ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 41 за 2021 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

В.В. Валько, **Н.О. Савенко**,
А.А. Бай

Вычислительные эксперименты с методикой AUSM

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Валько В.В., Савенко Н.О., Бай А.А. Вычислительные эксперименты с методикой AUSM // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 41. 28 с. **https://doi.org/10.20948/prepr-2021-41**
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-41

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

В.В. Валько, Н.О. Савенко, А.А. Бай

Вычислительные эксперименты с методикой AUSM

Москва — 2021

В.В. Валько, Н.О. Савенко, А.А. Бай

Вычислительные эксперименты с методикой AUSM

В настоящей работе обсуждаются вычислительные эксперименты, выполненные на основе методики расщепления потоков “AUSM”. Показана эффективность использования различных аппроксимаций давления при расщеплении потока согласно оригинальной методике AUSM. Предложенный вариант использования расщепления потока протестирован на одномерных и трёхмерных задачах. Частичное использование метода расщепления потока, только в части давления, предлагается для использования в расчетах системы уравнений Эйлера на неструктурированных тетраэдральных сетках. Рассматривается вариант применения метода в областях сильного торможения потока в расчетах течения около “плохообтекаемых” тел. Исследуется эффективность метода в расчетах течений с обширной застойной зоной, внутри которой числа Маха снижаются до величины порядка ~ 0.1. Приводится сравнение с высокоточными методами на основе решения задачи Римана.

Ключевые слова: схема AUSM, расщепление потока, аппроксимация давления, неструктурированные сетки

Valko Viktor Vasilievich, Savenko Nikita Olegovych, Bay Anton Alekseevich

Computational experiments with the AUSM technique

In this paper, we discuss computational experiments based on the “AUSM” stream splitting methods. The efficiency of using various pressure approximations for flow splitting according to the original AUSM method is shown. The proposed use of splitting is tested on one-dimensional and three-dimensional problems. Partial use of the flow splitting method, only in terms of pressure, is proposed to be used in the calculations of the Euler system on unstructured grids. A variant of the application of the method of strong deceleration of the flow in the calculations of the flow around obtuse bodies is considered. The algorithm of the method for calculating flows with an extended stagnation zone, within which the Mach numbers decrease to about ~ 0.1, is investigated. Comparison with high-precision methods based on the solution of the Riemann problem is given.

Key words: AUSM scheme, flow splitting, pressure approximation, unstructured meshes

Оглавление

Введение

Высокоскоростные течения газа около «плохо обтекаемых» тел, таких как цилиндр, пластина, диск, сфера [1], сооружения, технические объекты с плоскими поверхностями на пути потока [2] и т.д., имеют ряд особенностей, которые необходимо учитывать в методиках расчета параметров течений данного типа. Так, около лицевой стороны плохообтекаемых объектов вблизи фронта ударной волны могут появляться нефизичные квазистационарные структуры (“карбункул” – см. [3]), возникают нефизичные осцилляции решения, препятствующие получению стационарного решения. В кормовой части тела формируются широкие области отрыва потока, в которых также могут появляться нефизичные осцилляции параметров численного решения. Эти проблемы возникают чаще всего при использовании разностных схем сквозного счета. При этом уточнение границ разрывов (ударные волны, контактные границы и т.д.) за счет использования схем с повышенным порядком аппроксимации [4, 5] не всегда решает обсуждаемую проблему в дозвуковых областях около обтекаемого тела.

Для устранения нефизичных эффектов, таких как немонотонность полей давления и скорости в области торможения набегающего потока, была предложена методика расчета AUSM [6 - 9]. Методика основана на выделении части газодинамических потоков, связанных с акустическими волнами. На ряде тестовых и практических примеров расчетов с использованием регулярных сеток эта методика показала хорошие результаты. В данной работе обсуждаются результаты вычислительных экспериментов, выполненных на основе методики AUSM, реализованной на неструктурированных (тетраэдральных) сетках.

Расчеты проводились посредством кода MARPLE3D [10], куда была имплантирована методика AUSM. Все вычисления в трехмерных постановках задач выполнены на гибридном суперкомпьютере К-100, установленном в Центре коллективного пользования ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

Схема расщепления AUSM

Численный код MARPLE3D включает модуль расчета течения сжимаемого газа на основе модели Эйлера. Соответствующие уравнения записаны в форме законов сохранения. Здесь мы приведем их для случая, когда течение можно рассматривать в двумерном приближении:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}=0, \tag{1}$$

где вектор U – вектор консервативных переменных:

$$U^T=\left(\rho,\rho u,\rho v,\rho E\right), \tag{2}$$

F и G – невязкие потоки:

$$F^T = \left(\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uH\right), \tag{3}$$

$$G^T = \left(\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho vH\right); \tag{4}$$

E – полная энергия:

$$E = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = H - \frac{p}{\rho}. \tag{5}$$

Модернизированная газодинамическая схема строится по рекомендациям [6]. Согласно предлагаемой в [6] методике, вычисление потока выполняется путём раздельного учёта физически независимых процессов – конвективного (т.е. движение потока газа «в целом») и акустического (распространение акустических волн по фоновому течению, т.е. в среде движущегося газа):

$$F = F^c + F^p, \tag{6}$$

$$F^c = u\begin{pmatrix}\rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho H\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}\rho C_S \\ \rho u C_S \\ \rho v C_S \\ \rho H C_S\end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$F^p = \begin{pmatrix}0 \\ p \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}, \tag{8}$$

здесь C_S – скорость звука, M – число Маха.

Для решения системы уравнений идеальной газодинамики используется консервативная разностная схема повышенного порядка точности, являющаяся обобщением на случай использования трехмерных неструктурированных сеток схемы MUSCLE [5].

Рассмотрим конвективный поток между двумя соседними ячейками. Индексы «1/2» и «L/R» соответственно – на границе между ячейками и «Левая/Правая» (или «Внутренняя/Внешняя» («I/O»)) ячейка вокруг этой границы (рис. 1).

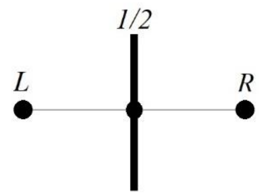


Рис. 1. Схема индексации «I/O» ячеек

Запишем конвективный поток в виде

$$F^{c}_{1/2} = u_{1/2}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho H\end{pmatrix}_{L/R} = M_{1/2}\begin{pmatrix}\rho C_S\\ \rho u C_S\\ \rho v C_S\\ \rho H C_S\end{pmatrix}_{L/R}. \qquad (9)$$

Основа методики AUSM заключается в расщеплении потоков на границах в зависимости от числа Маха [11]. Рассчитываемые величины, составляющие сеточный вектор, переносятся из ячейки, из которой исходит поток, по следующему правилу:

$$\{\bullet\}_{L/R} = \begin{cases}\{\bullet\}_L, M_{1/2} \ge 0,\\ \{\bullet\}_R, M_{1/2} < 0.\end{cases} \qquad (10)$$

Расщепленный поток представим в виде двух компонент, условно – «Правого» и «Левого» вкладов, вычисляемых посредством представления числа Маха в виде двух слагаемых:

$$M_{1/2} = M^{\pm}_{L} + M^{\pm}_{R}. \qquad (11)$$

Вычисление потока в «расщепленном» виде должно подчиняться следующим требованиям [7]:

1. $M^{+}_{L} + M^{-}_{R} = M$;

2. $M^{+}_{L} \ge 0$ и $M^{-}_{R} \le 0$;

3. функции непрерывны и монотонно возрастающие;

4. функции непрерывно дифференцируемы;

5. $M^{+}_{L}(M) = -M^{-}_{R}(-M)$;

6. $M^{+}_{L} = M$ при $M \ge 1$ и $M^{-}_{R} = M$ при $M \le 1$.

Первое условие означает, что суммарный вклад левой и правой ячейки даёт итоговое число Маха. Второе условие означает, что в вычислениях с расщепленным потоком используется информация о направлении акустических волн. Другими словами, если вычисляется поток от левой ячейки к правой, то поток из левой ячейки всегда неотрицательно направленный, а из правой, соответственно, наоборот. Третье и четвёртое условия обеспечивают непрерывность аппроксимирующей функции, которая не может убывать, поскольку с ростом числа Маха потока вклад от ячеек не может убывать. Пятое обеспечивает симметричность расщепления. Шестое описывает противопоточную схему, т.е. сверхзвуковые волны распространяются только в направлении потока. Из этого следует, что функцию для расчета числа $M^{\pm}$ можно представить в следующем виде:

$$M^{\pm} = \begin{cases} g(M), & |M| \le 1, \\ \frac{1}{2}(M \pm |M|), & |M| > 1. \end{cases} \qquad (12)$$

Функцию $g(M)$ сконструируем в виде полинома, используя следующие условия. Например, для полинома второго порядка:

$$g(M) = aM^2 + bM + c,$$

$$\begin{cases} g_L^{+}(-1) = 0, \\ g_L^{+}(1) = 1, \\ \dot{g}_L^{+}(-1) = 0, \\ \dot{g}_L^{+}(1) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} g_R^{-}(-1) = 0, \\ g_R^{-}(1) = 1, \\ \dot{g}_R^{-}(-1) = 0, \\ \dot{g}_R^{-}(1) = 1. \end{cases} \qquad (13)$$

Получаем варианты AUSM - аппроксимации конвективного потока в дозвуковой зоне:

- линейная аппроксимация:

$$g(M) = \frac{1}{2}(M \pm 1); \qquad (14)$$

- аппроксимация полиномом второго (и третьего порядка, т.к. старший коэффициент будет равен нулю):

$$g(M) = \pm\frac{1}{4}(M \pm 1)^2; \qquad (15)$$

- аппроксимация полиномом четвёртого порядка

$$g(M) = \pm\frac{1}{4}(M \pm 1)^2 \pm \frac{1}{8}(M^2 - 1)^2; \qquad (16)$$

Результат вычисления $g(M)$, полученный с использованием полинома второго порядка, совпадает с результатом вычисления с использованием полинома третьего порядка, поскольку во втором случае, в силу условий (13), старший коэффициент полинома третьего порядка обнуляется.

Далее необходимо построить расщепление давления, т.е. определить расчет акустических волн, распространяющихся по фону движущегося газа. Поступим по аналогии с конвективным потоком и представим давление в виде:

$$p_{1/2} = p_L^{\pm} + p_R^{\pm}. \qquad (17)$$

Для вычислений по формуле (17) необходимо ее детализировать. Сформулируем с этой целью ряд условий:

1. $p_L^+ + p_R^- = p$;
2. $p^{\pm} \geq 0$;
3. функции из условий 1 и 2 непрерывны, причем p_L^+ монотонно возрастает, а p_R^- монотонно убывает;
4. функции p_L^+ и p_R^- непрерывно дифференцируемы;
5. $p_L^+(M) = p_R^-(-M)$;
6. $p_L^+ = p$ при $M \geq 1$ и $p_R^- = p$ при $M \leq 1$.

