



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 33 за 2021 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**[Ю.Ф. Голубев](#)**

Метод оптимального  
управления колебаниями  
механических систем

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Голубев Ю.Ф. Метод оптимального управления колебаниями механических систем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 33. 37 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-33>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-33>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**Ю.Ф. Голубев**

**Метод оптимального управления  
колебаниями механических систем**

**Москва — 2021**

УДК 531.38

*Голубев Ю.Ф.*

### **Метод оптимального управления колебаниями механических систем**

Решается проблема управления колебаниями в окрестности положения равновесия склерономных механических систем с  $n$  степенями свободы. Одна степень свободы неуправляема, а остальные управляются сервоприводами. Предложен метод поиска оптимального управления амплитудой колебаний по неуправляемой степени свободы за счет выбора управления законом изменения других степеней свободы. В число управляемых могут входить как позиционные, так и циклические координаты. На примерах конкретных маятниковых систем продемонстрирована эффективность применения предложенного метода.

**Ключевые слова:** механическая система, колебания, амплитуда, управление, оптимизация

*Yury Filippovich Golubev*

### **Method for optimal control of mechanical systems oscillations**

The problem of controlling oscillations in the vicinity of the equilibrium position of scleronomic mechanical systems with  $n$  degrees of freedom is solved. One degree of freedom is uncontrollable, and the rest are controlled with servos. A method is proposed for finding the optimal control of the oscillation amplitude of an uncontrollable degree of freedom by choosing the control of the law of change of other degrees of freedom. The controlled coordinates can include both position and cyclic coordinates. The effectiveness of the proposed method is demonstrated by the examples of specific oscillating systems.

**Key words:** mechanical system, oscillation, amplitude, control, optimization

### **Оглавление**

Введение.....	3
1. Постановка проблемы.....	3
2. Первая вариация.....	7
3. Градиентный метод оптимизации размаха колебаний.....	9
4. Оптимальное раскачивание (успокоение) колебаний.....	16
5. Управление амплитудой некоторых маятниковых систем.....	18
5.1. Маятник переменной длины.....	18
5.2. Качели.....	20
5.3. Качели переменной длины.....	22
5.4. Качели переменной длины с подвижной точкой подвеса.....	24
5.5. Маятник переменной длины с маховиком.....	27
5.6. Сегмент диска со стержнем.....	29
5.7. Двухзвенный маятник.....	33
Заключение.....	35
Библиографический список.....	36

## Введение

В препринте изучаются механические колебательные системы с дефицитом управления. Такие системы содержат степени свободы, для которых непосредственное активное управление нереализуемо, но может осуществляться опосредованно за счет перекрестного влияния других активно управляемых степеней свободы. Примерами могут служить маятниковые системы, двуногие шагающие механизмы, некоторые транспортные системы, и в том числе летательные аппараты, а также некоторые космические объекты. Требуемое изменение неуправляемых степеней свободы достигается за счет подходящего управления по другим степеням свободы [1,2]. Часто проблема оптимального управления колебаниями для механических систем ставится и исследуется в рамках принципа максимума Л.С. Понтрягина [3,4]. Примеры решения некоторых задач с дефицитом управления системами, находящимися в окрестности положения равновесия и содержащими одну неуправляемую степень свободы, можно найти в [5 – 9]. Координаты управляемых степеней свободы могут входить в уравнения движения таких систем вместе со своими производными. Непосредственное применение формализма принципа максимума Понтрягина часто приводит здесь к системе обыкновенных дифференциальных уравнений удвоенного порядка, что затрудняет их исследование. В работе [10] для упрощения решения проблем оптимального управления колебаниями для систем, содержащих лишь позиционные координаты [11], применен вариант метода множителей Лагранжа, основанный на подходе Д.Е. Охоцимского, Т.М. Энеева [12].

В данном препринте метод, предложенный в работе [10], обобщается на случай, когда система содержит не только позиционные, но и циклические управляемые координаты. При этом удастся избежать теоретических трудностей при вычислении первой вариации, связанных с наличием несобственных интегралов, применяемых при формулировании метода. Метод позволяет получить решение в виде синтеза управления колебаниями в классе кусочно-непрерывных управляющих координат в зависимости от координаты неуправляемой степени свободы. Критерием оптимальности служит амплитуда колебаний механической системы. Представлены решения некоторых конкретных типовых задач, иллюстрирующие особенности применения развиваемого метода.

## 1. Постановка проблемы

Рассмотрим склерономную голономную механическую систему с кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad n \geq 1,$$

где  $q_i$  – обобщенные координаты системы,  $\dot{q}_i$  – обобщенные скорости, а симметричная матрица  $(a_{ij})$  зависит от координат и положительно определена.

Уравнения движения системы представим в форме уравнений Лагранжа 2 рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad (1.1)$$

в которых  $t$  – время, а позиционные обобщенные силы  $Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_{n+1})$  стационарны. Пользуясь произволом в нумерации обобщенных координат, выделим первую обобщенную координату, обозначив ее буквой  $x$ . Остальные координаты переобозначим:  $u_j \triangleq q_{j+1}$ ,  $j = \overline{1, s-1}$  и  $w_k \triangleq q_{s+k}$ ,  $k = \overline{1, n-s+1}$ , где  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{s-1})$  – вектор позиционных координат,  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-s+1})$  – вектор циклических координат, так что  $\partial T / \partial w_k \equiv 0$ ,  $\partial Q_i / \partial w_k = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, n-s-1}$ .

Кинетическая энергия примет вид

$$T = \frac{1}{2} \left[ a_{11} \dot{x}^2 + 2\dot{x} \left( \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s+1} a_{1,s+k} \dot{w}_k \right) \right] + T^*,$$

где

$$T^*(x, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) = \frac{1}{2} \left( \sum_{j,r=1}^{s-1} a_{j+1,r+1} \dot{u}_j \dot{u}_r + \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{k=1}^{n-s+1} a_{j+1,k+s} \dot{u}_j \dot{w}_k + \sum_{k,r=1}^{n-s+1} a_{k+s,r+s} \dot{w}_k \dot{w}_r \right).$$

В системе (1.1) выделим уравнение для координаты  $x$ :

$$\frac{d}{dt} \left( a_{11} \dot{x} + \sum_{i=1}^{s-1} a_{1,i+1} \dot{u}_i + \sum_{k=1}^{n-s+1} a_{1,s+k} \dot{w}_k \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = F(x, \mathbf{u}), \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{s-1}) \in R^{s-1}$ . Примем координату  $x$  в качестве независимой переменной на участке ее монотонного изменения:  $\dot{x} \neq 0$ . Тогда уравнение (1.2) преобразуется к виду

$$\dot{x} \frac{d}{dx} [f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') \dot{x}] - p(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') \dot{x}^2 = F(x, \mathbf{u}), \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{u}' = d\mathbf{u} / dx$ ,  $\mathbf{w}' = d\mathbf{w} / dx$  и

$$f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') = a_{11} + \sum_{i=1}^{s-1} a_{1,i+1} u'_i + \sum_{k=1}^{n-s+1} a_{1,s+k} w'_k,$$

$$p(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{11}}{\partial x} + 2 \sum_{j=1}^{s-1} \frac{\partial a_{1,j+1}}{\partial x} u'_j + 2 \sum_{k=1}^{n-s+1} \frac{\partial a_{1,s+k}}{\partial x} w'_k \right) + \frac{\partial T^*(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}')}{\partial x}.$$

Будем считать, что векторы  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$ ,  $\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{w}}(x)$  заданы, а их компоненты ограничены:

$$\left| u_i^m \leq u_i(x) \leq u_i^M \right|, \quad i = \overline{1, s-1}, \quad \left| \dot{w}_k^m \leq \dot{w}_k(x) \leq \dot{w}_k^M \right|, \quad k = \overline{1, n-s+1}. \quad (1.4)$$

Эти вектор-функции будем рассматривать как сервосвязи, наложенные на систему. Обобщенные силы  $Q_2, \dots, Q_{n-1}$  следует выбирать так, чтобы указанные

вектор-функции  $\mathbf{u}(x)$ ,  $\dot{\mathbf{w}}(x)$  были реализованы. Предположим, что это сделано, так что ограничения (1.4) удовлетворяются, и можно написать уравнение

$$\int_{x_0}^x \lambda \left\{ F(x, \mathbf{u}) + p(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') \dot{x}^2 - \dot{x} \frac{d}{dx} [f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') \dot{x}] \right\} dx = 0, \quad (1.5)$$

где  $x_0$  – начальное значение независимой переменной  $x$ ,  $\lambda(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}')$  – произвольная функция. Уравнение (1.5) непосредственно следует из уравнения (1.3). Заметим, что если  $f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') \neq 0$ , то уравнение (1.3) допускает интегрирующий множитель [11]. Выберем его в качестве  $\lambda$ :

$$\lambda = f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') \exp \left( - \int_{x_0}^x \frac{2p(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}')}{f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}')} dx \right), \quad f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') \neq 0. \quad (1.6)$$

Тогда равенство (1.5) можно преобразовать к виду

$$\int_{x_0}^x \lambda F(x, \mathbf{u}) dx - \frac{1}{2} \left[ \dot{x}^2 f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') \lambda(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') \right]_{x_0}^x = 0,$$

или

$$\int_{x_0}^x \lambda F(x, \mathbf{u}) dx = \frac{1}{2} \left[ f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) \lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) \right]_{x_0}^x, \quad (1.7)$$

где

$$f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) = a_{11} \dot{x} + \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \dot{u}_i + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \dot{w}_k,$$

$$\lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) = f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) \exp \left( - \int_{x_0}^x \frac{2p(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}')}{f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}')} dx \right).$$

В том случае, когда  $\dot{x} = \dot{x}(x)$  обращается в нуль, интеграл в левой части равенства (1.7) становится несобственным из-за того, что при  $\dot{x} = 0$  значения  $\mathbf{u}' = \dot{\mathbf{u}} / \dot{x}$  и  $\mathbf{w}' = \dot{\mathbf{w}} / \dot{x}$  могут стать бесконечно большими. Однако та же формула (1.7) показывает, что этот интеграл существует и принимает конечное значение. Заметим, что

$$f^* \lambda^* = \left( f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) \right)^2 \exp \left( - \int_{x_0}^x \frac{2p(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}')}{f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}')} dx \right) \geq 0. \quad (1.8)$$

Предположим, что силовая функция

$$U(x, \mathbf{u}(\cdot)) = \int_{x_0}^x F(\tau, \mathbf{u}(\tau)) d\tau \quad (1.9)$$

имеет изолированный максимум по координате  $x$  для  $\mathbf{u}(\tau) \equiv 0$  и этот максимум остается изолированным, когда  $\mathbf{u}(\tau)$  меняется. Будем рассматривать движение в окрестности этого максимума. Пусть начальные условия выбраны так, что равенство  $\dot{x}_0 = \dot{x}(x_0) = 0$  выполнено, когда  $x = x_0$ . Назовем амплитудой колебаний

величину  $J = |x_1 - x_0|$ , где  $x_1 > x_0$  – следующее значение координаты  $x$ , когда  $\dot{x}_1 = \dot{x}(x_1)$  обращается в ноль. В этом случае аргумент изолированного максимума силовой функции  $U(x, \mathbf{u}(\cdot))$  будет принадлежать отрезку  $[x_0, x_1]$ . В общем случае этот аргумент может меняться в зависимости от выбранных вектор-функций  $\mathbf{u}(x)$ ,  $\dot{\mathbf{w}}(x)$ . На концах отрезка должно быть выполнено

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0, \quad (1.10)$$

а также

$$f^*(x_0, \dot{x}_0, \mathbf{u}(x_0), \dot{\mathbf{u}}(x_0), \dot{\mathbf{w}}(x_0)) = \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \dot{u}_i(x_0) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \dot{w}_k(x_0), \quad (1.11)$$

$$f^*(x_1, \dot{x}_1, \mathbf{u}(x_1), \dot{\mathbf{u}}(x_1), \dot{\mathbf{w}}(x_1)) = \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \dot{u}_i(x_1) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \dot{w}_k(x_1).$$

Требуется найти кусочно-непрерывные управления  $\mathbf{u}(x)$ ,  $\dot{\mathbf{w}}(x)$ , при которых достигается максимум (минимум) функционала  $J$ .

Теперь рассмотрим обратное движение маятника и обозначим  $\xi = -x$ . Уравнение (1.2) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left( a_{11} \dot{\xi} - \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \dot{u}_i - \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \dot{w}_k \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = -F(-\xi, \mathbf{u}). \quad (1.12)$$

Уравнение (1.3) можно представить как

$$\dot{\xi} \frac{d}{d\xi} \left[ f_\xi(-\xi, \mathbf{u}, \mathbf{u}'_\xi, \mathbf{w}'_\xi) \dot{\xi} \right] - p_\xi(-\xi, \mathbf{u}, \mathbf{u}'_\xi, \mathbf{w}'_\xi) \dot{\xi}^2 = -F(-\xi, \mathbf{u}), \quad (1.13)$$

где  $\mathbf{u}'_\xi = d\mathbf{u}/d\xi$ ,  $\mathbf{w}'_\xi = d\mathbf{w}/d\xi$  и

$$f_\xi(-\xi, \mathbf{u}, \mathbf{u}'_\xi, \mathbf{w}'_\xi) = a_{11} - \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} u'_{i\xi} - \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} w'_{k\xi},$$

$$p_\xi(-\xi, \mathbf{u}, \mathbf{u}'_\xi, \mathbf{w}'_\xi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{11}}{\partial \xi} + 2 \sum_{j=1}^s \frac{\partial a_{1,j+1}}{\partial \xi} u'_{j\xi} + 2 \sum_{k=1}^{n-s-1} \frac{\partial a_{1,s+k}}{\partial \xi} w'_{k\xi} \right) + \frac{\partial T^*(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}')}{\partial \xi}.$$

Таким образом, получаем

$$\lambda_\xi = f_\xi(-\xi, \mathbf{u}, \mathbf{u}'_\xi, \mathbf{w}'_\xi) \exp \left( - \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{2p_\xi(-\xi, \mathbf{u}, \mathbf{u}'_\xi, \mathbf{w}'_\xi)}{f_\xi(-\xi, \mathbf{u}, \mathbf{u}'_\xi, \mathbf{w}'_\xi)} d\xi \right), \quad (1.14)$$

и формулу (1.7) можно переписать следующим образом

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \lambda_\xi F(-\xi, \mathbf{u}) d\xi = - \frac{1}{2} \left[ f_\xi^*(-\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) \lambda_\xi^*(-\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) \right]_{\xi_0}^{\xi}, \quad (1.15)$$

где

$$f_\xi^*(-\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) = a_{11} \dot{\xi} - \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \dot{u}_i - \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \dot{w}_k,$$

$$\lambda_{\xi}^*(-\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) = f_{\xi}^*(-\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) \exp\left(-\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{2p_{\xi}(-\xi, \mathbf{u}, \mathbf{u}'_{\xi}, \mathbf{w}'_{\xi})}{f_{\xi}(-\xi, \mathbf{u}, \mathbf{u}'_{\xi}, \mathbf{w}'_{\xi})} d\xi\right).$$

Амплитуда колебаний имеет вид  $J = \xi_1 - \xi_0$ , где  $\xi_1 > \xi_0$ ,  $\dot{\xi}_0 = \dot{\xi}(\xi_0) = 0$ ,  $\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}(\xi_1) = 0$  и  $\dot{\xi}(\xi) \neq 0$ , если  $\xi \in (\xi_0, \xi_1)$ . Требуется найти кусочно-непрерывные управления  $\mathbf{u}(\xi)$ ,  $\dot{\mathbf{w}}(\xi)$ , при которых значение функционала  $J$  максимально (минимально).

