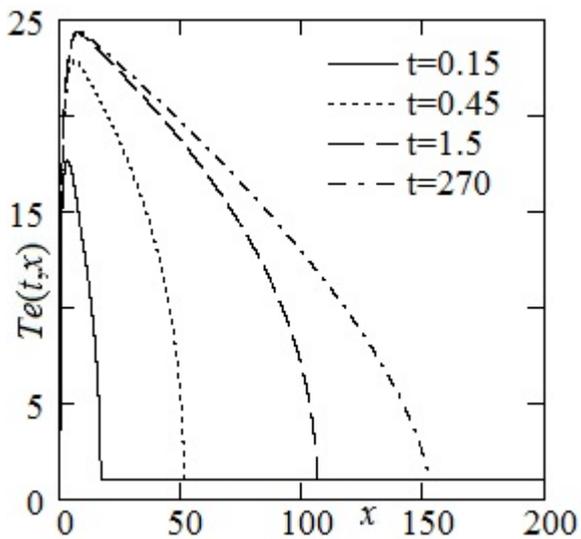


Рис. 1. Процесс установления температуры электронов с течением времени для неоднородности плотности типа вершины  $\rho(x) = 1 + 5 \exp[-(x - 8)^2]$ ,  $\omega = -30$

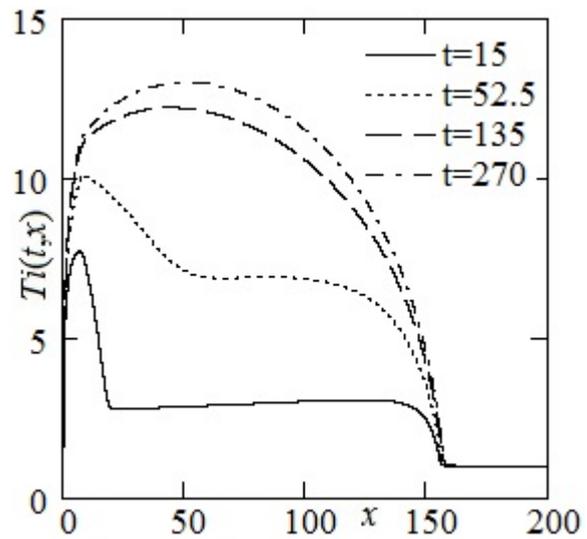


Рис. 2. Процесс установления температуры ионов с течением времени для неоднородности плотности типа вершины  $\rho(x) = 1 + 5 \exp[-(x - 8)^2]$ ,  $\omega = -30$

Далее проведём исследование профилей температур электронов и ионов в зависимости от амплитуды  $A$  для плотности вида  $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x - 7)^2 / 3]$ . Как видно из рис. 3, 4, в случае вершины ( $A = 50$ ) происходит уменьшение глубины прогрева плазмы на 90% и максимальной температуры электронов и ионов на 29% и 34% соответственно по сравнению с  $A = 0$  (однородная плазма). В случае впадины ( $A = -0.9$ , рис. 3, 4) происходит увеличение глубины прогрева на 13% и максимальной температуры электронов и ионов на 8% по сравнению с  $A = 0$ .

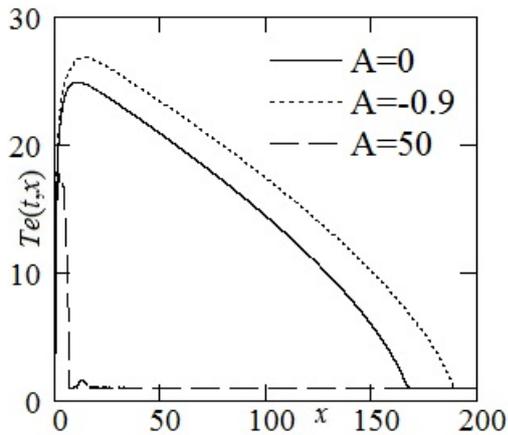


Рис. 3. Установившиеся температуры электронов в зависимости от  $A$  для неоднородности плотности  $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x-7)^2/3]$

