



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 29 за 2021 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**М.Ю. Беляев, Т.В. Матвеева,  
В.В. Сазонов, [В.В. Сазонов](#)**

**Расчет аэродинамического  
момента в задачах  
математического  
моделирования  
вращательного движения  
транспортных грузовых  
кораблей Прогресс**

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Расчет аэродинамического момента в задачах математического моделирования вращательного движения транспортных грузовых кораблей Прогресс / М.Ю. Беляев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 29. 41 с.  
<https://doi.org/10.20948/prepr-2021-29>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-29>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В. Келдыша

**М.Ю. Беляев, Т.В. Матвеева, Вас.В. Сазонов, В.В. Сазонов**

**РАСЧЕТ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МОМЕНТА В ЗАДАЧАХ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО  
ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ГРУЗОВЫХ КОРАБЛЕЙ *ПРОГРЕСС***

Москва – 2021

**Беляев М.Ю., Матвеева Т.В., Сазонов Вас.В., Сазонов В.В.**

**Расчет аэродинамического момента в задачах математического моделирования вращательного движения транспортных грузовых кораблей *Прогресс***

Описан способ задания аэродинамического момента в задачах математического моделирования неуправляемого вращательного движения транспортного грузового корабля *Прогресс*. Компоненты этого момента в строительной системе координат корабля рассчитаны в узлах сетки на поверхности двумерной сферы. В расчетах использована детальная геометрическая модель внешней оболочки корабля. Найденные массивы значений аппроксимированы отрезками рядов Фурье по сферическим функциям до порядка (8,8) включительно. Эти аппроксимации используются в уравнениях вращательного движения корабля. Приведены результаты применения таких уравнений в задаче реконструкции движения кораблей *Прогресс MS-07, Прогресс MS-08* в режиме гравитационной ориентации по измерениям угловой скорости и задаче прогноза электрического заряда, снимаемого с солнечных батарей корабля, в режиме одноосной солнечной ориентации.

**Ключевые слова:** транспортный грузовой корабль, геометрическая модель корабля, расчет аэродинамического момента, неуправляемое вращательное движение, реконструкция вращательного движения по данным измерений, прогноза тока солнечных батарей корабля.

**Belyaev M.Yu., Matveeva T.V., Sazonov Vas.V., Sazonov V.V.**

**Calculation of the aerodynamic torque in the problems of mathematical modeling of the attitude motion of spacecraft *Progress***

We describe the method of representation the aerodynamic torque in problems of mathematical modeling uncontrolled attitude motion of spacecraft *Progress*. The components of the torque are calculated in the nodes of the grid on the two-dimensional sphere. The calculations were based on the detailed geometric model of the spacecraft external surface. The found arrays of torque data were approximated by the segments of the Fourier series by spherical functions up to the order (8,8) inclusive. These approximations are used in the equations of attitude motion of the spacecraft. We describe the use of such equations in reconstruction of the motion of spacecraft *Progress MS-07, MS-08* in the gravitational orientation mode by measurements of their angular rates and in the prognosis of electric charge from the solar arrays of the spacecraft in the mode of its single-axis solar orientation.

**Key words:** geometric model of a spacecraft, calculation of the aerodynamic torque, uncontrolled attitude motion, reconstruction of attitude motion by measurement data, prognosis of charge from the solar arrays of the spacecraft.

### **1. Режимы неуправляемого вращательного движения ТГК *Прогресс*.**

В последние годы на ТГК *Прогресс* целенаправленно использовались два режима неуправляемого вращательного движения. Это – одноосная солнечная ориентация, так называемая закрутка на Солнце, и режим гравитационной ориентации вращающегося спутника. Первый режим – штатный. Начальные условия движения корабля в этом режиме – закрутка с угловой скоростью  $2.2 \div 2.4^\circ/\text{с}$  вокруг направленной на Солнце нормали к плоскости солнечных батарей (СБ) [1–3]. Нормаль образует малый угол с главной центральной осью максимального момента инерции ТГК, поэтому ориентированное движение близко к стационарному вращению корабля вокруг этой оси. Под действием на корабль гравитационного и аэродинамического моментов ось закрутки медленно прецессирует и через несколько часов заметно отклоняется от направления на Солнце. Скорость прецессии определяется в основном гравитационным моментом и зависит от угла между осью закрутки и плоскостью орбиты. Чтобы спрогнозировать уход оси закрутки от направления на Солнце и тем самым оценить возможности данной реализации режима по зарядке бортовых аккумуляторов, необходимо провести расчет вращательного движения корабля под действием внешних механических моментов.

Режим гравитационной ориентации вращающегося спутника предназначен для проведения на борту ТГК экспериментов с гравитационно-чувствительными системами и процессами. В этом режиме корабль вращается с угловой скоростью  $0.2 - 0.3^\circ/\text{с}$  вокруг продольной оси, совершая малые колебания относительно радиуса-вектора своего центра масс [2, 4–6]. Применение режима гравитационной ориентации требует последующего определения фактического вращательного движения корабля для правильной интерпретации результатов космических экспериментов. Такое определение выполняется по измерениям угловой скорости с использованием достаточно детальных уравнений движения ТГК, в которых должны учитываться указанные выше внешние механические моменты и некоторые дополнительные факторы.

Для математического моделирования обоих режимов можно использовать единую систему уравнений движения. Гравитационный момент в этой системе задается простыми формулами, а для расчета аэродинамического момента используется геометрическая модель внешней поверхности корабля. На орбите МКС аэродинамический момент влияет на движение ТГК слабее гравитационного, поэтому ранее использовались упрощенные модели такого рода. Ниже описываются результаты математического моделирования обоих рассмотренных режимов, полученные с использованием уравнений движения, в которых для расчета аэродинамического момента использована детальная геометрическая модель внешней поверхности корабля. Приведены описание этой модели и способ учета рассчитанного с ее помощью аэродинамического момента в уравнениях вращательного движения корабля. Как оказалось, использование уточненной модели аэродинамического момента подтвердило результаты, полученные с помощью упрощенных моделей.

**2. Аэродинамический момент, действующий ТГК.** Неуправляемое вращательное движение кораблей *Прогресс* в орбитальном полете происходит

под действием двух внешних механических моментов – гравитационного и аэродинамического. Представление гравитационного момента в уравнениях вращательного движения корабля не представляет трудностей, а с аэродинамическим моментом дело обстоит сложнее. Если принять упрощающее, но приемлемое с физической точки зрения предположение, что молекулы атмосферы при столкновении с поверхностью корабля испытывают абсолютно неупругий удар, то для главного вектора и главного момента действующего на корабль сил аэродинамического сопротивления можно получить выражения [7]

$$\mathbf{F} = -\rho_a S |\mathbf{v}| \mathbf{v}, \quad \mathbf{M}_{O'} = \rho_a |\mathbf{v}| (\mathbf{v} \times \mathbf{P}_{O'}). \quad (1)$$

Здесь  $\rho_a$  – плотность атмосферы;  $\mathbf{v}$  – скорость корабля относительно атмосферы,  $S$  и  $\mathbf{P}_{O'}$  – площадь и первый момент геометрической фигуры, которая является проекцией внешней оболочки корабля на плоскость  $\Pi_{\mathbf{v}}$ , перпендикулярную вектору  $\mathbf{v}$ . Вектор  $\mathbf{P}_{O'}$  лежит в плоскости  $\Pi_{\mathbf{v}}$  и вычисляется относительно проекции на  $\Pi_{\mathbf{v}}$  точки  $O'$ , фиксированной на каком-либо элементе конструкции корабля. Ниже точкой  $O'$  служит начало *строительной системы координат* корабля  $O'y_1y_2y_3$ . Эта система – правая. Ее начало точка  $O'$  расположена на пересечении продольной оси корабля (оси симметрии основных элементов его конструкции) с плоскостью одного из шпангоутов агрегатного отсека (рис.1). Ось  $O'y_1$  совпадает с продольной осью корабля и направлена от грузового отсека к агрегатному отсеку, ось  $O'y_2$  перпендикулярна плоскости солнечных батарей (СБ), рабочая поверхность СБ обращена к полупространству  $y_2 > 0$ .

Метод вычисления величин  $S$  и  $\mathbf{P}_{O'}$  основан на использовании достаточно детальной геометрической модели внешней оболочки корабля (рис. 1) и описан в [8]. Эти величины вычисляются в функции орта  $\mathbf{a} = \mathbf{v}/v$ ,  $v = |\mathbf{v}|$ . Вычисления организованы в строительной системе координат. В этой системе  $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $\mathbf{P}_{O'} = (P_1, P_2, P_3)$ , причем  $S = S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $P_i = P_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}_{O'} = 0$ .

Компьютерную программу, вычисляющую функции  $S$  и  $P_i$ , нецелесообразно использовать напрямую при численном интегрировании уравнений вращательного движения корабля методами высокого порядка. Получаемые с ее помощью функции  $S$  и  $P_i$  недостаточно гладкие, поскольку сетка, на которой они вычисляются, генерируется заново для каждого значения  $\mathbf{a}$ . В расчетах используются результаты сглаживания этих функций конечными отрезками их рядов Фурье по сферическим функциям  $P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi$ ,  $P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi$ , где  $P_n^{(m)}(\cdot)$  присоединенные функции Лежандра. В рядах используются функции до порядка (8,8) включительно. Коэффициенты рядов вычислялись численно. Принималось

$$\alpha_1 = \cos\theta, \quad \alpha_2 = \sin\theta \cos\varphi, \quad \alpha_3 = \sin\theta \sin\varphi;$$

интегралы вида

$$\int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} d\varphi \int_0^\pi S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) P_n^{(m)}(\cos\theta) \sin\theta d\theta. \quad (2)$$

вычислялись на комбинированной сетке – равномерной по  $\varphi$  с 64 узлами и квадратурой Гаусса по  $\cos\theta$  с 32 узлами. По найденным коэффициентам ряды вычислялись с помощью алгоритма [9] в функции направляющих косинусов  $\alpha_i$ . Этот алгоритм использовался и для расчета производных  $\partial S / \partial \alpha_j$ ,  $\partial P_i / \partial \alpha_j$ .

Свойства построенной аппроксимации рассмотрим, сравнивая ее с выражениями для силы и момента аэродинамического торможения, полученными в предположении, что корабль имеет форму прямого кругового цилиндра с двумя прикрепленными к нему одинаковыми прямоугольными пластинами солнечными батареями (рис. 2). Ось цилиндра совпадает с осью  $O'y_1$ , радиус цилиндра –  $R$ , высота –  $L$ . Пластины расположены в плоскости  $O'y_1y_3$  симметрично относительно оси  $O'y_1$ . Стороны пластин параллельны осям  $O'y_1$  и  $O'y_3$ , суммарная площадь пластин –  $S_b$ . Координаты геометрических центров масс цилиндра и пластин суть  $(z_c, 0, 0)$  и  $(z_b, 0, 0)$ . Эту геометрическую модель назовем упрощенной.

Если не учитывать возможное взаимное затенение цилиндра и пластин от набегающего аэродинамического потока (для рассматриваемых ниже движений корабля относительная продолжительность отрезков времени, на которых указанное затенение существенно, невелика), то для функций  $S(\mathbf{\alpha})$  и  $\mathbf{P}_{O'}(\mathbf{\alpha})$  можно получить выражения

$$S(\mathbf{\alpha}) = \pi R^2 |\alpha_1| + S_b |\alpha_2| + 2RL \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}, \quad (3)$$

$$\mathbf{P}_{O'}(\mathbf{\alpha}) = P(\mathbf{\alpha}) \mathbf{e}'_1, \quad P(\mathbf{\alpha}) = \pi R^2 z_c |\alpha_1| + S_b z_b |\alpha_2| + 2RL z_c \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}.$$

Здесь  $\mathbf{e}'_1$  – орт оси  $O'y_1$ .

Во второй формуле (1) вектор  $\mathbf{P}_{O'}$  определен с точностью до слагаемого, коллинеарного  $\mathbf{v}$ . В расчетах по детальной модели этот произвол устранялся с помощью условия  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{P}_{O'} = 0$  (см. выше). В формулах (3) произвол устраняется с помощью условия  $\mathbf{P}_{O'} \sim \mathbf{e}'_1$ , которому можно удовлетворить в силу симметрии простейшей модели относительно плоскости  $O'y_1y_2$ .

Сравнение функций  $S(\mathbf{\alpha})$  и  $\mathbf{\alpha} \times \mathbf{P}_{O'}(\mathbf{\alpha})$ , заданных формулами (3), с аналогичными функциями, рассчитанными с использованием детальной геометрической модели, начнем с определения коэффициентов в (3) наилучшим образом согласующих эти два набора функций. Если принять, что обе рассматриваемые геометрические модели корабля адекватны, то с приемлемой точностью функции  $S$  в (1) и (3) совпадают, а функции  $P_i$  и  $P$  связаны соотношениями

$$P = \frac{P_1}{1 - \alpha_1^2}, \quad P = \sqrt{\frac{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}{1 - \alpha_1^2}} \operatorname{sgn} P_1. \quad (4)$$

Согласующие коэффициенты находились методом наименьших квадратов. Решались три линейные задачи, возникающие при таком согласовании. Комбинации параметров  $\pi R^2$ ,  $2RL$  и  $S_b$  находились из условия минимума среднеквадратичного рассогласования между функциями  $S(\alpha)$  в узлах сетки, используемой для вычисления интегралов (2). Комбинации  $\pi R^2 z_c$ ,  $2RL z_c$  и  $S_b z_b$  находились двумя способами. Первый способ состоял в минимизации по этим комбинациям среднеквадратичного рассогласования между функцией  $P(\alpha)$ , заданной формулой (3), и функцией  $P_1(\alpha)/(1-\alpha_1^2)$ , рассчитанной по детальной модели. Рассогласование рассчитывалось в узлах сетки вычисления интегралов (2). Во втором способе по указанным комбинациям минимизировалось аналогичное рассогласование функции  $P(\alpha)$  в (3) и функции, заданной правой частью второй формулы (4). Решения этих задач соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} \pi R^2 &= 4.811(0.0011)\text{м}^2, & 2RL &= 13.013(0.0045)\text{м}^2, & S_b &= 12.544(0.0042)\text{м}^2; \\ \pi R^2 z_c &= -8.276(0.0036)\text{м}^3, & 2RL z_c &= -49.59(0.015)\text{м}^3, & S_b z_b &= -16.16(0.014)\text{м}^3; \\ \pi R^2 z_c &= -8.537(0.0064)\text{м}^3, & 2RL z_c &= -49.44(0.027)\text{м}^3, & S_b z_b &= -16.16(0.025)\text{м}^3. \end{aligned}$$

Здесь в скобках указаны стандартные отклонения оцениваемых параметров.

На основании оценок, полученных при согласовании значений  $S(\alpha)$ , имеем  $R = 1.24\text{м}$ ,  $L = 5.26\text{м}$ ,  $L/R = 4.25$ . По оценкам, полученным при подгонке функции  $P(\alpha)$ , находим  $L/R = 9.41$ ,  $9.10$ . Оценки  $z_b = -1.29\text{м}$ ,  $z_c = -1.72\text{м}$ ,  $-1.77\text{м}$ ,  $-3.81\text{м}$ ,  $-3.80\text{м}$ . Найденные геометрические параметры упрощенной модели выглядят правдоподобно, но в значениях  $L$  имеется большой разброс.

Результаты согласования иллюстрируются графиками на рис. 3 – 5 с индексом (а). Здесь маркерами обозначены результаты расчетов с помощью детальной геометрической модели, сплошными линиями изображены графики функций (3). В верхних системах координат сравниваются функции  $S(\alpha)$  при трех значениях  $\sin \theta$  на отрезке  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . В средних системах координат аналогичным образом сравниваются функции  $P(\alpha)$  и  $P_1(\alpha)/(1-\alpha_1^2)$ . В нижних системах координат сравниваются функция  $P(\alpha)$  и функция, заданная правой частью второй формулы (4). В двух последних случаях функции  $P(\alpha)$  задается единой формулой (3), но при разных коэффициентах  $\pi R^2 z_c$ ,  $2RL z_c$  и  $S_b z_b$  (см. выше). Рассогласование моделей вблизи острых пиков сплошных линий на рис. 3а и 4а обусловлено неучетом затенения СБ цилиндром в упрощенной модели.

Расчет момента по формулам  $\mathbf{M}^\circ = \alpha \times \mathbf{P}_\circ'(\alpha)$  и  $\mathbf{M}^\circ = P(\alpha)(\alpha \times \mathbf{e}'_1)$  представлен на рис. 3 – 5 с индексом (б). Маркеры указывают результаты, полученные по детальной модели, сплошные линии отвечают упрощенной модели. Компоненты момента  $\mathbf{M}^\circ = (M_1^\circ, M_2^\circ, M_3^\circ)$  указаны в строительной системе координат. Расчеты выполнены для трех значений  $\sin \theta$  на отрезке  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Параметры использованной в упрощенной модели функция  $P(\alpha)$  найдены пер-

вым способом. Использование второго способа дает весьма близкие результаты.

Сравнение результатов расчета по детальной модели с результатами расчета с помощью рядов Фурье приведены на рис. 3 – 5 с индексом (в). Маркеры указывают результаты, полученные по детальной модели, сплошные линии отвечают рядам Фурье. Организация графиков на этих рисунках аналогична организации на рисунках с индексом (б).

В уравнениях вращательного движения корабля используются компоненты  $M_i$  аэродинамического момента  $\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O'} - \overline{O'O} \times \mathbf{F}$  в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , образованной корабельными главными центральными осями инерции. Полусом приведения для момента  $\mathbf{M}_O$  служит центр масс корабля – точка  $O$ .