## 2. Первая вариация

Следуя [10,12], найдем первую вариацию уравнения (1.7) для управлений  $\mathbf{u}(x)$ ,  $\dot{\mathbf{w}}(x)$  при условии (1.10). Член в фигурных скобках равенства (1.5) обращается в тождественный ноль, если  $\dot{x}(x)$  удовлетворяет уравнению (1.3). Поэтому при вычислении первой вариации левой части уравнения (1.7), множитель  $\lambda$  не следует варьировать. Обозначим опорное управление как  $\mathbf{u}^r(x)$ ,  $\dot{\mathbf{w}}^r(x)$ .

2.1. Сначала сравним движения, исходящие из одной и той же начальной точки  $x_0$ , так что  $\dot{x} > 0$ . При варьировании должно быть:  $\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}^r(x) + \delta\mathbf{u}(x)$ ,  $\dot{\mathbf{w}}(x) = \dot{\mathbf{w}}^r(x) + \delta\dot{\mathbf{w}}(x)$ ,  $x_2 = x_1 + \delta x_1$  и  $\dot{x}(x_2) = 0$ .

2.1.1. Пусть  $x_2 \geq x_1$ . Тогда получим

$$I^r = \int_{x_0}^{x_1} \lambda F(x, \mathbf{u}^r) dx = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \dot{u}_i^r(x) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \dot{w}_k^r(x) \right] \lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}^r, \dot{\mathbf{u}}^r, \dot{\mathbf{w}}^r) \Big|_{x_0}^{x_1},$$

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \lambda F(x, \mathbf{u}) dx = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \dot{u}_i(x) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \dot{w}_k(x) \right] \lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) \Big|_{x_0}^{x_1} +$$

$$+ \frac{a_{11} \dot{x}_1}{2} \lambda^*(x_1, \dot{x}_1, \mathbf{u}(x_1), \dot{\mathbf{u}}(x_1), \dot{\mathbf{w}}(x_1)).$$

Здесь по смыслу должно быть  $\dot{x}_1 > 0$ . Рассмотрим первую изохронную вариацию функционала  $I$  на отрезке  $[x_0, x_1]$ :

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda \frac{\partial F(x, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dx = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \delta \dot{u}_i(x) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(x) \right] \lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}^r, \dot{\mathbf{u}}^r, \dot{\mathbf{w}}^r) \Big|_{x_0}^{x_1} +$$

$$+ \frac{a_{11} \delta \dot{x}_1}{2} \lambda^*(x_1, \dot{x}_1, \mathbf{u}^r(x_1), \dot{\mathbf{u}}^r(x_1), \dot{\mathbf{w}}^r(x_1)).$$

Или



$$\begin{aligned} \frac{a_{11}\delta\dot{x}_1}{2} \lambda^*(x_1, \dot{x}_1, \mathbf{u}^r(x_1), \dot{\mathbf{u}}^r(x_1), \dot{\mathbf{w}}^r(x_1)) &= \int_{x_0}^{x_1} \lambda \frac{\partial F(x, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dx - \\ &- \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \delta \dot{u}_i(x) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(x) \right] \lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}^r, \dot{\mathbf{u}}^r, \dot{\mathbf{w}}^r) \Big|_{x_0}^{x_1}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

2.1.2. Пусть  $x_2 < x_1$ . Тогда найдем

$$\begin{aligned} I^r &= \int_{x_0}^{x_2} \lambda F(x, \mathbf{u}^r) dx = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \dot{u}_i^r(x) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \dot{w}_k^r(x) \right] \lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}^r, \dot{\mathbf{u}}^r, \dot{\mathbf{w}}^r) \Big|_{x_0}^{x_2} + \\ &+ \frac{a_{11}\dot{x}_2^r}{2} \lambda^*(x_2^r, \dot{x}_2^r, \mathbf{u}^r(x_2), \dot{\mathbf{u}}^r(x_2), \dot{\mathbf{w}}^r(x_2)), \end{aligned}$$

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \lambda F(x, \mathbf{u}) dx = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \dot{u}_i(x) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \dot{w}_k(x) \right] \lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) \Big|_{x_0}^{x_2}.$$

Здесь по смыслу  $\dot{x}_2^r > 0$ . Возьмем первую изохронную вариацию функционала  $I$  на отрезке  $[x_0, x_2]$ . Учитывая, что  $\delta\dot{x}_2 = \dot{x}_2 - \dot{x}_2^r = -\dot{x}_2^r$ , будем иметь аналогично (2.1)

$$\begin{aligned} \frac{a_{11}\delta\dot{x}_2}{2} \lambda^*(x_2, \dot{x}_2, \mathbf{u}^r(x_2), \dot{\mathbf{u}}^r(x_2), \dot{\mathbf{w}}^r(x_2)) &= \int_{x_0}^{x_2} \lambda \frac{\partial F(x, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dx - \\ &- \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \delta \dot{u}_i(x) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(x) \right] \lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}^r, \dot{\mathbf{u}}^r, \dot{\mathbf{w}}^r) \Big|_{x_0}^{x_2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.2. Рассмотрим движение колебательной системы в обратном направлении. Найдем первую вариацию уравнения (1.15) по управлениям  $\mathbf{u}(\xi)$ ,  $\dot{\mathbf{w}}(\xi)$  при условии  $\dot{\xi}_0 = \dot{\xi}_1 = 0$ . Сравним движения, исходящие из одной и той же начальной точки  $\xi_0$ , когда  $\dot{\xi} > 0$ . При варьировании должно быть выполнено:  $\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{u}^r(\xi) + \delta \mathbf{u}(\xi)$ ,  $\dot{\mathbf{w}}(\xi) = \dot{\mathbf{w}}^r(\xi) + \delta \dot{\mathbf{w}}(\xi)$ ,  $\xi_2 = \xi_1 + \delta \xi_1$  и  $\dot{\xi}(\xi_2) = 0$ .

2.2.1. Пусть  $\xi_2 \geq \xi_1$ . Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} I_\xi^r &= \int_{\xi_0}^{\xi_1} \lambda F(-\xi, \mathbf{u}^r) d\xi = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \dot{u}_i^r(\xi) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \dot{w}_k^r(\xi) \right] \lambda^*(-\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}^r, \dot{\mathbf{u}}^r, \dot{\mathbf{w}}^r) \Big|_{\xi_0}^{\xi_1}, \\ I_\xi &= \int_{\xi_0}^{\xi_1} \lambda F(-\xi, \mathbf{u}) d\xi = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \dot{u}_i(\xi) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \dot{w}_k(\xi) \right] \lambda^*(-\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) \Big|_{\xi_0}^{\xi_1} - \\ &- \frac{a_{11}\dot{\xi}_1}{2} \lambda^*(-\xi_1, \dot{\xi}_1, \mathbf{u}(\xi_1), \dot{\mathbf{u}}(\xi_1), \dot{\mathbf{w}}(\xi_1)). \end{aligned}$$

Здесь по смыслу должно быть  $\dot{\xi}_1 > 0$ . Возьмем первую изохронную вариацию функционала  $I_\xi$  на отрезке  $[\xi_0, \xi_1]$ :

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} \lambda_\xi \frac{\partial F(-\xi, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} d\xi = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \delta \dot{u}_i(\xi) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(\xi) \right] \lambda_\xi^* (-\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}^r, \dot{\mathbf{u}}^r, \dot{\mathbf{w}}^r) \Big|_{\xi_0}^{\xi_1} -$$

$$- \frac{a_{11} \dot{\xi}_1}{2} \lambda_\xi^* (-\xi_1, \dot{\xi}_1, \mathbf{u}^r(\xi_1), \dot{\mathbf{u}}^r(\xi_1), \dot{\mathbf{w}}^r(\xi_1)),$$

или

$$\frac{a_{11} \delta \dot{\xi}_1}{2} \lambda_\xi^* (-\xi_1, \dot{\xi}_1, \mathbf{u}^r(\xi_1), \dot{\mathbf{u}}^r(\xi_1), \dot{\mathbf{w}}^r(\xi_1)) = - \int_{\xi_0}^{\xi_1} \lambda_\xi \frac{\partial F(-\xi, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \delta \dot{u}_i(\xi) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(\xi) \right] \lambda_\xi^* (-\xi, \dot{\xi}^r, \mathbf{u}^r, \dot{\mathbf{u}}^r, \dot{\mathbf{w}}^r) \Big|_{\xi_0}^{\xi_1}. \quad (2.3)$$

2.2.2. Пусть  $\xi_2 < \xi_1$ . Тогда получим

$$I_\xi^r = \int_{\xi_0}^{\xi_2} \lambda F(-\xi, \mathbf{u}^r) d\xi = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \dot{u}_i^r(\xi) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \dot{w}_k^r(\xi) \right] \lambda^* (-\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}^r, \dot{\mathbf{u}}^r, \dot{\mathbf{w}}^r) \Big|_{\xi_0}^{\xi_2} -$$

$$- \frac{a_{11} \dot{\xi}_2^r}{2} \lambda^* (-\xi_2, \dot{\xi}_2^r, \mathbf{u}^r(\xi_2), \dot{\mathbf{u}}^r(\xi_2), \dot{\mathbf{w}}^r(\xi_2)),$$

$$I_\xi = \int_{\xi_0}^{\xi_2} \lambda F(-\xi, \mathbf{u}) d\xi = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \dot{u}_i(\xi) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \dot{w}_k(\xi) \right] \lambda^* (-\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) \Big|_{\xi_0}^{\xi_2}.$$

Здесь по смыслу должно быть  $\dot{\xi}_2^r > 0$ . Возьмем первую изохронную вариацию функционала  $I_\xi$  на отрезке  $[\xi_0, \xi_2]$ . Подобно (2.3) получим

$$\frac{a_{11} \delta \dot{\xi}_2^r}{2} \lambda^* (-\xi_2, \dot{\xi}_2^r, \mathbf{u}^r(\xi_2), \dot{\mathbf{u}}^r(\xi_2), \dot{\mathbf{w}}^r(\xi_2)) = - \int_{\xi_0}^{\xi_2} \lambda \frac{\partial F(-\xi, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \delta \dot{u}_i(\xi) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(\xi) \right] \lambda^* (-\xi, \dot{\xi}^r, \mathbf{u}^r, \dot{\mathbf{u}}^r, \dot{\mathbf{w}}^r) \Big|_{\xi_0}^{\xi_2}. \quad (2.4)$$

### 3. Градиентный метод оптимизации размаха колебаний

Кинетическая энергия – положительно определенная квадратичная по скорости форма. Следовательно,  $a_{11} > 0$ .

#### 3.1. Раскачивание

3.1.1. Правое колебание. Используем пункт 2.1.1. Формулу (2.1) можно переписать следующим образом:

$$\delta\dot{x}_1 = \frac{2}{a_{11}} \left\{ \frac{1}{\dot{x}_1} \int_{x_0}^{x_1} \chi \frac{\partial F(x, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dx - \frac{\dot{x}}{2\dot{x}_1} \left[ \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \delta \dot{u}_i(x) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(x) \right] \chi \Big|_{x_0}^{x_1} \right\}, \quad (3.1)$$

где

$$\chi = \frac{\lambda}{\lambda(x_1, \mathbf{u}^r(x_1), \mathbf{u}^{r'}(x_1), \mathbf{w}^{r'}(x_1))}. \quad (3.1')$$

Требуется увеличить значение  $x_2 \geq x_1$ . Очевидно, что для этого необходимо сделать положительным значение  $\delta\dot{x}_1$ .

*Следствие*°3.1.1. Пусть  $\partial F / \partial \mathbf{u} \equiv 0$ , для  $\forall x \in [x_0, x_1]$ , и

$$\sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \delta \dot{u}_i(x) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(x) \Big|_{x_0}^{x_1} = 0$$

для  $\forall \mathbf{u}, \dot{\mathbf{w}}$ , удовлетворяющих ограничениям (1.4). Тогда невозможно раскатать систему по координате  $x$  за счет сервоуправления, даже если левая часть уравнения (1.3) зависит от вектор-функций  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{w}'$ .

