



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 46 за 2021 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

[А.В. Березин](#), [А.С. Духанин](#),  
[О.С. Косарев](#), [М.Б. Марков](#),  
[С.В. Паротькин](#), [Ю.В. Помазан](#),  
[И.А. Тараканов](#)

О моделировании ионизации  
газа быстрыми электронами

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** О моделировании ионизации газа быстрыми электронами / А.В. Березин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 46. 12 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-46>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-46>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**А.В. Березин, А.С. Духанин, О.С. Косарев, М.Б. Марков,  
С.В. Паротькин, Ю.В. Помазан, И.А. Тараканов**

**О моделировании ионизации газа  
быстрыми электронами**

**Москва – 2021**

*Березин А.В., Духанин А.С., Косарев О.С., Марков М.Б., Паротькин С.В.,  
Помазан Ю.В., Тараканов И.А.*

**О моделировании ионизации газа быстрыми электронами**

Рассмотрены газодинамические параметры ионизованной среды, образующейся при ударной ионизации разреженного газа быстрыми электронами. Концентрация, дрейфовая скорость и удельная энергия вторичных электронов малой энергии строятся путем приближенного решения кинетического уравнения. Применяются приближения пространственной однородности кинетического уравнения, изотропности начального распределения вторичных электронов при ударной ионизации. Дополнительные приближения связаны со структурой функции распределения вторичных электронов и усреднениями сечений.

**Ключевые слова:** электрон, ударная ионизация, функция распределения, концентрация, плотность тока, удельная энергия, электромагнитное поле

*Berezin A.V., Dukhanin A.S., Kosarev O.S., Markov M.B., Parot'kin S.V.,  
Pomazan Yu. V., Tarakanov I.A.*

**On the simulation of gas ionization by fast electrons**

The gas-dynamic parameters of an ionized medium formed during impact ionization of a rarefied gas by fast electrons are considered. The concentration, drift velocity, and specific energy of low-energy secondary electrons are constructed by an approximate solution of the kinetic equation. Approximations of the spatial homogeneity of the kinetic equation and the isotropy of the initial distribution of secondary electrons during impact ionization are used. Additional approximations are related to the structure of the distribution function of secondary electrons and averaging of the cross sections.

**Key words:** electron, impact ionization, distribution function, concentration, current density, specific energy, electromagnetic field

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-01-00419.

## Оглавление

Введение .....	3
1 Приближение пространственной неоднородности .....	4
2 Приближение симметрии функции распределения относительно электрического поля .....	7
3 Уравнения для моментов .....	8
4 Усреднения сечений .....	10
Заключение .....	12
Литература .....	12

## Введение

Распространение пучка электронов в газовой среде сопровождается упругим рассеянием, возбуждением и ударной ионизацией нейтральных молекул, а также тормозным излучением [1-3]. В области пучка и в дальней зоне образуется электромагнитное поле [4]. Оно обусловлено током как электронов пучка, так и вторичных заряженных частиц, образующихся при ударной ионизации [5]. К вторичным заряженным частицам относятся прежде всего медленные электроны.

Ударная ионизация молекул состоит в переходе одного из атомарных электронов в непрерывный спектр. Сечение ударной ионизации имеет характерную особенность. Оно обратно пропорционально квадрату энергии, теряемой рассеивающимся электроном [5-7]. Это означает, что наиболее вероятны акты ударной ионизации, при которых электрон пучка теряет мало энергии. Следует уточнить, что оба электрона в непрерывном спектре после ударной ионизации тождественно неразличимы. Будем считать первичным (пучковым) электроном ту частицу, которая имеет бóльшую энергию. Вторичный электрон имеет в среднем малую энергию.

Вторичные электроны оказывают существенное влияние на динамику пучка. Под действием самосогласованного электромагнитного поля пучка они дрейфуют, частично компенсируя ток пучка. Результатом является, например, бетатронная неустойчивость пучка [8]. Поэтому математическое моделирование распределений вторичных электронов является актуальной проблемой в области изучения электронных пучков.