Ориентацию системы  $Ox_1x_2x_3$  относительно системы  $O'y_1y_2y_3$  будем задавать углами  $\gamma_c$ ,  $\alpha_c$  и  $\beta_c$ , которые введем посредством следующего условия. Система  $O'y_1y_2y_3$  может быть переведена в систему  $Ox_1x_2x_3$  тремя последовательными поворотами (полагаем, что точки  $O$  и  $O'$  совпадают). Поворот 1 выполняется на угол  $\alpha_c$  вокруг оси  $y_2$ ; поворот 2 выполняется на угол  $\beta_c$  вокруг оси  $y_3$ , полученной после поворота 1; поворот 3 выполняется на угол  $\gamma_c$  вокруг оси  $y_1$ , полученной после первых двух поворотов (и совпадающей с осью  $x_1$ ). Матрицу перехода от системы  $Ox_1x_2x_3$  к системе  $O'y_1y_2y_3$  обозначим  $C = \|c_{ij}\|_{i,j=1}^3$ . Здесь  $c_{ij}$  – косинус угла между осями  $O'y_i$  и  $Ox_j$ . Элементы этой матрицы выражаются через углы  $\gamma_c$ ,  $\alpha_c$  и  $\beta_c$  по формулам

$$\begin{aligned} c_{11} &= \cos \alpha_c \cos \beta_c, & c_{12} &= \sin \alpha_c \sin \gamma_c - \cos \alpha_c \sin \beta_c \cos \gamma_c, \\ c_{21} &= \sin \beta_c, & c_{22} &= \cos \beta_c \cos \gamma_c, \\ c_{31} &= -\sin \alpha_c \cos \beta_c, & c_{32} &= \cos \alpha_c \sin \gamma_c + \sin \alpha_c \sin \beta_c \cos \gamma_c, \\ & & c_{13} &= \sin \alpha_c \cos \gamma_c + \cos \alpha_c \sin \beta_c \sin \gamma_c, \\ & & c_{23} &= -\cos \beta_c \sin \gamma_c, \\ & & c_{33} &= \cos \alpha_c \cos \gamma_c - \sin \alpha_c \sin \beta_c \sin \gamma_c. \end{aligned}$$

Значения углов  $\gamma_c$ ,  $\alpha_c$  и  $\beta_c$  индивидуальные характеристики корабля *Прогресс*. Их достаточно надежное определение выполняется по измерениям угловой скорости, полученным в режиме так называемой закрутки на Солнце [1–3]. Обычно  $|\alpha_c| < 1^\circ$ ,  $|\beta_c| < 1^\circ$ ,  $|\gamma_c| < 5^\circ$ .

Формулы компонент аэродинамического момента, которые используются в уравнениях вращательного движения корабля, имеют вид

$$\begin{aligned} M_1 &= v_2 Q_3 - v_3 Q_2, & M_2 &= v_3 Q_1 - v_1 Q_3, & M_3 &= v_1 Q_2 - v_2 Q_1, \\ Q_i &= \rho_a v \sum_{j=1}^3 [c_{ji} P_j(\mathbf{a}) + d_j S(\mathbf{a})], & \alpha_i &= \frac{1}{v} \sum_{j=1}^3 c_{ij} v_j & (i=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $d_j$  и  $v_j$  – компоненты векторов  $\overline{OO'}$  и  $\mathbf{v}$  в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ .

**3. Уравнения вращательного движения ТГК.** Корабль считается гироскопом. Для задания уравнений его движения используются три правых декартовых системы координат. Две системы – строительная и образованная главными центральными осями инерции корабля – были введены выше, третья система координат – *гринвичская*  $CY_1Y_2Y_3$ . Начало этой системы находится в центре Земли, плоскость  $CY_1Y_2$  совпадает с плоскостью экватора, ось  $CY_1$  пересекает гринвичский меридиан, ось  $CY_3$  направлена к Северному полюсу. Полагаем, что абсолютная угловая скорость гринвичской системы постоянна и направлена по оси  $CY_3$ . Модуль этой скорости обозначим  $\omega_e$ .

Матрицу перехода от системы  $Ox_1x_2x_3$  к системе  $CY_1Y_2Y_3$  обозначим  $B = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^3$ . Здесь  $b_{ij}$  – косинус угла между осями  $CY_i$  и  $Ox_j$ . Матрицу  $B$  параметризуем углами  $\gamma_b$ ,  $\delta_b$  и  $\beta_b$ , которые связаны с углами  $\gamma_c$ ,  $\alpha_c$  и  $\beta_c$  формулами  $\gamma_b = \gamma_c$ ,  $\delta_b = \alpha_c - \pi/2$ ,  $\beta_b = \beta_c$ . Отсюда

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\sin \delta_b \cos \beta_b, & b_{12} &= \cos \delta_b \sin \gamma_b + \sin \delta_b \sin \beta_b \cos \gamma_b, \\ b_{21} &= \sin \beta_b, & b_{22} &= \cos \beta_b \cos \gamma_b, \\ b_{31} &= -\cos \delta_b \cos \beta_b, & b_{32} &= -\sin \delta_b \sin \gamma_b + \cos \delta_b \sin \beta_b \cos \gamma_b, \\ & & b_{13} &= \cos \delta_b \cos \gamma_b - \sin \delta_b \sin \beta_b \sin \gamma_b, \\ & & b_{23} &= -\cos \beta_b \sin \gamma_b, \\ & & b_{33} &= -\sin \delta_b \cos \gamma_b - \cos \delta_b \sin \beta_b \sin \gamma_b. \end{aligned}$$

Компоненты абсолютной угловой скорости корабля в системах координат  $Ox_1x_2x_3$  и  $O'y_1y_2y_3$  обозначим  $\omega_i$  и  $\Omega_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) соответственно. Имеют место соотношения

$$\Omega_i = \sum_{k=1}^3 c_{ik} \omega_k \quad (i=1, 2, 3). \quad (6)$$

Ниже, если не оговорено особо, компоненты векторов указываются в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ .

Уравнения движения корабля состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение центра масс корабля (орбитальное движение), другая – его движение относительно центра масс. Подсистема уравнений движения центра масс записана в гринвичской системе координат с учетом нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (16,16) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Начальные условия для численного интегрирования этой подсистемы сообщаются ПАО «РКК «Энергия».

Подсистема уравнений вращательного движения корабля образована динамическими уравнениями Эйлера для компонент угловой скорости  $\omega_i$  и кинематическими уравнениями Пуассона для первой и второй строк матрицы  $B$ . В уравнениях Эйлера учитываются действующие на корабль гравитационный и аэродинамический моменты, а также постоянный момент вдоль оси  $Ox_1$ . Гиросtatический момент корабля считается постоянным. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}
 J_1 \dot{\omega}_1 &= (J_2 - J_3)(\omega_2 \omega_3 - \nu x_{s2} x_{s3}) + H_2 \omega_3 - H_3 \omega_2 + J_1 \varepsilon + M_1, \\
 J_2 \dot{\omega}_2 &= (J_3 - J_1)(\omega_1 \omega_3 - \nu x_{s1} x_{s3}) + H_3 \omega_1 - H_1 \omega_3 + M_2, \\
 J_3 \dot{\omega}_3 &= (J_1 - J_2)(\omega_2 \omega_3 - \nu x_{s2} x_{s3}) + H_1 \omega_2 - H_2 \omega_1 + M_3, \\
 \dot{b}_{11} &= b_{12} \omega_3 - b_{13} \omega_2 + \omega_e b_{21}, \quad \dot{b}_{21} = b_{22} \omega_3 - b_{23} \omega_2 - \omega_e b_{11}, \\
 \dot{b}_{12} &= b_{13} \omega_1 - b_{11} \omega_3 + \omega_e b_{22}, \quad \dot{b}_{22} = b_{23} \omega_1 - b_{21} \omega_3 - \omega_e b_{12}, \\
 \dot{b}_{13} &= b_{11} \omega_2 - b_{12} \omega_1 + \omega_e b_{23}, \quad \dot{b}_{23} = b_{21} \omega_2 - b_{22} \omega_1 - \omega_e b_{13}, \\
 \nu &= \frac{3\mu_e}{r^5}, \quad r = \sqrt{x_{s1}^2 + x_{s2}^2 + x_{s3}^2}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь  $x_{si}$  – компоненты геоцентрического радиус-вектора центра масс корабля,  $\varepsilon$  – угловое ускорение, создаваемое постоянным моментом,  $J_i$  – моменты инерции корабля относительно осей  $Ox_i$ ,  $H_i$  – компоненты постоянного гиросtatического момента бортовых устройств,  $M_i$  – компоненты действующего на корабль аэродинамического момента (5). Гравитационный момент в уравнениях (7) описывается членами, содержащими множитель  $\nu$ .

Величины  $x_{si}$  и  $\nu_i$  в уравнениях (5), (7) задаются формулами

$$x_{si} = \sum_{k=1}^3 Y_k b_{ki} \quad \nu_i = \sum_{k=1}^3 \dot{Y}_k b_{ki} \quad (i=1, 2, 3),$$

где  $Y_k$ ,  $\dot{Y}_k$  – координаты и скорости точки  $O$  в системе  $CY_1Y_2Y_3$ . Эти координаты вычисляются в функции времени посредством численного интегрирования подсистемы уравнений орбитального движения корабля. Третья строка матрицы  $B$  вычисляется как векторное произведение ее первой и второй строк, т. е. переменных  $b_{1i}$  и  $b_{2i}$  в системе (2). Начальные значения этих переменных выражаются через углы  $\gamma_b$ ,  $\delta_b$  и  $\beta_b$ . Тем самым обеспечивается выполнение условий ортогональности матрицы  $B$ .

Для численного интегрирования уравнений (7) надо в первых трех из них выделить в явном виде угловые ускорения  $\dot{\omega}_i$ , т. е. поделить каждое уравнение на соответствующий момент инерции  $J_i$ . В результате правые части этих уравнений можно записать с использованием параметров

$$\mu = \frac{J_2 - J_3}{J_1}, \quad \mu' = \frac{J_2 - J_1}{J_3}, \quad \varepsilon, \quad h_i = \frac{H_i}{J_1}, \quad \tilde{d}_i = \frac{d_i}{J_1} \quad (i=1, 2, 3)$$

и параметра  $\chi = 1/J_1$ , который входит как множитель при  $P_i$ . Кроме того, элементы матрицы  $C$  в формулах (3) выражаются через углы  $\gamma_c$ ,  $\alpha_c$  и  $\beta_c$ . Числовые значения этих углов и параметров  $\mu$ ,  $\mu'$  находятся по результатам обработки измерений угловой скорости корабля, выполненных в режиме закрутки на Солнце [1–3].

Параметры  $\chi$  и  $\tilde{d}_i$  можно, в принципе, определить расчетным путем, но параметры  $\varepsilon$  и  $h_i$  априори неизвестны. Все эти параметры определяются из обработки измерений угловой скорости, выполненных на корабле в режиме гравитационной ориентации вращающегося спутника (см. ниже). Обработка состоит в аппроксимации измерений решениями уравнений (7) методом наименьших квадратов. В результате обработки находятся начальные условия аппроксимирующего решения и оценки параметров  $\varepsilon$ ,  $\chi$ ,  $h_i$ ,  $\tilde{d}_i$ . При этом не все параметры определяются с одинаковой точностью. Оценки параметров  $h_1$ ,  $\tilde{d}_2$  и  $\tilde{d}_3$  имеют большие стандартные отклонения, сопоставимые с абсолютными величинами этих оценок. В такой ситуации практически без снижения точности аппроксимации измерений можно положить  $h_1 = 0$ ,  $\tilde{d}_2 = \tilde{d}_3 = 0$ . В результате такого упрощения первые три уравнения (7) можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \mu(\omega_2\omega_3 - \nu x_{s2}x_{s3}) + h_2\omega_3 - h_3\omega_2 + \varepsilon + \nu_2 Q_3 - \nu_3 Q_2, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{\mu' - \mu}{1 - \mu\mu'}(\omega_1\omega_3 - \nu x_{s1}x_{s3}) + \frac{1 - \mu'}{1 - \mu\mu'}[h_3\omega_1 + \nu_3(Q_1 + Q_0) - \nu_1 Q_3], \\ \dot{\omega}_3 &= -\mu'(\omega_1\omega_2 - \nu x_{s1}x_{s2}) - \frac{1 - \mu'}{1 - \mu}[h_2\omega_1 + \nu_1 Q_2 - \nu_2(Q_1 + Q_0)] \end{aligned} \quad (8)$$

$$Q_0 = E\rho_a \nu \tilde{d}_1 S(\mathbf{a}), \quad Q_i = E\rho_a \nu \chi \sum_{j=1}^3 c_{ji} P_j(\mathbf{a}) \quad (i=1, 2, 3).$$

Ниже полагаем, что первые три уравнения (7) записаны в виде (8). При численном интегрировании уравнений (7)  $E = 10^{10}$ ,  $\chi = 10^2 / J_1$ ,  $\tilde{d}_1 = \chi d_1$ , единицами измерения времени и длины служат 1000 с и 1000 км, единицы измерения остальных величин:  $[\rho_a] = \text{кг/м}^3$ ,  $[\nu_i] = \text{км/с}$ ,  $[\omega_i] = [h_i] = 10^{-3} \text{с}^{-1}$ ,  $[P_i] = \text{м}^3$ ,  $[S] = \text{м}^2$ ,  $[\chi] = 10^{-2} \text{кг}^{-1} \text{м}^{-2}$ ,  $[\tilde{d}_1] = 10^{-2} \text{кг}^{-1} \text{м}^{-1}$ . Параметры  $h_2$ ,  $h_3$ ,  $\chi$  и  $\tilde{d}_1$  служат параметрами согласования. На оценки  $\chi$  и  $\tilde{d}_1$  существенно влияет отличие реальной плотности атмосферы от плотности, рассчитываемой по модели ГОСТ.

**4. Режим гравитационной ориентации вращающегося спутника.** Этот режим удобно рассматривать в *орбитальной системе* координат  $OX_1X_2X_3$ . Эта система – правая декартова, ее ось  $OX_3$  направлена по геоцентрическому радиус-вектору центра масс корабля, ось  $OX_2$  направлена по вектору его орбитального кинетического момента. Матрицы перехода от системы  $Ox_1x_2x_3$  к системе  $OX_1X_2X_3$  обозначим  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$ , где  $a_{ij}$  – косинус угла между осями  $X_i$  и  $x_j$ . Элементы этой матрицы параметризуем углами  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$ , которые вводятся аналогично углам  $\gamma_b$ ,  $\delta_b$  и  $\beta_b$ .

Чтобы пояснить упомянутый режим, рассмотрим уравнения (7) в упрощенной ситуации, которая в случае ТГК *Прогресс* близка к реальности. Примем, что орбита корабля – круговая радиуса  $r$  и неизменна в абсолютном пространстве. В этом случае орбитальная система координат вращается вокруг своей оси  $OX_2$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_0 = \sqrt{\mu_e r^{-3}}$ , координаты центра масс корабля имеют вид  $x_{si} = ra_{3i}$  ( $i=1, 2, 3$ ), кинематические уравнения вращательного движения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \omega_1 - (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma) \tan \beta, \\ \dot{\delta} &= \frac{\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma}{\cos \beta} - \omega_0, \quad \dot{\beta} = \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma. \end{aligned} \quad (9)$$

Предположим далее, что корабль имеет два равных момента инерции  $J_2 = J_3$ , постоянный механический момент вдоль оси  $Ox_1$ , аэродинамический и гиростатический моменты отсутствуют. Это значит, в (8)  $\mu = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $\chi = 0$ ,  $\tilde{d}_1 = 0$ ,  $h_2 = h_3 = 0$ . В результате эти уравнения можно записать в виде

$$\dot{\omega}_1 = 0, \quad \dot{\omega}_2 = \mu'(\omega_1\omega_3 - 3\omega_0^2 a_{31}a_{33}), \quad \dot{\omega}_3 = -\mu'(\omega_1\omega_2 - 3\omega_0^2 a_{31}a_{32}). \quad (10)$$

Уравнения (9), (10) образуют замкнутую систему, описывающую вращательное движение корабля относительно орбитальной системы координат. Эта система допускает два семейства частных решений, в которых

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \Omega, \quad \omega_2 = \omega_0 \cos \beta \cos \gamma, \quad \omega_3 = -\omega_0 \cos \beta \sin \gamma, \\ \gamma &= \frac{4\mu'\Omega}{1+3\mu'}t + \gamma_0, \quad \sin \delta = 0, \quad \beta = \arcsin \frac{\Omega(1-\mu')}{\omega_0(1+3\mu')}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $\gamma_0$  и  $\Omega$  – произвольные постоянные,  $|\Omega| \leq \omega_0(1+3\mu')/(1-\mu')$ . Одно семейство получается при  $\delta = 0$ , другое при  $\delta = \pi$ . При  $0 < \mu' < 1$  решения (5) устойчивы по переменным  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $\dot{\delta}$  и  $\dot{\beta}$  [7]. При  $0 < 1-\mu' \ll 1$  эти решения можно использовать для реализации режима гравитационной ориентации вращающегося спутника. Например, при  $\mu' = 0.87$ ,  $h_1 = 0$  и  $\Omega = 0.2^\circ/\text{с}$  имеем в (6)  $\beta = 6.2^\circ$ , т.е. ось  $x_1$  мало отклоняется от оси  $X_3$  при  $\delta = \pi$  или оси  $(-X_3)$  при  $\delta = 0$ .

В случае кораблей *Прогресс* члены уравнений (8), характеризующиеся параметрами  $\mu$ ,  $\varepsilon$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ ,  $\chi$  и  $\tilde{d}_1$ , малы. По этой причине уравнения (7) имеют решения, которые будучи выраженными через углы  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$  оказываются близкими решениям (11). Движения, описываемые такими решениями, были реализованы в экспериментах с кораблями *Прогресс М-20М* [2], *Прогресс М-29М* [4], *Прогресс МС-07* и *Прогресс МС-08* [5, 6]. Результаты реконструкции движений двух последних кораблей с использованием уточненной модели аэродинамического момента описаны ниже.

**5. Реконструкция движения ТГК в режиме гравитационной ориентации по измерениям угловой скорости.** При реализации режима гравитационной ориентации измерялись компоненты абсолютной угловой скорости корабля в системе  $y_1y_2y_3$  и электрический ток, вырабатываемый СБ. Данные измерений по телеметрическому каналу передавались на Землю. Обработка данных угловой скорости, относящихся к одной и той же реализации режима, состояла в поиске решения уравнений (7), наилучшим образом согласующего эти данные с их расчетными аналогами. Измерения тока использовались для контроля.