*Следствие*°3.1.2. (Раскачивание с помощью позиционного управления). Пусть  $\partial F / \partial \mathbf{u} \neq 0$   $x_1 > x_0$ ,  $\delta x_0 = 0$ ,  $\delta \mathbf{u}(x) \neq 0$ , и

$$\sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \delta \dot{u}_i(x) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(x) \Big|_{x_0}^{x_1} = 0.$$

Тогда из равенства (3.1) следует

$$\delta\dot{x}_1 = \frac{2}{a_{11}\dot{x}_1} \left[ \int_{x_0}^{x_1} \chi \frac{\partial F(x, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dx \right]. \quad (3.2)$$

В рассматриваемом случае будет выполнено  $\dot{x}_1 > 0$ . Поэтому для увеличения значения  $\dot{x}_1$  достаточно принять

$$\delta \mathbf{u}(x) = \Delta \mathbf{u}(x) = \varepsilon \chi \frac{\partial F(x, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} [(x - x_0)(x - x_1)]^2, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.2')$$

Если ограничения (1.4) позволяют это сделать, то тогда из (3.2) получим

$$\delta\dot{x}_1 = \frac{2\varepsilon}{a_{11}\dot{x}_1} \int_{x_0}^{x_1} \chi^2 \left\| \frac{\partial F(x, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right\|^2 [(x - x_0)(x - x_1)]^2 dx > 0.$$

Другими словами, если принять  $\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}^r(x)$  и начать движение из точки  $x_0$ , то получится координата  $x_1$ , причем  $\dot{x}_1^r = 0$ . После этого, если взять  $\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}^r(x) + \Delta \mathbf{u}(x)$ , где  $\varepsilon$  достаточно мало, и начать движение снова от точки  $x_0$ , то тогда получим, что скорость  $\dot{x}_1 > 0$  возрастет и, следовательно, координата  $x_1$  возрастет тоже:

$$x_1^{(1)} = x_1 + \delta x_1 > x_1.$$

Если ограничения (1.4) не позволяют изменить какую-либо компоненту  $\mathbf{u}$  требуемым образом, то тогда на интервале изменения переменной  $x$ , где такое

случилось, следует принять  $\Delta u_i(x) = 0$ . Если неравенства (1.4) не позволяют осуществить нужным образом вариацию ни одной из компонент вектор-функции управления на всем отрезке  $[x_0, x_1]$ , то это означает, что функция  $\mathbf{u}$  является аргументом граничного максимума.

*Следствие*°3.1.3. (Раскачивание с помощью циклических координат). Пусть  $x_1 > x_0$ ,  $\delta x_0 = 0$ ,  $\delta \mathbf{u}(x) = 0$ , но  $\delta \dot{\mathbf{w}}(x) \neq 0$ . Тогда из равенства (3.1) найдем  $\chi(x_1) = 1$  и

$$\delta \dot{x}_1 = - \frac{\chi \dot{x}}{a_{11} \dot{x}_1} \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(x) \Big|_{x_0}^{x_1}.$$

Примем, что  $\delta \dot{\mathbf{w}}(x_0) = 0$  в начальной точке  $x_0$ . Тогда

$$\delta \dot{x}_1 = - \frac{1}{a_{11}} \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(x_1). \quad (3.3)$$

Поэтому для того, чтобы увеличить скорость  $\dot{x}_1$ , достаточно обеспечить

$$\delta \dot{w}_k(x_1) = -\varepsilon a_{1,s+k}, \quad (3.4)$$

где  $\varepsilon > 0$  – мало. Тогда получим

$$\delta \dot{x}_1 = \frac{\varepsilon}{a_{11}} \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k}^2 > 0.$$

В результате скорость  $\dot{x}_1$  возрастет и, следовательно, координата  $x_1$  возрастет тоже:

$$x_1^{(1)} = x_1 + \delta x_1 > x_1.$$

Тем самым амплитуда колебаний увеличится.

3.1.2. Левое колебание. Пусть для  $\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}^r(x)$  колебания происходили на отрезке  $[x_0, x_1]$ . Выбрав  $\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}_1^r(x) = \mathbf{u}^r(x) + \Delta \mathbf{u}(x)$ ,  $\lambda^* \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k \Big|_{x_0}^{x_1} = 0$ , мы получили новую точку  $x_1^{(1)} > x_1$ . С новой функцией управления  $\mathbf{u}_1^r(x)$  колебания будут происходить на отрезке  $[x_0, x_1^{(1)}]$  и амплитуда станет больше. Теперь рассмотрим обратное движение от точки  $x_1^{(1)}$  к точке  $x_0$ . Используем пункт 2.2 и перепишем формулу (2.3) следующим образом

$$\delta \dot{\xi}_1 = \frac{2}{a_{11}} \left\{ - \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{\chi}{\dot{\xi}_1} \frac{\partial F(\xi, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} d\xi + \frac{\dot{\xi}}{2 \dot{\xi}_1} \left[ \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \delta \dot{u}_i(\xi) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(\xi) \right] \chi \Big|_{\xi_0}^{\xi_1} \right\}, \quad (3.5)$$

где  $\xi_0 = -x_1^{(1)}$ ,  $\xi_1 = -x_0$ ,

$$\chi = \frac{\lambda}{\lambda(-\xi_1, \mathbf{u}^r(\xi_1), \mathbf{u}^{rr}(\xi_1), \mathbf{w}^{rr}(\xi_1))}. \quad (3.5')$$

Нам нужно увеличить значение  $\xi_2 \geq \xi_1$ . Очевидно, что для этого необходимо увеличить значение  $\delta \dot{\xi}_1$ .

*Следствие*°3.1.4. Пусть  $\partial F / \partial \mathbf{u} \neq 0$ ,  $\xi_1 > \xi_0$ ,  $\delta \xi_0 = 0$ ,  $\delta \mathbf{u}(\xi) \neq 0$ , и

$$\sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \delta \dot{u}_i(\xi) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(\xi) \Big|_{\xi_0}^{\xi_1} = 0.$$

Тогда из равенства (3.5) находим

$$\delta \dot{\xi}_1 = -\frac{2}{a_{11} \dot{\xi}_1} \left[ \int_{\xi_0}^{\xi_1} \chi \frac{\partial F(-\xi, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} d\xi \right]. \quad (3.6)$$

Для того чтобы увеличить скорость  $\dot{\xi}_1$ , достаточно взять

$$\delta \mathbf{u}(\xi) = \Delta \mathbf{u}_b(\xi) = -\varepsilon \chi \frac{\partial F(-\xi, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} [(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1)]^2, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.6')$$

Если ограничения (1.4) позволяют так сделать, то тогда из (3.6) найдем

$$\delta \dot{\xi}_1 = \frac{2\varepsilon}{a_{11} \dot{\xi}_1} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \chi^2 \left\| \frac{\partial F(\xi, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right\|^2 [(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1)]^2 d\xi > 0.$$

Другими словами, если взять  $\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{u}_1^r(\xi)$  и отправиться из точки  $\xi_0 = -x_1^{(1)}$ , то получим координату  $\xi_1 = -x_0$  и  $\dot{\xi}_1 = 0$ . После этого, если взять  $\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{u}_2^r(\xi) = \mathbf{u}_1^r(\xi) + \Delta \mathbf{u}_b(\xi)$ , где  $\varepsilon$  достаточно мало, и снова отправиться из точки  $\xi_0$ , то скорость  $\dot{\xi}_1$  возрастет и, следовательно, координата  $\xi_1$  возрастет тоже:  $\xi_1^{(1)} = \xi_1 + \delta \xi_1 > \xi_1$  or  $x_0^{(1)} = -\xi_1^{(1)} = x_0 - \delta \xi_1 < x_0$ . Тем самым амплитуда колебаний станет больше.

*Следствие*°3.1.5. (Раскачивание с помощью циклических координат). Пусть  $\xi_1 > \xi_0$ ,  $\delta \xi_0 = 0$ ,  $\delta \mathbf{u}(\xi) = 0$ , но  $\delta \dot{\mathbf{w}}(\xi) \neq 0$ . Тогда из равенства (3.5) следует  $\chi^*(\xi_1) = 1$  и

$$\delta \dot{\xi}_1 = \frac{\chi \dot{\xi}_1}{a_{11} \dot{\xi}_1} \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(\xi) \Big|_{\xi_0}^{\xi_1}.$$

Примем, что  $\delta \dot{\mathbf{w}}(\xi_0) = 0$  в начальной точке  $\xi_0$ . Тогда

$$\delta \dot{\xi}_1 = \frac{1}{a_{11}} \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(\xi_1). \quad (3.7)$$

Таким образом, для того чтобы увеличить скорость  $\dot{\xi}_1$ , достаточно принять

$$\delta \dot{w}_k(\xi_1) = \varepsilon a_{1,s+k}, \quad (3.8)$$

где  $\varepsilon > 0$  достаточно мало. Тогда будем иметь

$$\delta \dot{\xi}_1 = \frac{\varepsilon}{a_{11}} \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k}^2 > 0.$$

Скорость  $\dot{\xi}_1$  возрастет и, следовательно, координата  $\xi_1$  тоже возрастет:

$$x_0^{(1)} = -\xi_1^{(1)} < x_0 = -\xi_1$$

Поэтому амплитуда увеличится.

В итоге мы получим

$$J^{(0)} = |x_1 - x_0| < J^{(1)} = |x_1^{(1)} - x_0^{(1)}|.$$

Отправляясь от новой точки  $x_0^{(1)}$  и выполняя операции, описанные в следствиях 3.1.2 – 3.1.5, мы получим точки  $x_0^{(2)} < x_0^{(1)}$  и  $x_1^{(2)} > x_1^{(1)}$  и так далее. Тем самым мы получим монотонно возрастающую последовательность амплитуды колебаний.

$$J^{(0)} < J^{(1)} < J^{(2)} < \dots$$

Описанная процедура для раскачивания системы показывает только принципиальную возможность увеличения амплитуды колебаний и не претендует на оптимальность процесса. При необходимости ее легко улучшить с помощью тех же следствий 3.1.2 – 3.1.5 посредством нахождения минимума (максимума) приращения начальной (конечной) координаты.

### 3.2. Режим уменьшения размаха колебаний.

і. Правое колебание. Применим пункт 2.1.2. Формулу (2.2) можно переписать следующим образом:

$$\delta \dot{x}_2 = \frac{2}{a_{11} \dot{x}_2^r} \left\{ \int_{x_0}^{x_2} \chi \frac{\partial F(x, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dx - \frac{\dot{x}^r}{2} \left[ \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \delta \dot{u}_i(x) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(x) \right] \chi \Big|_{x_0}^{x_2} \right\}, \quad (3.9)$$

где

$$\chi = \frac{\lambda}{\lambda(x_2, \mathbf{u}^r(x_2), \mathbf{u}^{rr}(x_2), \mathbf{w}^{rr}(x_2))}. \quad (3.9')$$

Необходимо уменьшить величину  $x_2 \leq x_1$ . Очевидно, что для этого необходимо уменьшить значение  $\delta \dot{x}_2$ .

*Следствие 3.2.1.* Пусть  $\partial F / \partial \mathbf{u} \neq 0$ ,  $x_1 > x_0$ ,  $\delta x_0 = 0$ ,  $\delta \mathbf{u}(x) \neq 0$ , и

$$\sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \delta \dot{u}_i(x) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(x) \Big|_{x_0}^{x_2} = 0.$$

Тогда из равенства (3.9) получаем

$$\delta \dot{x}_2 = \frac{2}{a_{11} \dot{x}_2^r} \left[ \int_{x_0}^{x_2} \chi \frac{\partial F(x, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dx \right]. \quad (3.10)$$

Здесь  $\dot{x}_2^r > 0$ . Для того чтобы уменьшить скорость  $\dot{x}_2$ , достаточно принять

$$\delta \mathbf{u}(x) = \Delta \mathbf{u}_d(x) = -\varepsilon \chi \frac{\partial F(x, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} [(x - x_0)(x - x_2)]^2, \quad \varepsilon > 0.$$

Если ограничения (1.4) это допускают, тогда из (3.10) получим

$$\delta \dot{x}_2 = -\frac{2\varepsilon}{a_{11} \dot{x}_2^r} \int_{x_0}^{x_2} \chi^2 \left\| \frac{\partial F(x, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right\|^2 [(x - x_0)(x - x_2)]^2 dx < 0.$$

Приняв во внимание, что в идеале должно быть  $\delta \dot{x}_2 = -\dot{x}_2^r$ , мы можем назначить

$$\varepsilon = \dot{x}_2^r \left[ \int_{x_0}^{x_2} \chi^2 \left\| \frac{\partial F(x, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right\|^2 [(x - x_0)(x - x_2)]^2 dx \right]^{-1} > 0$$

и обеспечить  $\dot{x}_2 \approx 0$ . Другими словами, если мы примем  $\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}^r(x)$  и начнем движение из точки  $x_0$ , то получим координату  $x_1$ , причем  $\dot{x}_1 = 0$ . После этого, если мы примем  $\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}^r(x) + \Delta \mathbf{u}_d(x)$ , где  $\varepsilon > 0$  достаточно мало, и вновь начнем движение из точки  $x_0$ , тогда скорость  $\dot{x}_2$  уменьшится и, следовательно, новая координата  $x_1^{(1)}$  правого конца движения уменьшится тоже:

$$x_1^{(1)} = x_1 + \delta \dot{x}_2 dt < x_1.$$

Таким образом, амплитуда колебаний станет меньше.

