



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 38 за 2021 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Ю.О. Бобренева, [П.И. Рагимли](#),  
[В.О. Подрыга](#), С.С. Бажитова,  
А.Э. Бакир, А.К. Абу-Наб

Об одном методе численного  
моделирования двухфазной  
жидкой системы в коллекторе  
трещиновато-порового типа

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](#)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Об одном методе численного моделирования двухфазной жидкой системы в коллекторе трещиновато-порового типа / Ю.О. Бобренева [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 38. 20 с.  
<https://doi.org/10.20948/prepr-2021-38>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-38>

Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук

Ю.О. Бобренёва, П.И. Рагимли, В.О. Подрыга,  
С.С. Бажитова, А.Э. Бакир, А.К. Абу-Наб

**Об одном методе численного  
моделирования двухфазной жидкой  
системы в коллекторе трещиновато-  
порового типа**

Москва — 2021

*Бобренёва Ю.О., Рагимли П.И., Подрыга В.О., Бажитова С.С., Бакир А.Э., Абу-Наб А.К.*

**Об одном методе численного моделирования двухфазной жидкой системы в коллекторе трещиновато-порового типа**

В данной работе авторы предлагают алгоритм решения задачи процесса массопереноса двухфазной жидкости в трещиновато-поровом коллекторе в одномерной постановке. Наличие естественных трещин в таких коллекторах препятствует различным типам исследований при разработке месторождений. Трещиновато-пористые коллекторы характеризуются интенсивным обменным потоком жидкости между трещинами и пористыми блоками. Каждая рассматриваемая система имеет свой индивидуальный набор фильтрационно-емкостных параметров, что усложняет рассматриваемую задачу. Для изучения массопереноса двухфазной жидкости в среде с двойной пористостью предложена четырехблочная математическая модель с расщеплением по физическим процессам. Модель описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных. Метод расщепления по физическим процессам образует два функциональных блока: по водонасыщенности и пьезопроводности. Для численного решения данной системы реализована абсолютно устойчивая неявная конечно-разностная схема в пространственно-одномерном случае. На основе предложенной разностной схемы рассчитываются давления и насыщенности в матрице и системе трещин.

**Ключевые слова:** трещиновато-пористый коллектор, двухфазная фильтрация, двойная пористость, расщепление, разностная схема.

*Bobrenova Yu.O., Rahimly P.I., Podryga V.O., Bajitova S.S., Bakir A.E., Abu-Nab A.K.*

**On one method of numerical modeling of a two-phase fluid system in a fractured-porous reservoir**

In this work, the authors propose an algorithm for solving the problem of the process of mass transfer of a two-phase fluid in a fractured-porous reservoir in a one-dimensional formulation. The presence of natural fractures in such reservoirs impedes various types of exploration during field development. Fractured porous reservoirs are characterized by intense exchange fluid flow between fractures and porous blocks. Each system under consideration has its own individual set of filtration-capacity parameters that complicates the problem. To study the mass transfer of a two-phase liquid in a medium with double porosity, a four-block mathematical model with splitting by physical processes is proposed. The model is described by a system of partial differential equations. The method of splitting by physical processes forms two functional blocks: by water saturation and piezoconductivity. For the numerical solution of this system, an absolutely stable implicit finite-difference scheme is made in the spatially one-dimensional case. On the basis of the proposed difference scheme, pressures and saturations in the matrix and fracture system are calculated.

**Keywords:** fractured porous reservoir, two-phase filtration, double porosity, splitting, difference scheme.

# 1. Введение

Нефтегазовая промышленность на сегодняшний день является важнейшей составляющей мирового хозяйства и оказывает значительное влияние на развитие других отраслей. Россия занимает передовые позиции в нефтяной промышленности. Перспективы развития нефтяной отрасли нуждаются в решении различных вопросов, среди которых одними из основных являются освоение и эффективная разработка месторождений. Теория разработки месторождений основывается на фундаментальных исследованиях в области разных дисциплин: физики, химии, математики, информационных технологий, геологии и т.д. Современная научная технология разработки месторождений базируется на всестороннем изучении свойств продуктивных пластов и содержащихся в них жидкостей и газов [1], в том числе изучении сложных процессов, происходящих в пластах при их бурении и эксплуатации.

Изучение состояния и свойств продуктивного пласта, как правило, осуществляется путем промыслово-геофизических, лабораторных и гидродинамических методов исследования. Промыслово-геофизические исследования позволяют определять средние свойства продуктивного пласта лишь на небольшом расстоянии от стенки скважины (до  $\sim 0.3$  м), лабораторные исследования основаны на изучении керна и позволяют исследовать образцы породы с размерами до  $\sim 0.04$  м. Гидродинамические методы исследования скважин определяют средние значения параметров продуктивного пласта на значительном расстоянии от скважины (до  $\sim 500$  м).

Гидродинамические исследования скважин очень важны, поскольку являются одним из более или менее надежных источников информации о фильтрационно-емкостных свойствах пласта.

Основными задачами всех геологов и разработчиков являются выделение пластов и залежей, подсчет запасов, проектирование системы разработки месторождения, комплексная оценка существующей системы разработки, обоснование планируемых к бурению скважин, моделирование различных геолого-технологических мероприятий. Безусловно, точность и качество выполнения перечисленных выше целей напрямую зависит от степени изученности разрабатываемого объекта. На данном этапе очень важно понимать фильтрационные особенности коллектора, характер движения жидкостей в пласте, пространственное распределение зон высоких и низких значений проницаемости. По-прежнему наиболее значимым и важным вопросом остается увеличение полноты выработки запасов углеводородов из залежей [2]. Однако при выделении коллекторов, оценках характера их насыщения и параметров, необходимых для подсчета запасов, постоянно возникают трудности [3, 4]. Особенно актуальным данный вопрос остается для карбонатных коллекторов, в которых наличие трещиноватости приурочено к естественному геологическому процессу формирования залежи [5-7].