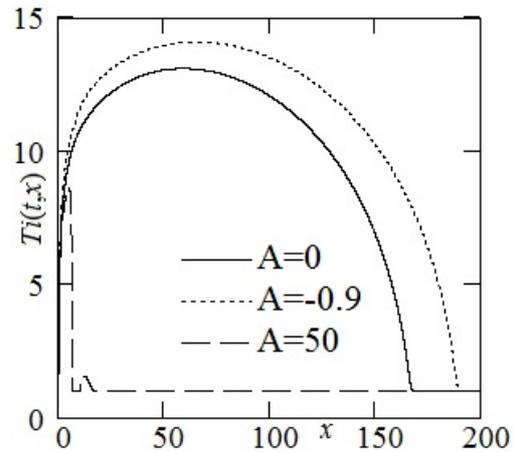


Рис. 4. Установившиеся температуры ионов в зависимости от  $A$  для неоднородности плотности  $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x-7)^2/3]$

Ниже приведены графики установившихся температур электронов и ионов с увеличением амплитуды  $A$  для профиля плотности  $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x-8)^2]$  (рис. 5, 6).

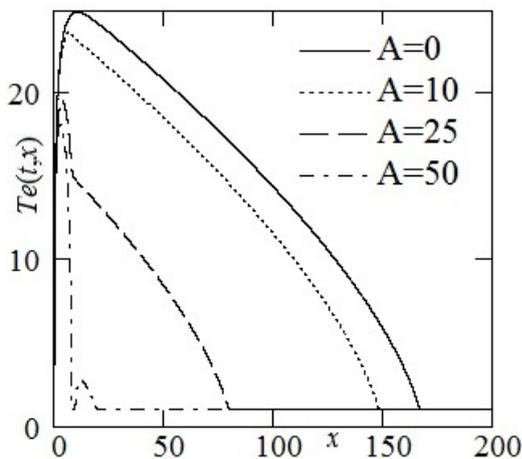


Рис. 5. Установившиеся температуры электронов в зависимости от  $A$  для неоднородности плотности  $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x-8)^2]$

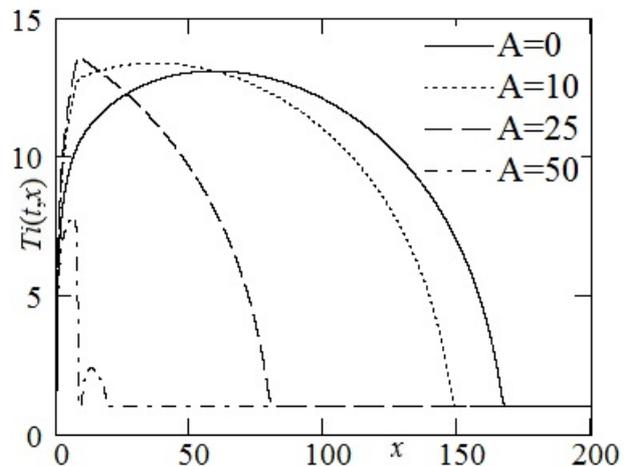


Рис. 6. Установившиеся температуры ионов в зависимости от  $A$  для неоднородности плотности  $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x-8)^2]$

Проведённый анализ позволяет сделать вывод, что с уменьшением высоты вершины  $A$  глубина проникания  $d$  альфвеновской волны будет возрастать, максимальные температуры электронов и ионов будут также увеличиваться.

Этот вывод подтверждается результатами, более подробно отражёнными в Таблице 1 для неоднородности вида  $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x-8)^2]$ .

Таблица 1

**Глубина проникания и максимальные температуры электронов и ионов в зависимости от вершины**

$A$	100	50	25	10	5	2	1	0
$d$	21.8	20.82	81.43	149.66	158.8	162.43	164.47	168.41
$T_+$	7.3	7.82	13.57	13.38	12.99	12.89	12.93	13.09
$T_-$	17.83	18.15	19.53	23.67	24.46	24.66	24.7	24.87

Ранее были проведены аналогичные исследования для неоднородной по плотности плазмы с учётом тормозного излучения с амплитудой падающей альфвеновской волны, равной  $|U_0| = 0.1$  [10, 11]. Качественно результаты и выводы совпадают. Отличие в том, что для большей амплитуды падающей волны значения температур и глубины прогрева больше в несколько раз. Ещё одно отличие – для волны с амплитудой  $|U_0| = 1$  при больших  $A$  образуются две вершины у профилей температур электронов и ионов, причём одна из вершин в несколько раз меньше другой. Возможно, по этой причине не удалось наблюдать аналогичную картину в случае малой амплитуды альфвеновской волны, так как там значения температур во много раз меньше.