Отличием от условий, налагаемых для построения расщепления конвективного потока, является то, что давление не может быть отрицательной величиной, условие второе. Из шестого критерия получаем следующее:

$$p^{\pm} = \begin{cases} h(M), & |M| \leq 1, \\ \dfrac{p}{2}\dfrac{(M + |M|)}{M}, & |M| > 1. \end{cases} \qquad (18)$$

Функцию *h(M)* будем искать аналогично функции, описывающей конвективный поток, но несколько иначе. Например, при аппроксимации полиномом второго порядка $h(M) = aM^2 + bM + c,$ будем использовать условия:

$$\begin{cases} h_L^+(-1) = 0, \\ h_L^+(1) = 1, \\ \dot{h}_L^+(-1) = 0, \\ \dot{h}_L^+(1) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} h_R^-(-1) = 0, \\ h_R^-(1) = 1, \\ \dot{h}_R^-(-1) = 0, \\ \dot{h}_R^-(1) = 0. \end{cases} \qquad (19)$$

Здесь все выражения, взятые для производных, приравнены к нулю. Это необходимо для обеспечения гладкости функции *h(M)*.

В результате получаем следующие варианты AUSM-аппроксимации давления в дозвуковой зоне:

- линейная аппроксимация:

$$\frac{p}{2}(1 \pm M); \qquad (20)$$

- аппроксимация полиномом третьего порядка:

$$\frac{p}{4}(M \pm 1)^2(2 \mp M); \qquad (21)$$

- аппроксимация полиномом пятого порядка:

$$\frac{p}{4}(M \pm 1)^2(2 \mp M) \pm \beta p M (M^2 - 1)^2; \qquad (22)$$

где $\beta \in \left[-\frac{3}{4};\frac{3}{16}\right]$.

Для расчета коэффициентов при гладком сопряжении необходимо поставить на концах отрезка $[-1,1]$ парные условия по производным. В данном случае подходящие для использования полиномы должны иметь чётное количество коэффициентов и, соответственно, иметь нечётные степени. Исключение составляет случай, когда для конвективного потока аппроксимации полиномами второго и третьего порядка совпадают (пояснение см. выше).

Получив расщепления для обеих частей потоковой функции, можно представить изменённую схему расчета потока в виде:

$$\begin{pmatrix} \rho u \\ \rho uu+p \\ \rho uv \\ \rho uH \end{pmatrix}_{1/2} = \frac{M_{1/2}}{2}\left[\begin{pmatrix} \rho C_S \\ \rho u C_S \\ \rho v C_S \\ \rho H C_S \end{pmatrix}_R + \begin{pmatrix} \rho C_S \\ \rho u C_S \\ \rho v C_S \\ \rho H C_S \end{pmatrix}_L\right] - \frac{|M_{1/2}|}{2}\left[\begin{pmatrix} \rho C_S \\ \rho u C_S \\ \rho v C_S \\ \rho H C_S \end{pmatrix}_R - \begin{pmatrix} \rho C_S \\ \rho u C_S \\ \rho v C_S \\ \rho H C_S \end{pmatrix}_L\right] + \begin{pmatrix} 0 \\ p_R^{\pm}+p_L^{\pm} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Графические данные AUSM-аппроксимации представлены на рис. 2 – конвективный поток, и на рис. 3 – давление. В качестве параметра по оси абсцисс возьмем «долевые» отношения, отражающие вклады в общую величину давления или скорости от двух соседних ячеек:

$d = M_{\pm}/M$ для конвективного потока,

$d = P_{\pm}/P$ для давления.

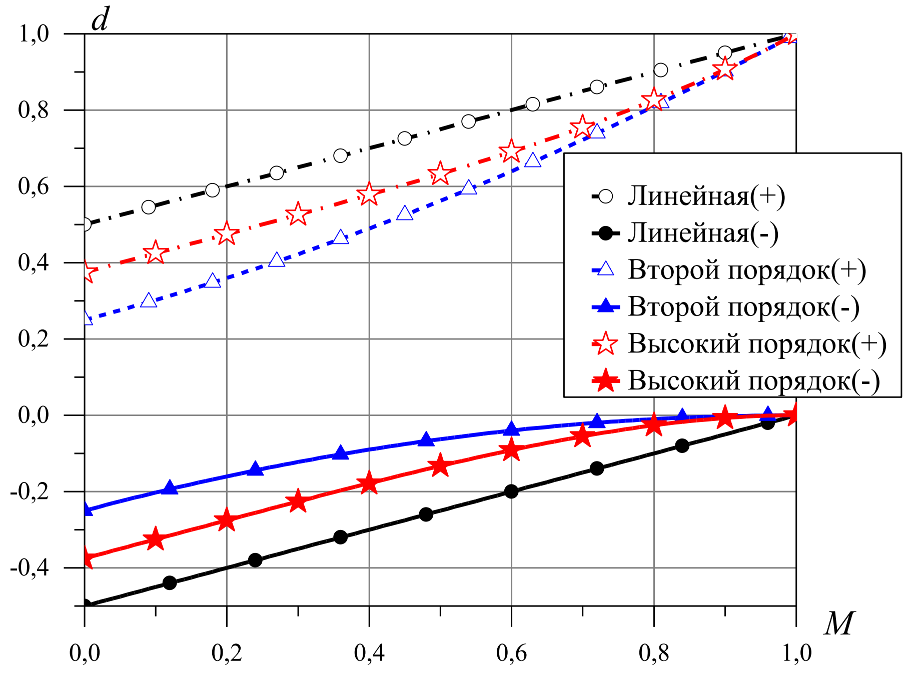


Рис. 2. Относительные вклады ячеек донора и акцептора в скорость при расщеплении в зависимости от числа Маха на границе между ячейками

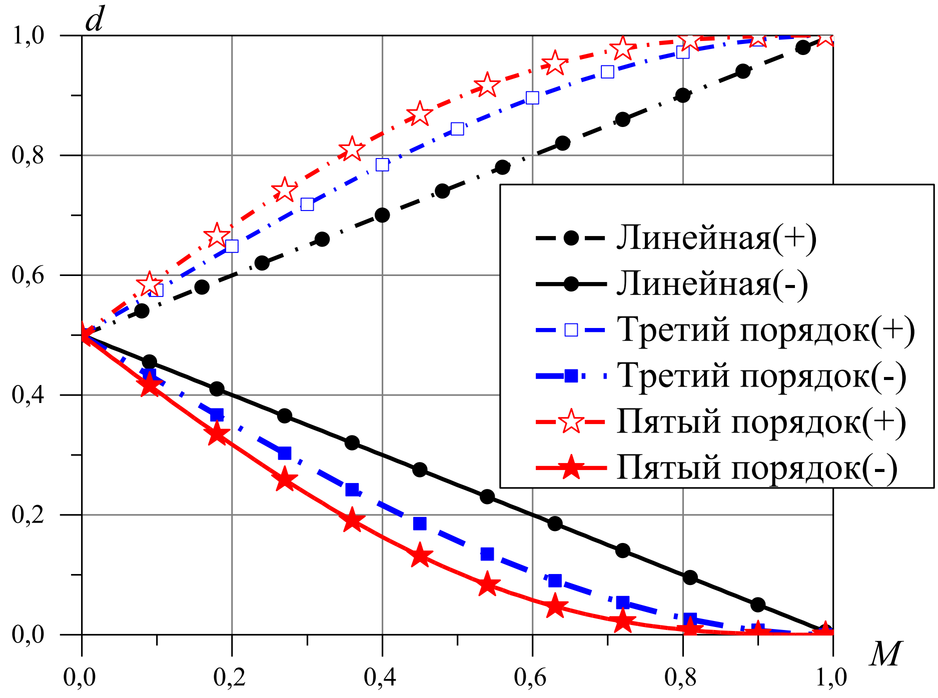


Рис. 3. Относительные вклады ячеек донора и акцептора в давление при расщеплении в зависимости от числа Маха на границе между ячейками

Можно заметить, что в случае конвективного потока имеем следующую картину – чем выше число Маха в некоторой ячейке «+», тем меньше доля вклада от ячейки, с ней граничащей. Так, при скорости, близкой к нулю, вклады в поток от обеих ячеек одинаковы. Чем ближе число Маха к единице, тем меньше вклад от ячейки акцептора.

В варианте расчета с AUSM-аппроксимацией давления имеем похожую картину. При малой скорости газа, $M \ll 1$, получаем одинаковый вклад соседних ячеек в давление на их интерфейсе. Чем выше скорость, тем больше вклад от ячейки донора ячейке акцептору. Относительные доли вкладов всегда в сумме равны 1.

Так как аппроксимация полиномом пятого порядка имеет вариативность, то выбор параметра уравнения неочевиден. Как было отмечено ранее, в уравнении пятого порядка $\frac{p}{4}(M \pm 1)^2(2 \mp M) \pm \beta p M (M^2 - 1)^2$ есть коэффициент $\beta \in \left[-\frac{3}{4};\frac{3}{16}\right]$. При равенстве этого коэффициента нулю мы фактически получаем полином третьего порядка. Однако, при выборе коэффициента β от верхней до нижней границы предложенного интервала наблюдается существенное изменение значений аппроксимирующей функции.

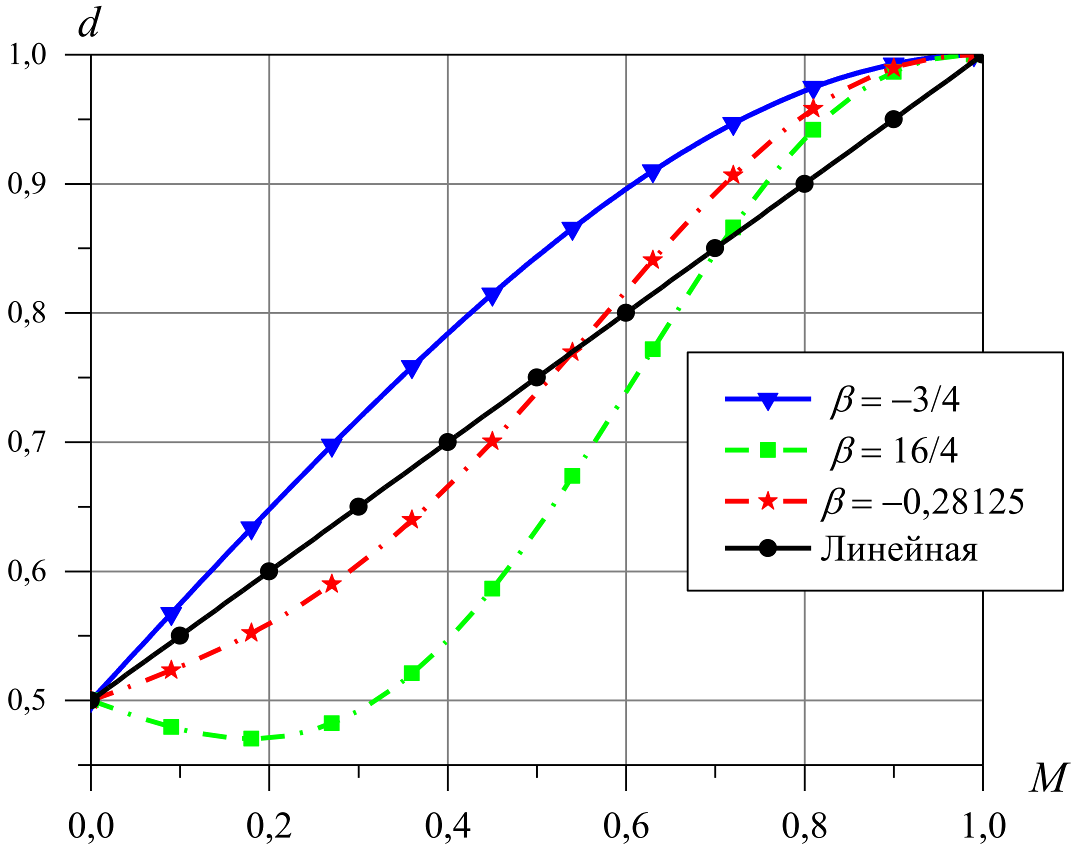


Рис. 4. Относительные вклады ячейки донора в давление на границе между ячейками при расщеплении в зависимости от числа Маха при различном β

Из представленных данных (рис. 4) следует, что при положительном β кривая пересекает ординату d=0.5. Поэтому влияние давления в ячейке-акцепторе становится больше, чем влияние ячейки-донора.