Основные характеристики трещинного коллектора – густота и раскрытость трещин, коэффициент трещинной пористости. Актуальность исследования процессов фильтрации в трещиноватых средах обусловлена тем, что более 60% разведанных мировых запасов углеводородов содержатся в месторождениях, которые характеризуются той или иной степенью трещиноватости [8]. На них приходится доля 48% запасов нефти и 30% газа. Основной проблемой разработки таких коллекторов является сложное строение, в котором наряду с межзерновыми порами почти всегда присутствуют трещины и каверны [9], составляющие порой значительную долю эффективного порового пространства и способствующие формированию глубокой зоны проникновения фильтрата бурового раствора.

Роль карбонатных коллекторов в развитии нефтяной промышленности в России только возрастает. Продуктивные пласты с коллектором данного типа мало изучены по сравнению с обычным песчаником в терригенных пластах [3, 5]. Разработка нефтяных залежей с карбонатными коллекторами характеризуется рядом специфических особенностей, которые связаны с течением флюида в среде с двойной пористостью. Развитие методов математического моделирования течения флюида в данной среде является актуальной задачей.

Карбонатные коллекторы в силу своих физико-химических свойств, подверженности растрескиванию, выщелачиванию, перекристаллизации формируют сложную микроструктуру пустотного пространства. Основные характеристики таких пород – это трещиноватость и кавернозность [10]. Главной причиной появления трещин в теле горной породы являются деформационные явления при изменении напряжений, возникающих в результате воздействия механических нагрузок различной природы, а также тектонических подвижек и процессов осадконакопления. Трещины представляют собой нарушения сплошности горной породы. Геометрически они характеризуются существенным различием размеров в плоскости разрыва (ширина и длина трещин) и в перпендикулярном направлении (раскрытость или высота трещин). Трещины, наблюдаемые в карбонатных породах, могут быть полностью либо частично заполнены различными минеральными веществами. Наряду с ними могут различаться трещины, остающиеся полыми или открытыми. Также трещины могут быть заполнены нефтью или битумом. Раскрытость минеральных трещин варьируется в очень широких пределах: от долей миллиметра до 1 см и более [11].

Появление в породе системы взаимосвязанных трещин может резко изменить фильтрационные свойства продуктивных отложений. Необходимо обратить внимание, что определение трещинной проницаемости по образцам керна, разбитым трещинами, в лабораторных условиях невозможно. Сложное строение, значительная петрофизическая неоднородность и изменчивость свойств карбонатных коллекторов от месторождения к месторождению делают малоэффективными общепринятые способы исследования [10]. При

фильтрации флюида в керне измеряется проницаемость одной или нескольких трещин ограниченной протяженности, что условно характеризует трещинную проницаемость породы. Таким образом, одним из эффективных инструментов являются гидродинамические исследования скважин.

Гидродинамические методы определения параметров для трещиноватых коллекторов из-за сильной неоднородности, как правило, существенно отличаются от обычных стандартных методов. Трещиновато-пористые коллектора характеризуются интенсивным обменным потоком жидкости между трещинами и пористыми блоками, что должно вносить определенные коррективы в известные традиционные методы определения фильтрационных параметров.

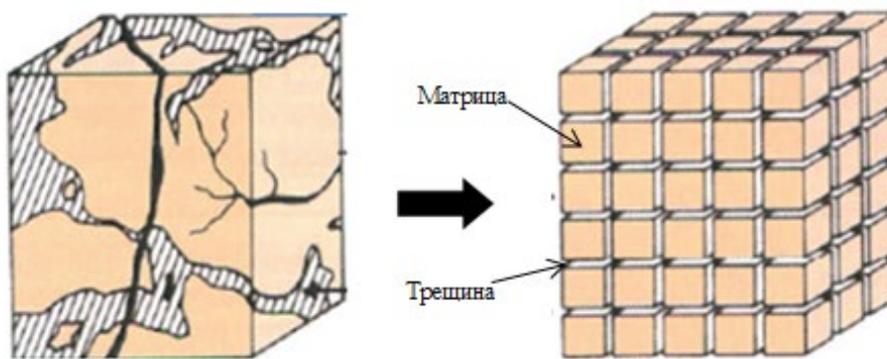
В настоящее время большое внимание уделяется выбору технологий совершенствования разработки трещиновато-пористых коллекторов на основе математического моделирования. Особенно актуально создание моделей трещиновато-пористых коллекторов.

Одними из первых, кто начал изучение движения жидкости трещиноватой среде, были Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина еще в конце 50-х годов [11]. В современной литературе эта модель двойной пористости (в порах и в трещинах) известна как модель Баренблатта. Модель характеризуется наличием обмена давлениями между фазами. Обе среды – система трещин и блоки матрицы – он рассматривал как две сплошные среды, вложенные одна в другую, причем параметры движения жидкости и среды определяются в каждой математической точке. Уравнения движения и сохранения массы записываются независимо для каждой среды. Переток жидкости из одной среды в другую учитывается введением функции источника – стока в уравнениях сохранения массы. Баренблатт предполагал, что пласт однороден, изотропен и течение в обеих средах находится в пределах справедливости закона Дарси. Помимо перечисленных авторов, также расчетом характеристик течения в особых условиях резкой неоднородности трещиноватого коллектора занимались и другие зарубежные авторы: Оде, Поллард, Уоррен–Рут, Каземи и де Сваан [12-16].

Как правило, у таких коллекторов свойства продуктивного пласта могут значительно меняться от скважины к скважине. Для выбора эффективной технологии извлечения нефти из данных пластов необходимо иметь достаточно достоверную информацию о характере системы. Поэтому для выполнения этого условия необходимо адекватное описание породы-коллектора, которая строится на основе известных данных.

В процессе фильтрации в коллекторах трещиновато-порового типа необходимо учитывать обмен флюидов между низкопроницаемыми порами и сетью естественных трещин [17]. Для исследования системы такого характера, как правило, используется модель Уоррена–Рута [15]. В предлагаемой модели поровый коллектор (в дальнейшем – матрица) схематизируется одинаковыми прямоугольными параллелепипедами как показано на Рис. 1, которые обладают

высокой пористостью и низкой проницаемостью. Низкопроницаемая матрица разделена сетью естественных трещин, которые обладают высокой проницаемостью и низкой пористостью. Считается, что движение жидкости к скважине осуществляется по системе трещин, а матрица является емкостью, которая непрерывно питает всю сеть естественных трещин. Перераспределение флюида между матрицей и трещинами зависит от формы и размеров блоков матрицы: чем блоки меньше, тем легче осуществляется переток флюида между ними [15, 18]. В модели двойной пористости матрица и трещина имеют индивидуальные свойства и характеризуются собственными значениями проницаемости, сжимаемости и пористости.