*Следствие*<sup>3.2.2.</sup> (Успокоение колебаний циклическими координатами). Пусть  $x_1 > x_0$ ,  $\delta x_0 = 0$ ,  $\delta \mathbf{u}(x) = 0$ , но  $\delta \dot{\mathbf{w}}(x) \neq 0$ . Тогда из равенства (3.9) следует  $\chi(x_2) = 1$  и

$$\delta \dot{x}_2 = - \frac{\chi \dot{x}_2^r}{a_{11} \dot{x}_2^r} \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(x) \Big|_{x_0}^{x_2}.$$

Предположим, что  $\delta \dot{\mathbf{w}}(x_0) = 0$  в начальной точке  $x_0$ . Тогда

$$\delta \dot{x}_2 = - \frac{1}{a_{11}} \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(x_2). \quad (3.11)$$

Для того чтобы уменьшить скорость  $\dot{x}_2$ , достаточно принять

$$\delta \dot{w}_k(x_2) = \varepsilon a_{1,s+k}, \quad (3.12)$$

где  $\varepsilon > 0$  достаточно мало. Тогда получим

$$\delta \dot{x}_2 = - \frac{\varepsilon}{a_{11}} \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k}^2 < 0.$$

Принимая во внимание, что должно быть  $\delta \dot{x}_2 = -\dot{x}_2^r$ , можем выбрать

$$\varepsilon = \dot{x}_2^r a_{11} \left( \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k}^2 \right)^{-1}.$$

Тем самым скорость  $\dot{x}_2 \approx 0$  уменьшится и, следовательно, координата  $x_1$  уменьшится тоже. Из-за этого амплитуда колебаний станет меньше.

**3.2.1. Левое колебание.** Применим пункт 2.2.2. Формулу (2.4) можно переписать следующим образом:

$$\delta \dot{\xi}_2 = \frac{2}{a_{11} \dot{\xi}_2^r} \left\{ - \int_{\xi_0}^{\xi_2} \chi \frac{\partial F(\xi, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} d\xi + \frac{\dot{\xi}_2^r}{2} \left[ \sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \delta \dot{u}_i(\xi) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(\xi) \right] \chi \Big|_{\xi_0}^{\xi_2} \right\}, \quad (3.13)$$

где

$$\chi = \frac{\lambda}{\lambda(-\xi_2, \mathbf{u}^r(\xi_2), \mathbf{u}^{rr}(\xi_2), \mathbf{w}^{rr}(\xi_2))}.$$

Требуется уменьшить значение  $\xi_2 \leq \xi_1$ . Очевидно, чтобы этого добиться, необходимо уменьшить значение  $\delta\dot{\xi}_2$ .

*Следствие*<sup>o</sup>3.2.3. Пусть  $\partial F / \partial \mathbf{u} \neq 0$ ,  $\xi_1 > \xi_0$ ,  $\delta\xi_0 = 0$ ,  $\delta\mathbf{u}(\xi) \neq 0$ , и

$$\sum_{i=1}^s a_{1,i+1} \delta\dot{u}_i(\xi) + \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta\dot{w}_k(\xi) \Big|_{\xi_0}^{\xi_2} = 0.$$

Тогда из равенства (3.13) найдем

$$\delta\dot{\xi}_2 = -\frac{2}{a_{11}\dot{\xi}_2^r} \left[ \int_{\xi_0}^{\xi_2} \chi \frac{\partial F(-\xi, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \delta\mathbf{u} d\xi \right]. \quad (3.14)$$

Здесь  $\dot{\xi}_2^r > 0$ . Для того чтобы уменьшить скорость  $\dot{\xi}_2$ , достаточно принять

$$\delta\mathbf{u}(\xi) = \Delta\mathbf{u}_d^b(\xi) = \varepsilon \chi \frac{\partial F(\xi, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} [(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_2)]^2, \quad \varepsilon > 0.$$

Если ограничения (1.4) позволяют такое сделать, то из (3.14) получим

$$\delta\dot{\xi}_2 = -\frac{2\varepsilon}{a_{11}\dot{\xi}_2^r} \int_{\xi_0}^{\xi_2} \chi^2 \left\| \frac{\partial F(\xi, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right\|^2 [(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_2)]^2 d\xi < 0.$$

Приняв во внимание, что  $\delta\dot{\xi}_2 = -\dot{\xi}_2^r$ , можно выбрать

$$\varepsilon = (\dot{\xi}_2^r)^2 \left[ \int_{\xi_0}^{\xi_2} \chi^2 \left\| \frac{\partial F(\xi, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right\|^2 [(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_2)]^2 d\xi \right]^{-1} > 0$$

и обеспечить  $\dot{\xi}_2 \approx 0$ . Другими словами, если мы возьмем  $\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{u}^r(\xi)$  и отправимся от точки  $\xi_0 = -x_1^{(1)}$ , то мы получим координату  $\xi_1 = -x_0$ , причем  $\dot{\xi}_1 = 0$ .

Если после этого мы примем  $\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{u}^r(\xi) + \Delta\mathbf{u}_d^b(\xi)$ , где  $\varepsilon > 0$  достаточно мало, и вновь отправимся от точки  $\xi_0$ , то скорость  $\dot{\xi}_2$  уменьшится и, следовательно, новая координата  $\xi_1 = \xi_1^{(1)}$  уменьшится тоже:

$$\xi_1^{(1)} = \xi_1 + \delta\dot{\xi}_2 dt < \xi_1 \Rightarrow x_0^{(1)} > x_0.$$

Из-за этого и амплитуда колебаний станет меньше.

*Следствие*<sup>o</sup>3.2.4. (Торможение с помощью циклических координат). Пусть  $\xi_2 > \xi_0$ ,  $\delta\xi_0 = 0$ ,  $\delta\mathbf{u}(\xi) = 0$ , но  $\delta\dot{\mathbf{w}}(\xi) \neq 0$ . Тогда из равенства (3.13) следует  $\chi(\xi_2) = 1$  и

$$\delta\dot{\xi}_2 = \frac{\chi\dot{\xi}_2^r}{a_{11}\dot{\xi}_2^r} \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta\dot{w}_k(\xi) \Big|_{\xi_0}^{\xi_2}.$$

Предположим, что  $\delta\dot{\mathbf{w}}(\xi_0) = 0$  в начальной точке  $\xi_0$ . Тогда



$$\delta \dot{\xi}_2 = \frac{1}{a_{11}} \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k} \delta \dot{w}_k(\xi_2). \quad (3.15)$$

Для того чтобы уменьшить скорость  $\dot{\xi}_2$ , достаточно обеспечить

$$\delta \dot{w}_k(\xi_2) = -\varepsilon a_{1,s+k}, \quad (3.16)$$

где  $\varepsilon > 0$  достаточно мало. Тогда получим

$$\delta \dot{\xi}_2 = -\frac{\varepsilon}{a_{11}} \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k}^2 < 0.$$

Приняв во внимание  $\delta \dot{\xi}_2 = -\dot{\xi}_2^r$ , можно выбрать

$$\varepsilon = \dot{\xi}_2^r a_{11} \left( \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k}^2 \right)^{-1}.$$

Тогда окажется, что скорость  $\dot{\xi}_2 \approx 0$  уменьшится и, следовательно, координата  $\xi_2$  уменьшится тоже. В результате произойдет уменьшение амплитуды колебаний.

Отправляясь от новой точки  $x_0^{(1)}$  и выполняя операции, описанные в следствиях 3.2.1 – 3.2.4, получим точки  $x_0^{(2)} > x_0^{(1)}$  и  $x_1^{(2)} < x_1^{(1)}$  и так далее. В итоге получается монотонно убывающая последовательность амплитуд колебаний.

$$J^{(0)} > J^{(1)} > J^{(2)} > \dots$$

Описанная процедура раскачивания (успокоения) системы доказывает лишь принципиальную возможность постепенного увеличения (уменьшения) амплитуды колебаний и не претендует на оптимальность. При необходимости ее легко развить с помощью тех же следствий 3.1.2 – 3.1.5, 3.2.1 – 3.2.4 для того, чтобы найти максимум (минимум) приращения конечной (начальной) координаты.

#### 4. Оптимальное раскачивание (успокоение) колебаний

В качестве итога раздела 3 мы получаем теоремы.

**Теорема<sup>0</sup>1. (Принцип наилучшего раскачивания).** Предположим, что движение системы описывается уравнением (1.2) и существуют две точки  $x_0$  и  $x_1$ , причем  $x_0 < x_1$  и  $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$ . Тогда

I. Необходимыми условиями оптимальности управлений  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(\tau)$ ,  $\dot{\mathbf{w}}_M(x_1)$ , которые, будучи стесненными ограничениями (1.4), обеспечивают максимум значения  $x = x_1 > x_0$ , причем  $\dot{x}_1 = 0$ , служат уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_M(x) &= \arg \max_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{u}_M, \mathbf{u}'_M, \mathbf{w}'_M) F(x, \mathbf{u})], \\ \dot{\mathbf{w}}_M(x_1) &= \arg \min_{\dot{\mathbf{w}}} \left[ \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k}(x_1, \mathbf{u}_M) \dot{w}_k \right], \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $\chi = \lambda(x) / \lambda(x_1)$ , вычисляется по формулам (1.6), (3.1').

II. Необходимыми условиями оптимальности управлений  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m(\tau)$ ,  $\dot{\mathbf{w}}_m(x_0)$ , которые, будучи стесненными ограничениями (1.4), обеспечивают минимум значения  $x = x_0 < x_1$ , причем  $\dot{x}_0 = 0$ , служат уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m(x) &= \arg \min_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m, \mathbf{w}'_m) F(x, \mathbf{u})], \\ \dot{\mathbf{w}}_m(x_0) &= \arg \max_{\dot{\mathbf{w}}} \left[ \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_m) \dot{w}_k \right], \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $\chi = \lambda(x) / \lambda(x_0)$  вычисляется по формулам (1.6), (3.5').

*Доказательство.* Рассмотрим первое уравнение утверждения I. Тогда начальная точка есть  $x = x_0$ , и она не варьируется. Функционалом служит значение  $x_1$ , и требуется найти его максимум. Следовательно, мы можем воспользоваться формулами (3.2), (3.2') следствия 3.1.2. В (3.2) коэффициент при  $\delta \mathbf{u}$  есть частная производная от функции  $[\chi F(x, \mathbf{u}(x))]$  при условии, что  $\lambda$  не зависит от  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{w}'$ . При выбранных значениях  $x$  и  $\mathbf{u}$  увеличение функционала  $x_1$  оказывается невозможным только в двух случаях: либо когда подинтегральная функция достигла максимума по всем компонентам  $u_i$  внутри области (1.4), либо когда по части компонент  $u_i$  максимум достигается на границе области (1.4). В этом и состоит смысл первого уравнения (4.1).

Далее в равенстве (3.3) следует учесть, что  $a_{11} > 0$ . Это доказывает второе равенство утверждения I.

Наконец, рассмотрим первое уравнение утверждения II. Тогда начальная точка есть  $x = x_1 > x_0$ . Функционалом служит значение  $x_0$ , и нам следует найти его минимум. Здесь целесообразно применить формулы (3.6), (3.6') следствия 3.1.4. В (3.6) коэффициент при  $\delta \mathbf{u}$  есть частная производная от функции  $[\chi F(x, \mathbf{u}(x))]$  при условии, что  $\lambda$  не меняется. Для фиксированного значения  $\xi$  уменьшение функционала  $x_0$  невозможно только в двух случаях: когда подинтегральная функция достигла минимума либо по всем компонентам  $u_i$  внутри области (1.4), либо по части компонент на границе области (1.4). В этом и состоит смысл равенства (4.2).

Далее можно усмотреть, что  $\delta \mathbf{w}$  линейно входит в (3.7) и  $a_{11} > 0$ . Это доказывает второе равенство (4.2).

**Теорема<sup>2</sup>.** (Принцип оптимального успокоения колебаний). Предположим, что движение системы описывается уравнениями (1.2) и имеются две точки  $x_0$  и  $x_1$ , такие, что  $x_0 < x_1$ ,  $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$ . Тогда

I. Необходимое условие оптимальности управлений  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m(\tau)$ ,  $\dot{\mathbf{w}}_m(x_1)$ , которые при выполнении ограничений (1.4) обеспечивают минимальное значение координаты  $x = x_1 > x_0$ , для которой  $\dot{x}_1 = 0$ , выражается равенствами

$$\mathbf{u}_m(x) = \arg \min_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m, \mathbf{w}'_m) F(x, \mathbf{u})],$$

$$\dot{\mathbf{w}}_m(x_1) = \arg \max_{\dot{\mathbf{w}}} \left[ \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k}(x_1, \mathbf{u}_m) \dot{w}_k \right],$$
(4.3)

где  $\chi = \lambda(x) / \lambda(x_1)$ , вычисляется по формулам (1.6), (3.9').

II. Необходимые условия оптимальности управлений  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(x)$ ,  $\dot{\mathbf{w}}_M(x_0)$ , которые при выполнении ограничений (1.4) обеспечивают максимум значения координаты  $x = x_0 < x_1$ , для которой  $\dot{x}_0 = 0$ , выражаются уравнениями

$$\mathbf{u}_M(x) = \arg \max_{\mathbf{u}} [\lambda(x, \mathbf{u}_M, \mathbf{u}'_M, \mathbf{w}'_M) F(x, \mathbf{u})],$$

$$\dot{\mathbf{w}}_M(x_0) = \arg \min_{\dot{\mathbf{w}}} \left[ \sum_{k=1}^{n-s-1} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_M) \dot{w}_k \right],$$
(4.4)

где  $\chi = \lambda(x) / \lambda(x_0)$ , вычисляется по формулам (1.6), (3.9').

*Доказательство* теоремы 2 очевидно, т.к. она является взаимной по отношению к теореме 1.

## 5. Управление амплитудой некоторых маятниковых систем

Для того чтобы убедиться в эффективности предложенного метода оптимизации колебаний, рассмотрим несколько маятниковых систем разного уровня сложности.

### 5.1. Маятник переменной длины

Маятник представляет собой материальную точку, прикрепленную к концу материального стержня. Стержень во все время движения проходит через неподвижную точку  $O$  (Рис. 1). Длина  $l(t)$  отрезка стержня от фиксированной точки  $O$  подвеса маятника до материальной точки может изменяться в пределах  $0 < l_1 \leq l(t) \leq l_2$ . Известно [4], что математический маятник можно раскачать, изменяя длину  $l(t)$  подходящим образом. Длина  $l(t)$  в данном случае может рассматриваться как функция управления.