Реализация и тестирование

В данной работе представлен вариант частичного использования методики AUSM. Используется только корректировка давления, т.е. уточнение акустической составляющей потока. Данный выбор обусловлен тем, что в расчете обтекания затупленных тел в таких дозвуковых областях, в которых число Маха весьма мало, и газ можно считать слабосжимаемым, качество результата существенно зависит от способа учета акустических эффектов. Таким образом, можно ожидать, что повышение качества расчёта будет достигнуто с помощью упрощенного алгоритма AUSM, а именно, только посредством корректировки давления.

Первичная проверка того, что использование предложенного варианта методики позволяет получить приемлемые по точности результаты, была выполнена в численных экспериментах с одномерными задачами Сода и Лакса в постановках, представленных в [12]:

Задача Сода (№1):

- начальное состояние:
  - слева от разрыва $\left(\rho^L, u^L, p^L\right) = (1, 0, 1)$;
  - справа от разрыва $\left(\rho^R, u^R, p^R\right) = (0.125, 0, 0.1)$;
- сеточное разбиение $N = 1000$;
- граница раздела $x = 1$;
- конечный момент времени $t = 0.4$ мксек.

Задача Лакса (№2):

- начальное состояние:
  - слева от разрыва $\left(\rho^L, u^L, p^L\right) = (0.445, 0.698, 3.528)$;
  - справа от разрыва $\left(\rho^R, u^R, p^R\right) = (0.5, 0, 0.571)$;
- сеточное разбиение $N = 1000$;
- граница раздела $x = 1$;
- конечный момент времени $t = 0.32$ мксек.

Тестирование проводилось с использованием различных способов аппроксимации давления при неизменной общей схеме коррекции потоков.

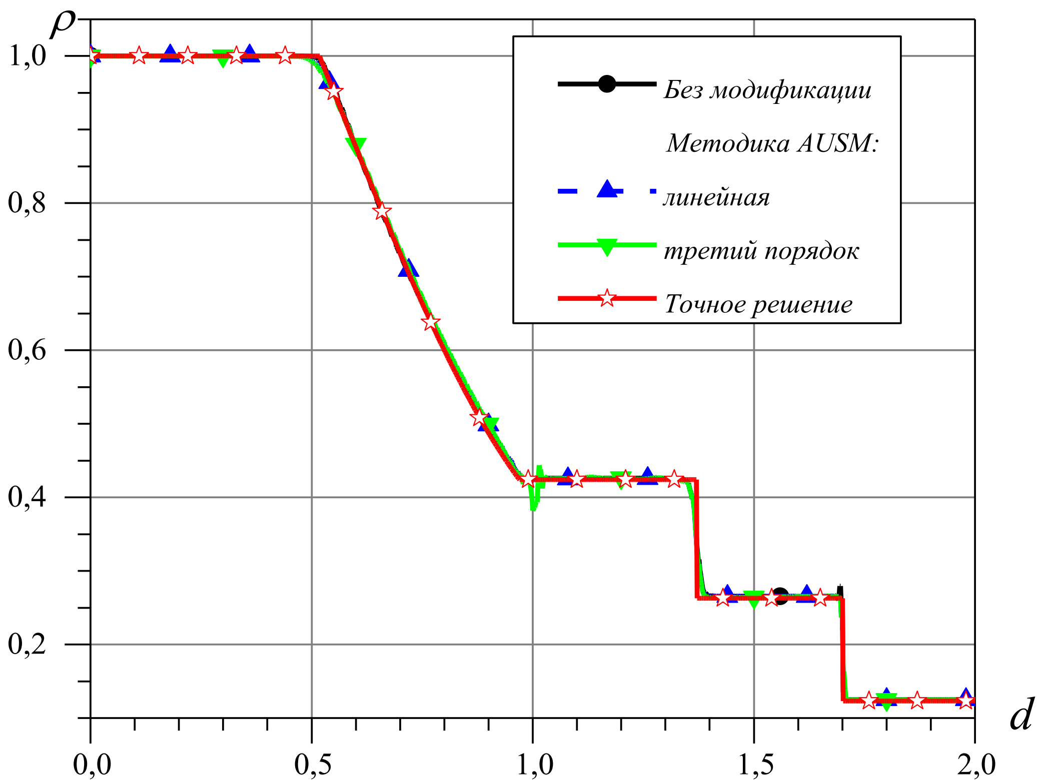


Рис. 5. Профиль плотности в решении задачи №1 для схем без расщепления и с аппроксимацией давления на интерфейсе ячеек полиномами первого и третьего порядков

На рисунке 5 показан профиль плотности в решении задачи Сода на указанный выше момент времени. Данное распределение плотности показывает, что оригинальная схема без AUSM-аппроксимации давления дает решение, находящееся в хорошем соответствии с аналитическим решением, за исключением области перед фронтом ударной волны, где заметен скачок плотности.

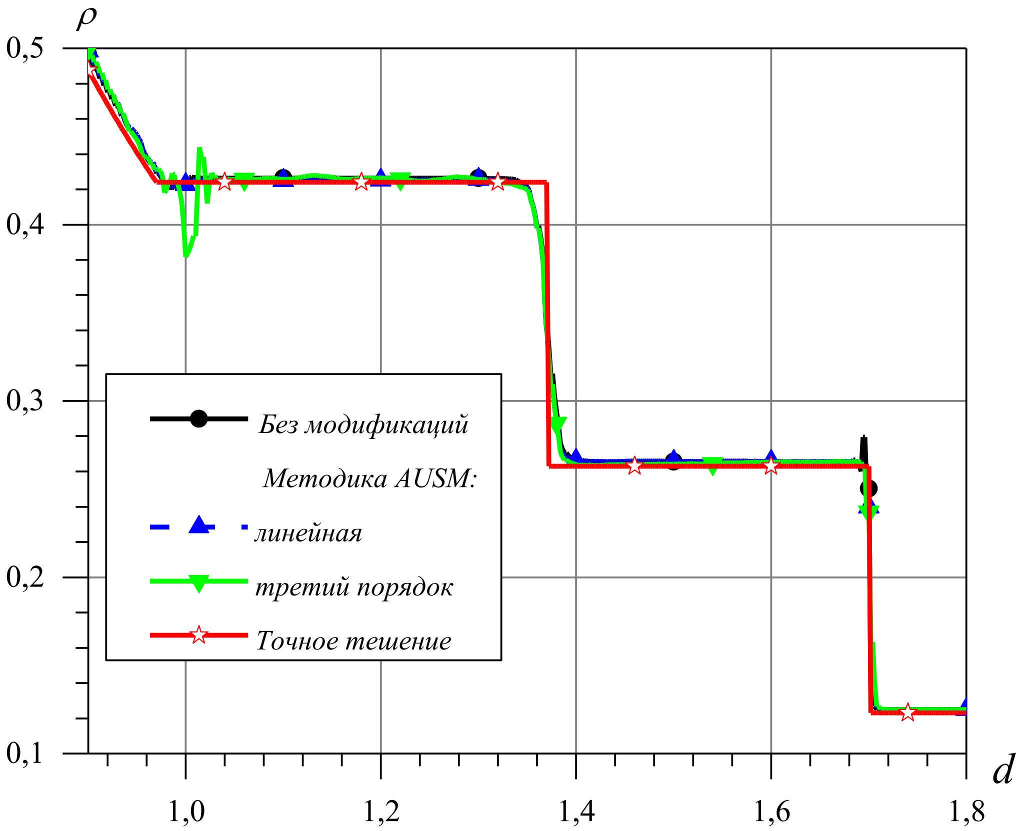


Рис. 6. Профиль плотности в решении задачи №1, увеличенная область распада, для схем без расщепления и с аппроксимацией давления на интерфейсе ячеек полиномами первого и третьего порядков

Увеличив область графика, где происходят максимальные отклонения от аналитического решения (рис. 6), можно заметить, что перед ударной волной ($d \approx 1.7$) схемы с линейной аппроксимацией давления и с аппроксимацией полиномом третьего порядка подавляют нефизичный скачок плотности. В области $d \approx 1$, схема с линейной аппроксимацией давления и оригинальная методика показывают себя одинаково, в то время как метод на основе полинома третьего порядка дает решение с заметными нефизичными осцилляциями.

Рассмотрев линейную аппроксимацию и аппроксимацию полиномом третьего порядка, проверим также аппроксимацию полиномом пятого порядка при различном β. В интервале изменения параметра β: $\beta \in \left[-\frac{3}{4}; \frac{3}{16}\right]$ возьмем 3 значения: по одному на границах отрезка и значение в средней части

$\beta = -0,28125$. Полученные для этих значений параметра β результаты показаны на рисунке 7. При значениях β на границах отрезка, $\beta = -3/4$ и $\beta = 3/16$, в решении задачи Сода получаются идентичные графики. Из результатов, представленных на рис. 6, в области $d \approx 1.7$ все варианты аппроксимации давления показывают достаточно хорошие результаты, однако в области $d \approx 1$ точность расчета ухудшается.