**Рис. 1. Модель двойной пористости**

При эксплуатации скважины либо проведении исследования также замечено, что насыщенности и давления наиболее быстро меняются вблизи скважин [1, 14]. В связи с этим возникает необходимость проследить детально за движением воды или газа к добывающим скважинам. По сравнению с однофазным течением жидкости моделирование двухфазного потока требует более эффективных методов, поэтому рассмотрим математическую модель двухфазного потока в коллекторе трещиновато-порового типа. Отметим, что давление в пласте выше давления насыщения, что означает отсутствие свободной газовой фазы. Поэтому в качестве присутствующих фаз будут рассматриваться только нефть и вода.

Таким образом, физическая модель рассматриваемой задачи будет следующей. Поровый пласт (матрица) обладает более мелкими порами (пустотами) и отличается значительной вмещающей емкостной способностью (высокая пористость), но низкими фильтрационными свойствами (низкой проницаемостью). Трещинная система характеризуется низкими емкостными (низкая пористость), но высокими фильтрационными свойствами (высокая проницаемость). В процессе работы системы движение многофазной жидкости происходит только по каналам трещин, а матрица является емкостью, которая подпитывает систему трещин. Такая структура коллектора также влияет на характер кривых относительных проницаемостей. Зависимости значений

относительных проницаемостей для каждой из фаз от насыщенности будут отличаться от зависимостей однопорового коллектора [15, 16, 19].

Учитывая две поровые системы с различными значениями геометрических размеров и фильтрационно-емкостных свойств процесс фильтрации флюида в карбонатах будет значительно отличаться от терригенных коллекторов, соответственно, математические модели также будут отличаться и усложняться.

Задача освоения карбонатного месторождения характеризуется совокупностью различных сложных процессов, происходящих в пласте, и носит общий характер [9]. В таком случае компьютерное моделирование как отдельных явлений, так и технологии разработки в целом, становится важной и неотъемлемой частью при освоении карбонатных месторождений [20-21]. Для достижения данной цели необходимо в дополнение к имеющимся гидродинамическим моделям разрабатывать новые математические модели и эффективные алгоритмы, которые будут легко адаптируемыми под современные высокопроизводительные вычислительные системы. Математическая модель многофазной фильтрации, реализуемая в рамках данной работы, является развитием данного класса моделей.

## 2. Постановка задачи

Распределение тепломассопереноса в системе «сеть трещин–матрица» описывается дифференциальными уравнениями второго порядка. В основе математического описания процессов фильтрации лежат уравнения механики сплошных сред, включающие в себя закон сохранения массы, импульса и энергии, дополненные фазовыми равновесными соотношениями [6, 20, 22-27].

Рассматриваются двухфазные уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-поровых коллекторах, записанные в дивергентной форме. В качестве функций перетока будут использованы классические функции, предложенные в работах Уоррена–Рута [15]. В изотермическом приближении будем иметь:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\varphi^\alpha \rho_o S_o^\alpha)}{\partial t} + \nabla(\rho_o U_o^\alpha) + q_o^\alpha &= \rho_o q_j, \\
 q_o^m = -q_o^f &= -\rho_o^m \sigma \lambda_o^m (P^f - P^m), \\
 \frac{\partial(\varphi^\alpha \rho_w S_w^\alpha)}{\partial t} + \nabla(\rho_w U_w^\alpha) - q_w^\alpha &= \rho_w q_j, \\
 q_w^m = -q_w^f &= -\rho_w^m \sigma \lambda_w^m (P^f - P^m), \\
 \lambda_o^m &= \frac{k^m \cdot k_{ro}(S_o^m)}{\mu_o}, \\
 \lambda_w^m &= \frac{k^m \cdot k_{rw}(S_w^m)}{\mu_w}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $\alpha = f, m$ , где  $f$  – система трещин,  $m$  – система матриц,  $i = o, w$ , где  $o$  – нефть,  $w$  – вода,  $P^f$  – пластовое давление в сети трещин (МПа),  $P^m$  – пластовое давление в матрице (МПа),  $\varphi^f$  – пористость в системе трещин,  $\varphi^m$  – пористость в матрице,  $\rho_o$  – плотность нефти (г/м<sup>3</sup>),  $\rho_w$  – плотность воды (г/м<sup>3</sup>),  $S_i^f$  – насыщенность нефти/воды в системе трещин,  $S_i^m$  – насыщенность нефти/воды в матрице,  $U_i^f$  – скорость течения нефти/воды,  $q_j$  – дебит жидкости (м<sup>3</sup>/сут),  $q_i^\alpha$  – функция перетока между матрицей и трещинами,  $\sigma$  – коэффициент трещиноватости породы (1/м<sup>2</sup>),  $k^\alpha$  – абсолютная проницаемость (м<sup>2</sup>),  $k_{rw}$ ,  $k_{ro}$  – относительные фазовые проницаемости (м<sup>2</sup>),  $\mu_o$  – вязкость нефти (Па·с),  $\mu_w$  – вязкость воды (Па·с).