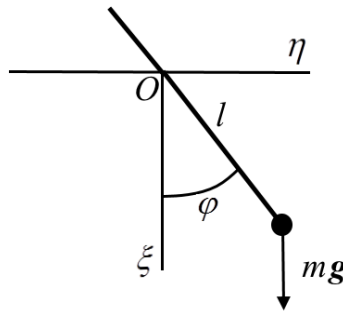


Рис. 1. Маятник переменной длины

Уравнение изменения кинетического момента маятника имеет вид [5]

$$\frac{d}{dt}(f\dot{\varphi}) = -g[(m+M)l - Ma]\sin\varphi, \quad (5.1.1)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\varphi$  – угол отклонения маятника от вертикали,  $f = I + M(l-a)^2 + l^2m$  – момент инерции соответствующего физического маятника, если  $l$  зафиксировать,  $M$  – масса стержня,  $m$  – масса материальной точки,  $I$  – центральный момент инерции стержня,  $a$  – расстояние от материальной точки до центра масс стержня и  $l(t)$  – управляющая функция. Из формулы (1.6) находим  $\lambda = f > 0$ . Оптимизируемая функция в разделе 4 принимает вид

$$\dot{\varphi} = -\chi g[(m+M)l - Ma]\sin\varphi. \quad (5.1.2)$$

Заметим, что найденное значение  $\lambda$  не нужно подставлять в формулу (5.1.2), так как согласно теореме 1 множитель  $\lambda$  считается независимым при поиске экстремумов функции  $\dot{\varphi}$  по управлению  $l$ . Значение имеет только знак  $\lambda$ . Из уравнения (5.1.1) видно, что положение системы, соответствующее  $\varphi = 0$ , оказывается нейтральным и из него начать раскачивание невозможно.

Применим утверждение I теоремы<sup>o</sup>1. Пусть  $\varphi_0 < 0$  есть левая граница отклонения по углу  $\varphi$ , а  $\varphi_1 > 0$  – соответственно правая граница, и пусть в начальный момент  $\varphi = \varphi_0$ . Из формулы (4.1) видим, что наилучший способ достичь максимума положительного полукосебания состоит в применении правила

$$l = \begin{cases} l_2, & \varphi_0 \leq \varphi < 0, \\ l_1, & 0 < \varphi \leq \varphi_1. \end{cases}$$

В момент, когда  $\varphi = 0$ , происходит скачок длины маятника с максимального ее значения на минимальное.

Применим утверждение II теоремы<sup>o</sup>1. Пусть теперь в начальный момент  $\varphi = \varphi_1 > 0$ . Тогда, напротив, требуется минимизировать значение  $\varphi_0$  отрицательного полуразмаха. Из (4.2) заключаем, что наилучший режим для достижения минимума отклонения отрицательного полуразмаха состоит в применении формулы

$$l = \begin{cases} l_1, & \varphi_0 \leq \varphi < 0, \\ l_2, & 0 < \varphi \leq \varphi_1. \end{cases}$$

Объединив полученные результаты, можем синтезировать оптимальный способ раскачивания маятника, а именно: когда достигнуто максимальное положительное отклонение маятника, необходимо придать маятнику максимальную длину и сохранять ее до достижения нижнего положения равновесия. Затем нужно придать маятнику минимальную длину и сохранять ее до достижения минимума отрицательного отклонения маятника. Когда минимум отрицательного отклонения маятника достигнут, необходимо скачком придать маятнику максимальную длину, и так далее. Найденное решение согласуется с ука-

занным в [1] режимом раскачивания для математического маятника переменной длины.

Применив теорему<sup>2</sup>, определим оптимальный закон успокоения колебаний маятника. Когда максимум положительного отклонения маятника достигнут, нужно придать маятнику минимальную длину и сохранять ее до момента прохождения нижнего положения равновесия. Затем нужно придать маятнику максимальную длину и сохранять ее до достижения минимума отрицательного отклонения маятника. Когда минимум отрицательного отклонения достигнут, необходимо скачком придать маятнику минимальную длину, и так далее.

## 5.2. Качели

Пусть физический маятник (качели) состоит из стержня длины  $l$ , точка  $O$  которого неподвижно закреплена (точка подвеса маятника), и поперечины длины  $2b$ , жестко присоединенной к концу стержня под прямым углом так, что точка прикрепления находится в середине поперечины. Масса качелей равна  $M$ , а их центр масс  $D$  расположен на расстоянии  $a$  от точки подвеса. На поперечине лежит брусок массы  $m$ . Брусок может лишь скользить без трения по поперечине, а положение на ней его центра масс задается координатой  $u$ , отсчитываемой от середины поперечины, так что  $u \in [-b, b]$  (Рис.2). Качели можно раскачивать, заставляя брусок  $m$  перемещаться нужным образом вдоль поперечины. Требуется найти закон оптимального управления колебаниями качелей.

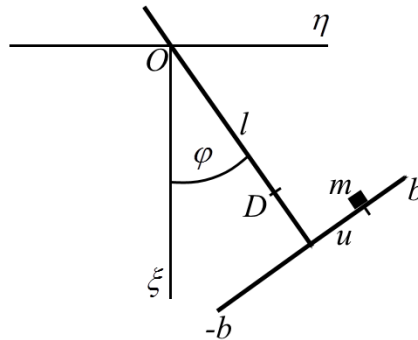


Рис.2. Качели

Для описания движения выберем начало  $O$  абсолютной системы координат в точке подвеса качелей, ось  $O\xi$  направим вертикально вниз, ось  $O\eta$  направим горизонтально в правую координатную полуплоскость. Положение качелей будем задавать углом  $\varphi$ , отсчитываемым от положительного направления оси  $O\xi$ . Координаты и скорости центра масс бруска примут вид

$$\begin{aligned} \xi &= (l - c) \cos \varphi - u \sin \varphi, & \dot{\xi} &= -\dot{\varphi}[(l - c) \sin \varphi + u \cos \varphi] - \dot{u} \sin \varphi, \\ \eta &= (l - c) \sin \varphi + u \cos \varphi, & \dot{\eta} &= \dot{\varphi}[(l - c) \cos \varphi - u \sin \varphi] + \dot{u} \cos \varphi, \end{aligned}$$

где  $c$  – расстояние от центра масс бруска до поперечины. Кинетический момент  $K$  системы относительно точки  $O$  выражается формулой

$$K = \dot{\varphi} \{ I + I_c + m[(l - c)^2 + u^2] \} + \dot{u} m(l - c),$$

где  $I$  – момент инерции качелей относительно точки  $O$ ,  $I_c$  – момент инерции бруска относительно его центра масс. Найдем координаты  $(\xi_c, \eta_c)$  центра масс системы:

$$\xi_c = \frac{1}{M+m} \{ [Ma + m(l-c)] \cos \varphi - mu \sin \varphi \},$$

$$\eta_c = \frac{1}{M+m} \{ [Ma + m(l-c)] \sin \varphi + mu \cos \varphi \}.$$

Напишем уравнение изменения кинетического момента

$$\frac{d}{dt}(f\dot{\varphi}) = -g \{ [Ma + m(l-c)] \sin \varphi + mu \cos \varphi \}, \quad (5.2.1)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести,

$$f = I + I_c + m[(l-c)^2 + u^2] + u'm(l-c),$$

а  $u'$  – производная от координаты  $u$  по углу  $\varphi$ .

Из формулы (1.6) найдем

$$\lambda = f = I + I_c + m[(l-c)^2 + u^2] + u'm(l-c). \quad (5.2.2)$$

Оптимизируемая функция раздела 4 принимает вид

$$\phi = -\chi g \{ [Ma + m(l-c)] \sin \varphi + mu \cos \varphi \}. \quad (5.2.3)$$

Выражение в фигурных скобках (5.2.3) линейно зависит от  $u$ . Следовательно, экстремумы функции  $\phi$  по  $u$  могут быть только на границах отрезка  $u \in [-b, b]$ , поскольку  $\lambda$  рассматривается как независимая переменная. На границах отрезка  $[-b, b]$  должно быть выполнено  $u' = 0$ . Следовательно, экстремумы в формулах (4.1) и (4.2) следует искать при условии  $\chi > 0$ . Заметим, что

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = -\chi g m \cos \varphi \begin{cases} < 0, & -\pi/2 < \varphi < \pi/2, \\ \geq 0, & -\pi \leq \varphi \leq -\pi/2 \vee \pi/2 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases} \quad (5.2.4)$$

Воспользуемся утверждением I теоремы<sup>o</sup>1. Пусть  $\varphi_0 < 0$  – левое предельное отклонение по углу  $\varphi$  и в начальный момент  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}_0 = 0$ . Тогда из формулы (4.1) следует

$$u = \begin{cases} b, & -\pi \leq \varphi \leq -\pi/2, \\ -b, & -\pi/2 < \varphi < \pi/2, \\ b, & \pi/2 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases} \quad (5.2.5)$$

Воспользуемся утверждением II теоремы<sup>o</sup>1. Пусть  $\varphi_1 > 0$  – правое предельное отклонение по углу  $\varphi$  и в начальный момент  $\varphi = \varphi_1$ ,  $\dot{\varphi}_1 = 0$ . Тогда из формулы (4.2) найдем

$$u = \begin{cases} -b, & -\pi \leq \varphi \leq -\pi/2, \\ b, & -\pi/2 < \varphi < \pi/2, \\ -b, & \pi/2 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases} \quad (5.2.6)$$

Объединив полученные результаты, получим синтез управления для оптимального раскачивания качелей, а именно: после достижения максимального положительного отклонения качелей следует применять формулы (5.2.6); после достижения минимального отрицательного отклонения следует применять формулы (5.2.5), и так далее.

Из теоремы 2 выводится синтез управления для оптимального успокоения колебаний качелей, а именно: после достижения максимального положительного отклонения качелей следует применять формулы (5.2.5); после достижения минимального отрицательного отклонения следует применять формулы (5.2.6), и так далее.

Механический смысл скачка управления при  $\varphi = \pm\pi/2$  состоит в том, что после достижения этих значений угла  $\varphi$  проекция поперечины на ось  $O\eta$  меняет знак.

### 5.3. Качели переменной длины

Пусть физический маятник (качели) представляет собой стержень с поперечиной. Стержень в любой момент времени движения проходит через неподвижную точку подвеса  $O$  и может вращаться вокруг этой точки. Поперечина длины  $2b$  жестко прикреплена к стержню под прямым углом. Она прикреплена к тому концу стержня, который расположен относительно точки  $O$  со стороны центра масс качелей на расстоянии  $a$  от их центра масс. Точка прикрепления совпадает с серединой поперечины. Масса качелей равна  $M$ . Расстояние от точки  $O$  до центра масс качелей равно  $l(t)$ . На поперечине находится материальная точка массы  $m$ . Её положение на поперечине задается координатой  $u$ , отсчитываемой от середины поперечины, так что  $u \in [-b, b]$  (Рис. 2). Маятник можно раскачивать либо заставляя точку  $m$  двигаться вдоль поперечины, либо изменяя длину  $l$  в пределах  $0 < l_m \leq l \leq l_M$ . Требуется найти оптимальное управление колебаниями маятника.

Как и в примере 5.2, выберем начало  $O$  неподвижной системы координат в точке подвеса маятника; ось  $O\xi$  направим вертикально вниз, ось  $O\eta$  – горизонтально в правую координатную полуплоскость. Положение стержня будем задавать углом  $\varphi$ , отсчитываемым от положительного направления оси  $O\xi$ . Координаты и скорости точки  $m$  примут вид

$$\begin{aligned}\xi &= (l + a)\cos\varphi - u\sin\varphi, & \dot{\xi} &= -\dot{\varphi}[(l + a)\sin\varphi + u\cos\varphi] + \dot{l}\cos\varphi - \dot{u}\sin\varphi, \\ \eta &= (l + a)\sin\varphi + u\cos\varphi, & \dot{\eta} &= \dot{\varphi}[(l + a)\cos\varphi - u\sin\varphi] + \dot{l}\sin\varphi + \dot{u}\cos\varphi.\end{aligned}$$

Кинетический момент  $K$  системы относительно точки  $O$  выражается формулой

$$K = \dot{\varphi}\{I + Ml^2 + m[(l + a)^2 + u^2]\} + \dot{u}m(l + a),$$

где  $I$  – момент инерции физического маятника относительно его центра масс. Найдём координаты центра масс системы:

$$\xi_c = \frac{1}{M+m} \{[(M+m)l + ma] \cos \varphi - mu \sin \varphi\},$$

$$\eta_c = \frac{1}{M+m} \{[(M+m)l + ma] \sin \varphi + mu \cos \varphi\}.$$

Напишем уравнение изменения кинетического момента:

$$\frac{d}{dt}(f\dot{\varphi}) = -g\{[(M+m)l + ma] \sin \varphi + mu \cos \varphi\}, \quad (5.3.1)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести, а  $u'$  – производная от координаты  $u$  по углу

$$\varphi, \quad f = I + Ml^2 + m[(l+a)^2 + u^2] + u'm(l+a).$$

Из формулы (1.6) найдем

$$\lambda = f = I + Ml^2 + m[(l+a)^2 + u^2] + u'm(l+a). \quad (5.3.2)$$

Оптимизируемая функция раздела 4 принимает вид

$$\phi = -\chi g \{[(M+m)l + ma] \sin \varphi + mu \cos \varphi\}. \quad (5.3.3)$$

Выражение в фигурных скобках (5.3.3) линейно зависит от  $u$  и  $l$ . Следовательно экстремумы функции  $\phi$  по переменным  $u$  и  $l$  могут быть только на границах области  $u \in [-b, b]$ ,  $l \in [l_m, l_M]$ , поскольку  $\lambda$  рассматривается как независимая переменная. На границах должно быть выполнено  $u' = 0$ . Из-за этого экстремумы в формулах (4.1) и (4.2) следует искать при условии  $\chi > 0$ . Заметим, что

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = -\chi g m \cos \varphi \begin{cases} < 0, & -\pi/2 < \varphi < \pi/2, \\ \geq 0, & -\pi \leq \varphi \leq -\pi/2 \vee \pi/2 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases} \quad (5.3.4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial l} = -\chi g (M+m) \sin \varphi \begin{cases} \geq 0, & -\pi < \varphi < 0, \\ < 0, & 0 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases}$$

Применим утверждение I теоремы<sup>o</sup>1. Пусть  $\varphi_0 < 0$  – предельное левое значение угла  $\varphi$ , и в этот момент времени имеем  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}_0 = 0$ . Тогда из формулы (4.1) следует, что

$$u = \begin{cases} b, & -\pi \leq \varphi \leq -\pi/2, \\ -b, & -\pi/2 < \varphi < \pi/2, \\ b, & \pi/2 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases} \quad l = \begin{cases} l_M, & -\pi \leq \varphi < 0, \\ l_m, & 0 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases} \quad (5.3.5)$$

Применим утверждение II теоремы<sup>o</sup>1. Пусть  $\varphi_1 > 0$  – предельное правое значение угла  $\varphi$  и в этот момент времени выполнено  $\varphi = \varphi_1$ ,  $\dot{\varphi}_1 = 0$ . Тогда из формулы (4.2) получим

$$u = \begin{cases} -b, & -\pi \leq \varphi \leq -\pi/2, \\ b, & -\pi/2 < \varphi < \pi/2, \\ -b, & \pi/2 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases} \quad l = \begin{cases} l_m, & -\pi \leq \varphi < 0, \\ l_M, & 0 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases} \quad (5.3.6)$$

Объединив полученные результаты, синтезируем оптимальный способ раскачивания колебаний маятника, а именно: после достижения максимального



положительного отклонения маятника следует применять правило (5.3.6). После достижения минимального отрицательного отклонения следует использовать формулы (5.3.5), и так далее.