В воздушной среде нормальной плотности вторичные электроны приходят в равновесие с газом за время, малое по сравнению с длительностью пучка. Оно составляет примерно 0.3 нс [9]. Распределение вторичных электронов становится максвелловским. Если рассеивающая среда разрежена, то приближение равновесия вторичных электронов с газом нарушается.

Данная работа посвящена изложению неравновесной модели тока вторичных электронов. Она разработана для моделирования распространения пучка быстрых электронов и генерируемого им электромагнитного поля в разреженной воздушной среде.

## 1 Приближение пространственной неоднородности

Рассмотрим поток электронов с высокой энергией в воздушной среде. Предполагается, что энергия электронов существенно превосходит средний потенциал ионизации молекул воздуха – 80 эВ. Распространение электронов описывается кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{v}f_e) - e \text{div}_p \left[ \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) f_e \right] + \text{St}[f_e] = Q_e, \quad (1)$$

где  $f_e = f_e(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$  – функция распределения электронов в фазовом пространстве координат  $\mathbf{r}$  и импульсов  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{v}$  – скорость,  $c$  – скорость света,  $e$  – заряд электрона,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t, \mathbf{r})$  – векторы напряженности электрического и магнитного полей.

Источник  $Q_e = Q_e(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$  определяет интенсивность образования электронов в каждой точке фазового пространства.

Функция распределения  $f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$  вторичных электронов, образующихся в результате ударной ионизации молекул воздуха, подчиняется следующему кинетическому уравнению:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{v}f) - e \text{div}_p \left( \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) f \right) + \text{St}[f] = Q, \quad (2)$$

где  $Q = Q(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$  – интенсивность образования вторичных электронов в фазовом пространстве при ударной ионизации газа электронами пучка.

Рассмотрим следующую из уравнения (2) оценку величины  $n(t, \mathbf{r})$  – концентрации вторичных электронов:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \int d\mathbf{p} \text{div}(\mathbf{v}f) + \int d\mathbf{p} \text{St}[f] = \int d\mathbf{p} Q.$$

Будем считать, что

$$\int d\mathbf{p} \mathbf{v} \text{div}(\mathbf{v}f) \ll \int d\mathbf{p} \mathbf{v} \text{St}[f].$$

Основанием являются соотношения:

$$\int d\mathbf{p} \text{div}(\mathbf{v}f) \sim p(v_\delta) v_\delta f / r_\delta, \quad \int d\mathbf{p} \mathbf{v} \text{St}[f] \sim p_\delta v_{atr} f,$$

$v_\delta < 10^9$  см/с – характерная скорость вторичных электронов,  $r_\delta$  – характерный пространственный размер, равный минимуму из длины пробега, дебаевского и

ларморовского радиусов первичных электронов. Длина пробега порядка 300 см в нормальных условиях, частота прилипания медленных электронов к молекулам кислорода  $\nu_{att} = 10^8$  1/с. Имеет место различие на порядок.

Рассмотрим уравнение для плотности тока  $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ , следующее из уравнения (2). Начальное распределение вторичных электронов будем предполагать изотропным:

$$-\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - e \int \mathbf{v} d\mathbf{p} \operatorname{div}(\mathbf{v}f) + \frac{e^2}{m} \mathbf{E}n - \frac{e}{mc} [\mathbf{j}, \mathbf{H}] - e \int \mathbf{v} d\mathbf{p} \operatorname{St}[f] = 0,$$

где  $\mathbf{j} = e n \mathbf{v}$  – плотность тока вторичных электронов.

Здесь пренебречь  $e \int \mathbf{v} d\mathbf{p} \operatorname{div}(\mathbf{v}f)$  по сравнению с  $e \int \mathbf{v} d\mathbf{p} \operatorname{St}[f]$  можно с бóльшим основанием, чем для концентрации. Основным столкновительным процессом, препятствующим набору направленной скорости электронами и возвращающим их распределение в изотропное состояние, является упругое рассеяние. Время транспортного пробега  $\tau_{tr}$  электрона относительно упругого рассеяния гораздо меньше времени прилипания.