Для скорости фильтрации используется обобщенный закон Дарси. Согласно этому закону скорости фильтрации воды и нефти равны:

$$U_o^\alpha = -\frac{k^\alpha k_{ro}(S_o^\alpha)}{\mu_o} \text{grad} P_o^\alpha, \quad (2)$$

$$U_w^\alpha = -\frac{k^\alpha k_{rw}(S_w^\alpha)}{\mu_w} \text{grad} P_w^\alpha.$$

Гравитационными и капиллярными силами пренебрегаем. В случае пренебрежения капиллярными силами давление для различных фаз будет одинаковым.

$$P_o^\alpha = P_w^\alpha = P^\alpha, \alpha = f, m.$$

Общая неизотермическая система (трещины + матрица) при отсутствии течения в матрице будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varphi^f \rho_o S_o^f)}{\partial t} + \nabla(\rho_o U_o^f) + q_o^f &= \rho_o q_j, \\ \frac{\partial(\varphi^f \rho_w S_w^f)}{\partial t} + \nabla(\rho_w U_w^f) + q_w^f &= \rho_w q_j, \\ \frac{\partial(\varphi^m \rho_o S_o^m)}{\partial t} + q_o^m &= \rho_o q_j, \\ \frac{\partial(\varphi^m \rho_w S_w^m)}{\partial t} + q_w^m &= \rho_w q_j, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(S_w^f \varphi^f \rho_w \varepsilon_w)}{\partial t} + \frac{\partial(S_o^f \varphi^f \rho_o \varepsilon_o)}{\partial t} + \frac{\partial(S_w^m \varphi^m \rho_w \varepsilon_w)}{\partial t} + \frac{\partial(S_o^m \varphi^m \rho_o \varepsilon_o)}{\partial t} \\ + \frac{\partial}{\partial t} [(1 - \varphi^f - \varphi^m) \rho_s \varepsilon_s] + \nabla(\rho_w U_w^f \varepsilon_w + \rho_o U_o^f \varepsilon_o + P^f (U_w^f + U_o^f)) \\ + \nabla W = q_\varepsilon. \end{aligned}$$

Здесь  $i = o, w, s$ , где  $o$  – нефть,  $w$  – вода,  $s$  – скелет,  $\varepsilon_i$  – внутренняя энергия,  $\rho_s$  – плотность скелета,  $q_\varepsilon$  – источник энергии.  $W$  – тепловой поток.

Получившаяся система (3) без начальных и граничных условий является сложной системой уравнений математической физики смешанного типа [7, 26-28]. Данная система решается методом конечных разностей, но система влечет за собой ряд трудностей, которые связаны с большим количеством переменных и отсутствием важных свойств матрицы, таких как самосопряженность и симметричность, характерных только для пьезопроводных процессов. Для решения данной проблемы предлагается провести полное расщепление по физическим процессам [29-33].

Для математического исследования и численного решения уравнения двухфазной фильтрации в коллекторе трещиновато-порового типа проводится расщепление на четыре уравнения [32], которые включают в себя два уравнения (для матрицы и системы трещин) относительно насыщенности одной из фаз и два уравнения (для матрицы и системы трещин) пьезопроводности. Этот шаг необходим в связи с тем, что блок относительно насыщенностей флюидов обладает в основном гиперболическими свойствами, а блок пьезопроводности – параболическими, поэтому расщепление даст возможность реализовать эффективный численный алгоритм для решения системы уравнений для давления и позволит производить расчеты с крупным шагом по времени с меньшим количеством неизвестных параметров. При решении задачи в многомерном случае этот момент будет очень важным.

Полученные уравнения будут решаться методом скалярной прогонки [13], при этом на первом этапе водонасыщенность и нефтенасыщенность фиксируются. Далее, рассчитав давления для обеих систем, переходим ко второму блоку уравнений для расчета насыщенностей. Для этого возвращаемся к разностным уравнениям и подставляем туда уже полученные давления. Для решения второго функционального блока будем использовать также метод скалярной прогонки.

В системе уравнений вынеся насыщенности из-под знака производной по времени, получим:

$$\left( \frac{S_o^f}{\rho_o^f} \frac{\partial(\varphi^f \rho_o^f)}{\partial t} + \frac{S_w^f}{\rho_w^f} \frac{\partial(\varphi^f \rho_w^f)}{\partial t} \right) + \frac{\text{div}(\rho_o^f U_o^f)}{\rho_o^f} + \frac{\text{div}(\rho_w^f U_w^f)}{\rho_w^f} + \sigma \cdot (P^f - P^m) \cdot \left( \frac{\rho_o^m}{\rho_o^f} \lambda_o^m + \frac{\rho_w^m}{\rho_w^f} \lambda_w^m \right) = 0, \quad (4)$$

$$\left( \frac{S_o^m}{\rho_o^m} \frac{\partial(\varphi^m \rho_o^m)}{\partial t} + \frac{S_w^m}{\rho_w^m} \frac{\partial(\varphi^m \rho_w^m)}{\partial t} \right) - \sigma \cdot (P^f - P^m) \cdot (\lambda_o^m + \lambda_w^m) = 0, \quad (5)$$

Запишем его в краткой форме с обозначениями:

$$\left( \frac{S_o^f}{\rho_o^f} \frac{\partial(\varphi^f \rho_o^f)}{\partial t} + \frac{S_w^f}{\rho_w^f} \frac{\partial(\varphi^f \rho_w^f)}{\partial t} \right) + DIG^f = 0, \quad (6)$$

$$DIG^f = \frac{div(\rho_o^f U_o^f)}{\rho_o^f} + \frac{div(\rho_w^f U_w^f)}{\rho_w^f} + \sigma \cdot (P^f - P^m) \cdot \left( \frac{\rho_o^m}{\rho_o^f} \lambda_o^m + \frac{\rho_w^m}{\rho_w^f} \lambda_w^m \right), \quad (7)$$

$$\left( \frac{S_o^m}{\rho_o^m} \frac{\partial(\varphi^m \rho_o^m)}{\partial t} + \frac{S_w^m}{\rho_w^m} \frac{\partial(\varphi^m \rho_w^m)}{\partial t} \right) + DIG^m = 0, \quad (8)$$

$$DIG^m = -\sigma \cdot (P^f - P^m) \cdot (\lambda_o^m + \lambda_w^m). \quad (9)$$

Получаем блок для пьезопроводности расщепленным по физическим процессам.

### 3. Алгоритм

Рассматривается одномерная постановка задачи. Для численного решения задачи применяется метод конечных разностей [28]. Для этого строится разностная сетка по времени и пространству. При этом шаги по времени:  $\tau = \tau k$ , где  $k$  – номер шага по времени; сетка по пространству:  $\omega_h = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N; x_0 = 0, x_N = L\}$ , где  $x_i$  – координаты узлов, в них будем определять сеточные величины (давление и насыщенности). Под  $i + \frac{1}{2}$ -ой ячейкой одномерной сетки  $\Omega_i$  будем понимать отрезок  $(x_i, x_{i+1})$ .  $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$ ,  $\bar{h}_i = \frac{1}{2}(h_{i+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}})$ . Здесь  $h_{i\pm\frac{1}{2}}$  – размеры соседних к узлу  $i$  ячеек сетки.