Данные измерений угловой скорости имеют вид

$$t_n, \Omega_1^{(n)}, \Omega_2^{(n)}, \Omega_3^{(n)} \quad (n=1, 2, \dots, N), \quad (12)$$

где  $\Omega_i^{(n)}$  ( $i=1, 2, 3$ ) – приближенные значения величин  $\Omega_i$  в момент времени  $t_n$ :  $\Omega_i^{(n)} \approx \Omega_i(t_n)$ ,  $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ . Разности  $t_{n+1} - t_n$  принимают значения от одной до нескольких секунд. Моменты времени  $t_1$  и  $t_N$  практически совпадают с началом и концом сеанса ориентированного движения корабля. Расчетные аналоги измерений компонент угловой скорости определяются уравнениями (7) и формулами (6).

Данные измерений тока СБ представляют собой три ряда значений, полученные от трех датчиков:

$$t'_m, I_1^{(m)}, I_2^{(m)}, I_3^{(m)} \quad (m=1, 2, \dots, M). \quad (13)$$

Здесь  $I_j^{(m)}$  – приближенное значение тока, фиксируемое в момент времени  $t'_m$  датчиком с номером  $j$  ( $j=1, 2, 3$ ). Номинально  $t'_{m+1} - t'_m = 1$  с, но в измерениях имеются пропуски. Показания датчиков почти одинаковы, поэтому измерением тока в момент  $t'_m$  считается величина  $I_m = [I_1^{(m)} + I_2^{(m)} + I_3^{(m)}] / 3$ . Расчетный аналог тока СБ

$$I = \begin{cases} I_0 \max(0, \eta) & \text{на освещенном участке орбиты,} \\ 0 & \text{на участке орбиты в тени Земли.} \end{cases} \quad (14)$$

Здесь  $I_0$  – максимально возможный ток СБ,

$$\eta = \sum_{i,k=1}^3 S_k b_{ki} c_{2i}$$

– косинус угла между осью  $y_2$  и ортом направления Земля – Солнце, имеющим в системе  $Y_1Y_2Y_3$  компоненты  $S_k$ . Зависимость величин  $S_k$  от времени рассчитывается по приближенным формулам.

Реконструкцией движения корабля по значениям угловой скорости (12) будем считать решение уравнений (7), доставляющее минимум функционалу

$$\Phi = \sum_{i=1}^3 \left\{ \sum_{n=1}^N [\Omega_i^{(n)} - \Omega_i(t_n)]^2 - N\Delta_i^2 \right\}, \quad \Delta_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\Omega_i^{(n)} - \Omega_i(t_n)]. \quad (15)$$

Здесь функции  $\Omega_i(t)$  определены на решении уравнений (7) по формулам (6),  $\Delta_i$  – постоянное смещение  $i$ -ой компоненты угловой скорости в данных (12). Функционал  $\Phi$  получен в результате исключения смещений  $\Delta_i$  из стандартного функционала метода наименьших квадратов, возникающего при уравнивании соотношений  $\Omega_i^{(n)} \approx \Omega_i(t_n) + \Delta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $n = 1, 2, \dots, N$ ).

Разности  $t_{n+1} - t_n$  в данных (7) намного меньше оптимального шага интегрирования уравнения движения, поэтому интегрирование выполняется с оптимальным шагом на отрезке  $[t_1, t_N]$ , а выход на узлы сетки  $\{t_n\}$  и расчет слагаемых в суммах (15) выполняются с использованием полинома, интерполирующего решение уравнений движения внутри шага интегрирования. Для процедуры интегрирования RKV56, используемой в описываемых расчетах, такой полином известен [10].

Функционал (15) минимизируется по 11 переменным – начальным условиям решения в точке  $t_1$ , задаваемым величинами  $\gamma_b, \delta_b, \beta_b, \omega_{i0} = \omega_i(t_1)$ , и параметрам  $h_2, h_3, \varepsilon, \tilde{d}_1, \chi$ . Минимизация выполняется методами Левенберга–Марквардта и Гаусса–Ньютона [11]. Поиск первого приближения точки минимума сводится к минимизации (15) на движениях (11) по параметрам  $\gamma_0$  и  $\Omega$  [4]. Точность аппроксимации данных измерений (7) и разброс в определении оцениваемых величин будем характеризовать, следуя методу наименьших квадратов, соответствующими стандартными отклонениями. Пусть  $\Phi_{\min}$  – значения функционала (15) в точке минимума,  $D$  – вычисленная в этой точке матрица системы нормальных уравнений, используемых в методе Гаусса–Ньютона (матрица  $2D$  приближенно равна матрице квадратичной формы  $d^2\Phi$ ). Тогда формулы стандартного отклонения  $\sigma$  ошибок в измерениях и ковариационной матрицы  $K$  уточняемых параметров можно записать в виде

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Phi_{\min}}{N-14}}, \quad K = \sigma^2 D^{-1}.$$

Стандартные отклонения уточняемых параметров – квадратные корни из соответствующих диагональных элементов матрицы  $K$  – обозначим  $\sigma_\gamma$ ,  $\sigma_\delta$ ,  $\sigma_\beta$ ,  $\sigma_{\omega_i}$ ,  $\sigma_{h_2}$ ,  $\sigma_{h_3}$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $\sigma_{d_1}$ ,  $\sigma_\chi$ .

Данные измерений тока (13) непосредственно не обрабатывались. Величины  $I_m$  при  $t_1 \leq t'_m \leq t_N$  использовались для контроля реконструкции движения, построенной посредством минимизации функционала (15).

**6. Реконструкция движения ТГК *Прогресс* МС-07 и МС-08.** Реконструкция выполнена на 6 интервалах времени. Ее результаты представлены на рис. 6 – 11 и в табл. 1, 2. В подписях к рисункам и в табл. 1 указано Московское время (МСК). Интервалы 1 – 3 содержат данные, полученные в апреле 2018 г. с борта *Прогресса* МС-07. Обработка этих данных выполнена при значениях параметров тензора инерции корабля  $\mu = 0.2040$ ,  $\mu' = 0.8605$ ,  $\gamma_c = -0.0758$ ,  $\alpha_c = 0.0095$ ,  $\beta_c = -0.0191$ . Интервалы 4 – 6 содержат данные, полученные в августе 2018 г. на *Прогрессе* МС-08. Параметры тензора инерции этого корабля:  $\mu = 0.1864$ ,  $\mu' = 0.8593$ ,  $\gamma_c = -0.0401$ ,  $\alpha_c = 0.0363$ ,  $\beta_c = -0.0348$ . Разница в значениях параметров обусловлена разной загрузкой кораблей отходами МКС перед их затоплением. Представленные на рисунках графики построены на отрезках  $t_1 \leq t \leq t_N$ . Рис. 6 – 11 организованы следующим образом. В их левой части изображены графики зависимости от времени компонент угловой скорости  $\Omega_i(t)$ , рассчитанные по формулам (6) и решениям уравнений (7). Маркеры рядом с этими графиками указывают точки  $(t_n, \Omega_i^{(n)} - \Delta_i)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . В левой части рисунков приведены графики зависимости от времени углов  $\delta$ ,  $\beta$  и расчетного аналога тока СБ (13). Маркеры рядом с графиками  $I(t)$  указывают все имеющиеся телеметрические точки  $(t'_m, I_m)$ , для которых  $\eta(t'_m) > 0$ ,  $t_1 \leq t'_m \leq t_N$ . В данных (13) имеются пропуски, поэтому маркеры покрывают не все участки графиков расчетного аналога (14).

Условие  $\eta(t'_m) > 0$  необходимо, чтобы исключить измерения тока, полученные при освещении Солнцем тыльной стороны СБ – при  $\eta < 0$ . Такие измерения можно аппроксимировать расчетным аналогом  $I = -I_0 \kappa \eta$ , подбирая коэффициент  $\kappa$  в пределах 0.3 – 0.5. Однако точность согласования таких измерений оказалась заметно хуже чем на рис. 6 – 11. Примеры аппроксимации полных измерений тока СБ в случае  $\kappa = 0.35$  приведены в [5, 6]. Надо сказать, что точность согласования измерений (13) с расчетным аналогом (14) не всегда достаточна и в случае  $\eta(t'_m) > 0$ . Вероятная причина – освещение СБ солнечным светом, отраженным от поверхности Земли. Вклад отраженного света в ток СБ может достигать до нескольких десятков процентов величины  $I_0 \eta$ . Поскольку расчетный аналог измерений тока СБ (14) не очень точен, включать эти измерения в функционал метода наименьших квадратов нецелесообразно. Однако измерения тока необходимы для контроля правильности реконструкции – они позволяют отбросить посторонние экстремумы функционала (15).

Движения *Прогресса-07* на рис. 6 – 8 не очень близки к движениям вида (11). На этом корабле режим гравитационной ориентации вращающегося спутника был реализован с большой ошибкой. Начальные условия движения задавались соотношениями, которые в переменных системы (9), (10) можно записать в виде  $\sin \gamma \approx \sin \delta \approx \beta \approx 0$ ,  $\omega_2 \approx \omega_3 \approx 0$ , тогда как начальные значения  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  надо было задать формулами  $\omega_2 \approx \omega_0 \cos \gamma$ ,  $\omega_3 \approx -\omega_0 \sin \gamma$ . Тем не менее, движения на рис. 6 – 8 представляют собой режим гравитационной ориентации вращающегося спутника, но сильно возмущенный. Движения *Прогресса МС-08* на рис. 9– 11 более близки к движениям (11), особенно движение на рис. 10. Они задавались указанными выше более точными начальными условиями.

Табл. 1, 2 содержат основные характеристики обработанных интервалов, в частности оценки параметров уравнений (7) и стандартные отклонения всех оцениваемых величин. Угловые переменные в табл. 1 выражены в радианах. Точность построенных реконструкций движения корабля характеризуется стандартными отклонениями уточняемых параметров. Анализ этих стандартных отклонений вместе с анализом собственных векторов матрицы  $D$ , отвечающих ее нескольким минимальным собственным числам, позволяет понять характер неопределенности, которая возникает при реконструкции движения. Анализ основан на формуле

$$D^{-1} = \sum_{k=1}^{11} v_k v_k^T, \quad v_k = \frac{u_k}{\sqrt{p_k}},$$

где  $p_k$  и  $u_k$  – собственные числа и ортонормированные собственные векторы матрицы  $D$ . Вектор  $v_k$  – также собственный вектор матрицы  $D$ , отвечающий ее собственному числу  $p_k$ , но ненормированный. Его норма изменена так, чтобы его компоненты (будем обозначать их  $v_{k,\omega 1}$ ,  $v_{k,\omega 2}$ ,  $v_{k,\mu}$  и т.п.) характеризовали вклад в стандартные отклонения уточняемых параметров. Например, для стандартного отклонения  $\sigma_\mu$  имеет место формула

$$\sigma_\mu^2 = \sigma^2 \sum_{k=1}^9 v_{k,\mu}^2,$$

и если  $|v_{1,\mu}| \gg |v_{k,\mu}|$  ( $k = 2, 3, \dots, 11$ ), то  $\sigma_\mu \approx \sigma |v_{1,\mu}|$ . Таким образом, наибольшие стандартные отклонения имеют те определяемые параметры, которым отвечают наибольшие по модулю компоненты векторов  $v_k$ . Назовем эти векторы векторами чувствительности.

В качестве примера такого анализа исследуем точность реконструкции движения на интервале 2. Собственные числа матрицы  $D$  имеют значения:

$$p_1 = 12.3, \quad p_2 = 79.4, \quad p_3 = 319, \quad p_4 = 398, \quad 1428, \dots, 1.43 \cdot 10^8.$$

Тот факт, что минимальное собственное число положительно, означает принципиальную возможность реконструкции движения описанным способом.

Компоненты используемых ниже векторов упорядочены в соответствии с записью:  $\gamma_b, \delta_b, \beta_b, \omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}, h_2, h_3, \varepsilon, \tilde{d}_1, \chi$ . Наиболее значимые векторы чувствительности в рассматриваемом примере

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (-0.02, -0.02, -0.01, 0, -0.02, 0, 0, 0, 0, 0.26, 0.10)^T, \\ \mathbf{v}_2 &= (0.07, 0.08, 0.02, 0, 0.02, 0.01, 0, 0, 0, 0, 0.02)^T, \\ \mathbf{v}_3 &= (0.02, -0.03, 0.03, -0.01, -0.02, 0.02, 0, 0, 0, 0, -0.01)^T, \\ \mathbf{v}_4 &= (0.02, -0.03, 0.03, -0.01, -0.02, 0.02, 0, 0, 0, 0, -0.01)^T. \end{aligned}$$

Компоненты, обозначенные здесь нулями, имеют абсолютную величину менее 0.005. Из всей совокупности компонент остальных векторов чувствительности только три лежат в пределах  $0.006 \div 0.019$ . Как видим, наименее точно определяются параметры  $\tilde{d}_1$  и  $\chi$  (ср. табл. 2).

Отметим, что минимальное собственное число матрицы  $D$  было значимо больше нуля во всех вариантах реконструкции движения ТГК.

Точность построенных реконструкций движения корабля характеризуется стандартными отклонениями начальных условий. Если начальные условия задаются на концах интервала с обрабатываемыми измерениями, то их стандартные отклонения обычно превышают стандартные отклонения фазовых переменных в средней части интервала. С учетом этого обстоятельства стандартные отклонения, приведенные в табл. 1, дают адекватное представление о стандартных отклонениях фазовых переменных на всем отрезке  $t_1 \leq t \leq t_N$ . Стандартные отклонения углов  $\gamma_b, \delta_b$  и  $\beta_b$  не превосходят  $0.5^\circ$ . Реальные погрешности, как показывает опыт, могут быть в 2 – 3 раза больше. Ошибки аппроксимации измерений угловой скорости и оценки параметров  $h_2, h_3, \varepsilon$  сопоставимы с аналогичными оценками [5, 6].

**7. Закрутка на Солнце. Усредненные уравнения вращательного движения.** Движение ТГК в режиме закрутки на Солнце можно промоделировать с использованием уравнений (7), но поскольку корабль быстро вращается вокруг оси, близкой оси максимального момента инерции, для описания движения этой оси можно использовать усредненные уравнения для кинетического момента вращательного движения корабля. Эти уравнения получим в векторной форме с введением следующих упрощений. Пренебрежем гирос태тическим моментом и постоянным моментом вдоль оси  $Ox_1$ , матрицу  $C$  примем единичной. Теорема об изменении кинетического момента корабля в движении относительно центра масс имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} &= \frac{3\mu_e}{r^5} (\mathbf{r} \times \hat{J}\mathbf{r}) + \rho_a v^2 (\mathbf{a} \times \mathbf{Q}), \quad (16) \\ \hat{J}\mathbf{r} &= \sum_{i=1}^3 J_i x_{si} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^3 P_i(\mathbf{a}) \mathbf{e}_i + d_1 S(\mathbf{a}) \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{e}_i$  – орты осей  $Ox_i$ . Уравнение (16) – это векторная форма записи урав-

нений (8) в случае  $h_2 = h_3 = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $E = 1$  и единичной матрицы  $C$ . В рамках сделанных упрощений в самом начале закрутки  $\mathbf{K} = J_2 \Omega \mathbf{e}_2$ . Ниже будем предполагать, что последнее соотношение выполняется в течение всего времени использования этого режима. Это – еще одно упрощение.

Правую часть уравнения (16) усредним по вращению корабля вокруг оси  $Ox_2$ , полагая положение точки  $O$  на орбите фиксированным [7]. Сначала усредним гравитационный момент – первое слагаемое в правой части (16). Усреднение удобно выполнить в орбитальной системе координат, базисные орты ее осей  $Ox_i$  обозначим  $\mathbf{E}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Компоненты орта  $\mathbf{E}_i$  в системе  $Ox_1x_2x_3$  – строка с номером  $i$  матрицы  $A$ . Гравитационный момент преобразуем следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_g &= \frac{3\mu_e}{r^3} (\mathbf{E}_3 \times \hat{\mathcal{J}}\mathbf{E}_3) = (\mathbf{M}_g \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{E}_1 + (\mathbf{M}_g \cdot \mathbf{E}_2) \mathbf{E}_2 = \\ &= \frac{3\mu_e}{r^3} [(\mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathcal{J}}\mathbf{E}_3) \mathbf{E}_2 - (\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathcal{J}}\mathbf{E}_3) \mathbf{E}_1]. \end{aligned}$$

При усреднении орты  $\mathbf{E}_i$  считаем неизменными. Имеем

$$\langle \mathbf{M}_g \rangle = \frac{3\mu_e}{r^3} [\langle \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathcal{J}}\mathbf{E}_3 \rangle \mathbf{E}_2 - \langle \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathcal{J}}\mathbf{E}_3 \rangle \mathbf{E}_1].$$

В системе  $Ox_1x_2x_3$

$$\mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathcal{J}}\mathbf{E}_3 = \sum_{i=1}^3 J_i a_{1i} a_{3i}, \quad \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathcal{J}}\mathbf{E}_3 = \sum_{i=1}^3 J_i a_{2i} a_{3i}.$$

Пусть корабль вращается вокруг оси  $Ox_2$  с угловой скоростью  $\Omega$ . Тогда элементы матрицы  $A$  удовлетворяют соотношениям

$$\dot{a}_{i1} + \Omega a_{i3} = 0, \quad \dot{a}_{i2} = 0, \quad \dot{a}_{i3} - \Omega a_{i1} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

причем согласно принятому допущению в орбитальной системе вектор  $\mathbf{K}$  имеет компоненты  $K_i = J_2 \Omega a_{i2}$ . Элементы  $a_{2i} = \text{const}$ ,  $a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1$ . Решение уравнений относительно элементов  $a_{i1}$  и  $a_{i3}$  имеет вид

$$\begin{aligned} a_{31} &= \sqrt{1 - a_{32}^2} \cos \phi, & a_{33} &= \sqrt{1 - a_{32}^2} \sin \phi, \\ a_{11} &= \frac{a_{22} a_{33} - a_{12} a_{32} a_{31}}{1 - a_{32}^2}, & a_{13} &= -\frac{a_{22} a_{31} + a_{12} a_{32} a_{33}}{1 - a_{32}^2}, \\ a_{21} &= -\frac{a_{12} a_{33} + a_{22} a_{32} a_{31}}{1 - a_{32}^2}, & a_{23} &= \frac{a_{12} a_{31} - a_{22} a_{32} a_{33}}{1 - a_{32}^2}, \end{aligned}$$