Рассмотрим уравнение для средней удельной энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (n\bar{\varepsilon}) + \int d\mathbf{p} \frac{mv^2}{2} \operatorname{div}(\mathbf{v}f) - e \int d\mathbf{p} \frac{mv^2}{2} \operatorname{div}_p \left[ \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) f \right] + \\ + \int d\mathbf{p} \frac{mv^2}{2} \operatorname{St}[f] = \int d\mathbf{p} \frac{mv^2}{2} Q. \end{aligned}$$

Будем считать, что

$$\int d\mathbf{p} \frac{mv^2}{2} \operatorname{div}(\mathbf{v}f) \ll \int d\mathbf{p} \frac{mv^2}{2} \operatorname{St}[f].$$

Пренебрежем действием магнитного поля на вторичные электроны в силу  $v/c \ll 1$ . Интеграл столкновений рассмотрим в приближении релаксации к распределению, равновесному с газовой средой:

$$\operatorname{St}[f] = \frac{f - f_{eq}}{\tau_1(\varepsilon)},$$

где  $\tau_1(\varepsilon) = \frac{M}{m} \tau(\varepsilon)$  – время установления равновесной энергии электронов,  $f_{eq}$  – равновесная функция распределения молекул воздуха со средней тепловой энергией  $\varepsilon_0 = 0.039$  эв.

Тогда

$$\int d\mathbf{p} \frac{mv^2}{2} \text{St}[f_e] = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\tau_1(\varepsilon)}.$$

Оценки пространственных производных в уравнениях для первых трех моментов являются достаточным основанием для рассмотрения кинетического уравнения (2) в пространственно-однородном приближении:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - e \operatorname{div}_p \left( \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) f \right) + \text{St}[f] = Q. \quad (3)$$

Зависимость функции распределения от пространственных координат в уравнении (3) является параметрической и определяется неоднородностью правой части и коэффициентов уравнения.

Интеграл столкновений в уравнении (3) представляет собой сумму

$$\text{St}[f] = I^{el}[f] + I^{unl}[f] + I^{ion}[f]$$

слагаемых, описывающих взаимодействия вторичных электронов с нейтральными молекулами и ионами газовой среды:  $I^{el}$  – упругое рассеяние,  $I^{unl}$  – возбуждение,  $I^{ion}$  – ударную ионизацию.

Источник вторичных электронов вычисляется как свертка функции распределения первичных электронов и дифференциального сечения ионизационного рассеяния. Запишем импульс электрона в сферической системе координат:

$$\mathbf{p} = p\mathbf{\Omega} = (p, \chi, \mu), \quad (4)$$

где  $\chi$  – азимутальный «импульсный»,  $\mu$  – косинус полярного «импульсного» угла.

Учитывая, что

$$vf_e(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_e(t, \mathbf{r}, \varepsilon, \mathbf{\Omega}), \quad p^2 p'^2 \sigma_i^{ion}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = vv' \sigma_i^{ion}(\varepsilon, \varepsilon', \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}'),$$

запишем источник в следующем виде:

$$Q = \frac{1}{p^2} \sum_i \int_{2\varepsilon+b_i} d\varepsilon' \int_0^{2\pi} d\chi' \int_{-1}^1 d\mu' \sigma_i^{ion}(\varepsilon, \varepsilon', \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}') f_e(t, \mathbf{r}, \varepsilon', \mathbf{\Omega}'), \quad (5)$$

где пределы интегрирования по модулю импульса определяются из следующего условия. При ударной ионизации образуются два тождественно

неразличимых электрона – рассеянный первичный и вторичный. Энергия вторичного электрона, образующегося со скоростью  $v$ , меньше энергии второго электрона, то есть  $\varepsilon < \varepsilon' - b_i - \varepsilon$ , где  $b_i$  – энергия связи атомарного электрона на  $i$ -ом уровне в молекуле.