## 7. Заключение

Плазменные неоднородности по плотности и тормозное излучение существенно влияют на глубину проникания альфвеновской волны и степень прогрева электронов и ионов диссипативной плазмы. Так, неоднородности плотности типа вершины тормозят прохождение альфвеновской волны, уменьшая глубину проникания волны и степень прогрева ионов и электронов диссипативной плазмой. А неоднородность типа впадины увеличивает глубину проникания волны, а также степень прогрева электронов и ионов. Увеличение амплитуды на порядок падающей альфвеновской волны приводит к росту температур электронов и ионов, а также глубины проникания альфвеновской волны в несколько раз.

## Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
2. Альфвен Х. Космическая электродинамика. – М.: ИЛ, 1952.

3. Scott W. McIntosh, Bart Pe Pontien, Marts Carlsson, Viggo Hansteen, Paul Boerner & Marsel Goossens. Alfvénic waves with sufficient energy to power the quiet solar corona and fast solar wind // *Nature*. 2011. v.475. p. 478–480.
4. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Пространственное нелинейное затухание альфвеновских волн в диссипативной плазме // *Математическое моделирование*. 2013. т.25. №8. С. 65-79.
5. Taiurskii A.A. and Gavrikov M.B. Nonlinear absorption of Alfvén wave in dissipative plasma. *AIP Conference Proceedings*. V. 1684, 070009, 2015, 13 p. doi: 10.1063/1.4934310.
6. Taiurskii A.A., Gavrikov M.B. Spatial Nonlinear Absorption of Alfvén Waves by Dissipative Plasma Taking Account Bremsstrahlung. *AIP Conference Proceedings*. V. 1773, 090003, 2016, 14 p. doi: 10.1063/1.4964994.
7. M.B. Gavrikov and A.A. Taiurskii Alfvén wave absorption in dissipative plasma. *Journal of Physics: Conf. Series* **788**, 012015, 2017. doi:10.1088/1742-6596/788/1/012015.
8. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Пространственное нелинейное поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2017. № 2. С. 40–59. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-2-40-59.
9. Gavrikov M.B., Taiurskii A.A. Nonlinear Spatial Absorption of Alfvén Waves by Dissipative Plasma // *Journal of Physics: Conference Series*. **927**, 012020, 2017. doi:10.1088/1742-6596/927/1/012020.
10. Gavrikov M.B., Taiurskii A.A. The Influence of Plasma Inhomogeneity and Incident Wave Frequency on the Nonlinear Spatial Absorption of Alfvén Waves In Dissipative Plasma // *Journal of Physics: Conference Series*. **937** 012014, 2017. doi: 10.1088/1742-6596/937/1/012014.
11. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Влияние плазменной неоднородности и частоты альфвеновской волны на её нелинейное пространственное поглощение диссипативной плазмой // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2018. № 3. С. 82–96. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-82-96.
12. Гавриков М.Б. Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика. М.: КРАСАНД. 2018. 584 с.
13. Чукбар К.В. Лекции по явлениям переноса в плазме. Долгопрудный: Издательский дом “Интеллект”. 2008. 256с.
14. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме // *Вопросы теории плазмы*. Под ред. М.А. Леонтовича. – М.: Госатомиздат. 1963. Вып. 1. С. 183-272.
15. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. – М.: Мир, 1965, 212с.
16. Чэпмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. – М.: ИЛ, 1960.
17. Имшенник В.С. // *Астрономический журнал*, 1961, 38, С. 652.
18. Ландау Л.Д. // *ЖЭТФ*, 1937, №7, с.203.

19.Грим Г. Процессы излучения в плазме / В сб. Основы физики плазмы. Т.1 – М.: Энергоатомиздат, 1983, 641 с.

## Оглавление

1. Введение .....	3
2. Основные уравнения .....	4
3. Альфеновские волны в ЭМГД .....	6
4. Постановка задачи о пространственном поглощении .....	7
5. Численный метод решения задачи о пространственном поглощении .....	9
6. Анализ результатов расчётов .....	11
7. Заключение.....	14
Список литературы.....	14