где  $\phi = \Omega t + \phi_0$ ,  $\phi_0$  – произвольная постоянная. Усреднение по  $\phi$  некоторой  $2\pi$ -периодической функции  $F(\phi)$  будем обозначать скобками  $\langle \cdot \rangle$ :

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) d\phi$$

Такое усреднение дает

$$\begin{aligned} \langle a_{11}a_{31} \rangle &= \frac{a_{22}\langle a_{31}a_{33} \rangle - a_{12}a_{32}\langle a_{31}^2 \rangle}{1 - a_{32}^2} = -\frac{a_{12}a_{32}}{2}, \\ \langle a_{13}a_{33} \rangle &= -\frac{a_{22}\langle a_{31}a_{33} \rangle + a_{12}a_{32}\langle a_{33}^2 \rangle}{1 - a_{32}^2} = -\frac{a_{12}a_{32}}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично  $\langle a_{21}a_{31} \rangle = \langle a_{13}a_{33} \rangle = -\frac{a_{22}a_{32}}{2}$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{J}}\mathbf{E}_3 \rangle &= J_2 a_{12} a_{32} + J_1 \langle a_{11} a_{31} \rangle + J_3 \langle a_{13} a_{33} \rangle = \left( J_2 - \frac{J_1 + J_3}{2} \right) a_{12} a_{32}, \\ \langle \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{J}}\mathbf{E}_3 \rangle &= J_2 a_{22} a_{32} + J_1 \langle a_{21} a_{31} \rangle + J_3 \langle a_{23} a_{33} \rangle = \left( J_2 - \frac{J_1 + J_3}{2} \right) a_{22} a_{32}, \\ \langle \mathbf{M}_g \rangle &= \frac{3\mu_e}{r^3} \left( J_2 - \frac{J_1 + J_3}{2} \right) a_{32} (a_{12} \mathbf{E}_2 - a_{22} \mathbf{E}_1) = \\ &= \frac{3\mu_e}{r^3} \left( J_2 - \frac{J_1 + J_3}{2} \right) (\mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{e}_2) (\mathbf{E}_3 \times \mathbf{e}_2). \end{aligned}$$

Усреднение аэродинамического момента  $\mathbf{M}_a = \rho_a v^2 (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{Q})$  выполним в базисе  $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$ . Орт  $\boldsymbol{\alpha}$  был введен ранее:  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{v}/v$ , орты  $\boldsymbol{\beta}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$  дополняют его до правого ортонормированного базиса. В системе  $Ox_1x_2x_3$

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad \boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

При усреднении базис  $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$  считаем неподвижным, а базис  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  – вращающимся с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг постоянного орта  $\mathbf{e}_2$ . В этом случае компоненты  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  и  $\gamma_i$  определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 + \Omega \alpha_3 &= 0, & \dot{\alpha}_2 &= 0, & \dot{\alpha}_3 - \Omega \alpha_1 &= 0, \\ \dot{\beta}_1 + \Omega \beta_3 &= 0, & \dot{\beta}_2 &= 0, & \dot{\beta}_3 - \Omega \beta_1 &= 0, \\ \dot{\gamma}_1 + \Omega \gamma_3 &= 0, & \dot{\gamma}_2 &= 0, & \dot{\gamma}_3 - \Omega \gamma_1 &= 0. \end{aligned}$$

Общее решение этих уравнений представим в виде

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{1 - \alpha_2^2} \cos \phi, & \alpha_3 &= \sqrt{1 - \alpha_2^2} \sin \phi, \\ \beta_1 &= \frac{\gamma_2 \alpha_3 - \alpha_2 \beta_2 \alpha_1}{1 - \alpha_2^2}, & \beta_3 &= -\frac{\gamma_2 \alpha_1 + \alpha_2 \beta_2 \alpha_3}{1 - \alpha_2^2}, \end{aligned}$$

$$\gamma_1 = -\frac{\beta_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_2\alpha_1}{1 - \alpha_2^2}, \quad \gamma_3 = \frac{\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\gamma_2\alpha_3}{1 - \alpha_2^2},$$

Здесь  $\phi = \Omega t + \phi_0$ ;  $\phi_0$  и  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  – постоянные величины,  $\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1$ .

Разложение вектора  $\mathbf{M}_a$  по базису  $\{\mathbf{a}, \mathbf{\beta}, \mathbf{\gamma}\}$  имеет вид

$$\mathbf{M}_a = (\mathbf{M}_a \cdot \mathbf{\beta})\mathbf{\beta} + (\mathbf{M}_a \cdot \mathbf{\gamma})\mathbf{\gamma} = \rho_a v^2 [(\mathbf{\beta} \cdot \mathbf{Q})\mathbf{\gamma} - (\mathbf{\gamma} \cdot \mathbf{Q})\mathbf{\beta}].$$

Усреднение аэродинамического момента по вращению корабля сводится к усреднению выражений

$$\mathbf{\gamma} \cdot \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^3 \gamma_i P_i(\mathbf{a}) + d_1 \gamma_1 S(\mathbf{a}), \quad \mathbf{\beta} \cdot \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^3 \beta_i P_i(\mathbf{a}) + d_1 \beta_1 S(\mathbf{a}).$$

С учетом соотношения  $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = 0$  имеем

$$\mathbf{\beta} \cdot \mathbf{Q} = \frac{\beta_2 P_2 + \gamma_2 [\alpha_3 (P_1 + d_1 S) - \alpha_1 P_3]}{1 - \alpha_2^2},$$

$$\mathbf{\gamma} \cdot \mathbf{Q} = \frac{\gamma_2 (P_2 - d_1 S \alpha_1 \alpha_2) - \beta_2 [\alpha_3 (P_1 + d_1 S) - \alpha_1 P_3]}{1 - \alpha_2^2}$$

Конкретизируем выбор ортов  $\mathbf{\beta}$  и  $\mathbf{\gamma}$ . Положим

$$\mathbf{\beta} = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{a}}{|\mathbf{e}_2 \times \mathbf{a}|}, \quad \mathbf{\gamma} = \mathbf{a} \times \mathbf{\beta} = \frac{\mathbf{e}_2 - (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}}{|\mathbf{e}_2 \times \mathbf{a}|}.$$

Тогда  $\beta_2 = 0, \gamma_2 = \sqrt{1 - \alpha_2^2}$ ,

$$\langle \mathbf{\beta} \cdot \mathbf{Q} \rangle = \langle (P_1 + d_1 S) \sin \phi - P_3 \cos \phi \rangle \equiv Q_\beta, \quad \langle \mathbf{\gamma} \cdot \mathbf{Q} \rangle = \frac{\langle P_2 \rangle}{\sqrt{1 - \alpha_2^2}} - d_1 \alpha_2 \langle S \cos \phi \rangle \equiv Q_\gamma$$

и  $\langle \mathbf{M}_a \rangle = \rho_a v^2 (\gamma Q_\beta - \beta Q_\gamma)$ , причем величины  $Q_\beta$  и  $Q_\gamma$  зависят только от  $\alpha_2$ .

Усредненное уравнение (16) запишем в виде

$$\frac{d(\Omega \mathbf{e}_2)}{dt} = \frac{3\mu_E}{r^5} \left( 1 - \frac{J_1 + J_3}{2J_2} \right) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_2)(\mathbf{r} \times \mathbf{e}_2) + \frac{\rho_a v^2}{J_2} (\gamma Q_\beta - \beta Q_\gamma).$$

Отсюда следуют уравнения

$$\dot{\Omega} = \frac{\rho_a v^2}{J_2} Q_\beta \sqrt{1 - \alpha_2^2},$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \frac{3\mu_E}{r^5 \Omega} \left( 1 - \frac{J_1 + J_3}{2J_2} \right) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_2)(\mathbf{r} \times \mathbf{e}_2) - \frac{\rho_a v^2}{J_2 \Omega} \left( Q_\gamma \mathbf{\beta} + \alpha_2 Q_\beta \frac{\mathbf{a} - \alpha_2 \mathbf{e}_2}{\sqrt{1 - \alpha_2^2}} \right).$$

Используя обозначения п. 3 запишем эти уравнения следующим образом

$$\dot{\Omega} = \frac{E\rho_a v^2(1-\mu')}{1-\mu\mu'} \tilde{Q}_\beta \sqrt{1-\alpha_2^2}, \quad (17)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \frac{3\mu_E}{r^5\Omega} \left[ 1 - \frac{2-\mu-\mu'}{2(1-\mu\mu')} \right] (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_2)(\mathbf{r} \times \mathbf{e}_2) - \frac{E\rho_a v^2(1-\mu')}{\Omega(1-\mu\mu')} \left( \tilde{Q}_\gamma \boldsymbol{\beta} + \alpha_2 \tilde{Q}_\beta \frac{\mathbf{a} - \alpha_2 \mathbf{e}_2}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} \right),$$

$$\tilde{Q}_\beta = \langle (\chi P_1 + \tilde{d}_1 S) \sin \phi - \chi P_3 \cos \phi \rangle, \quad \tilde{Q}_\gamma = \frac{\chi \langle P_2 \rangle}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} - \tilde{d}_1 \alpha_2 \langle S \cos \phi \rangle.$$

Такая форма записи позволяет использовать оценки параметров корабля, найденные в результате обработки данных измерений угловой скорости. Параметры  $\mu$ ,  $\mu'$  оцениваются способом, описанным в [1 – 3], параметры  $\chi$  и  $\tilde{d}_1$  – способом, описанным в п. 5. При вычислении величин  $\tilde{Q}_\beta$  и  $\tilde{Q}_\gamma$  усреднение по  $\phi$  на отрезке  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  сводилось суммированию значений усредняемых функций на равномерной сетке с числом узлов  $50 \div 100$ .

Для численного интегрирования система (17) записывалась в гринвичской системе координат. Параметры  $\mu$ ,  $\mu'$ ,  $\chi$ ,  $\tilde{d}_1$  и параметры орбиты корабля были те же, что и в системе (7). В описываемых ниже расчетах эти параметры соответствовали интервалу 1 из табл. 2. При этом параметры  $h_2$ ,  $h_3$  и  $\varepsilon$  в системе (7) были нулевыми. Значения этих параметров из табл. 2 весьма слабо влияют на движение корабля с большой угловой скоростью.

Решения уравнений (7) и (17), описывающих режим закрутки на Солнце, удобно представлять в квазиинерциальной системе координат  $Z_1 Z_2 Z_3$ , связанной с восходящим узлом оскулирующей орбиты корабля. Ось  $Z_2$  параллельна вектору кинетического момента орбитального движения корабля, ось  $Z_3$  параллельна направлению центр Земли – восходящий узел орбиты, ось  $Z_1$  дополняет систему до правой.

В решении системы (7) представляют интерес движение оси  $O'y_2$  (нормали к СБ) и угловые скорости  $\omega_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), в частности угол  $\theta$  между осью  $O'y_2$  и направлением Земля – Солнце. Движение оси  $O'y_2$  относительно системы  $Z_1 Z_2 Z_3$  будем задавать углами  $\rho$  и  $\alpha$ :  $\rho$  – угол между осью  $O'y_2$  и плоскостью  $Z_3 Z_1$ ,  $\sin \rho$  – проекция орта оси  $O'y_2$  на ось  $Z_2$ ;  $\alpha$  – угол между проекцией оси  $O'y_2$  на плоскость  $Z_3 Z_1$  и осью  $Z_3$ , направление отсчета этого угла согласовано с осью  $Z_2$ . Угловые скорости  $\omega_i$  будем описывать графиками их зависимости от времени и аналогичными графиками величин

$$w = \sqrt{\mu' \omega_1^2 + \mu \omega_3^2}, \quad \Omega = \sqrt{\left( \frac{1-\mu'}{1-\mu\mu'} \omega_1 \right)^2 + \omega_2^2 + \left( \frac{1-\mu}{1-\mu\mu'} \omega_3 \right)^2} = \frac{|\mathbf{K}|}{J_2}. \quad (18)$$

При  $\mathbf{M}_g = \mathbf{M}_a = 0$  эти величины – первые интегралы уравнений движения.

В решениях системы (17) орт  $\mathbf{e}_2$  задается теми же углами  $\rho$  и  $\alpha$ , кото-

рыми задается орт оси  $O'y_2$ . Эти два орта в режиме закрутки близки, поэтому для описания их движения удобно использовать одинаковые углы. Ниже графики зависимости от времени одноименных углов изображаются в единых координатных осях. Аналогичным образом переменная  $\Omega$  в (17) близка одноименной величине в (18). Графики обеих этих величин также изображаются в единых координатных осях.

Вместе с системой (7) интегрируется уравнения  $\dot{Q} = I$ , правая часть которого (ток  $I$ ) рассчитывается по формуле (14). Значение  $Q$  в начальной точке интегрирования нулевое, и  $Q(t)$  – заряд, снятый с СБ к моменту времени  $t$ . Вместе с системой (17) интегрируется такое же уравнение для  $Q$ , но в расчетных формулах тока орт оси  $O'y_2$  заменен ортом  $e_2$ . Графики каждой пары одноименных функций  $I(t)$  и  $Q(t)$  изображаются в единых координатных осях.

Начальные условия сравниваемых решений систем (7) и (17) задавались в единый момент времени  $t_0$ . Начальное условие системы (7): ось  $O'y_2$  направлена по линии Земля – Солнце, ось  $O'y_1$  лежит в плоскости орбиты (орт  $E_2$  и орты осей  $O'y_2$ ,  $O'y_1$  образуют правую тройку), угловая скорость корабля направлена по этой оси и равна  $2.3^\circ/\text{с}$ . Начальное условие системы (17): орт  $e_2$  совпадает с ортом направления Земля – Солнце,  $\Omega = 2.3^\circ/\text{с}$ .

Примеры интегрирования решений систем (7) и (17) приведены на рис. 12 – 18. Здесь представлены три решения каждой системы. Моменты времени  $t_0$  задания начальных условий решений выбраны следующим образом. Момент  $t_0$  на рис. 12, 13 и 18а выбран так, чтобы Солнце в этот момент располагалось под плоскостью орбиты (в полупространстве  $Z_2 < 0$ ) достаточно далеко от нее – ср. значения угла  $\rho(t_0)$ . На рис. 14, 15 и 18б в момент  $t_0$  Солнце лежит почти в плоскости орбиты. На рис. 16, 17 и 18в Солнце в момент  $t_0$  лежит высоко над плоскостью орбиты. Все решения рассчитаны на отрезках времени 27 ч. На рис. 12, 14 и 16 представлены первые три часа каждого отрезка, на рис. 13, 15 и 17 – последние 3 часа. На рис. 12 – 17 представлены решения обеих систем. В левой части этих рисунков приведены графики углов  $\theta$ ,  $\alpha$  и  $\rho$ . Красным цветом изображены графики, полученные интегрированием системы (7), зеленым цветом – графики, построенные вдоль решений системы (17). В средней части рисунков приведены графики угловых скоростей  $\omega_i$  в решениях системы (7). В правой части рисунков приведены графики тока СБ  $I(t)$ , графики электрического заряда  $Q(t)$ , графики величины  $w$  и величин  $\Omega$ . Зеленые графики получены интегрированием системы (17), красные – интегрированием системы (7). Графики угловых скоростей и величины  $w$  строились только для системы (7), они изображены черным цветом. Эти графики, а также красный график величины  $\Omega$ , показывают, что принятое при выводе усредненной системы соотношение  $\mathbf{K} = J_2 \Omega e_2$  выполняется с высокой точностью во всех рассмотренных решениях системы (7) на всех представляющих интерес отрезках времени.

Рис. 18 содержит три построенных решения системы (17) на полных от-

резках времени. Этот рисунок позволяет понять характер эволюции режима закрутки на Солнце. Эта эволюция определяется начальным значением угла  $\rho$ . Согласно [7], угловая скорость  $\dot{\rho}$  мала – порядка угловой скорости изменения долготы восходящего узла орбиты, т.е. угловой скорости системы  $Z_1Z_2Z_3$ ; угловая скорость

$$\dot{\alpha} \sim -\frac{3\mu_E}{\Omega r^3} \left( 1 - \frac{J_1 + J_3}{2J_2} \right) \sin \rho$$

намного больше. Скорость движения конца орта  $e_2$  выражается приближенной формулой  $|\dot{e}_2| \approx \sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{\alpha}^2 \cos^2 \rho} \sim |\sin \rho \cos \rho|$ . Из этой формулы следует, что уход нормали к СБ от направления на Солнце медленнее всего происходит в случаях, когда Солнце находится почти в плоскости орбиты или высоко над ней. Рис. 14, 15 и 18б иллюстрируют первый из этих случаев, рис. 16, 17 и 18в – второй. На последнем рассматриваемом отрезке времени корабль вообще не заходил в тень Земли.

Моделирование режима закрутки на Солнце позволяет оценить условия освещенности СБ и процесс зарядки аккумуляторов корабля. Усредненная система (17) дает результаты, очень близкие результатам точного расчета. Усредненные уравнения можно использовать для прогноза движения в режиме закрутки на длительный срок и для проверок.

### Список литературы

1. Беляев М.Ю., Матвеева Т.В., Монахов М.И., Рулев Д.Н., Сазонов В.В., Цветков В.В. Определение вращательного движения кораблей "Прогресс" по данным измерений угловой скорости и тока солнечных батарей // Космическая техника и технологии. 2013. № 2. С. 19-32.
2. Беляев М.Ю., Матвеева Т.В., Монахов М.И., Рулев Д.Н., Сазонов В.В. Режимы неуправляемого вращательного движения корабля Прогресс М-29М // Космические исследования. 2018. Т. 56. № 1. С. 62-76.
3. Беляев М.Ю., Матвеева Т.В., Монахов М.И., Рулев Д.Н., Сазонов В.В. Реконструкция вращательного движения кораблей *Прогресс* в режиме одноосной солнечной ориентации по данным измерений тока солнечных батарей // Космические исследования. 2021. Т. 59. № 2. С. 149-164.
4. Беляев М.Ю., Легостаев В.П., Матвеева Т.В., Монахов М.И., Рулев Д.Н., Сазонов В.В. Отработка методов проведения экспериментов в области микрогравитации в автономном полете грузового корабля «Прогресс М-20М» // Космическая техника и технологии. 2014. № 3(6). С. 22-32.