Дифференциальные уравнения, граничные и начальные условия аппроксимируются их сеточными аналогами. Далее система уравнений линейризуется по методу хорд. Получается следующая форма уравнений. Для системы трещин уравнения (6) и (7) будут записаны так:

$$\frac{(S_w^f)^{(\delta 1f) \approx}}{(\rho_w^f)^{(\delta 1f) \approx}} (\bar{\varphi}^f \rho_w^f)'_{Pf} \delta P^f + \frac{(1 - S_w^f)^{(\delta 1f) \approx}}{(\rho_o^f)^{(\delta 1f) \approx}} (\bar{\varphi}^f \rho_o^f)'_{Pf} \delta P^f + \tau \delta(DIG^{f \sim}) = 0 - F^{fs}. \quad (10)$$

Здесь  $F^{fs}$  – разностная аппроксимация левой части уравнения (7) (умноженная на шаг по времени  $\tau$ ); в сеточных аппроксимациях  $a^{\sim}$  значения на неявном временном слое  $\hat{t}$  берутся на  $s + 1$  уже рассчитанной итерации;  $\delta 1$  – вес по времени,  $a'$  – производная давления,  $\delta P$  – приращение давления. Выражение  $a^{\sim}$  обозначает аппроксимацию сеточной функции  $a$  между слоями по времени  $t$  и  $\hat{t} = t + \tau$ ;  $\tau$  – временной шаг.  $\bar{\varphi}_i = \bar{h} \varphi_i$  – пористость в узле ( $\omega = i$ ), домноженная на пространственный шаг  $\bar{h}_i$ .

По матрице, уравнения (8) и (9):

$$\begin{aligned} & \frac{(S_w^m)^{(\delta 1m) \approx}}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m) \approx}} (\bar{\varphi}^m \rho_w^m)'_{Pm} \delta P^m + \frac{(1 - S_w^m)^{(\delta 1m) \approx}}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m) \approx}} (\bar{\varphi}^m \rho_o^m)'_{Pm} \delta P^m \\ & + \tau \delta(DIG^{m\sim}) = 0 - F^{ms}, \\ & \tau \delta(DIG^{m\sim}) = \frac{-\tau}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m) \approx}} (\rho_w^m \bar{\sigma} \lambda_w^m)^s (\delta P^f - \delta P^m) \\ & - \frac{\tau}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m) \approx}} (\rho_o^m \bar{\sigma} \lambda_o^m)^s (\delta P^f - \delta P^m). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $F^{ms}$  – разностная аппроксимация левой части уравнения (7) (умноженная на шаг по времени  $\tau$ ).  $\bar{\sigma} = \hbar \sigma$ .

Далее преобразуем (11) таким образом, чтобы можно было вывести зависимость давления в матрице от давления в трещинах:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{(S_w^m)^{(\delta 1m) \approx}}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m) \approx}} (\bar{\varphi}^m \rho_w^m)'_{Pm} + \frac{(1 - S_w^m)^{(\delta 1m) \approx}}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m) \approx}} (\bar{\varphi}^m \rho_o^m)'_{Pm} \right. \\ & \left. + \frac{\tau}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m) \approx}} (\rho_w^m \bar{\sigma} \lambda_w^m)^s + \frac{\tau}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m) \approx}} (\rho_o^m \bar{\sigma} \lambda_o^m)^s \right\} \delta P^m \\ & - \left\{ \frac{\tau}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m) \approx}} (\rho_w^m \bar{\sigma} \lambda_w^m)^s + \frac{\tau}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m) \approx}} (\rho_o^m \bar{\sigma} \lambda_o^m)^s \right\} \delta P^f \\ & = 0 - F^{ms}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m) \approx}} \left\{ (S_w^m)^{(\delta 1m) \approx} (\bar{\varphi}^m \rho_w^m)'_{Pm} + \tau (\rho_w^m \bar{\sigma} \lambda_w^m)^s \right\} \right. \\ & \left. + \frac{1}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m) \approx}} \left\{ (S_o^m)^{(\delta 1m) \approx} (\bar{\varphi}^m \rho_o^m)'_{Pm} + \tau (\rho_o^m \bar{\sigma} \lambda_o^m)^s \right\} \right] \delta P^m \\ & - \tau \left\{ \frac{(\rho_w^m \bar{\sigma} \lambda_w^m)^s}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m) \approx}} + \frac{(\rho_o^m \bar{\sigma} \lambda_o^m)^s}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m) \approx}} \right\} \delta P^f = 0 - F^{ms}. \end{aligned} \quad (13)$$

В результате получаем:

$$\delta P^m = \frac{\tau \left\{ \frac{(\rho_w^m \bar{\sigma} \lambda_w^m)^s}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m) \approx}} + \frac{(\rho_o^m \bar{\sigma} \lambda_o^m)^s}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m) \approx}} \right\} \delta P^f - F^{ms}}{\left[ \frac{(S_w^m)^{(\delta 1m) \approx} (\bar{\varphi}^m \rho_w^m)'_{Pm} + \tau (\rho_w^m \bar{\sigma} \lambda_w^m)^s}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m) \approx}} + \frac{(S_o^m)^{(\delta 1m) \approx} (\bar{\varphi}^m \rho_o^m)'_{Pm} + \tau (\rho_o^m \bar{\sigma} \lambda_o^m)^s}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m) \approx}} \right]}$$