## 2 Приближение симметрии функции распределения относительно электрического поля

Рассмотрим зависимость функции распределения вторичных электронов от скорости. Предположим, что в заданной точке пространства функция распределения зависит от абсолютного значения скорости и от косинуса угла между направлениями скорости и электрического поля:

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = f(t, \mathbf{r}, v, \cos \theta).$$

Разложим функцию  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  в ряд по полиномам Лежандра аргумента  $\cos \theta$  и ограничимся первыми двумя членами ряда:

$$f(\cos \theta) = f_0(v)P_0(\cos \theta) + f_1(v)P_1(\cos \theta). \quad (6)$$

Функции  $f_0$  и  $f_1$  определяют макроскопические параметры распределения вторичных электронов – концентрацию  $n$ , поток  $nu$ , энергию единицы объема  $n\bar{\varepsilon}$ :

$$n = 4\pi \int_0^{\infty} v^2 dv f_0(v), \quad (7)$$

$$nu = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\infty} v^3 dv f_1(v), \quad (8)$$

$$n\bar{\varepsilon} = 4\pi \int_0^{\infty} v^2 dv \frac{mv^2}{2} f_0(v). \quad (9)$$

Подставим разложение (6) в кинетическое уравнение (3):

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_0 + f_1\mu) - \frac{e}{m} \operatorname{div}_v(\mathbf{E}(f_0 + f_1\mu)) + \operatorname{St}[(f_0 + f_1\mu)] = Q. \quad (10)$$

Получим уравнения для членов разложения (6):



$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{eE}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 f_1 = I_0^{el} + I_0^{unl} + I_0^{ion} + Q_0, \quad (11)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{1}{3} \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} = I_1^{el} + I_1^{unl} + I_1^{ion} + Q_1, \quad (12)$$

где:

$$I_0^{el} + I_0^{unl} + I_0^{ion} = \int_0^{2\pi} d\chi \int_{-1}^1 d\mu I^{ion}, \quad Q_0 = \int_0^{2\pi} d\chi \int_{-1}^1 d\mu Q,$$

$$I_1^{el} + I_1^{unl} + I_1^{ion} = \int_0^{2\pi} d\chi \int_{-1}^1 \mu d\mu (I^{el} + I^{unl} + I^{ion}), \quad Q_1 = \int_0^{2\pi} d\chi \int_{-1}^1 d\mu Q_1.$$

Здесь учтено, что возбуждение молекул и упругое рассеяние не меняют числа электронов.

### 3 Уравнения для моментов

Уравнение для концентрации получим из (11) путем умножения на  $4\pi dvv^2$  и интегрирования по скорости от 0 до  $\infty$ . Интеграл второго слагаемого в левой части (11) равен нулю. Интегралы  $I_0^{el}$  и  $I_0^{unl}$  равны нулю. Для интеграла ионизационного рассеяния получим:

$$\begin{aligned} 4\pi \int_0^{\infty} v^2 dv I_0^{ion} &= 4\pi \int_0^{\infty} v^2 dv N \sum_i \left[ \int_{\varepsilon' > \varepsilon + b_i} dv' v'^3 \sigma_i^{ion}(v', v) f_0(v') - \sigma_i^{ion}(v) v f_0(v) \right] = \\ &= 4\pi N v_0 \sum_i \int_{b_i}^{\infty} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \sigma^{ion}(\varepsilon) \tilde{f}_0(\varepsilon). \end{aligned}$$

Рассмотрим нулевой момент источника вторичных электронов:

$$Q_0 = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \sum_i \int_{\varepsilon' > 2\varepsilon + b_i} dv' N \sigma_i^{ion}(v', v, \mathbf{\Omega}' \mathbf{\Omega}) v f_e(v', \mathbf{\Omega}')$$

для функции распределения первичных электронов, представляющей собой составляющую обобщенного решения кинетического уравнения:

$$f_e(t, \mathbf{v}) = h_{ext}(t, \mathbf{r}) \frac{\delta(v - v_{ext}) \delta(\varphi - \varphi_{ext}) \delta(\mu - \mu_{ext})}{v^2},$$

где  $\mathbf{v}_{ext} = \mathbf{v}_{ext}(t)$  – решение уравнения движения первичного электрона в самосогласованном электромагнитном поле.