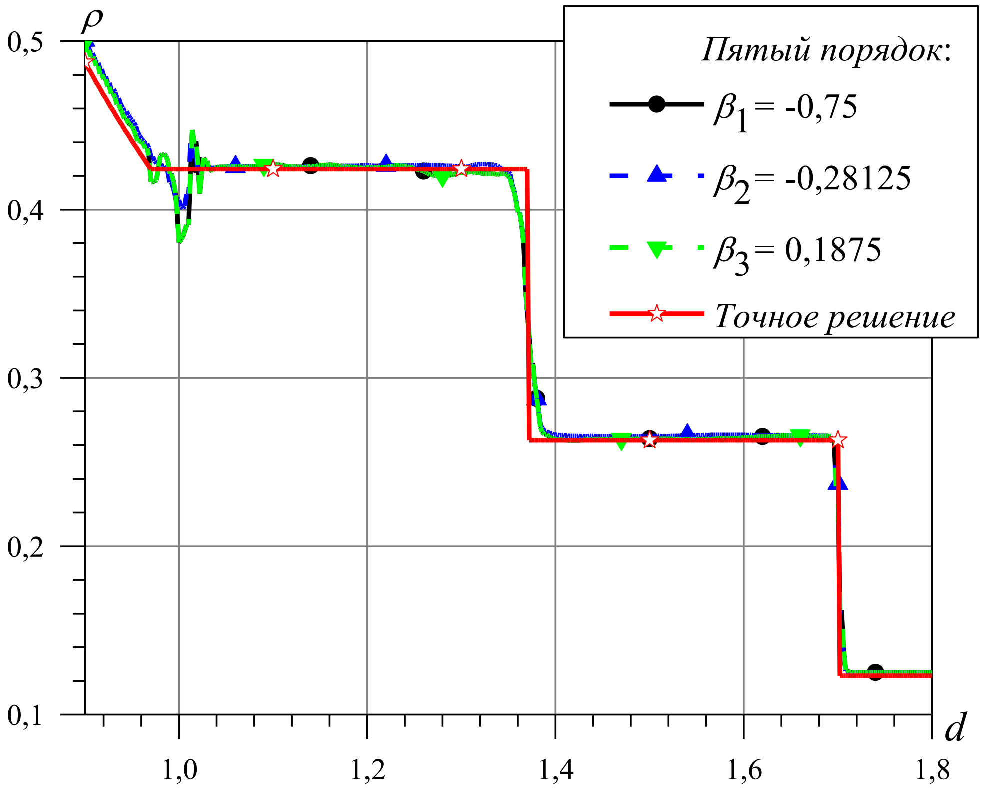


Рис. 7. Профиль плотности в решении задачи №1, увеличенная область распада, для схем с аппроксимацией давления на интерфейсе ячеек полиномом пятого порядка с различными коэффициентами β

Как следует из представленных данных (рис. 6, 7), основная проблемная область сместилась от ударной волны к волне разрежения. В ряде расчетов были совмещены AUSM-аппроксимации различных порядков аппроксимации. Опытным путём было установлено, что наилучший результат показывает следующая гибридная схема аппроксимации: при числе Маха ниже $\sim 0,935$ применяется линейная аппроксимация, и лишь в узком диапазоне $[0,935;1]$ применяется аппроксимация полиномом пятого порядка. Результат соответствует аналитическому профилю давления с более высокой точностью в отличие от всех остальных рассмотренных схем аппроксимации давления (рис. 8).

Аналогично задаче Сода рассмотрим задачу Лакса. На рисунке 9 представлено распределение плотности для схем различного порядка в сравнении с аналитическим решением. По представленным данным можно заключить, что, как и в задаче Сода, точность ухудшается в области ударной волны ($d \approx 1.8$), где заметен нефизичный скачок плотности.

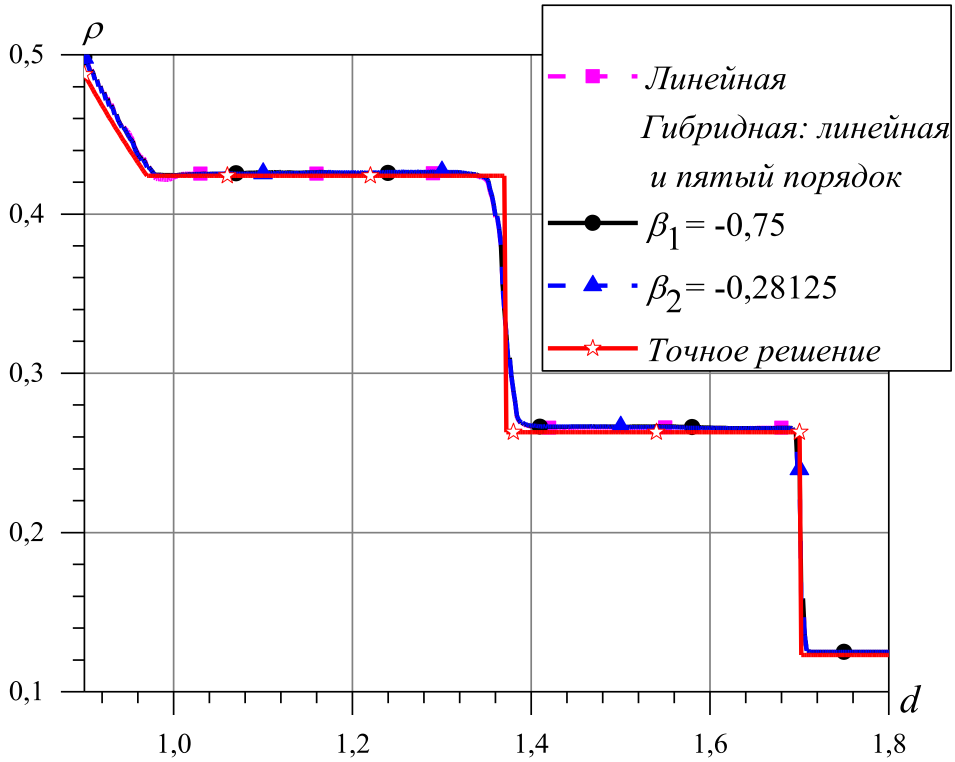


Рис. 8. Профиль плотности в решении задачи №1 разрыва, увеличенная область распада, для схем с аппроксимацией давления полиномом первого порядка и для гибридных схем, включающих аппроксимации линейную и полиномом пятого порядка с различными коэффициентами β

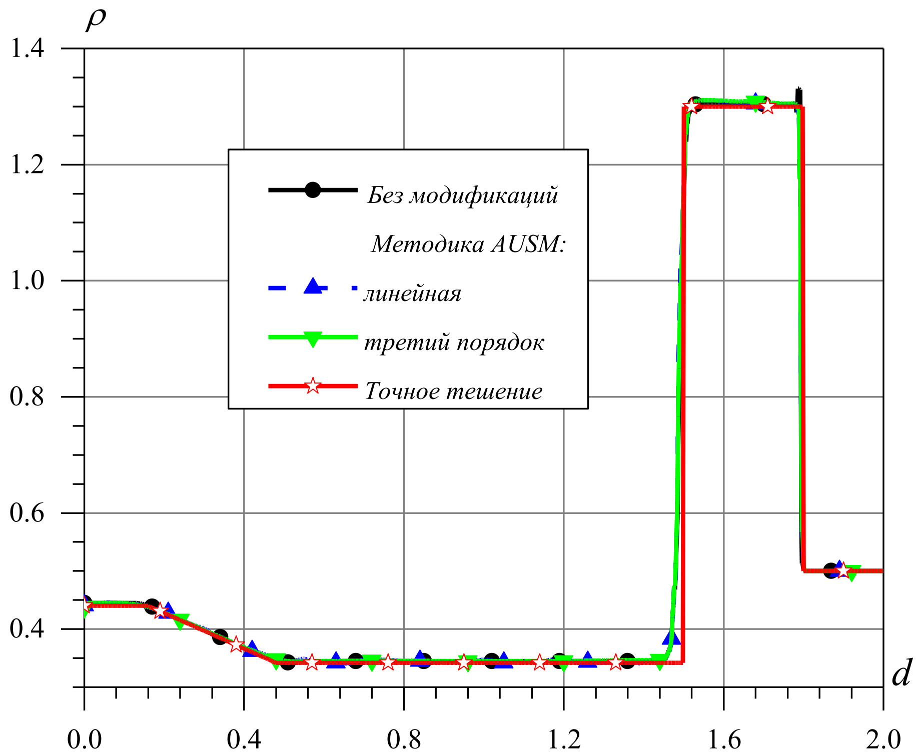


Рис. 9. Профиль плотности в решении задачи №2 для схем без расщепления и с аппроксимацией полиномами первого и третьего порядков

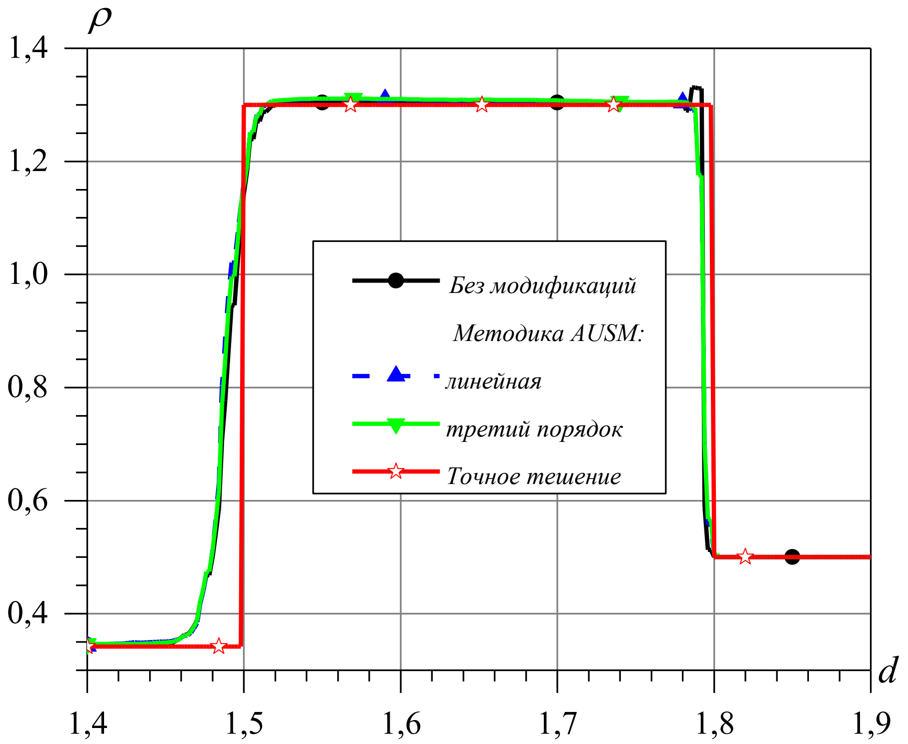


Рис. 10. Профиль плотности в решении задачи №2 для схем без расщепления и с аппроксимацией полиномами первого и третьего порядков, увеличенная область ударной волны

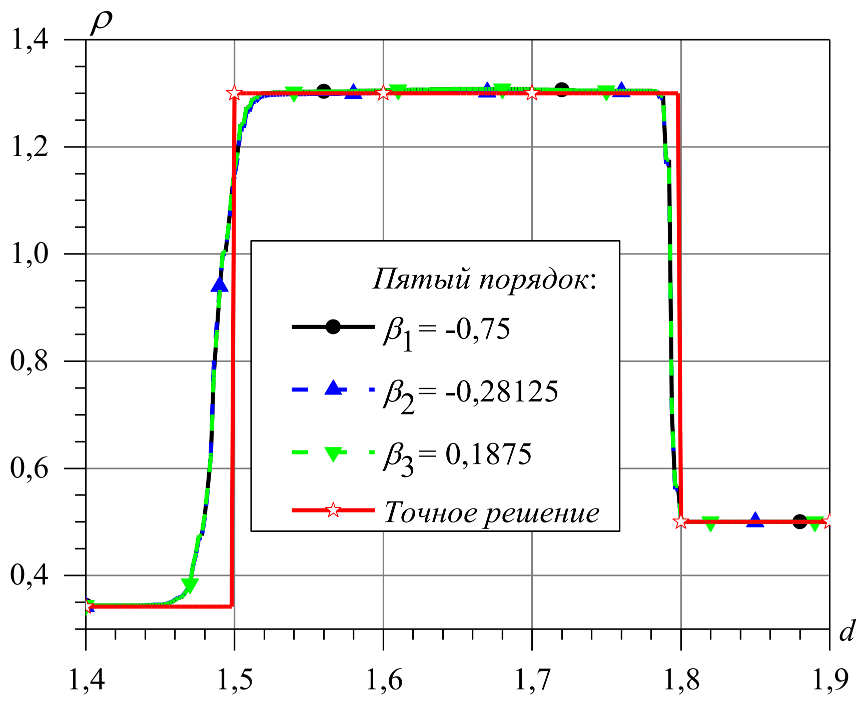


Рис. 11. Профиль плотности в решении задачи №2 по схемам с аппроксимацией полиномом пятого порядка с различными коэффициентами β, выделена область ударной волны