Из теоремы 2 получим оптимальный закон успокоения колебаний маятника, а именно: После достижения максимального положительного отклонения маятника следует применять формулы (5.3.5), а после достижения минимального отрицательного отклонения маятника – формулы (5.3.6), и так далее до полной остановки.

Механический смысл скачка управления при  $\varphi = \pm\pi/2$  по-прежнему состоит в том, что после достижения этих значений угла  $\varphi$  проекция поперечины на ось  $O\eta$  меняет знак.

#### 5.4. Качели переменной длины с подвижной точкой подвеса

Пусть физический маятник (качели) представляет собой стержень с поперечиной. Стержень в любой момент времени движения проходит через подвижную точку подвеса  $A$  и может вращаться вокруг этой точки. Поперечина длины  $2b$  жестко прикреплена к стержню под прямым углом. Она прикреплена к тому концу стержня, который расположен относительно точки  $A$  со стороны центра масс качелей на расстоянии  $a$  от их центра масс. Точка прикрепления совпадает с серединой поперечины. Масса качелей равна  $M$ . Расстояние от точки  $A$  до центра масс  $D$  качелей равно  $l(t)$ . На поперечине находится материальная точка массы  $m$ . Её положение на поперечине задается координатой  $u$  отсчитываемой от середины поперечины, так что  $u \in [-b, b]$  (Рис. 3). Маятник можно раскачивать, либо заставляя точку  $m$  двигаться вдоль поперечины, либо изменяя длину  $l$  в пределах  $0 < l_m \leq l \leq l_M$ , либо сдвигая точку подвеса  $A$  горизонтально в заданных пределах. Требуется найти оптимальное управление колебаниями маятника.

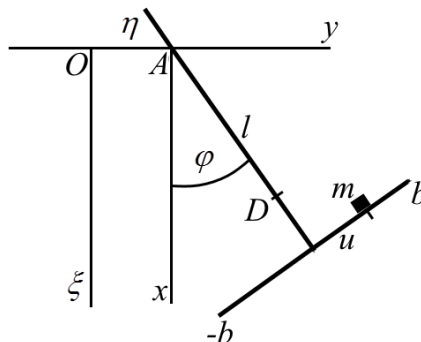


Рис. 3. Качели переменной длины с подвижной точкой подвеса

Выберем начало  $O$  неподвижной системы координат на горизонтальной прямой, вдоль которой может перемещаться точка  $A$ , ось  $O\xi$  направим вертикально вниз, ось  $O\eta$  – горизонтально в правую координатную полуплоскость. Смещение точки  $A$  будет происходить вдоль оси  $O\eta$ . Свяжем подвижную си-

стему координат  $Axyz$  с точкой  $A$  так, что ось  $Ax$  сонаправлена с осью  $O\xi$ , ось  $Ay$  сонаправлена с осью  $O\eta$ , а ось  $Az$  дополняет систему координат до правой тройки. Положение маятника определяется координатой  $\eta$  точки  $A$  и углом  $\varphi$ , отсчитываемым от положительного направления оси  $Ax$ . Предположим, что  $-w \leq \ddot{\eta} \leq w$ , где  $w$  есть постоянная величина. Относительные координаты и скорости материальной точки  $m$  в системе координат  $Axyz$  примут вид

$$\begin{aligned} x &= (l+a)\cos\varphi - u\sin\varphi, & \dot{x} &= -\dot{\varphi}[(l+a)\sin\varphi + u\cos\varphi] + \dot{l}\cos\varphi - \dot{u}\sin\varphi, \\ y &= (l+a)\sin\varphi + u\cos\varphi, & \dot{y} &= \dot{\varphi}[(l+a)\cos\varphi - u\sin\varphi] + \dot{l}\sin\varphi + \dot{u}\cos\varphi. \end{aligned}$$

Кинетический момент  $K$  механической системы относительно точки  $A$  в системе координат  $Axyz$  выражается формулой

$$K = \dot{\varphi}\{I + Ml^2 + m[(l+a)^2 + u^2]\} + \dot{u}m(l+a),$$

где  $I$  есть момент инерции физического маятника относительно его центра масс. Найдем относительные координаты  $(x_c, y_c)$  центра масс системы:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{M+m} \{[(M+m)l + ma]\cos\varphi - mu\sin\varphi\}, \\ y_c &= \frac{1}{M+m} \{[(M+m)l + ma]\sin\varphi + mu\cos\varphi\}. \end{aligned}$$

В системе координат  $Axyz$ , движущейся с ускорением  $\ddot{\eta}$  вдоль оси  $O\eta$ , уравнения изменения кинетического момента относительно точки  $A$  примут вид [5]

$$\frac{d}{dt}(f\dot{\varphi}) = -[(M+m)l + ma](\ddot{\eta}\cos\varphi + g\sin\varphi) + mu(\ddot{\eta}\sin\varphi - g\cos\varphi), \quad (5.4.1)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести, а  $f = I + Ml^2 + m[(l+a)^2 + u^2] + u'm(l+a)$ ,  $u'$  – производная от координаты  $u$  по углу  $\varphi$ .

Из формулы (1.6) найдем

$$\lambda = f = I + Ml^2 + m[(l+a)^2 + u^2] + u'm(l+a). \quad (5.4.2)$$

Оптимизируемая функция раздела 4 выражается равенством

$$\phi = \chi\{mu(\ddot{\eta}\sin\varphi - g\cos\varphi) - [(M+m)l + ma](\ddot{\eta}\cos\varphi + g\sin\varphi)\}. \quad (5.4.3)$$

Определим угол  $\alpha$  соотношениями

$$\sin\alpha = \frac{\ddot{\eta}}{\sqrt{g^2 + \ddot{\eta}^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{g}{\sqrt{g^2 + \ddot{\eta}^2}}, \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{\ddot{\eta}}{\sqrt{g^2 + \ddot{\eta}^2}}\right). \quad (5.4.4)$$

Тогда

$$\phi = -\chi\sqrt{\ddot{\eta}^2 + g^2} \{mug\cos(\varphi + \alpha) + [(M+m)l + ma]\sin(\varphi + \alpha)\}. \quad (5.4.5)$$

Для того чтобы раскачать маятник, воспользуемся формулами (4.1), (4.2). Для любого фиксированного значения  $\ddot{\eta}$ , в том числе и оптимального, выражение в фигурных скобках (5.4.5) линейно зависит от  $u$  и  $l$ . Поскольку  $\lambda$  считается независимой переменной, экстремумы функции  $\phi$  по переменным  $u$  и  $l$

могут быть только на границах области  $u \in [-b, b]$ ,  $l \in [l_m, l_M]$ . В связи с этим на границе должно быть  $u' = 0$ . Поэтому экстремумы в формулах (4.1) и (4.2) следует искать при условии  $\chi > 0$ . Отметим, что

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = -\chi g m \sqrt{g^2 + \dot{\eta}^2} \cos(\varphi + \alpha), \quad (5.4.6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial l} = -\chi g (M + m) \sqrt{g^2 + \dot{\eta}^2} \sin(\varphi + \alpha),$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \dot{\eta}} = -\chi (M + m) x_c. \quad (5.4.7)$$

Из формул (5.4.6) видно, что  $\partial \phi / \partial u$  и  $\partial \phi / \partial l$  не могут одновременно обратиться в нуль.

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \begin{cases} < 0, & -\pi/2 < \varphi + \alpha < \pi/2, \\ \geq 0, & -\pi \leq \varphi + \alpha \leq -\pi/2 \vee \pi/2 \leq \varphi + \alpha \leq \pi. \end{cases} \quad (5.4.8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial l} \begin{cases} \geq 0, & -\pi < \varphi + \alpha < 0, \\ < 0, & 0 \leq \varphi + \alpha \leq \pi. \end{cases} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\eta}} \begin{cases} \geq 0, & x_c \leq 0, \\ < 0, & x_c > 0. \end{cases}$$

Учтем, что  $\partial \phi / \partial \dot{\eta}$  обращается в нуль только в единственном положении, когда  $x_c = 0$ , и в этом положении функция  $\phi$  вообще не зависит от  $\dot{\eta}$ . Во всех других положениях маятника получим  $\dot{\eta} = \pm w$ , в зависимости от знака  $x_c$  и типа рассматриваемого полукосебания.

Применим утверждение I теоремы<sup>o</sup>1. Пусть  $\varphi_0 < 0$  задает левое предельное отклонение по углу  $\varphi$ , т.е. в момент его достижения  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}_0 = 0$ . Тогда из формул (5.4.6), (5.4.7) по аналогии с формулой (5.3.5) видим, что должно быть

$$\dot{\eta} = -w \text{sign } x_c, \quad u = \begin{cases} b, & -\pi \leq \varphi + \alpha \leq -\pi/2, \\ -b, & -\pi/2 < \varphi + \alpha < \pi/2, \\ b, & \pi/2 \leq \varphi + \alpha \leq \pi. \end{cases} \quad l = \begin{cases} l_M, & -\pi \leq \varphi + \alpha < 0, \\ l_m, & 0 \leq \varphi + \alpha \leq \pi. \end{cases} \quad (5.4.9)$$

Воспользуемся утверждением II теоремы<sup>o</sup>1. Пусть  $\varphi_1 > 0$  задает правое предельное отклонение маятника по углу  $\varphi$  и в этот момент времени  $\varphi = \varphi_1$ ,  $\dot{\varphi}_1 = 0$ . Из формул (5.4.6), (5.4.7) находим

$$\dot{\eta} = w \text{sign } x_c, \quad u = \begin{cases} -b, & -\pi \leq \varphi + \alpha \leq -\pi/2, \\ b, & -\pi/2 < \varphi + \alpha < \pi/2, \\ -b, & \pi/2 \leq \varphi + \alpha \leq \pi. \end{cases} \quad l = \begin{cases} l_m, & -\pi \leq \varphi + \alpha < 0, \\ l_M, & 0 \leq \varphi + \alpha \leq \pi. \end{cases} \quad (5.4.10)$$

Другими словами, пусть центр масс маятника находится в нижней координатной полуплоскости:  $x_c > 0$ , и пусть  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}_0 = 0$  соответствует левому предельному значению угла  $\varphi$ . Тогда должно быть  $\alpha < 0$ . Положению равновесия маятника в этом случае соответствует значение  $\varphi = -\alpha > 0$ . Возьмем вспомога-

тельную систему координат  $Ax_1y_1$ , повернутую относительно осей  $Axy$  в положительном направлении вокруг точки  $A$  на угол  $(-\alpha)$ . Движение маятника в системе координат  $Ax_1y_1$  будет подобно движению маятника в примере 3 для случая, соответствующего формулам (5.3.5). Если в этом движении достигается значение  $x_c = 0$ , то в этой точке скачком следует принять новое значение  $\dot{\eta} = -w \operatorname{sign} x_c$ , соответствующее  $x_c < 0$ . Тогда будет  $\alpha > 0$ , система координат  $Ax_1y_1$  повернется относительно системы  $Axy$  в отрицательном направлении вокруг точки  $A$  на угол  $(-\alpha < 0)$ . В соответствии с этим управления  $u$  и  $l$  следует пересчитать по формулам (5.4.9), что может изменить значение  $x_c$ . Если окажется, что новое значение  $x_c \leq 0$ , то следует применить новое пересчитанное управление. Если же при новом управлении окажется, что снова  $x_c > 0$ , тогда в некоторой зоне изменения угла  $\varphi$  управление не определено. Строго говоря, в той зоне, где управление не определено, возникает скользящий режим, который, например, можно преодолеть, придав в этой зоне управляющим компонентам их некоторые средние значения.

После достижения максимального положительного отклонения маятника следует применять формулы (5.4.10) с учетом замечания о возможности возникновения скользящего режима управления. После достижения минимального отрицательного отклонения маятника следует применять формулы (5.4.9), и так далее.

Оптимальное успокоение колебаний достигается, когда правило минимизации амплитуды (5.4.10) применяется после достижения минимального отрицательного отклонения маятника, а правило (5.4.9) применяется после достижения максимального положительного отклонения маятника.