Введем замены для упрощения:

$$\pi_m^s = \frac{\tau \left\{ \frac{(\rho_w^m \bar{\sigma} \lambda_w^m)^s}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m) \approx}} + \frac{(\rho_o^m \bar{\sigma} \lambda_o^m)^s}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m) \approx}} \right\}}{\left[ \frac{(S_w^m)^{(\delta 1m) \approx} (\bar{\varphi}^m \rho_w^m)'_{Pm} + \tau (\rho_w^m \bar{\sigma} \lambda_w^m)^s}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m) \approx}} + \frac{(S_o^m)^{(\delta 1m) \approx} (\bar{\varphi}^m \rho_o^m)'_{Pm} + \tau (\rho_o^m \bar{\sigma} \lambda_o^m)^s}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m) \approx}} \right]}$$

$$\Phi^{ms} = \frac{F^{ms}}{\left[ \frac{(S_w^m)^{(\delta 1m) \approx} (\bar{\varphi}^m \rho_w^m)_{Pm}^s + \tau (\rho_w^m \bar{\sigma} \lambda_w^m)^s}{(\rho_w^m)^{(\delta 1m) \approx}} + \frac{(S_o^m)^{(\delta 1m) \approx} (\bar{\varphi}^m \rho_o^m)_{Pm}^s + \tau (\rho_o^m \bar{\sigma} \lambda_o^m)^s}{(\rho_o^m)^{(\delta 1m) \approx}} \right]}.$$

Тогда связь между приращениями давлений в матрице и порах упростится:

$$\delta P^m = \pi_m^s \delta P^f - \Phi^{ms}. \quad (14)$$

Таким образом, задача сводится к трехточечному уравнению:

$$\begin{aligned} -A_{pk} \delta P_{i-1}^f + C_{pk} \delta P_i^f - B_{pk} \delta P_{i+1}^f &= \Phi_{Pk}^{ms}, \\ \Phi_{Pk} &= -F^{fs} - \tau \left\{ \frac{(\rho_w^m \bar{\sigma} \lambda_w^m)^s}{(\rho_w^f)^{(\delta 1f) \approx}} + \frac{(\rho_o^m \bar{\sigma} \lambda_o^m)^s}{(\rho_o^f)^{(\delta 1f) \approx}} \right\} \Phi, \end{aligned} \quad (15)$$

где коэффициенты выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{pk} &= \frac{\tau}{\left[ (\rho_w^f)^{(\delta 1f)} \right]_k} \left\{ \frac{1}{h_{k-\frac{1}{2}}} * \left( \frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f} \right)_{k-\frac{1}{2}}^s k_{rw(k-\frac{1}{2})}^{ups} \right\} \\ &\quad + \frac{\tau}{\left[ (\rho_o^f)^{(\delta 1f)} \right]_k} \left\{ \frac{1}{h_{k-\frac{1}{2}}} * \left( \frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f} \right)_{k-\frac{1}{2}}^s k_{ro(k-\frac{1}{2})}^{ups} \right\}, \\ B_{pk} &= \frac{\tau}{\left[ (\rho_w^f)^{(\delta 1f)} \right]_k} \left\{ \frac{1}{h_{k+\frac{1}{2}}} * \left( \frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f} \right)_{k+\frac{1}{2}}^s k_{rw(k+\frac{1}{2})}^{ups} \right\} \\ &\quad + \frac{\tau}{\left[ (\rho_o^f)^{(\delta 1f)} \right]_k} \left\{ \frac{1}{h_{k+\frac{1}{2}}} * \left( \frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f} \right)_{k+\frac{1}{2}}^s k_{ro(k+\frac{1}{2})}^{ups} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{pk} &= \frac{(S_w^f)^{(\delta 1f) \approx}}{(\rho_w^f)^{(\delta 1f) \approx}} (\bar{\varphi}^f \rho_w^f)_{Pf}^s + \frac{(1 - S_w^f)^{(\delta 1f) \approx}}{(\rho_o^f)^{(\delta 1f) \approx}} (\bar{\varphi}^f \rho_o^f)_{Pf}^s \\
&+ \frac{\tau}{\left[ (\rho_w^f)^{(\delta 1f) \approx} \right]_k} \left\{ \frac{1}{h_{k+\frac{1}{2}}} * \left( \frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f} \right)_{k+\frac{1}{2}}^s k_{rw(k+\frac{1}{2})}^{ups} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{h_{k-\frac{1}{2}}} * \left( \frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f} \right)_{k-\frac{1}{2}}^s k_{rw(k-\frac{1}{2})}^{ups} \right\} \\
&+ \frac{\tau}{\left[ (\rho_o^f)^{(\delta 1f) \approx} \right]_k} \left\{ \frac{1}{h_{k+\frac{1}{2}}} \left( \frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f} \right)_{k+\frac{1}{2}}^s k_{ro(k+\frac{1}{2})}^{ups} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{h_{k-\frac{1}{2}}} \left( \frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f} \right)_{k-\frac{1}{2}}^s k_{ro(k-\frac{1}{2})}^{ups} \right\} + \left\{ \frac{\tau}{(\rho_w^f)^{(\delta 1f) \approx}} (\rho_w^m \bar{\sigma} \lambda_w^m)^s (1 - \pi_m^s) \right\}_k \\
&+ \left\{ \frac{\tau}{(\rho_o^f)^{(\delta 1f) \approx}} (\rho_o^m \bar{\sigma} \lambda_o^m)^s (1 - \pi_m^s) \right\}_k.
\end{aligned}$$

Здесь  $k_{rw\Omega}^{up\Lambda}$  – относительная фазовая проницаемость воды в ячейке  $\Omega$ , взятая из узла  $\omega(\Omega)$  этой ячейки, расположенного вверх по потоку ( $up$ ) с неявного временного слоя ( $\Lambda$ ).

Полученное уравнение представляется системой линейных алгебраических уравнений (15), которая решается с помощью скалярной прогонки на каждом временном слое. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность по давлению:

$$\begin{aligned}
|\delta P^m| &< \varepsilon_1 |P^{ms}| + \varepsilon_2, \\
|\delta P^f| &< \varepsilon_1 |P^{fs}| + \varepsilon_2,
\end{aligned} \tag{16}$$

где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – малые величины.

$$\begin{aligned}
\delta P^m &= P^{ms+1} - P^{ms}, \\
\delta P^f &= P^{fs+1} - P^{fs}.
\end{aligned} \tag{17}$$

В результате решения системы получается массив давлений в трещинах и матрице, который позволяет перейти к решению второго блока задачи.

