ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 6 за 2021 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Ю.Ф. Голубев, А.В. Грушевский,
В.В. Корянов, А.Г. Тучин,
Д.А. Тучин

Обобщённая формула Резерфорда и оптимизация пучкового моделирования гравитационных манёвров в Солнечной системе

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Обобщённая формула Резерфорда и оптимизация пучкового моделирования гравитационных манёвров в Солнечной системе / Ю.Ф. Голубев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 6. 31 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2021-6
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-6

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Ю.Ф. Голубев, А.В. Грушевский,
В.В. Корянов, А.Г. Тучин, Д.А. Тучин

Обобщённая формула Резерфорда и оптимизация пучкового моделирования гравитационных манёвров в Солнечной системе

Москва — 2021

Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А.

Обобщённая формула Резерфорда и оптимизация пучкового моделирования гравитационных манёвров в Солнечной системе

Получена обобщенная формула Резерфорда для гравитационного рассеяния. Представлены гарантирующие полуаналитические оценки для достаточного числа виртуальных траекторий КА в пучке при моделировании гравитационных маневров около массивных тел Солнечной системы, обеспечивающего перманентность процедуры поиска баллистических сценариев межпланетных миссий. Особое значение здесь приобретает гарантированное проведение синтеза цепочек гравитационных манёвров с переотскоками при необходимости изменить асимптотическую скорость КА относительно планеты.

Ключевые слова: гравитационное рассеяние, пучки траекторий, обобщённая формула Резерфорда, дуплетные гравитационные манёвры

Golubev Yu.F., Grushevskii A.V., Koryanov V.V., Tuchin A.G., Tuchin D.A.

Rutherford's extended formula and optimization of the gravity assists beam modeling in the Solar system

The extended Rutherford formula for the gravitational scattering is obtained. Semi-analytical guaranteeing estimates are presented for a sufficient number of a spacecraft' virtual trajectories in a beam when simulating gravity assist maneuvers around the Solar system massive bodies which are forming the unceasing procedure for searching for the interplanetary ballistic scenarios. A special importance here is assured by the guaranteed synthesis of the bang-bang gravity assist maneuvers chains if it is necessary to change the asymptotic velocity of the spacecraft relative to the planet.

Keywords: gravitational scattering, trajectory beams, extended Rutherford's formula, bang-bang gravity assists

Введение

Формула Резерфорда для рассеяния заряженных α-частиц в кулоновском поле может быть легко обобщена на случай гравитационного рассеяния, учитывая факт инвариантности этой формулы относительно знака силы (притягивающей либо отталкивающей). Одним из типов гравитационного рассеяния в Солнечной системе являются гравитационные манёвры (ГМ). В работе для них по аналогии вводится эффективное гравитационное сечение рассеяния и получены обобщенные формулы Резерфорда для гравитационного рассеяния. В результате проведения их анализа получены гарантирующие полуаналитические оценки для достаточного числа виртуальных траекторий КА в пучке при моделировании ГМ около массивных тел Солнечной системы, обеспечивающего реализацию итерационной процедуры поиска баллистических сценариев межпланетных миссий. Особое значение здесь приобретает гарантированное проведение синтеза цепочек ГМ с переотскоками при необходимости изменить асимптотическую скорость КА относительно планеты.

1. Кулоновское и гравитационное рассеяние

В астродинамике баллистический анализ полетов КА в дальнем космосе с использованием гравитационных маневров (фактически – гравитационного рассеяния пробных частиц массивными телами Солнечной системы) проводится обычно с помощью традиционного исследования конечного набора задач Коши и Ламберта [1-3]. Изучение и описание аналогичных процессов в физике (кулоновское рассеяние заряженных частиц) проводится в ином ключе – с введением в рассмотрение пучка заряженных частиц – сонаправленного компактного потока однородных частиц [4-6]. В последние годы при решении задач баллистического анализа и построения адаптивных сценариев проведения КА гравитационных маневров в астродинамике также наметился тренд по использованию пучковых алгоритмов с целью синтеза точных требуемых траекторий КА в полных эфемеридах [1-3, 7-10]. Здесь уже вместо ансамбля траекторий заряженных частиц фигурирует пучок виртуальных траекторий КА с почти совпадающей скоростью [1-3]. В этом контексте представляет интерес синтез обоих подходов при решении конкретных задач баллистического анализа с гравитационным рассеянием: гравитационного [1-3] и кулоновского [4-6].