5. Belyaev M.Yu., Matveeva T.V., Monakhov M.I., Rulev D.N., Sazonov V.V. Gravitational Orientation of *Progress MS-07* and *Progress MS-08* Transport Cargo Spacecraft // *Cosmic Research*. 2019. V. 57. No. 3. Pp. 213-225.
6. Беляев М.Ю., Матвеева Т.В., Монахов М.И., Рулев Д.Н., Сазонов В.В. Гравитационная ориентация транспортных грузовых кораблей Прогресс МС-07 и Прогресс МС-08 // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 123. 19с.
7. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
8. Сазонов Вас.В. Построение интерактивной геометрической модели внешней поверхности космического аппарата // Математическое моделирование. 2020. Т. 32. № 6. С. 37-52.
9. Pines S. Uniform Representation of the Gravitational Potential and its Derivatives // *AIAA Journal*. 1973. V. 11. No. 11. Pp. 1508-1511.
10. Enright W.H., Jackson K.R., Norsett S.P., Thomsen P.G. Interpolants for Runge-Kutta formulas. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1986, vol. 12, No. 3, p. 193-213.
11. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.

Таблица 1. Оценки точности реконструкции движения корабля

№ инт.	Дата, 2018	$t_1$ , МСК	$t_N - t_1$ , мин	$\sigma$	$10^{-6} \text{ с}^{-1}$			$10^{-3} \text{ рад.}$		
					$\sigma_{\omega 1}$	$\sigma_{\omega 2}$	$\sigma_{\omega 3}$	$\sigma_\gamma$	$\sigma_\delta$	$\sigma_\beta$
1	IV.23	06:14:14	389.1	132	2.7	3.0	5.0	7.5	10	5.7
2	IV.24	08:40:55	389.1	92	1.5	3.2	4.7	7.4	8.1	3.5
3	IV.25	06:13:19	303.2	122	4.5	4.8	5.2	7.8	7.3	5.8
4	VIII.25	06:12:30	382.5	106	3.8	3.9	6.8	5.9	2.8	2.0
5	VIII.26	05:13:00	382.0	91	3.0	5.3	7.5	4.6	2.6	3.0
6	VIII.27	05:46:00	384.8	133	3.8	4.6	3.9	6.7	3.5	2.5

Таблица 2. Оценки уточняемых параметров

№ инт.	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$h_2$	$\sigma_{h_2}$	$h_3$	$\sigma_{h_3}$	$\varepsilon$	$\sigma_\varepsilon$	$\tilde{d}_1$	$\sigma_{\tilde{d}_1}$	$\chi$	$\sigma_\chi$
1	0.0914	0.0850	-0.0453	0.223	0.0033	-0.176	0.0029	-0.63	0.20	0.310	0.023	0.101	0.0090
2	0.0849	0.0091	0.0216	0.1186	0.0012	-0.057	0.00073	8.2	0.23	0.402	0.024	0.142	0.0098
3	0.0459	0.0908	-0.0820	0.4590	0.0078	-0.2811	0.0080	0.74	0.19	0.655	0.047	0.204	0.018
4	0.0828	0.0510	0.0370	0.1969	0.0027	-0.2622	0.0021	-3.4	0.30	-0.004	0.0028	0.013	0.0008
5	0.0200	-0.0065	-0.2613	0.1500	0.0042	-0.2236	0.0041	-13.9	0.77	-0.254	0.010	-0.082	0.0035
6	0.0655	0.146	-0.0374	0.2378	0.0073	-0.3319	0.0070	-3.0	0.25	-0.028	0.0087	-0.004	0.0030

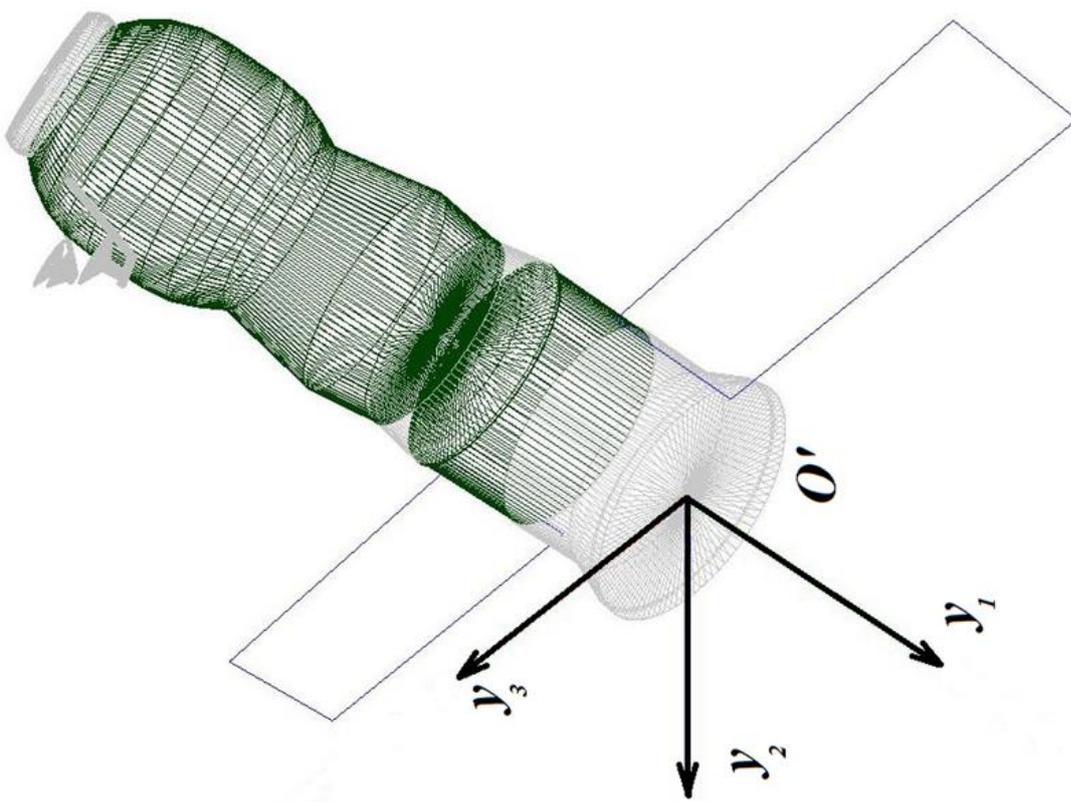


Рис. 1. Геометрическая модель ТТК *Прогресс*

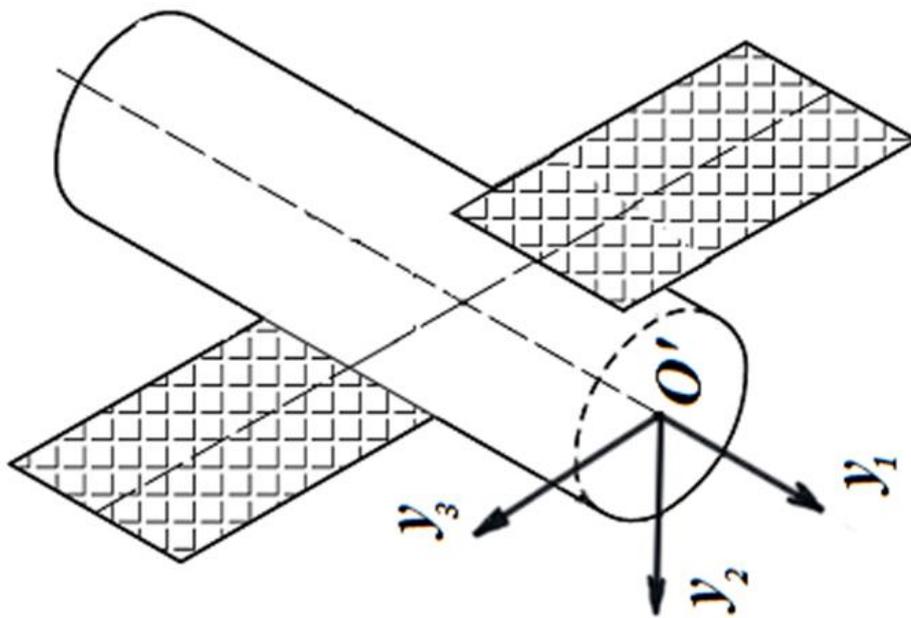


Рис. 2. Упрощенная геометрическая модель ТТК.

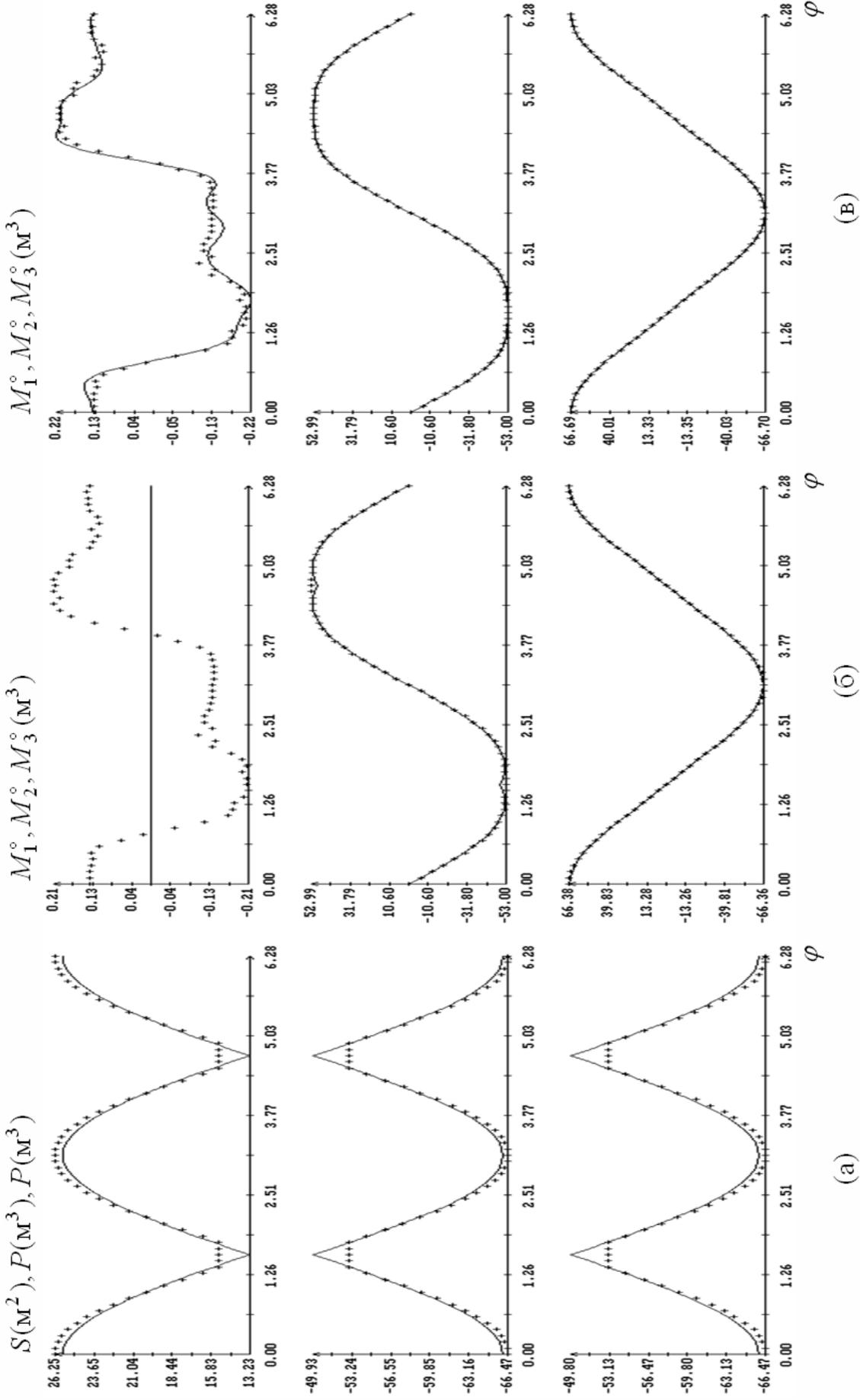


Рис. 3;  $\sin \theta = 0.0483$ ; (а) – аппроксимация детальной модели функциями (3); (б) – расчет компонент аэродинамического момента по детальной и упрощенной моделям; (б) – расчет компонент аэродинамического момента по детальной модели и с помощью рядов Фурье по сферическим функциям. Данные детальной модели указаны маркерами.

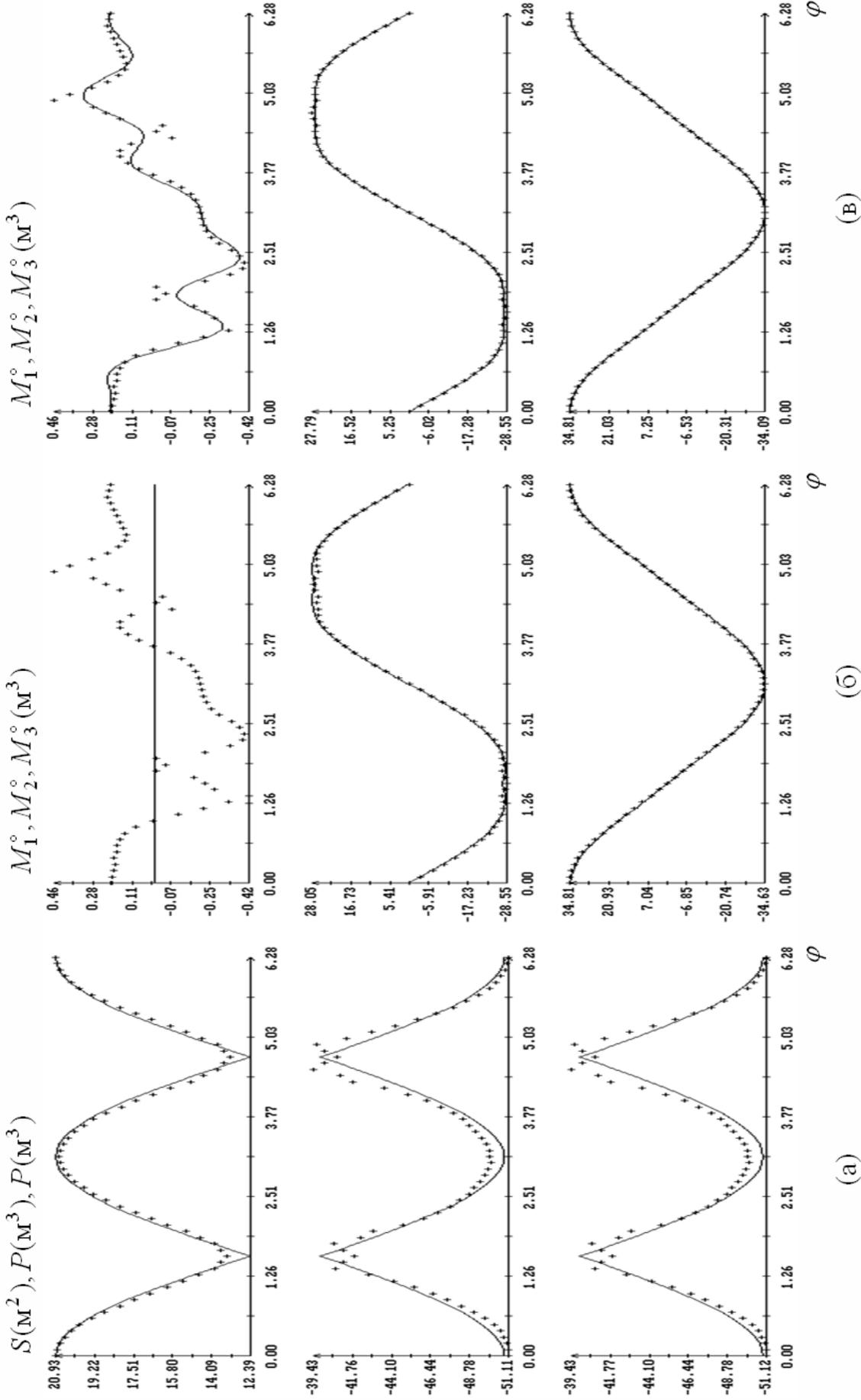


Рис. 4;  $\sin \theta = 0.7322$ ; (а) – аппроксимация детальной модели функциями (3); (б) – расчет компонент аэродинамического момента по детальной и упрощенной моделям; (а) – расчет компонент аэродинамического момента по детальной модели и с помощью рядов Фурье по сферическим функциям. Данные детальной модели указаны маркерами.