Далее рассматривается подробно вывод уравнений относительно насыщенности. На фоне найденных давлений расписываются уравнения для нахождения насыщенностей. Учитывая, что  $S_w^f + S_o^f = 1$ , то насыщенность по нефти можно выразить через насыщенность по воде и решать только одну пару уравнений.

$$\begin{aligned} \frac{L^f}{\tau} &= [\overline{\varphi^f \rho_w^f S_w^f}]_t + DIN(\rho_w^f U_w^f)^\sim + q_w^{f\sim} = 0, \\ \frac{L^m}{\tau} &= [\overline{\varphi^m \rho_w^m S_w^m}]_t + q_w^{m\sim} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $L^f$ ,  $L^m$  – разностные аппроксимации левых частей уравнений (умноженные на шаг по времени); разностная операция  $DIN: (\Omega) \rightarrow (\omega)$  обозначает аппроксимацию дивергенции  $dv \cdot div$ , действующую на функции в ячейках  $(\Omega)$ .

Проведем линеаризацию уравнений. Домножая на  $\tau$ , получаем:

$$\begin{aligned} (\overline{\varphi^f \rho_w^f})^{s+1} \delta S_w^f + \tau \delta [DIN(\rho_w^f U_w^f)^\sim] + \tau \delta q_w^{f\sim} &= 0 - L^{f\approx}, \\ (\overline{\varphi^m \rho_w^m})^{s+1} \delta S_w^m + \tau \delta q_w^{m\sim} &= 0 - L^{m\approx}, \end{aligned} \quad (19)$$

где:

$$(\rho_w^f U_w^f)^\sim_\Omega = - \left( \frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f} \right)_\Omega^\wedge k_{rw\Omega}^{up\wedge} GRAN P_f^\wedge. \quad (20)$$

Здесь  $\delta$  – приращение,  $GRAN: (\omega) \rightarrow (\Omega)$  обозначает аппроксимацию градиента  $grad$  в ячейках  $(\Omega)$ , действующую на сеточные функции в узлах  $(\omega)$ . В сеточных аппроксимациях  $a^\sim$  значения на неявном слое по времени  $\hat{t}$  берутся на  $s + 1$  уже вычисленной итерации, если они связаны с давлением ( $P^{s+1}$ ), и на  $s$ -й итерации, если они связаны с водонасыщенностью ( $S_w^s$ ).

В узле  $k$  обозначим:

$$\begin{aligned} C_{swk}^m \delta S_{wk}^m &= 0 - L_k^{m\approx}, \\ C_{swk}^m &= (\overline{\varphi^m \rho_w^m})_k^{s+1} - \tau \left[ \rho_w^m \bar{\sigma} (P^f - P^m) \frac{k^m}{\mu_w^m} \right]_k^{s+1} [(k_{rw})'_{S_w^m}]_k^s, \\ (S_{wk}^m)^{s+1} &= (S_{wk}^m)^s + \delta S_{wk}^m. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь  $\bar{\sigma} = \hbar \sigma$ .

Также обозначим для удобства:

$$E_{Swk} = \tau \left[ \rho_w^m \bar{\sigma} (P^f - P^m) \frac{k^m}{\mu_w^m} \right]_k^{s+1} [(k_{rw})'_{Swk}]_k^s. \quad (22)$$

Здесь  $\bar{\sigma}_k = \hbar \sigma_k$ . Далее определим насыщенности для трещин. С учетом вышеизложенного получаем систему уравнений:

$$-A_{sk}^f \delta S_{wk-1}^f + C_{sk}^f \delta S_{wk}^f - B_{sk}^f \delta S_{k+1}^f + E_{Swk} \delta S_{wk}^m = 0 - L^f \approx, \quad (23)$$

где коэффициенты выглядят следующим образом:

$$C_{swk}^f = (\overline{\varphi^f} \rho_w^f)_k^{s+1} - \tau \left[ \left\{ \left[ \rho_w^f \frac{k^f}{\mu_w^f} \frac{1}{h} \right]_{k+\frac{1}{2}}^{s+1} (P_{k+1}^f - P_k^f)^{s+1} \right\} [(k_{rw})'_{Swk}]_{upink}^s - \left\{ \left[ \rho_w^f \frac{k^f}{\mu_w^f} \frac{1}{h} \right]_{k-\frac{1}{2}}^{s+1} (P_k^f - P_{k-1}^f)^{s+1} \right\} [(k_{rw})'_{Swk}]_{upink}^s \right] > 0. \quad (24)$$

Здесь выражение

$$\left\{ \left[ \rho_w^f \frac{k^f}{\mu_w^f} \frac{1}{h} \right]_{k+\frac{1}{2}}^{s+1} (P_{k+1}^f - P_k^f)^{s+1} \right\} [(k_{rw})'_{Swk}]_{upink}^s \quad (25)$$

рассматривается для  $P_k^f > P_{k+1}^f$ , а выражение

$$\left\{ \left[ \rho_w^f \frac{k^f}{\mu_w^f} \frac{1}{h} \right]_{k-\frac{1}{2}}^{s+1} (P_k^f - P_{k-1}^f)^{s+1} \right\} [(k_{rw})'_{Swk}]_{upink}^s \quad (26)$$

рассматривается для  $P_k^f > P_{k-1}^f$ .

Далее аналогично

$$B_{swk}^f = \tau \left\{ \left[ \rho_w^f \frac{k^f}{\mu_w^f} \frac{1}{h} \right]_{k+\frac{1}{2}}^{s+1} (P_{k+1}^f - P_k^f)^{s+1} \right\} [(k_{rw})'_{Swk+1}]_{upink}^s, \quad (27)$$

если  $P_k^f < P_{k+1}^f$ ;  $B_{swk}^f \geq 0$ ,

$$A_{swk}^f = -\tau \left\{ \left[ \rho_w^f \frac{k^f}{\mu_w^f} \frac{1}{h} \right]_{k-\frac{1}{2}}^{s+1} (P_k^f - P_{k-1}^f)^{s+1} \right\} [(k_{rw})'_{Swk-1}]_{upink}^s, \quad (28)$$

если  $P_k^f < P_{k-1}^f$ ;  $A_{swk}^f \geq 0$ .