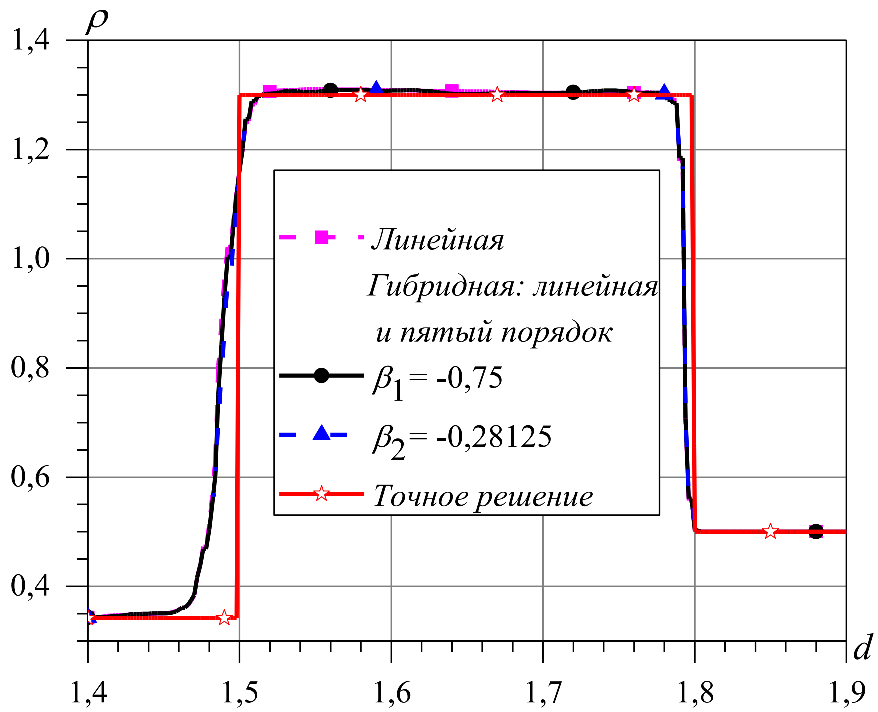


Рис. 12. Профиль плотности в решении задачи №2 по схемам с аппроксимацией полиномом первого порядка и гибридной – линейной и пятого порядка с различными коэффициентами β. Выделена область ударной волны.

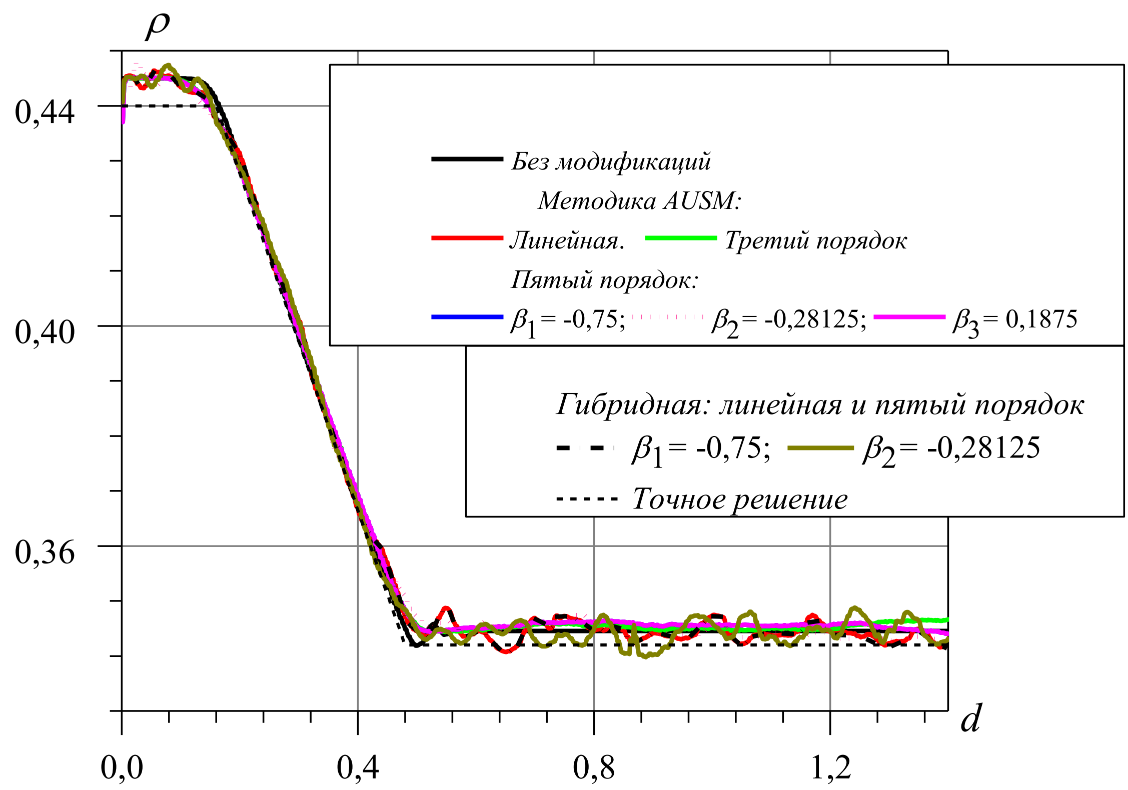


Рис. 13 Профиль плотности в решении задачи №2, выделена область до ударной волны для всех восьми тестируемых схем аппроксимаций давления

Расчеты в постановке задачи Лакса показывают, что с любым типом аппроксимации давления нефизичный скачок плотности вблизи ударной волны подавляется, что показано на рисунке с выделением этой области (рис. 10-12).

Как показывают эксперименты с решением задачи Лакса, (рис. 13), все схемы, кроме базовой, с AUSM-аппроксимацией давления полиномом третьего порядка и с аппроксимацией полиномом пятого порядка с коэффициентом β, значение которого выбрано на границе (правой или левой) отрезка возможных значений β, дают решения, содержащие нефизичные осцилляции.

Расчеты одномерных задач позволяют выбрать типы аппроксимаций, с которыми можно ожидать получения приемлемых результатов решения задач большей размерности. Можно отметить, что при использовании изначального варианта кода, без расщепления потока, возникают трудности при моделировании течений, включающих области потока с малыми числами Маха.

Рассмотрим варианты двух задач обтекания: обтекание цилиндра с плоского торца (рис. 14) и обтекание сферы. В данных примерах будем рассматривать исключительно лобовую часть, поскольку только в лобовой части объектов наблюдается образование дозвуковых течений, обладающих плотностью выше плотности окружающей среды.

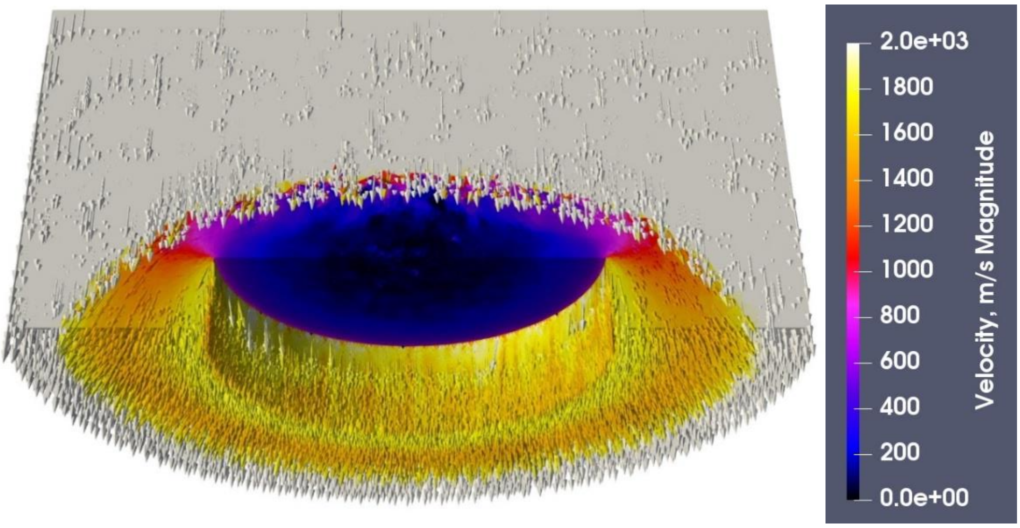


Рис. 14. Обтекание цилиндра с плоского торца, в разрезе показано поле скорости, заливкой показано распределение величины модуля скорости

Для цилиндра имеем на торце неоднородное распределение параметров в хаотичном порядке при низких числах Маха $M < 0.1$ (рис. 15-17). Газ, движущийся со столь малыми скоростями, можно считать практически несжимаемым, и в этом случае выделение акустического вклада в основной поток может быть более заметно, чем при больших скоростях, и даже критически важно.

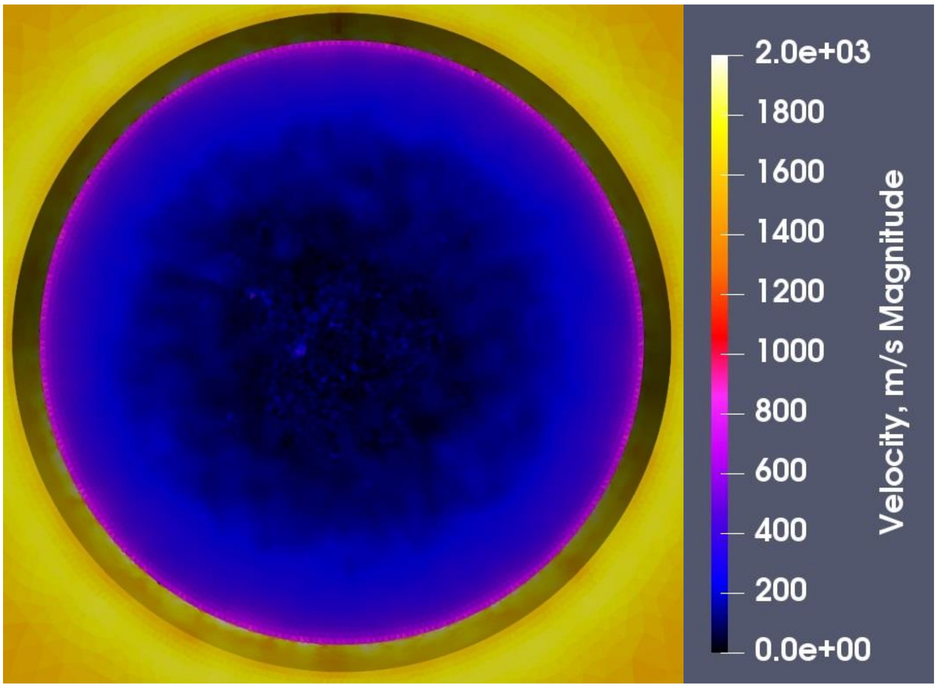


Рис. 15. Обтекание цилиндра с плоского торца, распределение модуля скорости в набегающем потоке