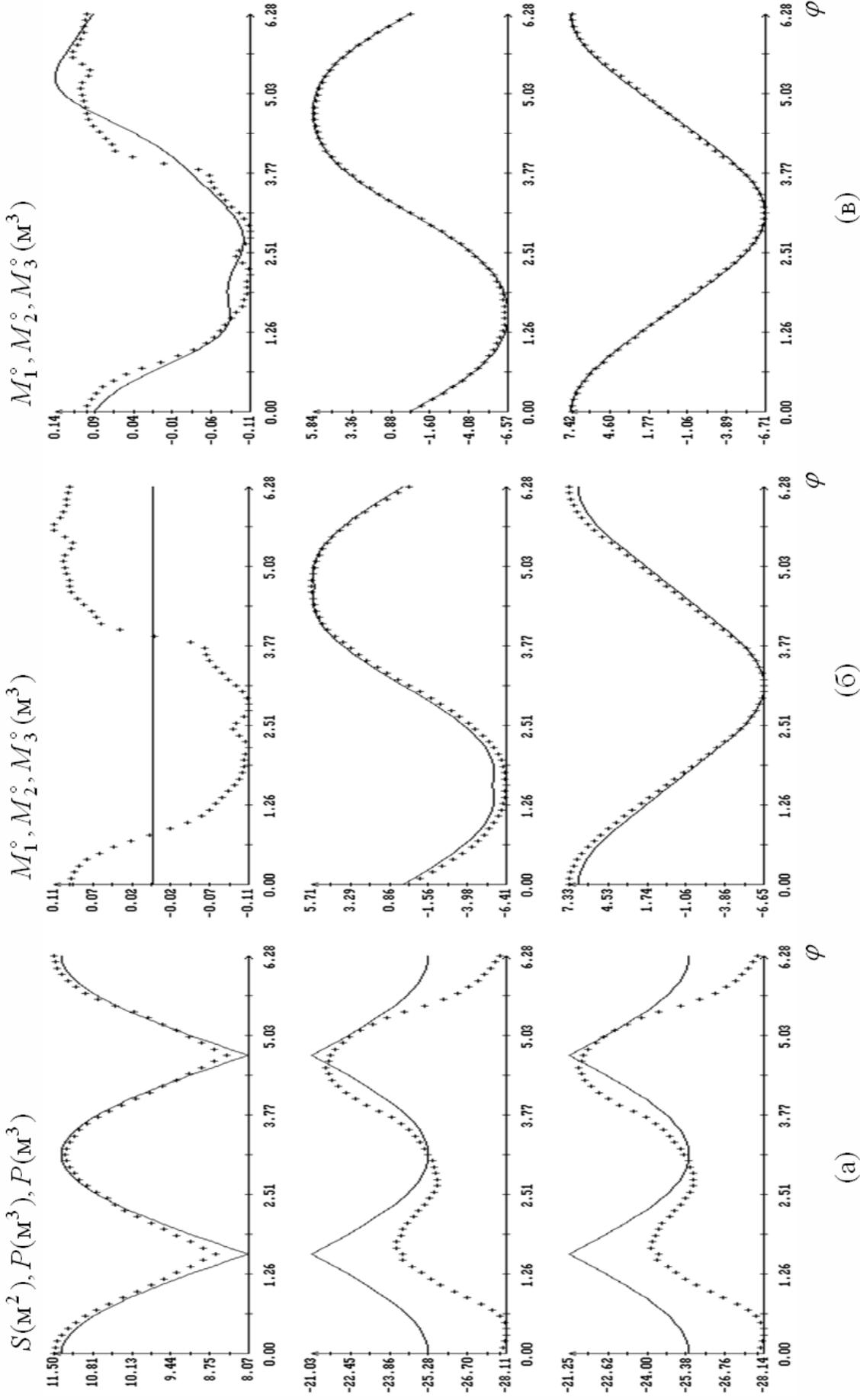


Рис. 5;  $\sin \theta = 0.9648$ ; (а) – аппроксимация детальной модели функциями (3); (б) – расчет компонент аэродинамического момента по детальной и упрощенной моделям; (в) – расчет компонент аэродинамического момента по детальной модели и с помощью рядов Фурье по сферическим функциям. Данные детальной модели указаны маркерами.

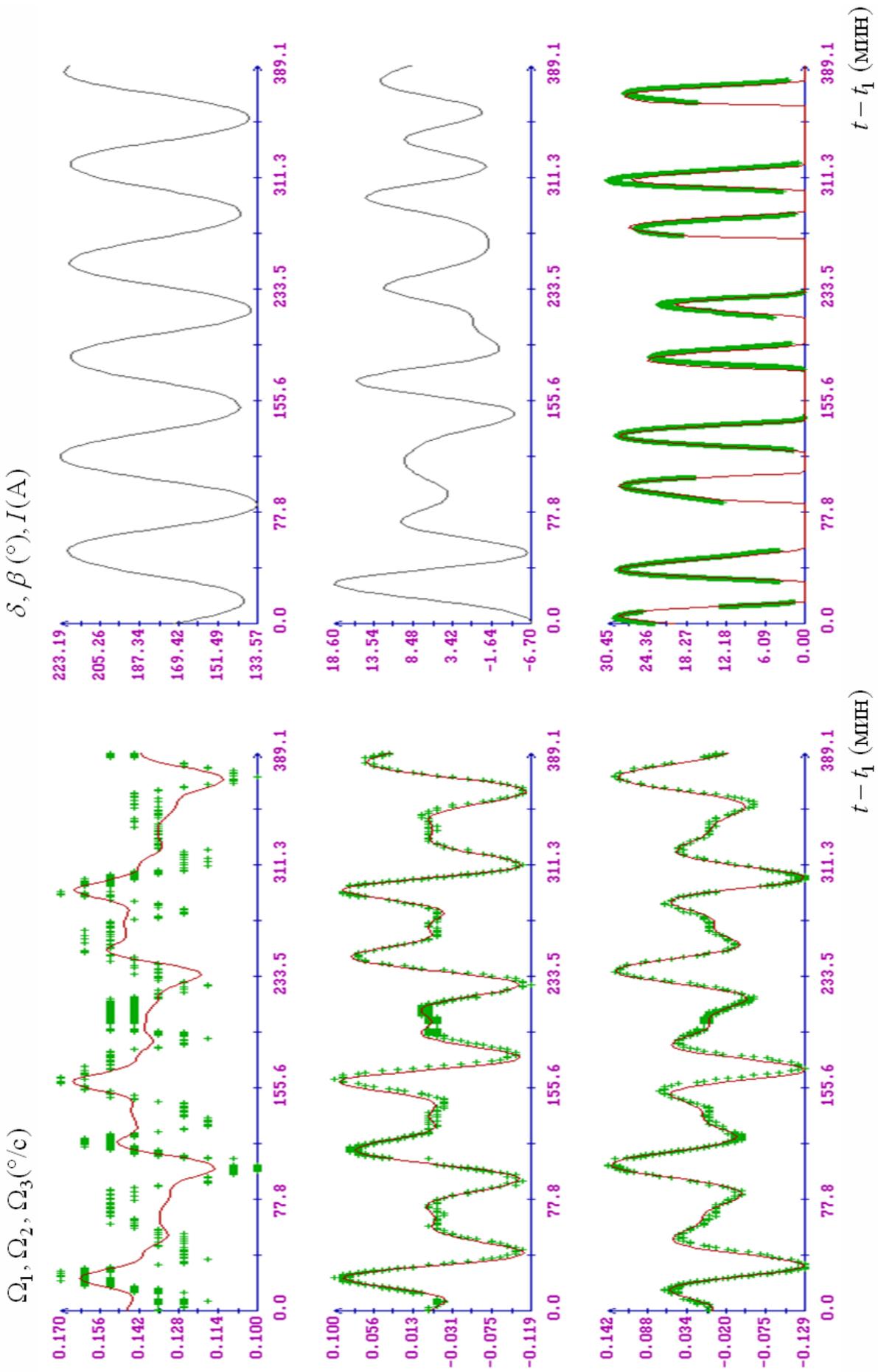


Рис. 6. Движение корабля *Прогресс МС-07*,  $t_1 = 06:14:14$  МСК 23.IV.2018.

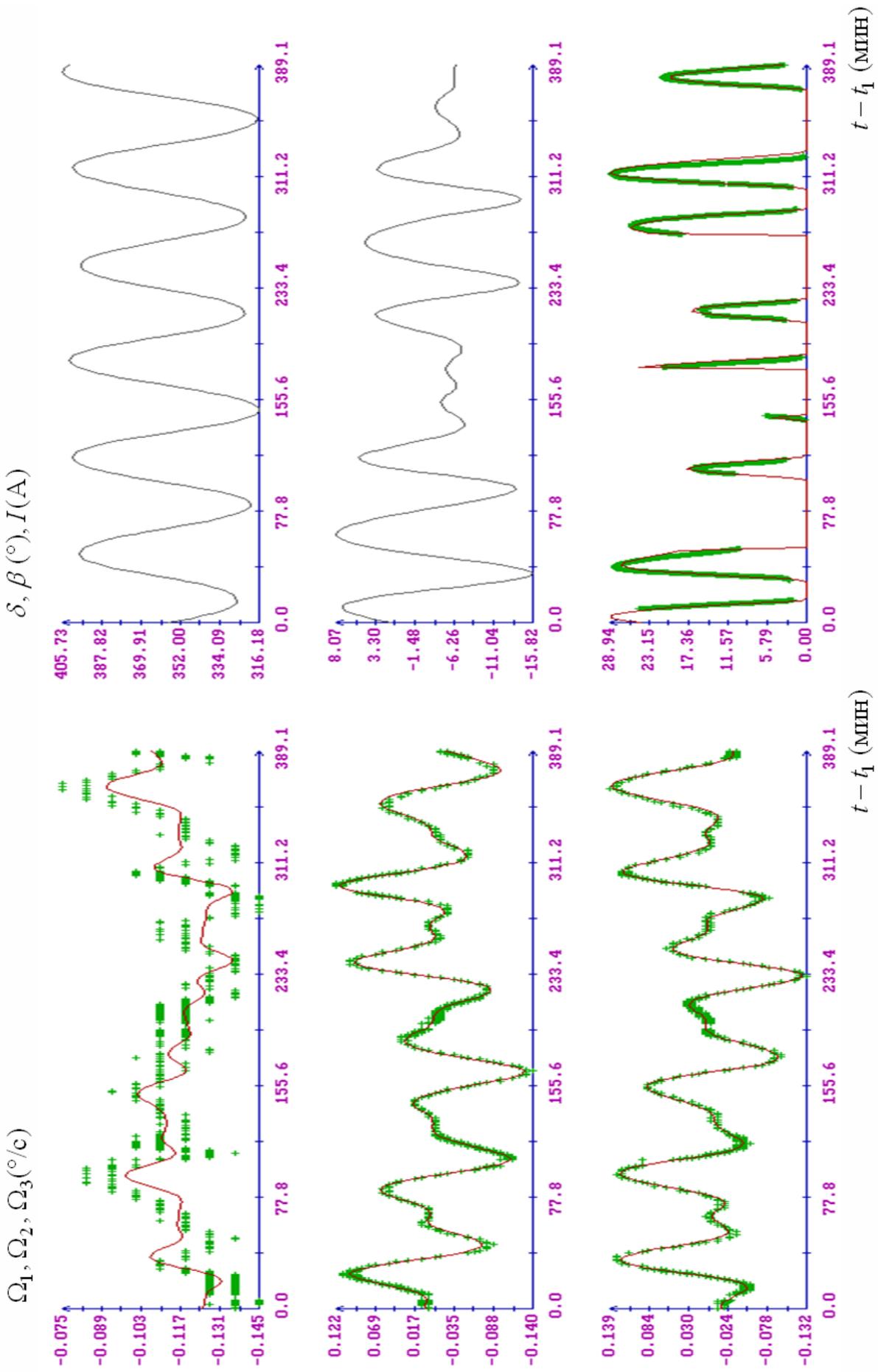


Рис. 7. Движение корабля *Progress MS-07*,  $t_1 = 08:40:55$  МСК 24.IV.2018.

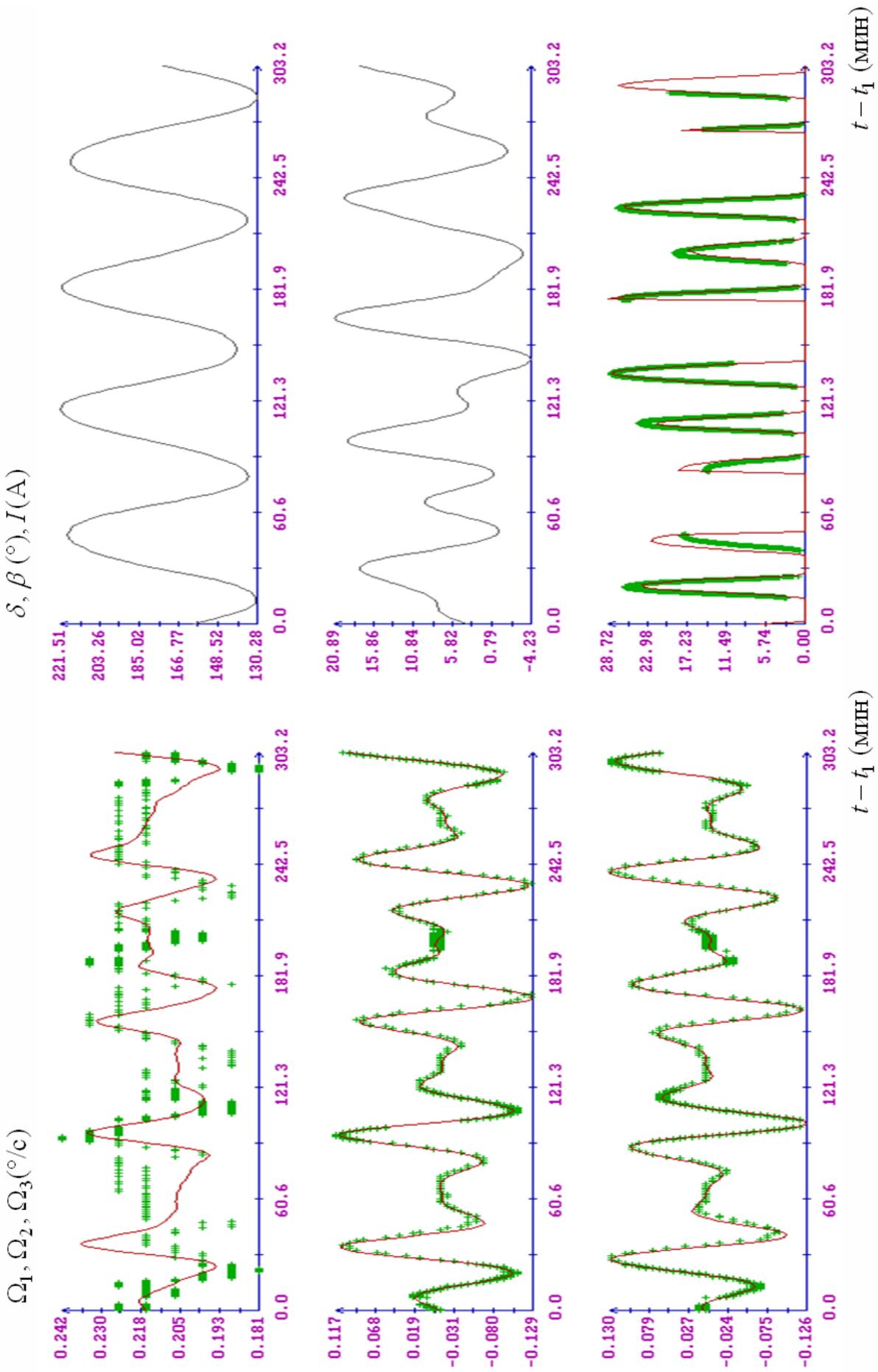


Рис. 8. Движение корабля *Прогресс MS-07*,  $t_1 = 06:13:19$  МСК 25.IV.2018.

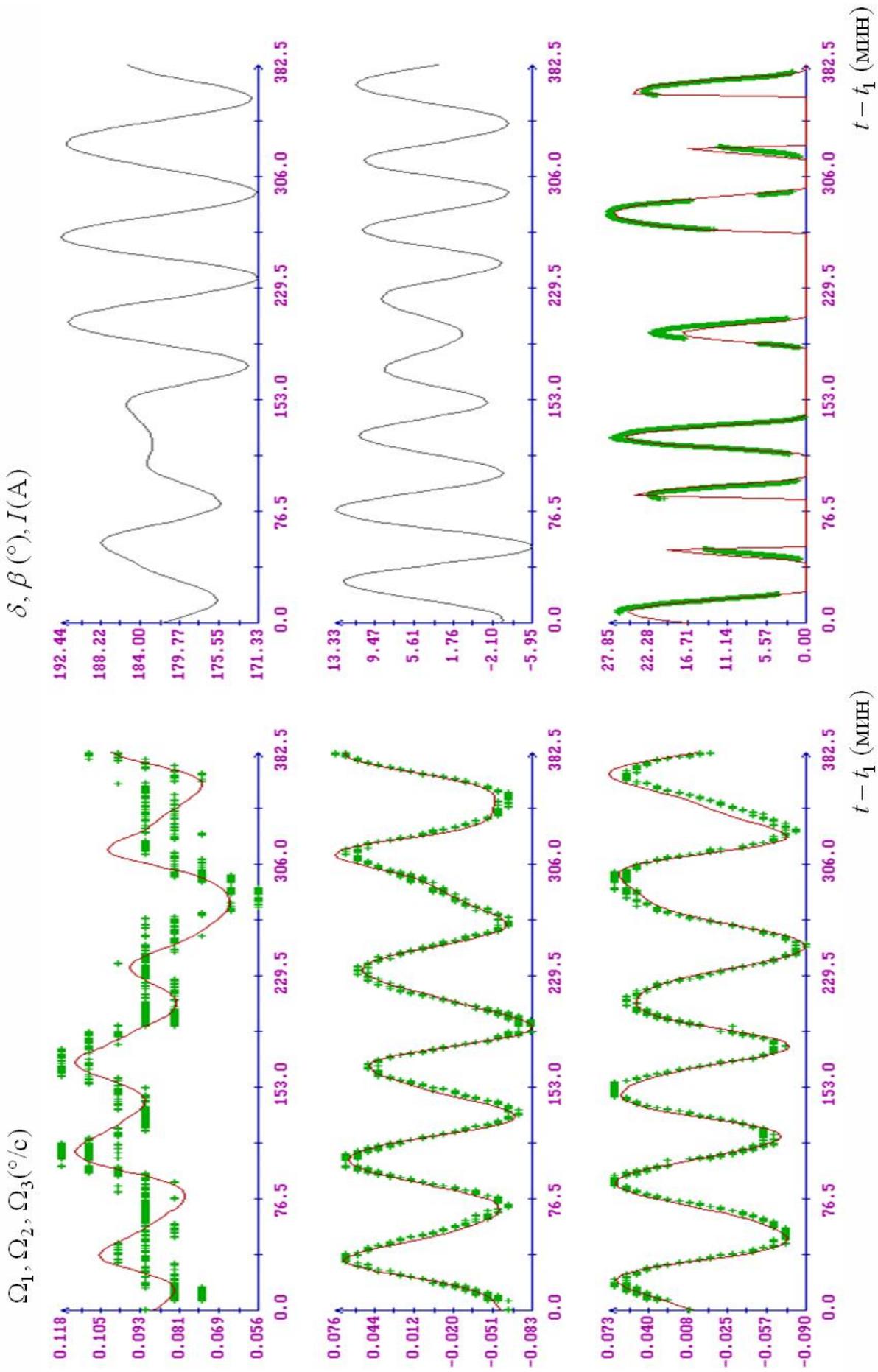


Рис. 9. Движение корабля *Прогресс MS-08*,  $t_1 = 06:12:30$  МСК 25.VIII.2018.