Очевидно, при достаточно малых шагах по времени

$$C_{swk}^f - A_{swk}^f - B_{swk}^f > 0. \quad (29)$$

Полученное уравнение решается с помощью скалярной прогонки на каждом временном слое. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность по насыщенности:

$$\begin{aligned} |\delta S_w^f| &< \varepsilon_1 |S_w^{fs}| + \varepsilon_2, \\ |\delta S_w^m| &< \varepsilon_1 |S_w^{ms}| + \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – малые величины, (31) – приращение насыщенности на итерации

$$\begin{aligned} \delta S_w^f &= S_w^{fs+1} - S_w^{fs}, \\ \delta S_w^m &= S_w^{ms+1} - S_w^{ms}. \end{aligned} \quad (31)$$

При решении данной системы используются полученные значения по давлению из системы уравнений (6)-(9).

## Заключение

Таким образом, в работе представлен метод решения задачи массопереноса двухфазной жидкости в коллекторе трещиновато-порового типа. Разработана четырехблочная математическая модель, описывающая двухкомпонентное течение в среде с двойной пористостью. Проведено расщепление по физическим процессам, которое включает в себя блок с системой гиперболических уравнений относительно водонасыщенности и уравнения пьезопроводности для определения давления в системе трещин и пористых блоках (матрице). Представлены разностная схема для блока по пьезопроводности и подробное описание разностной схемы для блока по насыщенности. На основе предложенных разностных схем рассчитываются давления и насыщенности в системе трещин и матрице.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 21-71-20047.

## Литература

- [1] Котяхов Ф.И. Физика нефтяных и газовых коллекторов. М.: Недра, 1977.
- [2] Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963.
- [3] Денк С.О. Проблемы трещиноватых продуктивных объектов. Пермь: Электрон. изд. системы, 2004.
- [4] Nelson R.A. Geologic analysis of naturally fractured reservoirs 2nd ed. Woburn: Butterworth-Heinemann, 2001.
- [5] Черницкий А.В. Геологическое моделирование нефтяных залежей массивного типа в карбонатных трещиноватых коллекторах. М: ОАО РМНТК Нефтеотдача, 2002.
- [6] Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993.
- [7] Желтов Ю.П. Механика нефтегазоносного пласта. М.: Недра, 1975.
- [8] Bobreneva Yu.O., Mazitov A.A., Gubaydullin I.M. Mathematical Modeling of Fluid Flow Processes in the Fracture-Porous Reservoir // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. V. 1096. Paper 012187. doi:10.1088/1742-6596/1096/1/012187.
- [9] Narr W, Schechter D.S., Thompson L.B. Naturally Fractured Reservoir Characterization. Richardson, Texas: Society of Petroleum Engineers, 2006.
- [10] Van Golf-Racht T.D. Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 1982.
- [11] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984.
- [12] Teklu T.W., Akinboyewa J., Alharthy N., Torchuk M.A., Aisumaiti A.M., Dhahi A., Kazemi H., Graves R.M. Pressure and rate analysis of fractured low permeability gas reservoirs: numerical and analytical dual-porosity models // SPE Unconventional Gas Conference and Exhibition, Muscat, Oman SPE. 2013. 163967.
- [13] Stewart G., Ascharsobbi F. Well test interpretation for naturally fractured reservoirs // Proceedings: SPE Annual Technical Conference and Exhibition. 1988. V. OMEGA. P. 661-67618173.
- [14] Al-Ghamdi A., Ershaghi I. Pressure Transient Analysis of Dually Fractured Reservoirs // SPE J. 1996. V. 1(01). P. 93–100.
- [15] Warren J.E., Root P.J. The behaviour of naturally fractured reservoirs // SPE J. 1963. V. 3(03). P 245–255.
- [16] Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Пер. с англ. С.В. Сенина, Е.Ю. Шальмана / Ред. Г.Л. Подвидза. В 2 т. М.: Мир, 1990.
- [17] Бобренёва Ю.О., Мазитов А.А., Губайдуллин И.М. Математическое моделирование процесса массопереноса в коллекторе трещиновато-порового типа // Информационные технологии и нанотехнологии: Сб. трудов ИТНТ-2018, Самара, 24–27 апреля 2018. Самара: Предприятие "Новая техника", 2018. С. 1775–1780.

- [18] Чекалюк Э.Б. Термодинамика нефтяного пласта. М.: Недра, 1965.
- [19] Bobreneva Y.O., Gubaydullin I.M., Zhalnin R.V., Masyagin V.F. Modelling of temperature fields in a vertical well with a man-made crack using adaptive grids // Proc. of the 10th Annual Int. Scientific Conf. on Parallel Computing Technologies (CEUR-WS.org Team). 2016. V. 1576. P. 454–462.
- [20] Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
- [21] Патанкар С.В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах / Пер. Калабин Е.В. / Ред. Яньков Г.Г. М.: Издательство МЭИ, 2003.
- [22] Вахитов Г.Г. Разностные методы решения задач разработки нефтяных месторождений. Л.: Недра, 1970.
- [23] Калиткин Н.Н. Численные методы. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
- [24] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989.
- [25] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
- [26] Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы (введение в теорию). М.: Наука, 1977.
- [27] Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности. Томск: Изд-во ТПУ, 2007.
- [28] Самарский А.А. Теория разностных схем. Изд. 2, испр. М.: Наука, 1983.
- [29] Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Пер. с англ. И.А. Кульчицкой, С.С. Филиппова. М.: Мир, 1990.
- [30] Ипатов А.И., Кременецкий М.И. Гидродинамические и промышленно-технологические исследования скважин. М.: МАКС Пресс, 2008.
- [31] Самарский Л.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [32] Рагимли П.И., Повещенко Ю.А., Рагимли О.Р., Подрыга В.О., Казакевич Г.И., Гасилова И.В. Использование расщепления по физическим процессам для численного моделирования диссоциации газовых гидратов // Математическое моделирование. 2017. Т. 29, №7. С. 133–144.
- [33] Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Самарская Е.А., Тишкин В.Ф. Методы математического моделирования окружающей среды. М.: Наука, 2000.

## Оглавление

1. Введение .....	3
2. Постановка задачи.....	7
3. Алгоритм .....	10
Заключение.....	16
Литература .....	17