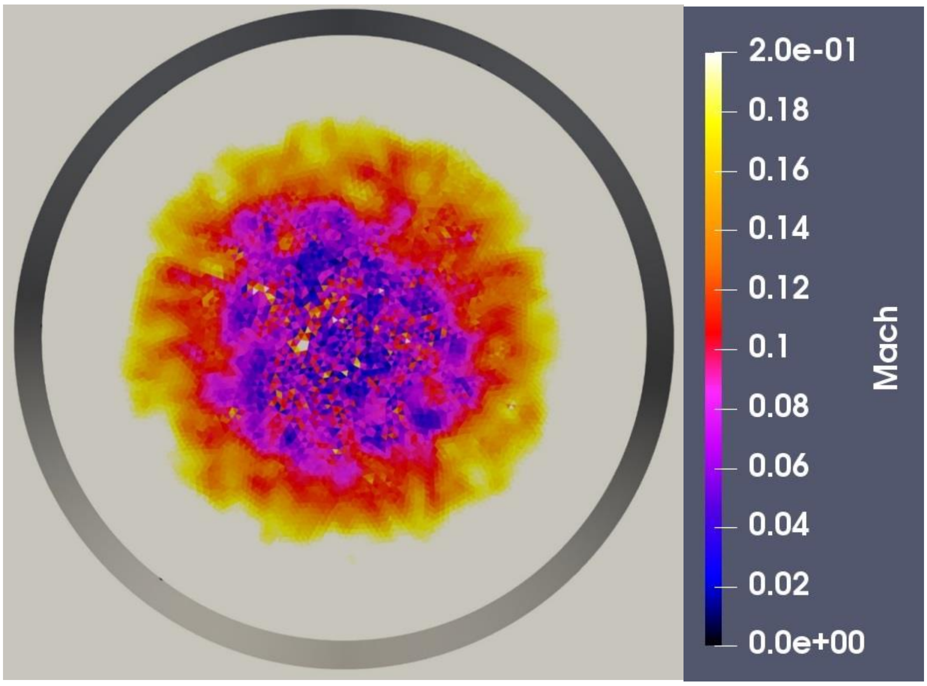


Рис. 16. Обтекание цилиндра с плоского торца, распределение числа Маха при ограничении сверху: $M \leq 0.2$

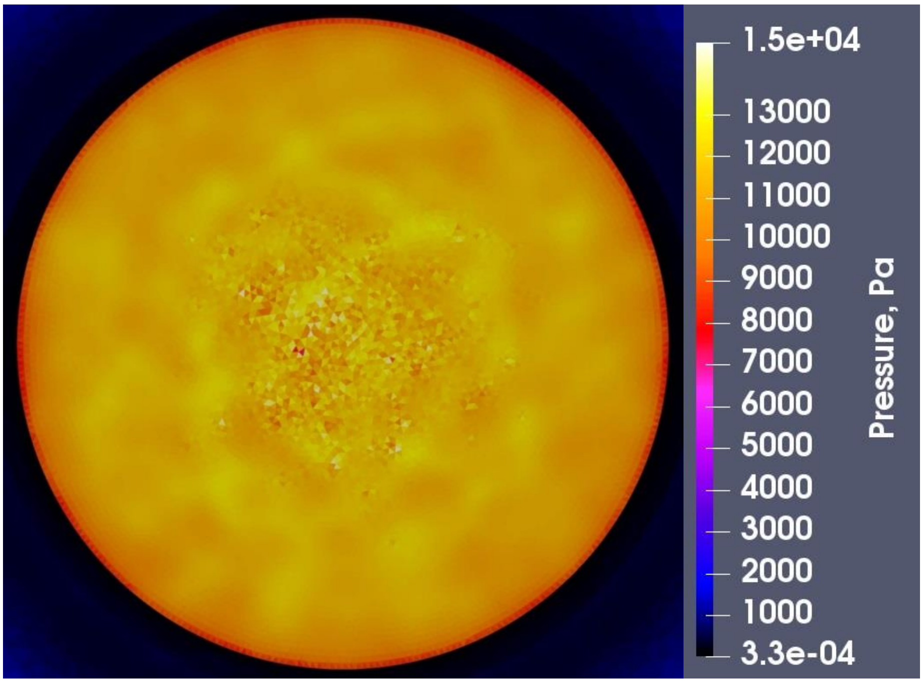
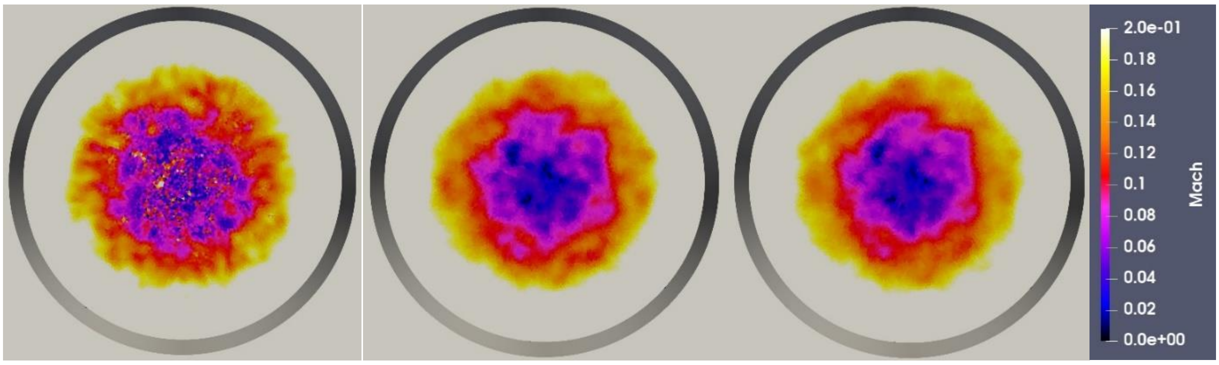


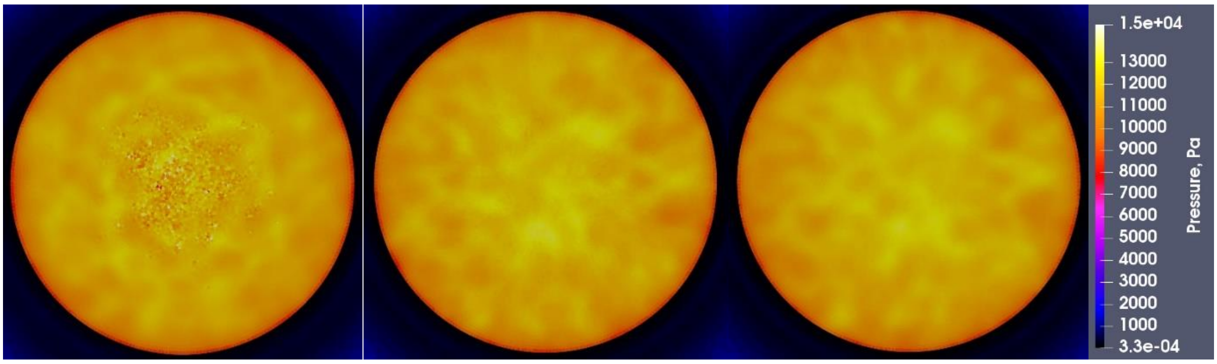
Рис. 17. Обтекание цилиндра с плоского торца, распределение поля давления

Как следует из представленных иллюстраций (рис. 15-17), область заторможенного потока имеет мозаичную структуру. Видно сходство распределений давления и числа Маха.



а *б* *в*

Рис. 18. Обтекание цилиндра с плоского торца, распределение числа Маха на торце для значений $M \le 0.2$: *а*) без использования AUSM, *б*) с использованием линейной аппроксимации давления, *в*) с использованием аппроксимации давления полиномом третьего порядка



а *б* *в*

Рис. 19. Обтекание цилиндра с плоского торца, картины давления: *а*) без использования AUSM, *б*) с использованием линейной аппроксимации давления, *в*) с использованием аппроксимации полиномом третьего порядка

Как следует из представленных данных (рис. 18, 19), происходит не только устранение мозаичности низкоскоростной области ($M < 0.1$), но и при переходе от линейной аппроксимации к аппроксимации полиномом третьего порядка заметно повышается гладкость. Последнее обусловлено тем, что интерполяция полиномом порядка выше первого построена с учетом равенства первой производной нулю на границе ячеек, что приводит к сглаживанию.

На фоне значительного повышения гладкости и устранения нефизичных эффектов на поверхности тела стоит отметить «обратное влияние». На фронте ударной волны (рис. 20): при расчете по схеме без применения модификации AUSM картина течения имеет правильную форму купола ударной волны, но за скачком видны нефизичные забросы плотности и ближе к оси симметрии наблюдается мозаичность. Применение аппроксимации давления по линейной схеме и схеме с кубической аппроксимацией дает более качественные результаты. Однако стоит заметить, что при аппроксимации полиномом третьего порядка заметны забросы плотности на фронте ударной волны, аналогично случаю, показанному на рис. 6 при $d \approx 1$.

Рассмотрим следующий случай затупленного тела – сферы. Сферу при определенных условиях можно считать плохо обтекаемым телом. В отличие от структуры потока около цилиндра, обтекаемого с торца, структура потока около сферы характеризуется существенно меньшей областью около точки торможения, где газ можно считать практически несжимаемым, $M << 1$. Такое различие в свойствах потока заметно проявляется в результатах расчетов с применением AUSM.

а

б

в

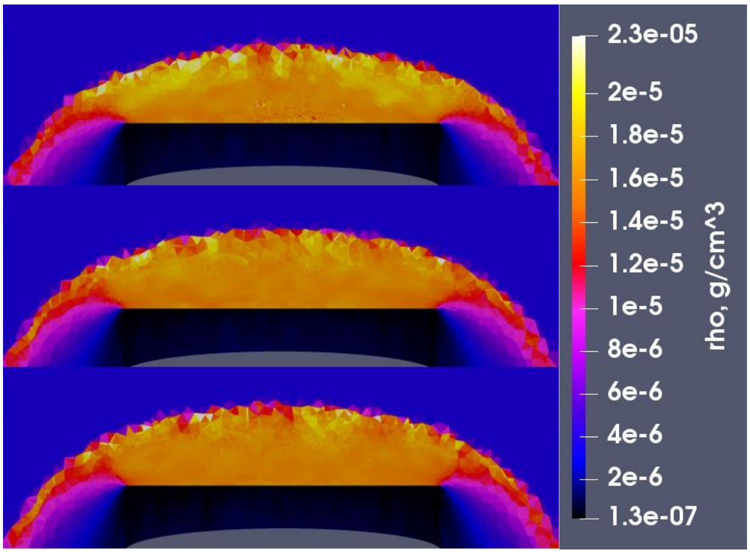
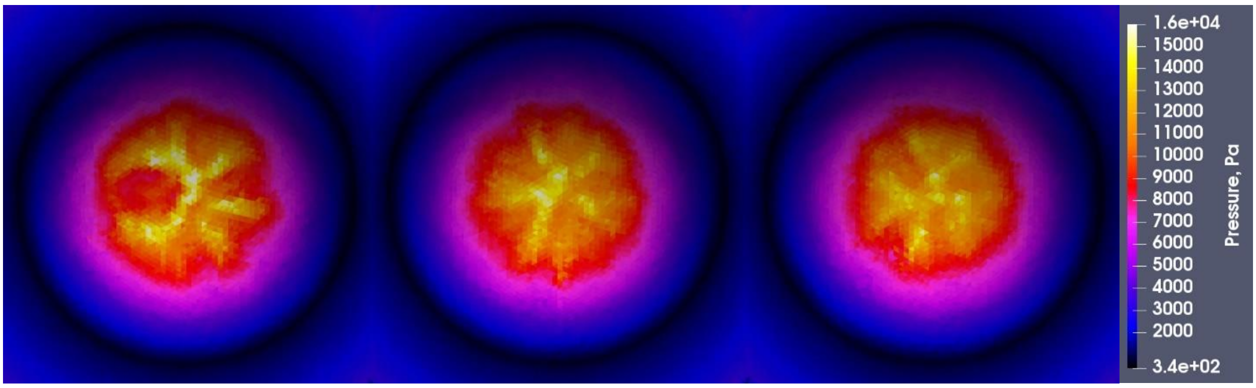