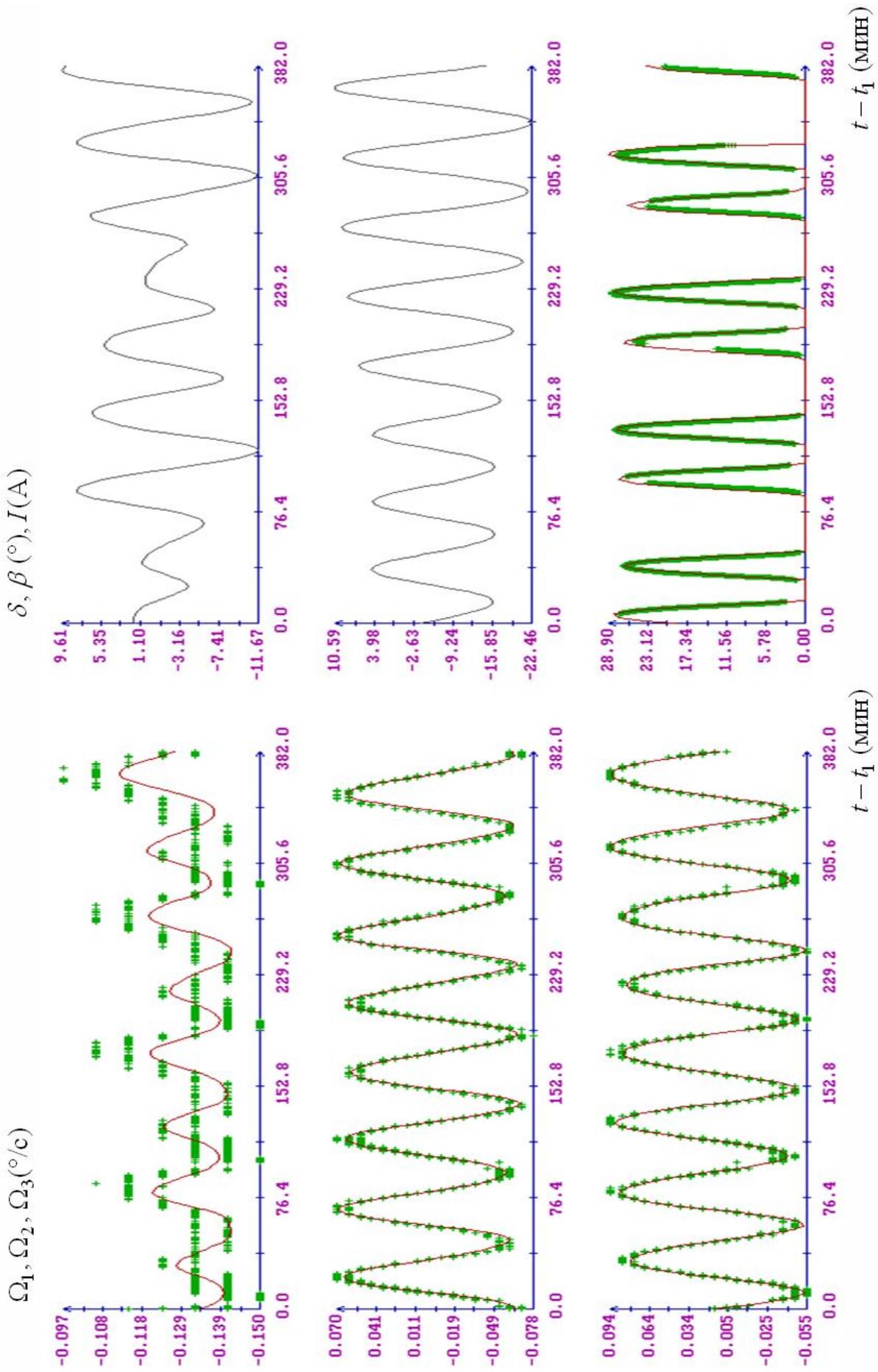


Рис. 10. Движение корабля *Прогресс MS-08*,  $t_1 = 05:13:00$  МСК 26.VIII.2018.

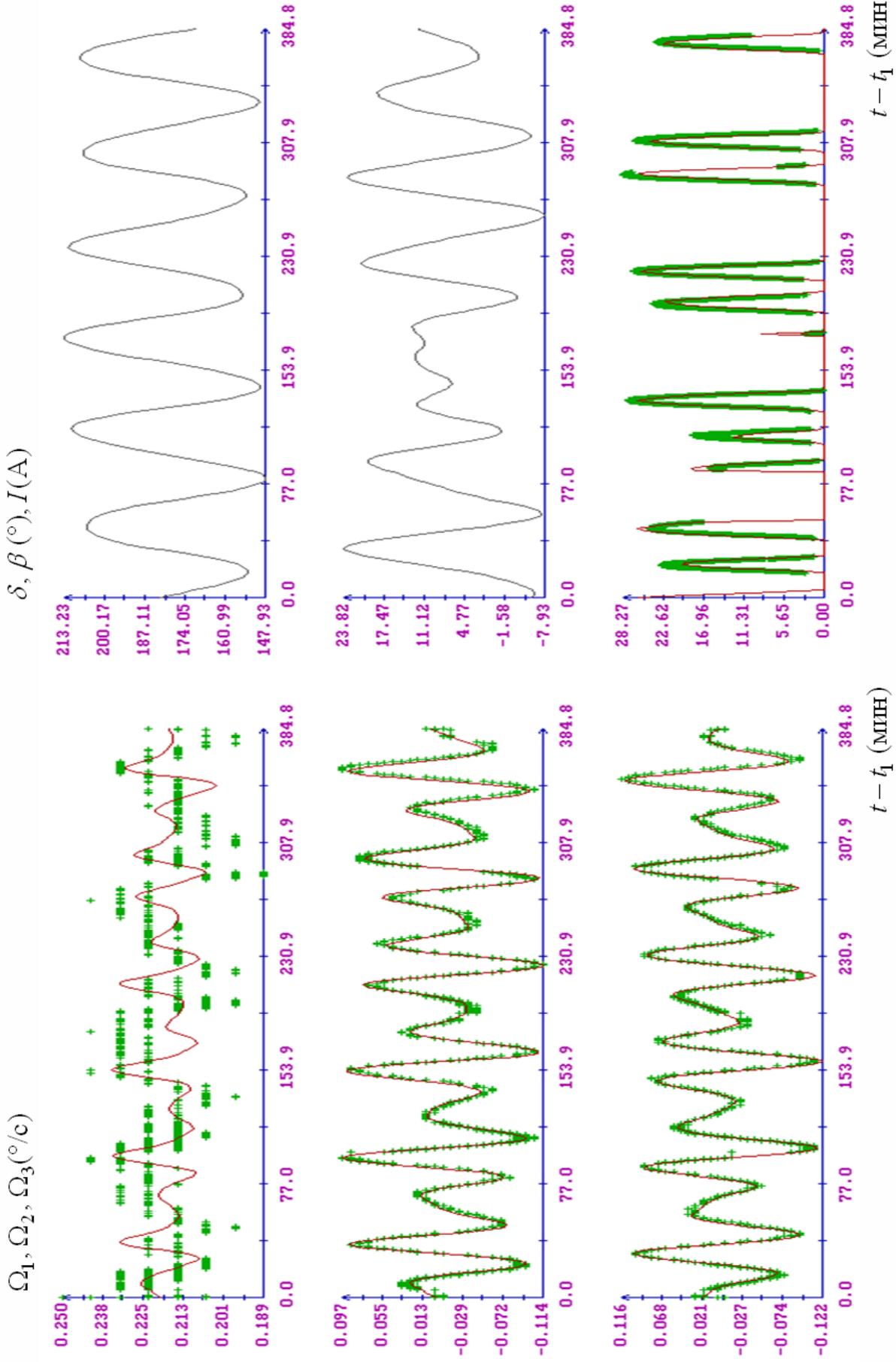


Рис. 11. Движение корабля *Прогресс МС-08*,  $t_1 = 05:46:00$  МСК 27.VIII.2018.

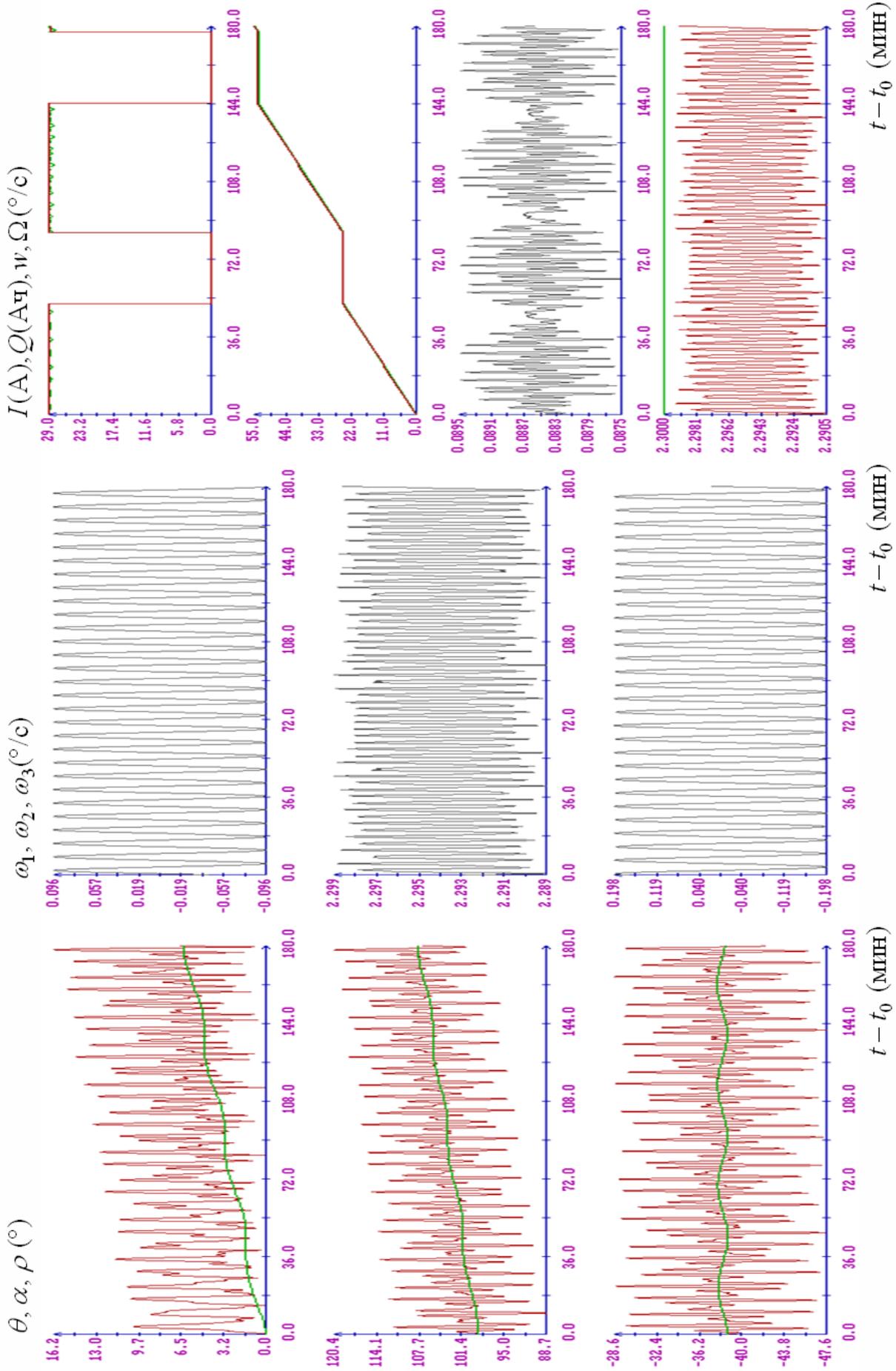


Рис. 12. Движение корабля ГК *Прогресс* в режиме закрутки на Солнце,  $t_0 = 06:14:14$  МСК 23.IV.2018.

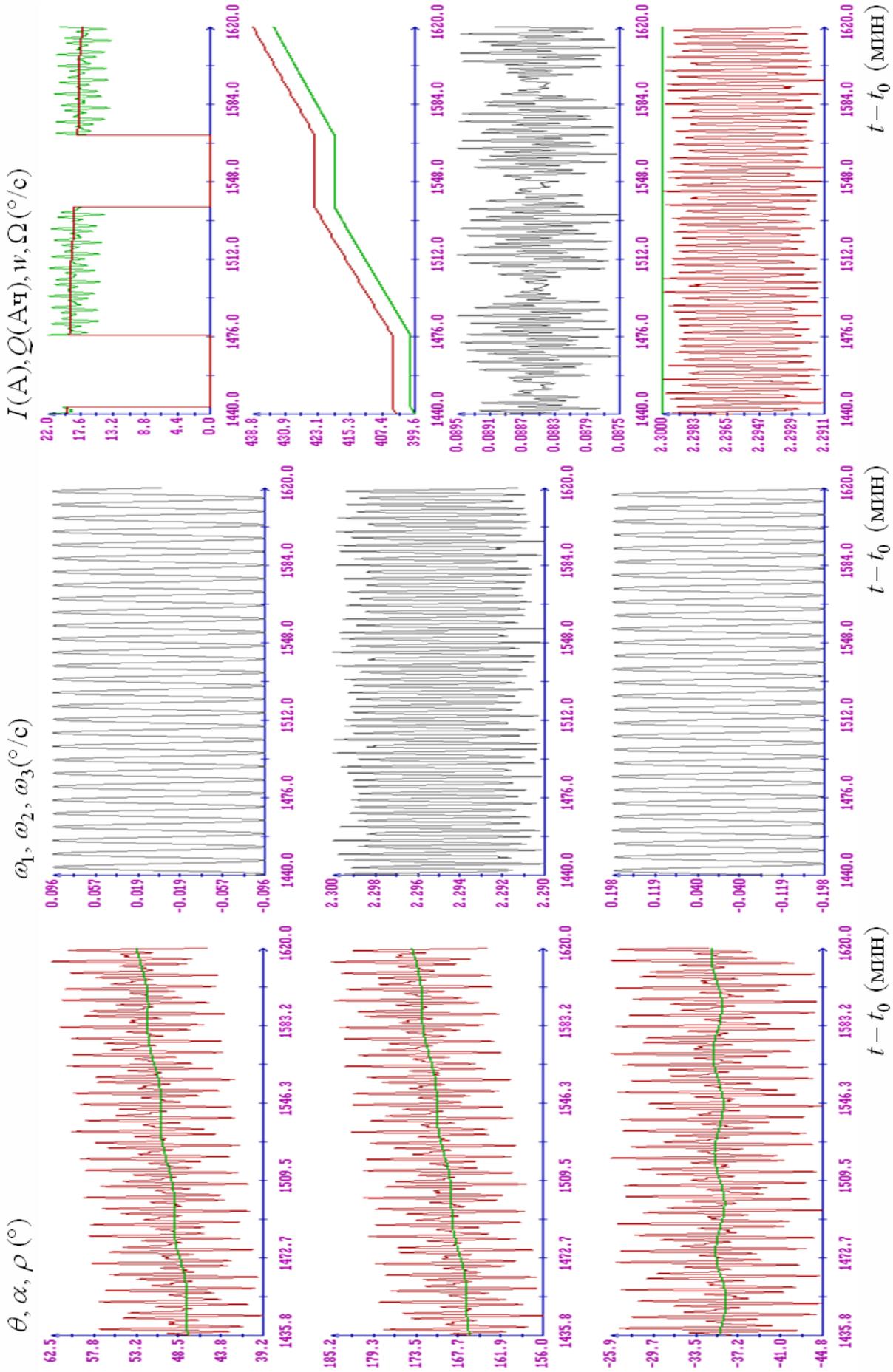


Рис. 13. Движение корабля *Progress* в режиме закрутки на Солнце,  $t_0 = 06:14:14$  МСК 23.IV.2018 (продолжение).