### 5.5. Маятник переменной длины с маховиком

В качестве физического маятника используется стержень. Стержень во все время движения проходит через неподвижную точку  $O$  (точка подвеса). Маховик в виде однородного диска радиуса  $r$  прикреплен к концу стержня. Точка прикрепления диска совпадает с его центром. Масса стержня равна  $M$ , а его центр масс  $D$  лежит на стержне на расстоянии  $l$  от точки подвеса. Расстояние между точкой  $D$  и центром диска равно  $a$ . Масса диска равна  $m$  (Рис. 4). Обозначим  $\omega = \dot{\alpha}$  угловую скорость диска. Буквой  $\alpha$  обозначен угол поворота диска. Раскачивание маятника может обеспечиваться как за счет расстояния  $l$ :  $l_m \leq l \leq l_M$ , так и за счет подходящего изменения угловой скорости  $\omega$ . Значение  $\omega$  ограничено:  $|\omega| \leq w$ .

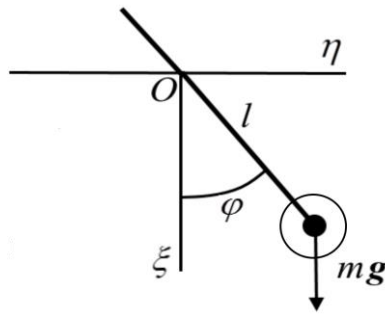


Рис. 4. Маятник переменной длины с маховиком

Кинетический момент  $K$  системы выражается формулой

$$K = \dot{\phi}S + I\omega, \quad S = I_r + I + m(l + a)^2,$$

где  $I_r$  – момент инерции стержня относительно точки  $O$ ,  $I$  – момент инерции маховика относительно его центра. Уравнение изменения кинетического момента относительно точки  $O$  примет вид [5]

$$\frac{d}{dt}(S\dot{\phi} + I\omega) = -g[(M + m)l + ma]\sin\varphi. \quad (5.5.1)$$

Угол  $\alpha$  – циклическая координата. Позиционное управление обеспечивается изменением длины  $l$ . По формуле (1.6) найдем:  $\lambda = S + I\alpha'$ .

Пусть  $\varphi_0 < 0$  есть левая граница отклонения, а  $\varphi_1 > \varphi_0$  – соответственно правая граница и пусть в начальный момент  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}_0 = 0$ . Тогда вторая формула (4.1) дает

$$\omega_M(\varphi_1) = \arg \min_{\omega} (I\omega).$$

Следовательно, лучший способ достичь максимальной величины положительного полуразмаха колебаний состоит в том, чтобы обеспечить минимально возможное значение  $\omega = -w$  угловой скорости маховика в конечной точке  $\varphi = \varphi_1$ . При этом неважно, какой закон  $\omega(t)$  будет принят в пределах заданных ограничений в ходе рассматриваемого полукосебания. Для определенности можно принять  $\omega(\varphi) = -w$  и потребовать, чтобы в течение всего полуразмаха было выполнено

$$Iw > S|\dot{\phi}|, \quad (5.5.2)$$

что предполагает достаточную мощность привода маховика.

Оптимизируемая по переменной  $l$  функция первой формулы (4.1) имеет вид

$$\phi = -\chi[(M + m)l + ma]g \sin\varphi. \quad (5.5.3)$$

В силу ограничения (5.5.2) и принятого закона управления маховиком в процессе положительного полуразмаха будет выполнено  $\chi > 0$ . Поэтому оптимальный закон управления маятником примет вид

$$\omega(\varphi) = -w, \quad l = \begin{cases} l_2, & \varphi_0 \leq \varphi < 0, \\ l_1, & 0 < \varphi \leq \varphi_1. \end{cases} \quad (5.5.4)$$

Аналогично, пусть  $\varphi_1 > 0$  – правая предельная граница изменения угла  $\varphi$ , а  $\varphi_0 < \varphi_1$  – соответственно левая граница, и пусть в начальный момент  $\varphi = \varphi_1$ ,  $\dot{\varphi}_1 = 0$ . Тогда вторая формула (4.2) принимает вид

$$\omega_m(\varphi_0) = \arg \max_{\omega} (I\omega).$$

Таким образом, наилучший способ обеспечить минимальное значение отрицательного полуколебания состоит в том, чтобы достичь максимума  $\omega = w$  угловой скорости маховика в конечной точке  $\varphi = \varphi_0$ .

Приняв для определенности  $\omega(\varphi) = w$  в течение всего левого полуразмаха и учитывая ограничение (5.5.2), получим оптимальный закон управления для левого полуразмаха колебаний маятника

$$\omega(\varphi) = w, \quad l = \begin{cases} l_1, & \varphi_0 \leq \varphi < 0, \\ l_2, & 0 < \varphi \leq \varphi_1. \end{cases} \quad (5.5.5)$$

Применяя поочередно закон (5.5.4) для правого полуразмаха маятника и закон (5.5.5) для левого полуразмаха, получим синтез оптимального управления раскачиванием маятника.

Оптимальное успокоение колебаний получается применением правила минимизации амплитуды для положительного полуколебания и применением правила максимизации амплитуды для отрицательного полуколебания.

### 5.6. Сегмент диска со стержнем

Предположим, что на горизонтальной опорной прямой в вертикальной плоскости лежит однородный сегмент кругового диска массы  $M$ . Сегмент ограничен дугой окружности радиуса  $R$  и хордой, отстоящей от центра окружности на расстояние  $h$ . Дуга сегмента касается опорной прямой в точке  $A$ . Сегмент может катиться без проскальзывания по опорной прямой, поворачиваясь вокруг центра ограничивающей окружности на угол  $\varphi$ , отсчитываемый от вертикального радиуса, направленного в точку  $A$  касания сегмента с опорной прямой. Если  $\varphi = 0$ , то сегмент лежит так, что его хорда параллельна опорной прямой (Рис. 4). К правому концу  $B$  хорды сегмента присоединен с помощью плоского шарнира стержень массы  $m_1$ , который может вращаться относительно сегмента на угол  $\psi$ . Угол  $\psi$  отсчитывается от внешнего перпендикуляра к хорде сегмента. Когда  $\psi = 0$ , стержень перпендикулярен к хорде и направлен от опорной прямой. На другом конце хорды в точке  $E$  находится материальная точка массы  $m_2$ , которая уравнивает стержень. Центр масс  $D$  стержня расположен на расстоянии  $\rho$  от точки  $B$ . Центр масс  $C$  сегмента лежит на радиусе, перпендикулярном к хорде на расстоянии  $r$  от центра окружности сегмента. Сегмент имеет момент инерции  $J$  относительно прямой, проходящей через центр масс сегмента перпендикулярно к плоскости сегмента. Момент инерции стержня относительно его центра масс обозначим буквой  $J_r$ .

Для того чтобы описать движение системы, используем неподвижную систему координат  $O\xi\zeta$ . Начало координат  $O$  поместим в точку, где сегмент касается опорной прямой при  $\varphi=0$ . Ось  $O\xi$  параллельна опорной прямой и направлена справа налево. Ось  $O\zeta$  направлена вертикально вверх.

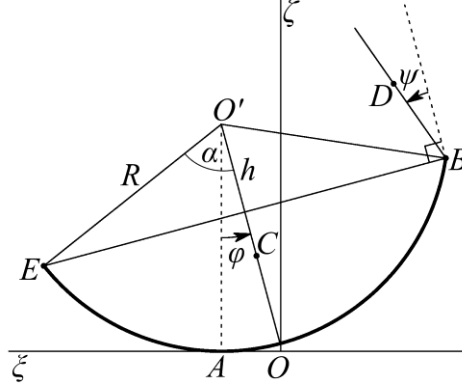


Рис. 4. Сегмент диска со стержнем

Кинетический момент  $K_A$  системы относительно точки  $A$  выражается формулой [12]

$$K_A = K_\varphi \dot{\varphi} + K_\psi \dot{\psi},$$

где

$$K_\varphi = J + J_r + M |\mathbf{AC}|^2 + m_1 |\mathbf{AD}|^2 + m_2 |\mathbf{AE}|^2, \quad (5.6.1)$$

$$K_\psi = J_r + m_1 \mathbf{BD} \cdot \mathbf{AD}.$$

Уравнение изменения кинетического момента относительно точки  $A$  принимает вид [12]

$$\frac{dK_A}{dt} - R\dot{\varphi}Q_\zeta = M_\sigma g(\xi_{cm} - R\varphi), \quad (5.6.2)$$

где  $Q_\zeta$  есть  $\zeta$ -координата количества движения системы,  $M_\sigma = M + m_1 + m_2$ ,  $\xi_{cm}$  есть  $\xi$ -координата центра масс системы:

$$\xi_{cm} = R\varphi + \frac{1}{M_\sigma} [m_1 \rho \sin(\varphi + \psi) - S_1 \sin \varphi - S_2 \cos \varphi],$$

$$Q_\zeta = -M_\sigma (\xi_{cm} - R\varphi) \dot{\varphi} - m_1 \dot{\psi} \sin(\varphi + \psi), \quad (5.6.3)$$

$$S_1 = Mr + (m_1 + m_2)h, \quad S_2 = (m_1 - m_2)\sqrt{R^2 - h^2}.$$

Требуется раскатать (или успокоить) систему, изменяя угол  $\psi$ :  $\psi_m \leq \psi \leq \psi_M$ . В соответствии со смыслом задачи должно быть  $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$ .

Из формул (1.6) найдем:

$$\lambda = f \exp\left(-\int_{x_0}^x \frac{2p}{f} dx\right), \quad f = K_\varphi + K_\psi \psi', \quad (5.6.4)$$

$$p = -RM_\sigma (\xi_{cm} - R\varphi) - m_1 \psi' \sin(\varphi + \psi).$$

Оптимизируемая функция раздела 4 выражается равенством

$$\phi = \chi g[m_1 \rho \sin(\varphi + \psi) - S_1 \sin \varphi - S_2 \cos \varphi].$$

Экстремумы этой функции по  $\psi$  могут быть как внутри, так и на границе отрезка  $\psi_m \leq \psi \leq \psi_M$ . Для экстремумов на границе будем иметь  $\psi' = 0$ , а для внутренних экстремумов получим  $\varphi + \psi = \pm \pi / 2$ . Поэтому для внутренних экстремумов будет выполнено  $\psi' = -1$  и

$$f = f_{-1} = M_\varphi - M_\psi = J + M |\mathbf{AC}|^2 + m_1 \mathbf{AD} \cdot \mathbf{AB} + m_2 |\mathbf{AE}|^2. \quad (5.6.5)$$

В зависимости от положения точки  $A$  на окружности диска (Рис. 4), выражение  $\mathbf{AD} \cdot \mathbf{AB}$  может быть, как положительным, так и отрицательным. Возьмем круг  $\Omega$  радиуса  $\rho$  с центром в точке  $B$ . Если точка  $A$  расположена вне круга  $\Omega$ , то выражение  $\mathbf{AD} \cdot \mathbf{AB} > 0$ . Если точка  $A$  попала внутрь круга  $\Omega$ , то выражение  $\mathbf{AD} \cdot \mathbf{AB}$  может стать отрицательным, но тогда будет  $|\mathbf{AD} \cdot \mathbf{AB}| \leq 2\rho^2$ . Мы можем подобрать массу  $m_2$  и параметр  $\rho$  так, чтобы было  $f_{-1} > 0$ . Например, можно взять  $m_2 = 2m_1$  и  $\rho < 2R \sin(\alpha / 2)$ . Тогда будет выполнено  $m_1 \mathbf{AD} \cdot \mathbf{AB} + m_2 |\mathbf{AE}|^2 > 0$  при любом положении точки  $A$ . Можно также сделать достаточно большой массу сегмента  $M$ .

Приняв сказанное во внимание, сначала рассмотрим регулярный случай, когда  $f_{-1} > 0$  при любом положении точки  $A$  на окружности диска. Воспользуемся утверждением I теоремы<sup>o</sup>1. Пусть  $\varphi_0 < 0$  соответствует левому предельному отклонению диска по углу  $\varphi$  и в этот момент  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}_0 = 0$ . Тогда из первой формулы (4.1) следует, что

$$\psi = \begin{cases} \psi_M, & \varphi + \psi_M < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} - \varphi, & \varphi + \psi_M \geq \frac{\pi}{2} \geq \varphi + \psi_m, \\ \psi_m, & \frac{\pi}{2} < \varphi + \psi_m. \end{cases} \quad (5.6.6)$$

Воспользуемся утверждением II теоремы<sup>o</sup>1. Пусть  $\varphi_1 > 0$  соответствует правому предельному отклонению маятника по углу  $\varphi$  и в этот момент выполнено  $\varphi = \varphi_1$ ,  $\dot{\varphi}_1 = 0$ . Тогда из первой формулы (4.2) следует, что

$$\psi = \begin{cases} \psi_m, & \varphi + \psi_m \geq -\frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} - \varphi, & \varphi + \psi_m < -\frac{\pi}{2} \leq \varphi + \psi_M, \\ \psi_M, & \varphi + \psi_m \geq -\frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (5.6.7)$$

Объединив полученные результаты, можно получить способ оптимального раскачивания системы, а именно: после достижения максимального положи-



тельного отклонения следует применять формулы (5.6.7). После достижения минимального отрицательного отклонения необходимо использовать формулы (5.6.6), и так далее.

Из теоремы 2 получаем правило оптимального успокоения колебаний системы, а именно: после достижения максимального положительного отклонения системы необходимо применять формулы (5.6.6), а после достижения минимального отрицательного отклонения системы надо применять формулы (5.6.7), и так далее до полного успокоения.