Рис. 20. Обтекание цилиндра, картины плотности: *а*) без использования AUSM, *б*) с использованием линейной аппроксимации давления, *в*) с использованием аппроксимации полиномом третьего порядка

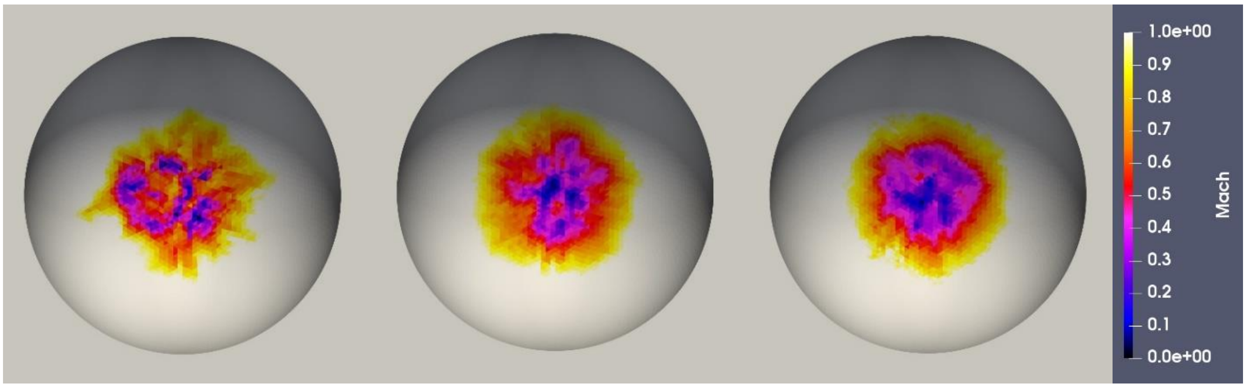


а *б* *в*

Рис. 21. Обтекание сферы, картины распределения давления: *а*) без использования AUSM, *б*) с использованием линейной аппроксимации давления, *в*) с использованием аппроксимации полиномом третьего порядка

Расчет обтекания сферы дает распределение давления, показанное на рис. 21. Это распределение также не свободно от дефектов сеточного происхождения. Однако, в отличие от обтекания торца цилиндра, в распределении рассчитанного давления в потоке, набегающем на сферу, эти дефекты выражены существенно сильнее. При этом они эффективно подавляются при использовании AUSM-аппроксимации давления любого типа.

Представленные результаты показывают, что применение исходной расчетной схемы без расщепления потоков по методу AUSM дает настолько значительные нефизичные возмущения давления, что использование такого подхода в практических расчетах нецелесообразно. На представленном на рис.21 *а* распределении давления в окрестностях центра области торможения присутствует значительный перепад давления, более чем в два раза. Ситуация заметно улучшается за счет применения схемы AUSM с линейной аппроксимацией давления. На рис.21 *б* распределение давления в окрестности центра области торможения становится заметно более гладким, чем в первом случае, но перепад всё ещё значительный, около 30%. Повысив порядок аппроксимирующего полинома до третьего, можно еще повысить качество расчета, перепады давления в самом центре становятся менее заметны и составляют примерно 15%. Если взять интеграл давления по поверхности в области торможения, то во всех трёх случаях получится примерно одинаковый результат, поэтому выбор типа аппроксимации давления влияет в большей степени на гладкость распределения, чем на уточнение среднего значения давления.



а *б* *в*

Рис. 22. Обтекание сферы, распределение чисел Маха по сфере, ограниченные сверху значением $M = 1$: *а*) без использования AUSM, *б*) с использованием линейной аппроксимации давления, *в*) с использованием аппроксимации полиномом третьего порядка

Рассчитанное распределение давления во всех случаях не обладает высокой симметрией, соответствующей исходной постановке задачи обтекания. В этом сказывается как немонотонность численной методики, не устраненной полностью, так и влияние дискретизации расчетной области тетраэдральной сеткой.

Распределение поля скорости также искажается по названным причинам, что видно по распределению числа Маха (в дозвуковой области), приведенному на рис. 22. Здесь позитивное влияние от применения AUSM более заметно. В случае исходной схемы рассчитанные распределения параметров в дозвуковой области хаотичны. Искажается не только распределение давления, но и структура течения в целом. На рис.22 *а*, в том месте, где на рис.21 *а* провал давления, присутствует область, контур которой имеет меньшую скорость, чем центр, а значит, в этом месте образовался карбункул, к тому же неустойчивый, а значит, картина будет меняться постоянно в процессе расчета, не приходя к стационарному решению.

Применение AUSM с линейной аппроксимацией давления существенно улучшает численное решение. Дозвуковая область принимает более правильную, “округлую” форму, соответствующую данным экспериментов и результатов расчетов по другим методикам [13, 14], нефизичные возмущения скорости становятся намного менее заметными. AUSM с аппроксимацией давления полиномом третьего порядка еще более улучшает качество распределений в дозвуковой зоне, что видно на примере распределения числа Маха. Форма дозвуковой области еще более улучшается, а около точки торможения потока не остаётся сколько-нибудь значимых проявлений немонотонности.

На приведенном распределении плотности по боковому срезу (рис. 23) можно видеть влияние численной неустойчивости на форму ударной волны, появляющейся в численном решении по исходной схеме (без модификации по методике AUSM). Данная неустойчивость возникает и в решении задачи об обтекании цилиндра, только в варианте течения около цилиндра она менее выражена. Это различие результатов объясняется увеличенной, по сравнению с картиной течения около сферы, областью дозвуковой зоны за ударной волной, при сопоставимых геометрических размерах лобовой части сферы и цилиндра.

а

б

в

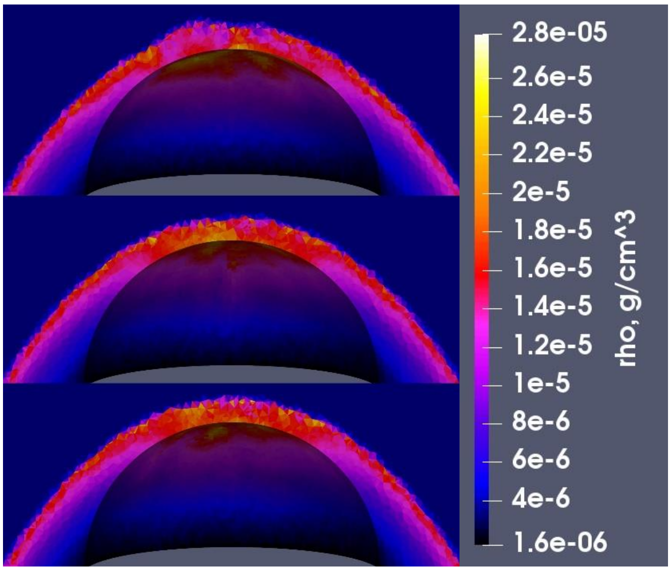
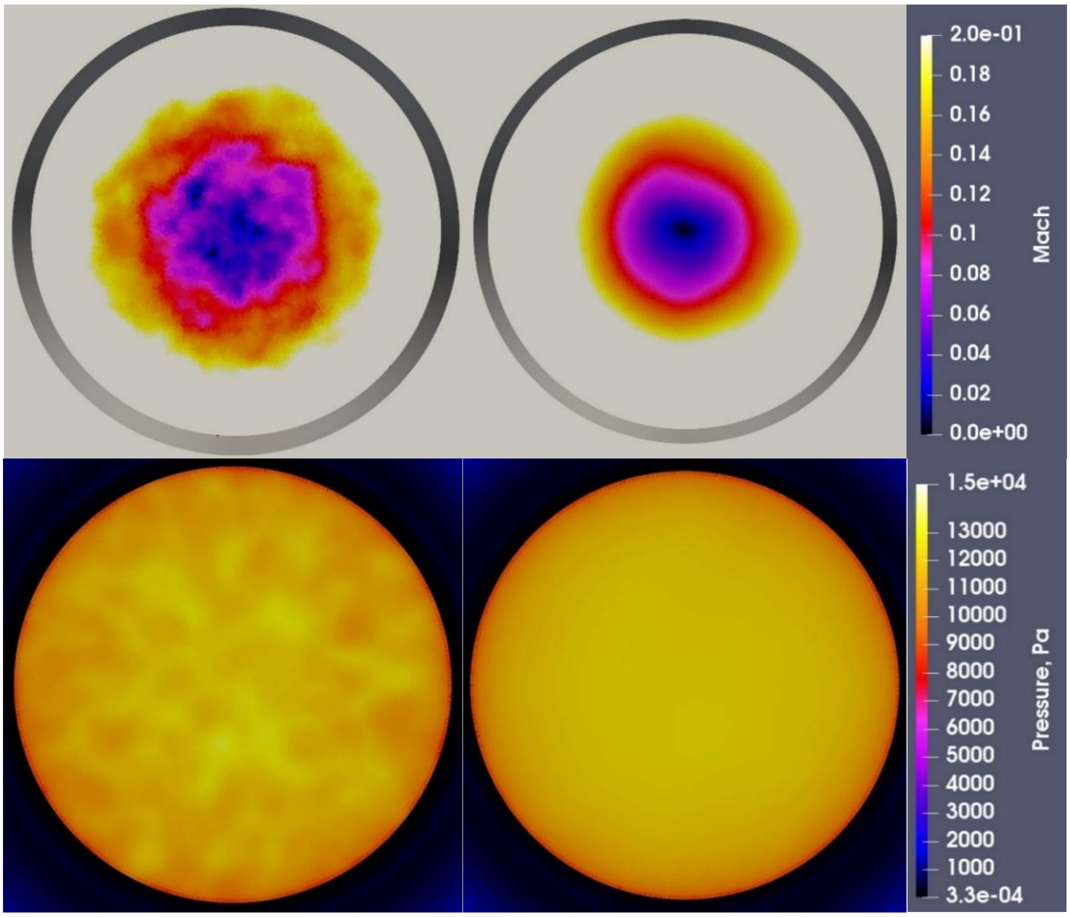


Рис. 23. Обтекание сферы, картины плотности: *а*) без использования модификации AUSM, *б*) с использованием AUSM - линейной аппроксимации давления, *в*) с использованием аппроксимации полиномом третьего порядка

На картине плотности (рис. 23) особенно заметно, что в случае применения методики без модификации AUSM в численном решении возникают пульсации параметров, затрудняющие выход на стационарный режим обтекания. Применение модифицированной схемы с любым порядком аппроксимирующего полинома улучшает результат расчета в области ударной волны. Ее форма в этом случае больше соответствует данным натурных экспериментов [13]. На фронте ударной волны видны заметные забросы по плотности, что наблюдается и в расчетах одномерных тестовых задач. К сожалению, в данном случае полностью устранить нефизичные осцилляции с помощью гибридного подхода, рассмотренного для одномерных тестов, не удалось. Здесь сказывается влияние сетки, состоящей из тетраэдральных ячеек. Результаты расчетов, полученные с помощью аппроксимаций давления полиномами третьего, пятого порядков и гибридного подхода (линейный + пятый порядок), оказываются идентичными. Поэтому на рис. 18-23 показаны только распределения, полученные по схеме с аппроксимацией третьего порядка.