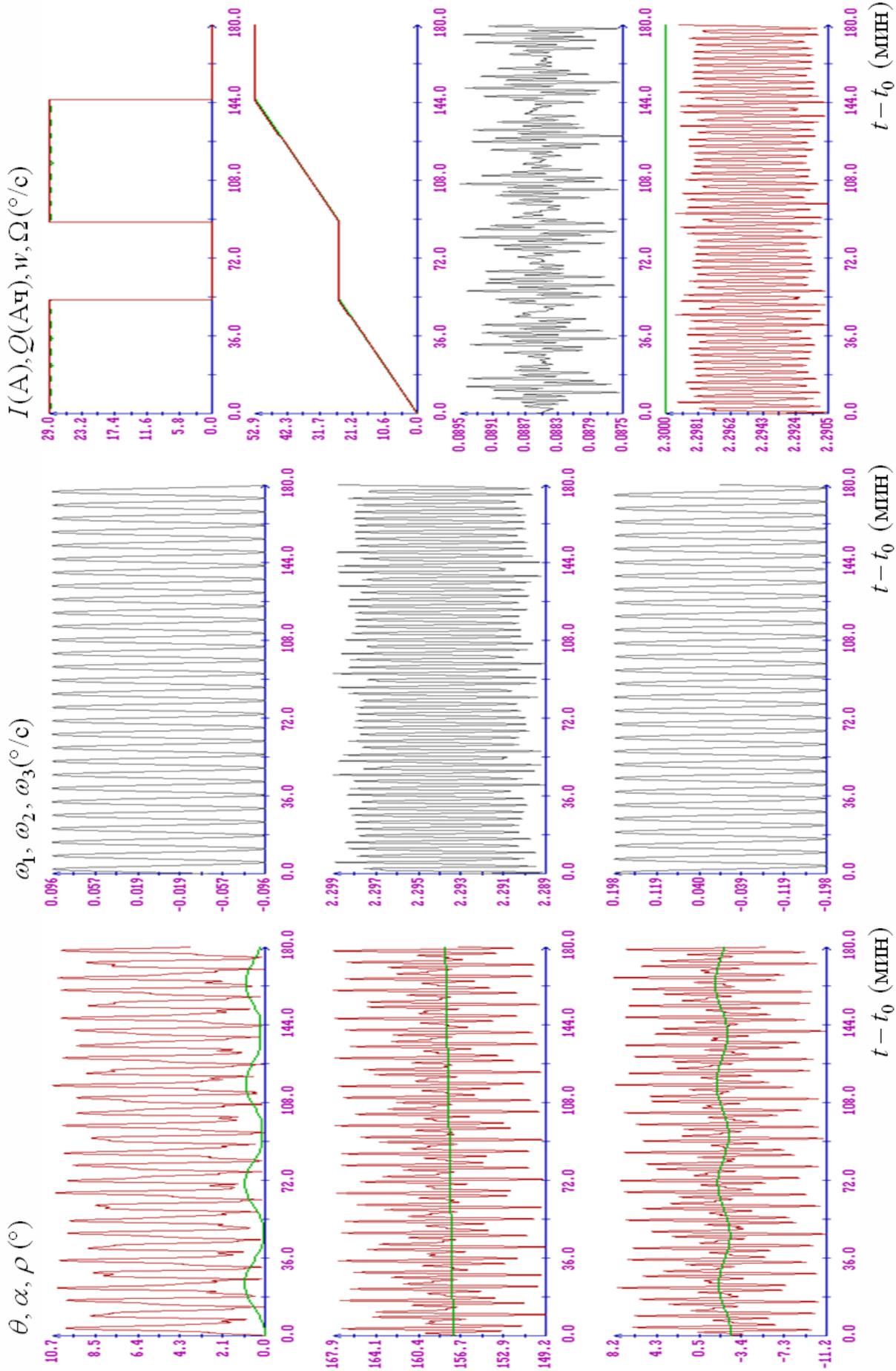


Рис. 14. Движение корабля ТГК *Прогресс* в режиме закрутки на Солнце,  $t_0 = 11:14:14$  МСК 04.V.2018.

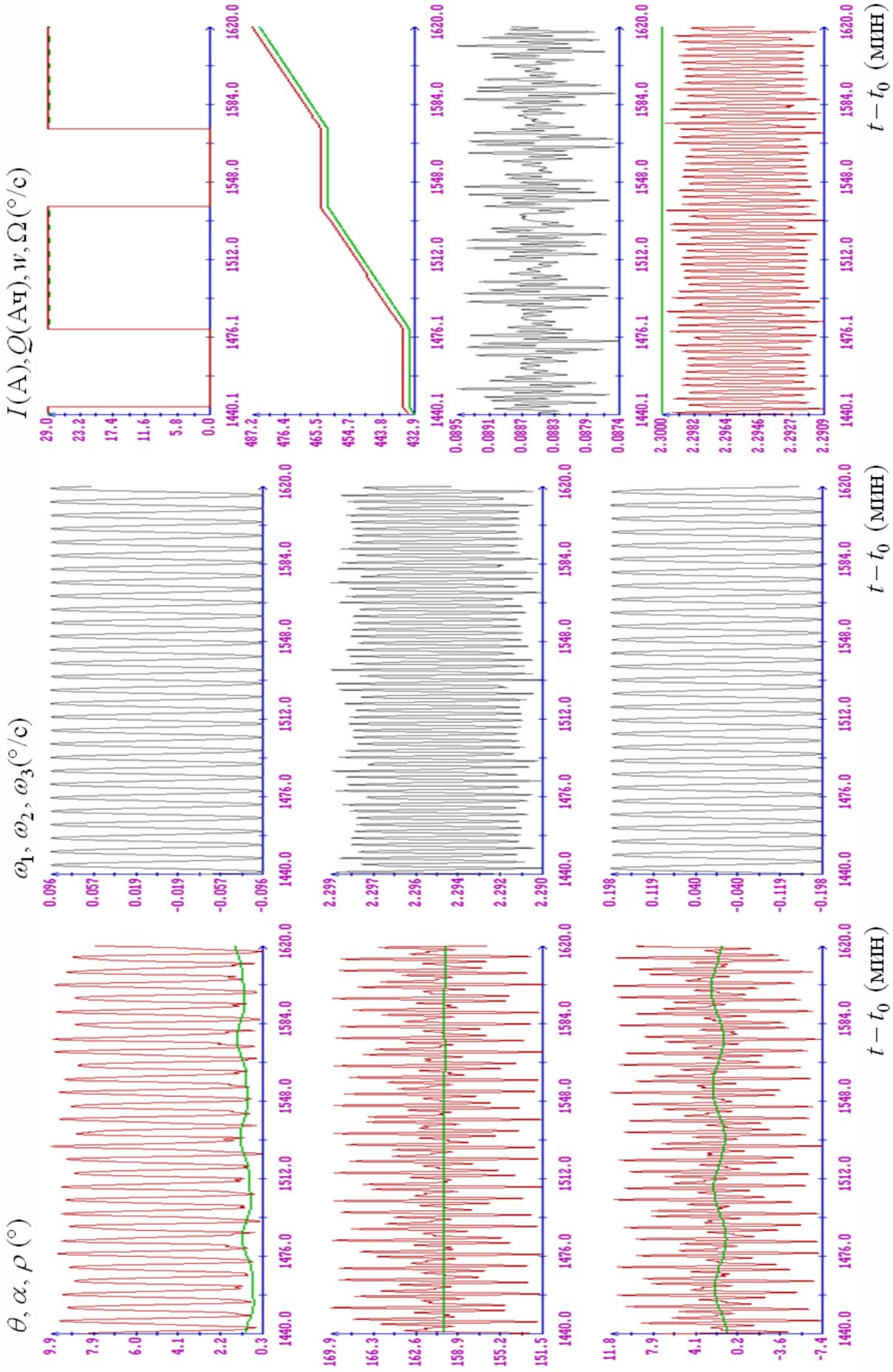


Рис. 15. Движение корабля *Прогресс* в режиме закрутки на Солнце,  $t_0 = 11:14:14$  МСК 04.V.2018 (продолжение).

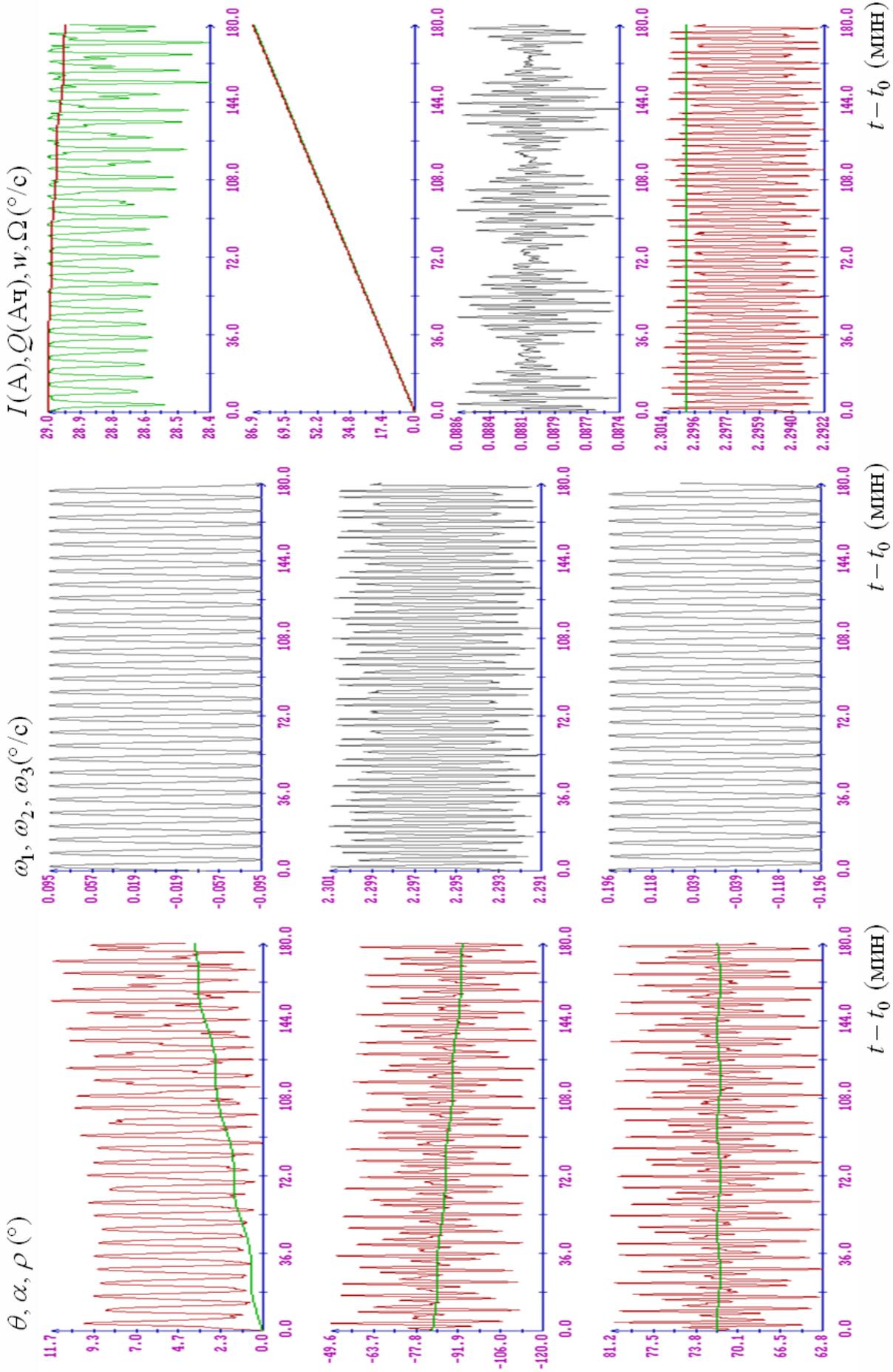


Рис. 16. Движение корабля *Progress* в режиме закрутки на Солнце,  $t_0 = 17:14:14$  МСК 22.V.2018.

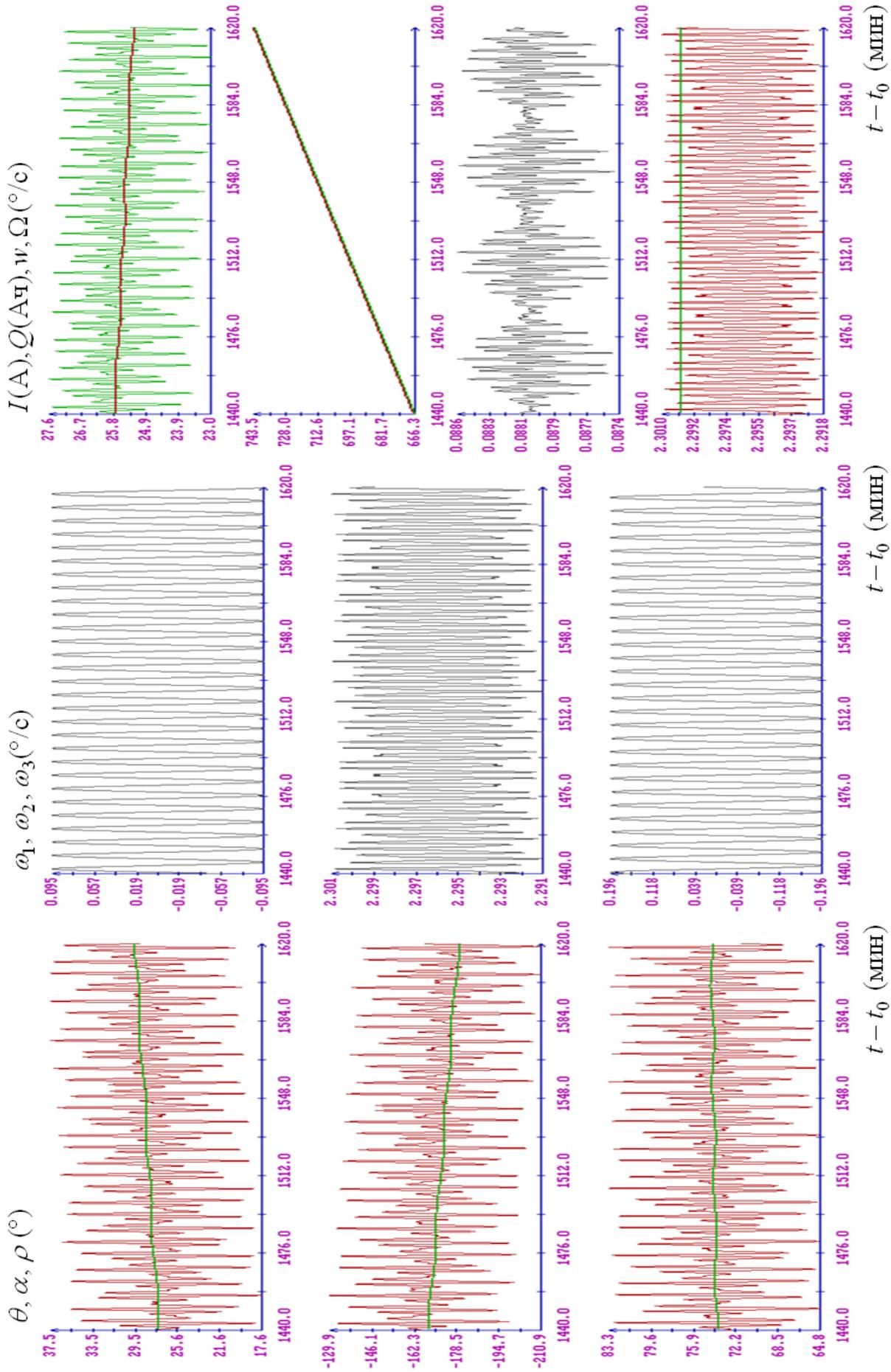


Рис. 17. Движение корабля *Прогресс* в режиме закрутки на Солнце,  $t_0 = 17:14:14$  МСК 22.V.2018 (продолжение).

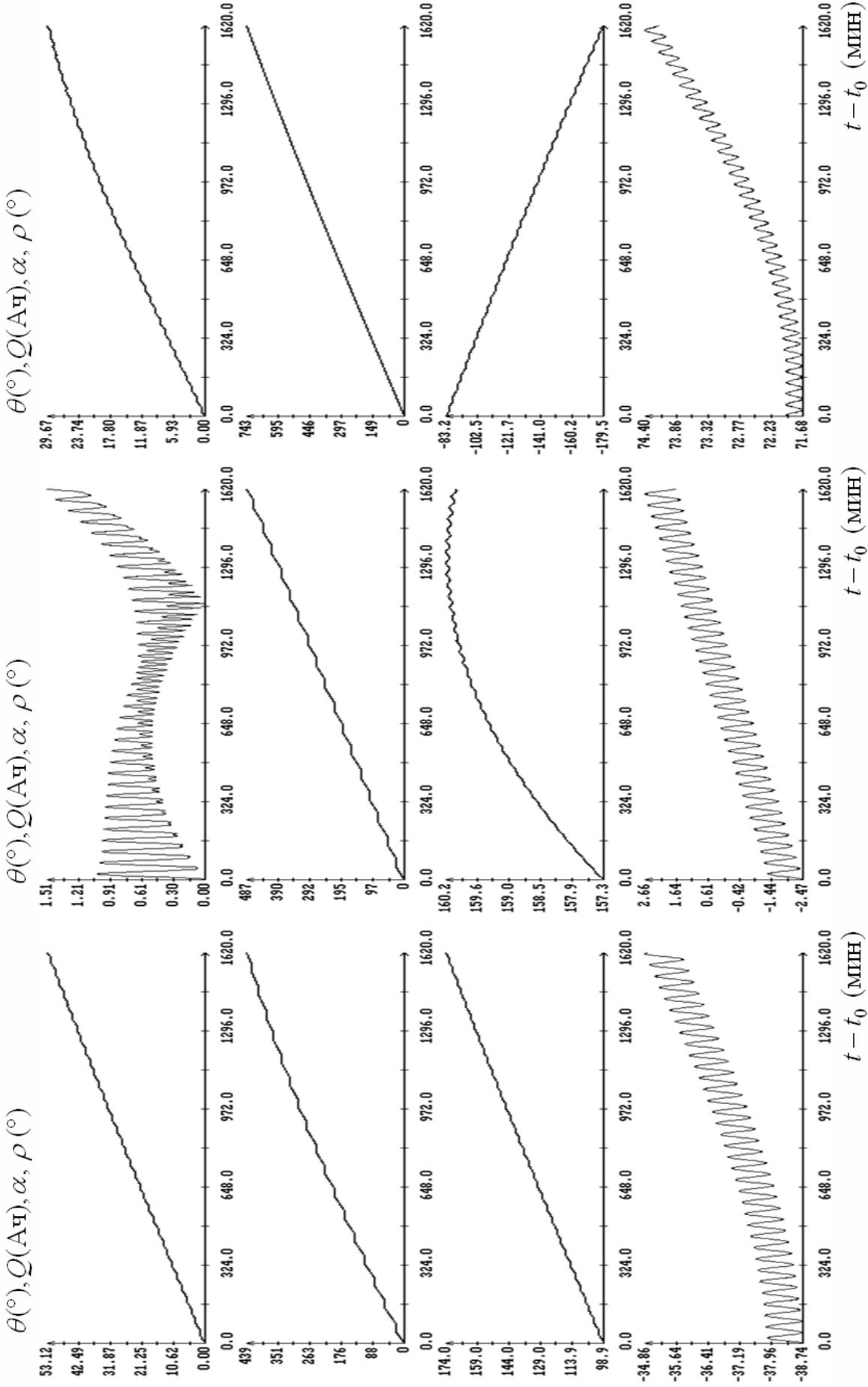


Рис. 18. Решения усредненной системы; (а)  $t_0 = 06:14:14$  23.IV, (б)  $t_0 = 11:14:14$  04.V,  $t_0 = 17:14:14$  22.V, время – московское, 2018 г.