Получим источник:

$$4\pi \int_0^\infty v^2 dv Q_0 = h_{ext}(t) \sum_i v_{ext} N \sigma_i^{ion}(\varepsilon_{ext}),$$

где  $\varepsilon_{ext} = mv_{ext}^2/2$ .

Тогда уравнение для концентрации имеет вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 4\pi N v_0 \int_{b_{min}}^\infty d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \sigma^{ion}(\varepsilon) \tilde{f}_0(\varepsilon) + h_{ext}(t) v_{ext} N \sigma^{ion}(\varepsilon_{ext}), \quad (13)$$

где  $b_{min}$  – минимальная энергия связи.

Уравнение для потока  $ni$  получим из (12) умножением его на  $4\pi dv v^3$  и интегрированием от 0 до  $\infty$ . Интеграл от второго слагаемого в левой части (12) равен  $eEn/m$ .

$$\frac{4\pi}{3} \int_0^\infty v^3 dv (I_1^{el} + I_1^{unl} + I_1^{ion}) = -\frac{4\pi}{3} N \int_0^\infty dv v^3 \sigma(v) v f_1(v),$$

где  $\sigma(v) = \sigma^{tr}(v) + \sigma^{unl}(v) + \sigma^{ion}(v)$ .

Будем считать  $Q_1 = 0$ , то есть начальное распределение вторичных электронов изотропно.

Тогда получим следующее уравнение для потока:

$$\frac{\partial ni}{\partial t} + \frac{eEn}{m} = -\frac{4\pi}{3} N \int_0^\infty dv v^3 \sigma(v) v f_1(v). \quad (14)$$

Здесь предполагается, что  $Q_1 = 0$ , то есть начальное распределение вторичных электронов с малой энергией изотропно.

Уравнение для удельной энергии  $n\bar{\varepsilon}$  получим из (11) путем умножения его на  $2\pi dv v^2 mv^2$  и интегрирования от 0 до  $\infty$ .

Интеграл от второго слагаемого в левой части (11) равен  $eEni$ . Для компонент интеграла столкновений имеют место соотношения:

$$4\pi \int_0^{\infty} dv v^2 \frac{mv^2}{2} I_0^{el} = -v_0 4\pi \varepsilon_0 \int_0^{\infty} d\varepsilon \cdot \varepsilon f_0(v) \delta \sqrt{\varepsilon} N \sigma^{tr}(\varepsilon),$$

$$4\pi \int_0^{\infty} dv v^2 \frac{mv^2}{2} I_0^{unl} = -v_0 4\pi \varepsilon_0 \sum_i \int_{b_i}^{\infty} d\varepsilon \cdot \varepsilon f_0(\varepsilon) \frac{b_i}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} N \sigma_i^{unl}(\varepsilon),$$

$$4\pi \int_0^{\infty} dv v^2 \frac{mv^2}{2} I_0^{ion} = -v_0 4\pi \varepsilon_0 \sum_i \int_{b_i}^{\infty} d\varepsilon \cdot \varepsilon f_0(\varepsilon) \frac{b_i}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} N \sigma_i^{unl}(\varepsilon),$$

где  $\delta = 2m/M$ ,  $b_i$  – пороговая энергия возбуждения  $i$ -го уровня энергии.

В сумме три последних интеграла дают

$$-v_0 4\pi \varepsilon_0 \int_0^{\infty} d\varepsilon \cdot \varepsilon f_0(\varepsilon) \cdot \sqrt{\varepsilon} \left[ \delta N \sigma^{tr}(\varepsilon) + \sum_i \frac{b_i}{\varepsilon} N \sigma_i^{unl}(\varepsilon) \right].$$