Теперь рассмотрим вариант, когда может реализоваться случай  $f_{-1} < 0$ . Этот вариант может случиться, лишь когда точка  $A \in \Omega$ . Пусть  $\varphi_0 < 0$  соответствует левому предельному отклонению системы по углу  $\varphi$  и в этот момент  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}_0 = 0$ . Тогда из первой формулы (4.1) следует, что

$$\psi = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \varphi, & \left( \varphi + \psi_m < -\frac{\pi}{2} < \varphi + \psi_M \right) \& (\chi < 0), \\ \psi_M, & \left( -\frac{\pi}{2} \leq \varphi + \psi_m \right) \& \left( \varphi + \psi_M \leq \frac{\pi}{2} \right), \\ \frac{\pi}{2} - \varphi, & \left( \varphi + \psi_m < \frac{\pi}{2} < \varphi + \psi_M \right) \& (\chi > 0), \\ \frac{\pi}{2} - \bar{\varphi}, & \left( \varphi + \psi_m < \frac{\pi}{2} < \varphi + \psi_M \right) \& (\chi < 0), \end{cases} \quad (5.6.8)$$

где  $\bar{\varphi} = \sum_{i=1}^{\mu} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) \sigma(\varphi - \varphi_i)$  – кусочно-постоянная аппроксимация координаты

$\varphi$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\sigma(\varphi - \varphi_i)$  – функция Хевисайда:

$$\sigma(\varphi - \varphi_i) = \begin{cases} 0, & \varphi < \varphi_i, \\ 1, & \varphi \geq \varphi_i, \end{cases}$$

а  $\{\varphi_i, i = \overline{1, \mu}\}$  – монотонно возрастающая последовательность, обеспечивающая достаточную точность аппроксимации.

Первые три формулы (5.6.8) очевидны. Четвертая формула (5.6.8) означает, что значение  $\varphi + \psi = \pi/2$  не дает максимума функции  $\chi F$ , потому что  $\chi < 0$ . Однако примененная кусочно-постоянная функция  $\bar{\varphi}$  позволяет аппроксимировать функцию  $\psi = \pi/2 - \varphi$ , сохранив положительный знак функции  $\chi$ .

Пусть  $f_{-1} < 0$  может случиться и  $\varphi_1 > 0$  есть максимальное предельное отклонение системы по углу  $\varphi$ , так что в этот момент оказывается  $\varphi = \varphi_1$ ,  $\dot{\varphi}_1 = 0$ . Тогда из первой формулы (4.2) следует, что

$$\psi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \varphi, & \left( \varphi + \psi_m < \frac{\pi}{2} < \varphi + \psi_M \right) \& (\chi < 0), \\ \psi_m, & \left( -\frac{\pi}{2} \leq \varphi + \psi_m \right) \& \left( \varphi + \psi_M \leq \frac{\pi}{2} \right), \\ -\frac{\pi}{2} - \varphi, & \left( \varphi + \psi_m < -\frac{\pi}{2} < \varphi + \psi_M \right) \& (\chi > 0), \\ -\frac{\pi}{2} - \bar{\varphi}, & \left( \varphi + \psi_m < -\frac{\pi}{2} < \varphi + \psi_M \right) \& (\chi < 0). \end{cases} \quad (5.6.9)$$

Объединив полученные результаты, можно синтезировать способ оптимального раскачивания системы, а именно: после достижения максимального отклонения маятника применяются формулы (5.6.9). После достижения минимального отклонения маятника используются формулы (5.6.8), и так далее.

Из теоремы 2 следует оптимальное правило успокоения колебаний системы: после достижения максимального отклонения системы необходимо применять формулы (5.6.8), а после достижения минимального отклонения системы необходимо использовать формулы (5.6.9), и так далее до полного её успокоения.

### 5.7. Двухзвенный маятник

Двухзвенный маятник (Рис. 6) состоит из двух стержней. Первый стержень прикреплен к неподвижной точке  $O$ . К этому стержню на расстоянии  $l$  со стороны его центра масс шарнирно прикреплен второй стержень. Обозначим  $M$  массу первого стержня,  $I$  – его момент инерции относительно точки  $O$ ,  $\varphi$  – угол отклонения первого стержня от нижнего направления вертикали. Центр масс первого стержня расположен на расстоянии  $a$  от точки  $O$ . Пусть  $m$  – масса второго стержня,  $I_2$  – момент инерции второго стержня относительно его центра масс,  $b$  – расстояние от точки прикрепления второго стержня до его центра масс,  $\psi$  – угол между вторым стержнем и продолжением первого стержня за точку соединения стержней,  $g$  – ускорение силы тяжести. Угол  $\psi$  примем в качестве управления с целью раскачивания системы, ограничив его допустимые значения:  $\psi_m \leq \psi \leq \psi_M$ .

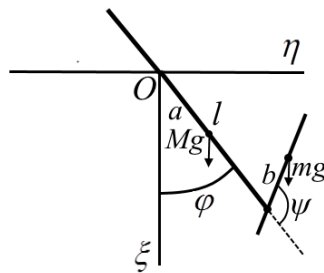


Рис. 6. Двухзвенный маятник

Представленная механическая система может служить упрощенной математической моделью как для человека, раскачивающегося на качелях, так и для гимнаста, раскачивающегося на перекладине.

Для описания движения выберем начало  $O$  абсолютной системы координат в точке подвеса первого стержня, ось  $O\xi$  направим вертикально вниз, ось  $O\eta$  направим горизонтально в правую координатную полуплоскость. Координаты центра масс первого стержня примут вид

$$\xi_1 = a \cos \varphi, \quad \eta_1 = a \sin \varphi.$$

Координаты и скорости центра масс второго стержня запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= l \cos \varphi + b \cos(\varphi + \psi), & \dot{\xi}_2 &= -[l\dot{\varphi} \sin \varphi + b(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \sin(\varphi + \psi)], \\ \eta_2 &= l \sin \varphi + b \sin(\varphi + \psi), & \dot{\eta}_2 &= l\dot{\varphi} \cos \varphi + b(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \cos(\varphi + \psi). \end{aligned}$$

Найдем координаты центра масс системы:

$$\begin{aligned} \xi_c &= \frac{aM + lm}{M + m} \cos \varphi + \frac{bm}{M + m} \cos(\varphi + \psi), \\ \eta_c &= \frac{aM + lm}{M + m} \sin \varphi + \frac{bm}{M + m} \sin(\varphi + \psi). \end{aligned}$$

Кинетический момент системы относительно точки  $O$  имеет вид

$$K = [I + ml(l + b \cos \psi)]\dot{\varphi} + [I_c + mb(l \cos \psi + b)](\dot{\varphi} + \dot{\psi}).$$

Уравнение изменения кинетического момента запишем следующим образом:

$$\frac{d(f\dot{\varphi})}{dt} = -g[(aM + lm) \sin \varphi + bms \sin(\varphi + \psi)], \quad (5.7.1)$$

где

$$f = [I + ml(l + b \cos \psi)] + [I_c + mb(l \cos \psi + b)](1 + \psi'),$$

а  $\psi'$  – производная от угла  $\psi$  по углу  $\varphi$ . Из формулы (1.6) найдем

$$\lambda = f = [I + ml(l + b \cos \psi)] + [I_c + mb(l \cos \psi + b)](1 + \psi'). \quad (5.7.2)$$

Оптимизируемая функция раздела 4 принимает вид

$$\phi = -\chi g[(aM + lm) \sin \varphi + bms \sin(\varphi + \psi)].$$

Предположим, что  $0 < b < l$ . Применим утверждение I теоремы<sup>o</sup>1. Пусть  $\varphi_0 < 0$  есть левая граница отклонения по углу  $\varphi$ , а  $\varphi_1 > 0$  – соответственно правая граница, и пусть в начальный момент  $\varphi = \varphi_0$ . Из формулы (4.1) видим, что наилучший способ достичь максимума положительного полукосебания состоит в применении правила

$$\psi = \begin{cases} \psi_M, & \text{если } \varphi + \psi_M < -\frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} - \varphi, & \text{если } \varphi + \psi_m \leq -\frac{\pi}{2} \leq \varphi + \psi_M, \\ \psi_m, & \text{если } \varphi + \psi_m > -\frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (5.7.3)$$

Из (5.7.2) видно, что при  $0 < b < l$  в любом из перечисленных в формуле (5.7.3) случаев знак  $\lambda$  остается положительным.

Применим утверждение II теоремы<sup>o</sup>1. Пусть теперь в начальный момент  $\varphi = \varphi_1 > 0$ . Тогда, напротив, требуется минимизировать значение  $\varphi_0$  отрицательного полуразмаха. Из (4.2) заключаем, что наилучший режим для достижения минимума отклонения отрицательного полуразмаха состоит в применении формулы.

$$\psi = \begin{cases} \psi_m, & \text{если } \varphi + \psi_m > \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} - \varphi, & \text{если } \varphi + \psi_m \leq \frac{\pi}{2} \leq \varphi + \psi_M, \\ \psi_M, & \text{если } \varphi + \psi_M < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (5.7.4)$$

В итоге получается синтез управления для оптимального раскачивания двухзвенного маятника, а именно: после достижения максимального положительного отклонения качелей следует применять формулы (5.7.4); после достижения минимального отрицательного отклонения следует применять формулы (5.7.3), и так далее.

Из теоремы 2 выводится синтез управления для оптимального успокоения колебаний двухзвенного маятника, а именно: после достижения максимального положительного отклонения маятника следует применять формулы (5.7.3); после достижения минимального отрицательного отклонения следует применять формулы (5.7.4), и так далее.

Из уравнения (5.7.1) видим, что при  $b = 0$  угол  $\psi$  становится циклической координатой. Тогда, чтобы обеспечить раскачивание, достаточно воспользоваться решением примера 5.5. В том случае, когда  $b > l$ , параметр  $\chi$  для значений  $|\psi| > \arccos(-l/b)$  в режиме  $\varphi + \psi = \pm\pi/2$  может менять знак. Для того чтобы избежать этой неприятности, достаточно принять ограничения  $\psi_m > -\arccos(-l/b)$ ,  $\psi_M < \arccos(-l/b)$ .

Во всех рассмотренных выше примерах применялась теорема об изменении кинетического момента системы вместо уравнений второго рода. Применение этой теоремы к угловым координатам приводит к уравнениям, эквивалентным уравнениям Лагранжа, но более простым из-за меньшего числа взаимно уничтожающихся слагаемых.

## Заключение

Полученные в препринте необходимые условия оптимальности управления амплитудой колебаний справедливы для уравнений типа (1.2), где  $t$  – независимая переменная, и важна структура  $T$ , или для уравнений типа (1.3), где координата, подлежащая оптимизации, выбрана в качестве независимой пере-

менной, а структура функций  $f$  и  $p$  не столь критична для получения условий оптимальности. Вместе с тем уравнения (1.2) справедливы для широкого класса механических колебательных систем, что указывает на практическую ценность предложенных методов.

Применение предложенных алгоритмов управления, получаемых из необходимых условий оптимальности (4.1) – (4.4), предполагает учет информации о моментах времени достижения экстремальных значений оптимизируемой координаты и информации о направлении соответствующего полукоса.

Условия оптимальности (4.1) – (4.4) не содержат сопряженных переменных в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина. Это облегчает применение указанных условий для рассмотренного класса задач, что и подтверждается исследованными в препринте примерами. Дополнительным преимуществом предложенного метода служит то, что закон оптимального управления получается непосредственно в виде зависимости от оптимизируемой координаты. Используя предложенные условия оптимальности, можно получить аналитические решения для некоторых новых нетривиальных модельных задач.

Приведенные примеры показывают, что необходимые условия оптимальности управления амплитудой колебаний, предложенные в препринте, упрощают решение соответствующих задач в многомерном пространстве управляющих функций по сравнению с известными методами. Они эффективны как для задач раскачивания, так и для задач успокоения колебаний.

На основе следствий 3.1.2 – 3.1.5, 3.2.1 – 3.2.4 секции 3 сформулировано правило вычисления функционального градиента, которое можно применять для постепенного увеличения или уменьшения колебаний без применения оптимальных законов управления. Однако достижение желаемого результата может занять значительное время.

## Библиографический список

1. Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 232 с. – ISBN 978-5-9221-1460-8.
2. Ананьевский И.М., Анохин Н.В., Овсеевич А.И. Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // Доклады академии наук. 2010, т. 434, №3. с. 319-323.
3. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976. – 393 с.
4. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 384 с.
5. Голубев Ю.Ф., Хайруллин Р.З. К построению оптимальных режимов раскачивания двузвенного физического маятника // ПММ. ISSN 0032-8235 – 2000. – Т.64. – вып.2. – С. 217-226.

6. Голубев Ю.Ф., Корянов В.В., Мелкумова Е.В. Приведение инсекто-морфного робота в рабочее состояние из аварийного положения «вверх ногами» // Известия РАН. Теория и системы управления. ISSN: 0002-3388 — 2019. — № 6. — С. 163–176. DOI: 10.1134/S0002338819060052

Golubev Yu.F., Koryanov V.V., Melkumova E.V. Bringing an Insectomorphic Robot to a Normal Position from an Abnormal Upside Down Position // Journal of Computer and Systems Sciences International, ISSN PRINT 1064-2307, 2019. Vol. 58, No. 6, pp. 987-999. © Pleiades Publishing, Ltd., 2019. DOI: 10.1134/S1064230719060054.

7. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Управление продольным движением одноколесного аппарата по неровной поверхности // Изв. РАН. ТИСУ. 2005. № 4. С. 165 – 173.

Martynenko Yu.G., Formal'skii A.M. A control of the longitudinal motion of a single-wheel robot on an uneven surface Journal of Computer and Systems Sciences International. 2005. Т. 44. № 4. С. 662-670.

8. Лавровский Э.К., Формальский А.М. О качении колеса посредством управления его дисбалансом // ПММ. Т. 70. вып. 3. 2006. с. 371-383. Lavrovskii E.K., Formal'skii A.M. Control of the rolling of a wheel by changing its imbalance // Elsevier Ltd. Journal of Applied Mathematics and Mechanics V. 70 (2006). Pp. 334–345. doi:10.1016/j.jappmathmech.2006.07.006

9. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Синтез оптимального управления раскачиванием и торможением двузвенного маятника // Прикладная математика и механика. — 2001. — Т. 65, № 2. — С. 225–234

10. Голубев Ю.Ф. Автономная оптимизация колебаний систем с дефицитом управления // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 28. <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-28>

11. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики: Учебник. 3-е издание, переработанное и дополненное. – М.: Издательство Московского университета, 2019. – 728 с. ISBN 978-5-19-011288-7

12. Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. – М.: Гос. Изд-во технико-теор. лит-ры. (Успехи физических наук. Т. 63, вып. 1а), 1957. – С. 5-32.