а *б*

Рис. 24. Обтекание цилиндра, картины чисел Маха и давления: *а*) с использованием аппроксимации полиномом третьего порядка, *б*) метод HLL

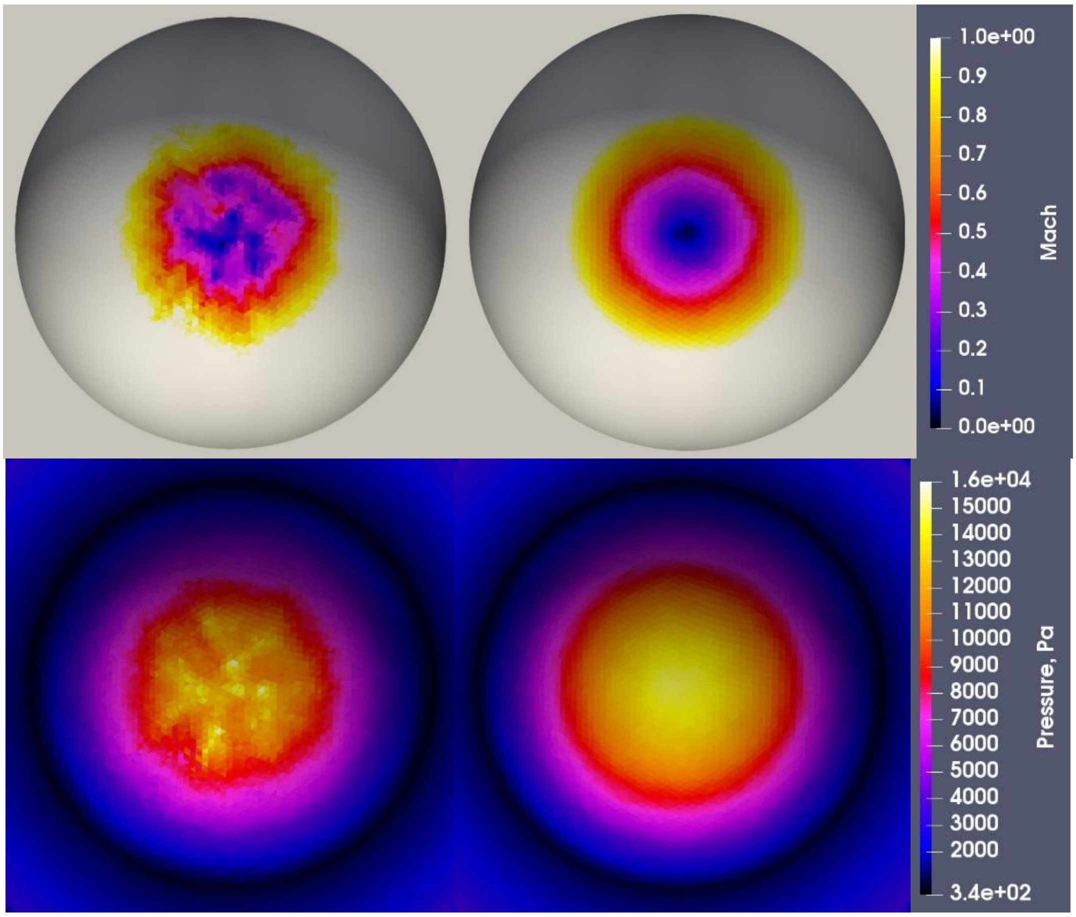
Поскольку в работе обсуждается возможность использования модификаций AUSM с целью повышения улучшения качества расчета при умеренных затратах машинного времени, целесообразно сравнить результаты расчетов по методике AUSM и по другой хорошо зарекомендовавшей себя методике. В качестве таковой выбрана методика на основе решения задачи Римана – HLL [5]. В последнем случае получается значительно более высокое качество численного решения, (рис. 24, 25), однако заметно возрастает время вычислений.

Параметры сеток, используемых в задачах, показаны в таблице 1.

Таблица 1

Параметры используемых для трёхмерных расчетов сеток

	Обтекание цилиндра	Обтекание сферы
Общее число тетраэдральных ячеек	775 392	1 672 923
Количество разбиений	24	48
Ячеек на 1 домен	32 308	~ 34 852
Конечное время счёта, мксек	20	40



а *б*

Рис. 25. Обтекание сферы, картины чисел Маха и давления:
а) с использованием аппроксимации полиномом третьего порядка,
б) метод HLL

В таблице 2 представлены времена расчетов для задач обтекания цилиндра и сферы.

Таблица 2

Времена счета тестовых трёхмерных задач при применении различных методов расчёта

	Обтекание цилиндра	Обтекание сферы
Без расщепления, сек	3 017	6 637
Полином первого порядка, сек	5 108	5 459
Полином третьего порядка, сек	6 568	5 566
Полином пятого порядка, сек	6 328	6 261
Гибридный подход, сек	6 397	6 312
Метод HLL с dt_1, сек	58 370	141 976
Метод HLL с dt_2, сек	16 901	12 908

В данной таблице dt_1 – временной шаг, использованный в расчетах с AUSM, dt_2 – оптимальный временной шаг для решения методом HLL.

Стоит отметить, что при обтекании торца цилиндра образуется в разы больше ячеек с дозвуковым течением и для каждой грани между ними в расчете добавляется одно дополнительное вычисление, именно по этой причине времена счета задачи с цилиндром без расщепления потока и с расщеплением так значительно увеличиваются (+70~117%). Но в то же время в задаче со сферой наблюдается даже небольшое ускорение, особенно при линейной аппроксимации (до 18%).

В сравнении с намного более точным методом HLL, методика частичного использования AUSM позволяет значительно сократить время счета даже при условии использования оптимального шага по времени для метода HLL. Так, в задаче с цилиндром, используя линейную аппроксимацию AUSM, в сравнении с методом HLL с оптимальным шагом по времени, ускорение достигает примерно 3.3 раза, а в задаче со сферой – примерно 1.75 раза.

Ускорение расчета обтекания сферы, как и иных тел, обладающих небольшой застойной зоной, будет более заметно на многомиллионных сетках и временах счета, много больше времени установления потока. Наряду с этим замедление расчета цилиндра или иного тела с “плоской” лобовой поверхностью не является значительным минусом метода, ведь при продолжительных расчетах необходима надёжность, а без использования расщепления потока могут возникать структуры численного происхождения – “карбункулы”, которые могут вызвать длительное занижение шага интегрирования по времени, а то и вовсе привести к прекращению счета.

Заключение

Результаты вычислительных экспериментов позволяют сделать следующие выводы. Частичное использование AUSM, а точнее применение этой методики только для корректировки поля давления, целесообразно для улучшения качества расчета. Методика оказывается экономичной по вычислительным ресурсам сравнительно с более точными методами, например, с методами на основе решения задачи Римана [5].

Как показало тестирование на одномерных задачах, использование гибридной аппроксимации давления позволяет решить проблему уточнения границ газодинамических разрывов. Вариантов аппроксимации давления имеется много, и выбор того или иного варианта зависит от постановки задачи обтекания затупленного тела. На основе результатов решения задачи Сода можно сделать вывод, что достаточно универсальным подходом является вариант гибридной аппроксимации. Граница отделения линейной аппроксимации от полиномиальной по параметру β может быть уточнена опытным путём. В примере задаче Лакса, где существенным является фактор притока газа в расчетную область, лучшие результаты показали аппроксимации полиномами третьего и пятого порядка с выбором параметра β на любой границе отрезка $\beta \in \left[-\frac{3}{4};\frac{3}{16}\right]$. Анализ схемы показывает, что частичный способ применения AUSM не сохраняет инвариантность при преобразовании Галилея. Это проявляется и на качестве численных результатов, зависимом от интенсивности потока на входе в расчетную область. Тем не менее метод позволяет увеличить точность расчета в области за ударной волной.

В целом результаты решения трёхмерных тестовых расчетов показывают, что модификация схемы с полиномиальной аппроксимацией давления позволяет заметно улучшить качество численного решения.

Предложенный вариант метода не является универсальным. Тем не менее в расчетах сверхзвукового обтекания затупленных тел сложной формы, при использовании неструктурированных тетраэдральных сеток, модифицированный метод AUSM позволяет подавить нефизичные эффекты. Также стоит отметить, что добавление минимального количества арифметических операций позволяет подавить значительное количество численных «карбункул»-неустойчивостей, тем самым повышая точность без больших потерь скорости вычислений. Это свойство предлагаемого варианта AUSM делает его полезным при выполнении больших серий оценочных расчетов, например, в аэродинамических расчетах высокоскоростных течений около зданий или технических объектов, форма которых обуславливает большое сопротивление набегающему потоку.

Библиографический список

1. Kuzmin D., Lohner R., Turek S. (Eds.) Flux-Corrected Transport. Springer Berlin Heidelberg New York, 2005.
2. Simiu Emil, Scanlan Robert H. Wind Effects on Structures. John Wiley & Sons, New York/Chichester/Brisbane/Toronto, 1984.
3. Родионов А.В. Разработка методов и программ для численного моделирования неравновесных сверхзвуковых течений в приложении к аэрокосмическим и астрофизическим задачам / Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н., г.Саров, 2019.
4. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Учёные записки ЦАГИ. Т. 3, №6, 68-76, 1972.
5. Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
6. Meng-Sing Liou, Christopher J.Steffen Jr. A new flux splitting scheme // Journal of Computational Physics 107, 23-39, 1993.
7. Meng-Sing Liou A sequel to AUSM: AUSM+ // Journal of Computational Physics 129, 364-382, 1996.
8. Meng-Sing Liou A Sequel to AUSM, Part II: AUSM+-up // Journal of Computational Physics V.214, 2006.
9. Котов Д.В., Суржиков С.Т. Расчет течений вязкого и невязкого газа на неструктурированных сетках с использованием схемы AUSM // Вычислительная механика сплошных сред. Т.4, №1, 36-54, 2011.
10. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Программный комплекс MARPLE / Гасилов В. А., Багдасаров Г. А., Болдарев А. С., Дьяченко С. В., Карташева Е. Л., Ольховская О. Г.; правообладатель ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. – № 2012660911; заявл. 11.10.2012; зарег. 30.12.2012.
11. Van Leer B. Flux-vector splitting for the Euler equations / 8th Int.Conf. on Num. Meth. in Fluid Dyn. Lecture Notes in Physics. V.170, 1982.
12. Liska R., Wendroff B. Comparison of Several Difference Schemes on 1D and 2D Test Problems for the Euler Equations // SIAM Journal on Scientific Computing, 25(3), 995-1017, 23p., 2006.
13. Milton Van Dyke An Album of Fluid Motion / Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Stanford, California, 1982.
14. Любимов А.Н., Русанов В.В. Течение газа около тупых тел. М.: Наука, 1970.