Соответствующий интеграл от  $Q_0$  равен  $h_{ext}(t) \varepsilon^{cp}(\varepsilon_{ext}) v_{ext} N \sigma^{ion}(\varepsilon_{ext})$ , где

$$\varepsilon^{cp}(\varepsilon_{ext}) = \sum_i \int_0^{(\varepsilon_{ext}-b_i)/2} d\varepsilon \varepsilon \sigma_i^{ion}(\varepsilon_{ext}, \varepsilon) / \sum_i \sigma_i^{ion}(\varepsilon_{ext}).$$

Тогда уравнение для энергии получается следующим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n \bar{\varepsilon}}{\partial t} + e E n u = & -v_0 4\pi \varepsilon_0 \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon f_0(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} \left[ \delta N \sigma^{tr}(\varepsilon) + \sum_i \frac{b_i}{\varepsilon} N \sigma_i(\varepsilon) \right] + \\ & + h_{ext}(t) \varepsilon^{cp}(\varepsilon_{ext}) v_{ext} N \sigma^{ion}(\varepsilon_{ext}). \end{aligned} \quad (15)$$

## 4 Усреднения сечений

Уравнение (13) для концентрации вторичных электронов запишем в виде:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = N v_0 \int_{b_{min}}^{\infty} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \sigma^{ion}(\varepsilon) \tilde{f}_0(\varepsilon) n / \int_0^{\infty} d\varepsilon \tilde{f}_0(\varepsilon) + h_{ext}(t) v_{ext} N \sigma^{ion}(\varepsilon_{ext}).$$

Вынося за знак интеграла в числителе функцию  $\sqrt{\varepsilon} \sigma^{ion}(\varepsilon)$ , в некоторой промежуточной точке  $\varepsilon^*$  получим:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = v_0 \sqrt{\varepsilon^*} N \sigma^{ion}(\varepsilon^*) \alpha(t) n + h_{ext}(t) v_{ext} N \sigma^{ion}(\varepsilon_{ext}), \quad (16)$$

где  $\alpha(t) = \int_{b_{min}}^{\infty} d\varepsilon \tilde{f}_0(\varepsilon) / \int_0^{\infty} d\varepsilon \tilde{f}_0(\varepsilon)$  – доля электронов с энергией выше минимального порога ионизации. Величину  $\varepsilon^*$  положим равной  $\bar{\varepsilon}$ . Априорно оценить вносимую таким образом погрешность не представляется возможным. Для  $\alpha(t)$  можно сделать оценку сверху, заменив  $f_0(\varepsilon)$  на  $\sigma^{ion}(\varepsilon_{ext}, \varepsilon)$ . Такая оценка будет близка к реальности только при малых временах, в дальнейшем  $\alpha(t)$  существенно уменьшится из-за деградации спектра.

В уравнении (12) для потока вынесем за знак интеграла  $\sigma(v)v$ . Получим:

$$\frac{\partial nu}{\partial t} + \frac{eEn}{m} = -v^{**} N \sigma(v^{**}) \frac{4\pi}{3} \int_0^{\infty} dv v^3 f_1(v) = -v^{**} N \sigma(v^{**}) nu.$$

Переходя в аргументе сечения к энергии, получим:

$$\frac{\partial nu}{\partial t} + \frac{eEn}{m} = -v_0 \sqrt{\varepsilon^{**}} N \sigma(\varepsilon^{**}) nu.$$

Положим  $\varepsilon^{**} = \bar{\varepsilon}$ , тогда

$$\frac{\partial nu}{\partial t} + \frac{eEn}{m} = -v(\bar{\varepsilon}) nu, \quad (17)$$

где  $v(\varepsilon) = v_0 \sqrt{\varepsilon} N \sigma(\varepsilon)$  – суммарная частота всех столкновений.

В уравнении (15) для удельной энергии вынесем за знак интеграла  $\sqrt{\varepsilon}[\cdot]$ .

Получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n\bar{\varepsilon}}{\partial t} + eEnu = -v_0 \sqrt{\varepsilon^{***}} \left[ \delta N \sigma^{tr}(\varepsilon^{***}) + \sum_i \frac{b_i}{\varepsilon^{***}} N \sigma_i^{unl, ion}(\varepsilon^{***}) \right] n\bar{\varepsilon} + \\ + h_{ext}(t) \varepsilon^{cp}(\varepsilon_{ext}) v_{ext} N \sigma^{ion}(\varepsilon_{ext}). \end{aligned}$$

Положим  $\varepsilon^{***} = \bar{\varepsilon}$ , тогда

$$\frac{\partial n\bar{\varepsilon}}{\partial t} + eEnu = -v_1(\bar{\varepsilon}) n\bar{\varepsilon} + h_{ext}(t) \varepsilon^{cp}(\varepsilon_{ext}) v_{ext} N \sigma^{ion}(\varepsilon_{ext}), \quad (18)$$

где  $v_1(\varepsilon) = v_0 \sqrt{\varepsilon} \left[ \delta N \sigma^{tr}(\varepsilon) + \sum_i \frac{b_i}{\varepsilon} N \sigma_i^{unl, ion}(\varepsilon) \right]$ .

Уравнения (16-18) определяют все величины, необходимые для моделирования самосогласованного электромагнитного поля, генерируемого пучком электронов при распространении в разреженной газовой среде.

## Заключение

Быстрый электрон проходит свой тормозной путь в рассеивающей среде, испытав при этом количество столкновений, равное по порядку величины отношению его начальной энергии к потенциалу ионизации. При начальной энергии порядка 1 МэВ это количество столкновений может достигать десятков тысяч. Та же ситуация имеет место и для упругого рассеяния. Здесь наиболее вероятны отклонения на малые углы [2]. Тормозное излучение при энергии порядка 1 МэВ несущественно по сравнению с ударной ионизацией.

Авторами данной работы разработана математическая модель, способная моделировать все эти столкновения напрямую, без приближений и усреднений [10]. Модель основана на статистическом методе частиц, сочетающем решение уравнений движения частиц в электромагнитном поле со стохастическим моделированием столкновений всех типов. В частности, после ударной ионизации оба электрона рассматриваются в рамках уравнения (1). Применение этой модели показало, что в практических задачах она требует недопустимого объема вычислений из-за необходимости моделировать огромное число столкновений.

Представленная «газодинамическая» приближенная модель резко сокращает объем вычислений. При этом, безусловно, необходимо ее подтверждение с помощью полной кинетической модели. Данное подтверждение является ближайшей задачей авторов.

## Литература

1. Экспериментальная ядерная физика. / под ред. Сегре Э., т. 1. – М.: Иностранная литература, 1958.
2. Мотт Н., Мэсси Г. Теория атомных столкновений. – М.: МИР, 1969.
3. Мэсси Г., Бархоп Е. Электронные и ионные столкновения. – М.: МИР, 1958.
4. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Теория поля. – Издание 8-е, стереотипное. – М.: Физматлит, 2006. – 534 с. – («Теоретическая физика», т. II). – ISBN 5-9221-0056-4.
5. Kim Y.-K., Rudd M.E. Theory for Ionization of Molecules by Electrons. – Phys. Rev. 1994, A 50, pp. 3954-3967.
6. Hwang W., Kim Y.-K., Rudd M.E. J. New Model for Electron-Impact Ionization Cross Sections of Atmospheric Molecules. – Chem. Phys. 1996, 104, pp. 2956-2966.

7. Kim Y.-K., Hwang W., Weinberger N. M. Electron-impact ionization cross sections of atmospheric molecules. – J. Chem. Phys. 1997, 106 (3), pp. 1026-1033.
8. Бенфорд Г., Бук Д. Равновесие релятивистского пучка. В кн. «Достижения физики плазмы». М.: Мир, 1974, с. 32.
9. Марков М.Б., Паротькин С.В. «Кинетическая модель радиационной проводимости газа», Матем. моделирование, 23:4 (2011), 41-56.
10. Березин А.В., Воронцов А.С., Жуковский М.Е., Марков М.Б., Паротькин С.В. «Метод частиц для электронов в рассеивающей среде», Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 55:9 (2015), 1566-1578.