Сначала рассмотрим кулоновское рассеяние [4-6].

Выпишем силовую функцию $U_{Coulomb}$ кулоновского взаимодействия частиц [5, 6]:

$U_{Coulomb} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_\alpha \, q_{aim}}{r}$, где $\varepsilon_0 \approx 8{,}85418781762 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная, q_α , q_{aim} – одноименные заряды частицы и рассеивающей мишени соответственно, r – расстояние между их центрами.

Для угла рассеяния φ (угла между исходным и отражённым векторами асимптотической скорости заряженной альфа-частицы $\mathbf{V}_{\infty,in}$ и $\mathbf{V}_{\infty,out}$) будет верно соотношение (рис. 1, а):

$$tg\,\frac{|\varphi|}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_\alpha q_{aim}|}{m\,b\,V_\infty^2}, \qquad (1)$$

где $V_\infty = \|\mathbf{V}_{\infty,in}\| = \|\mathbf{V}_{\infty,out}\|$, m – приведённая масса, $m = \frac{m_\alpha m_{aim}}{m_\alpha + m_{aim}}$, b – величина прицельной дальности [2, 5].

Учитывая, что если $m_{aim} >> m_\alpha$, то приведённая масса $m = \frac{m_\alpha}{1 + m_\alpha / m_{aim}} \approx m_\alpha$, $m \approx m_\alpha$ и для угла рассеяния φ будет выполнено:

$$tg\,\frac{|\varphi|}{2} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_\alpha q_{aim}|}{m_\alpha\, b V_\infty^2}. \qquad (2)$$

Заметим, что формулы (1), (2) остаются справедливыми и в том случае, когда заряды разноименные.

Поскольку структуры силовой функции гравитационного взаимодействия двух массивных тел U_{grav} и кулоновского электрического поля для двух заряженных частиц $U_{Coulomb}$ оказываются идентичным, появляется возможность применения аналогов формул (1) и (2) в случае гравитационного рассеяния. Аналогом альфа-частицы с зарядом q_α становится космический аппарат (КА) с массой m_{sc}, аналогом ускорения рассеивающей мишени $a_{aim} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{aim}}{r}$ становится гравитационное воздействие малого тела, которому соответствует ускорение $a_p = -\frac{\mu_p}{r}$ (планеты, спутника планеты или астероида) с массой m_p и гравитационным параметром $\mu_p = Gm_p$, где G – гравитационная постоянная.

Гравитационное рассеяние определяется вектором Лапласа $\mathbf{\Lambda}$ [11]

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{v}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) - \frac{\mu_p}{r}\mathbf{r},$$

направленным из центра мишени в сторону перицентра орбиты. Для бесконечно удаленной точки орбиты будет выполнено $\mathbf{r}/r = -\mathbf{V}_\infty / V_\infty$. Следовательно,

$$\mathbf{\Lambda} = V_\infty^2\mathbf{b} + \frac{\mu_p}{V_\infty}\mathbf{V}_\infty,$$

где $\mathbf{b}$ – вектор прицельной дальности. Видим, что при изменении $\mathbf{b}$ вектор Лапласа поворачивается вокруг центра планеты-мишени, смещая в пространстве соответствующим образом перицентр пролетной орбиты. Угол гравитационного рассеяния φ есть угол, дополнительный до π к углу между двумя асимптотами траектории, а вектор Лапласа определяет биссектрису угла между асимптотами. Поэтому

$$tg\,\frac{\varphi}{2} = \frac{\mu_p}{bV_\infty^2}. \tag{3}$$

Очевидно, что эта формула служит аналогом формулы (2) и формально может быть получена из (2) с помощью замены:

$$m_\alpha \to m_{sc},\, q_\alpha \to -m_{sc},\, q_{aim} \to m_p,\, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to G.$$

Замечание 1. В астродинамике φ называется углом поворота вектора асимптотической скорости при совершении гравитационного манёвра. При его вычислении вместо прицельной дальности b чаще используется минимальное расстояние до КА от центра планеты R_π (очевидно – расстояние перицентра пролётной гиперболы) [2-3, 12], при этом вместо (3) чаще используется выражение

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{e} = \frac{1}{1+\dfrac{R_\pi}{\mu_p}V_\infty^2}, \tag{4}$$

где e – эксцентриситет пролётной гиперболы.

Выражение (4) не используется в физике элементарных частиц по понятным причинам: в отличие от прицельной дальности b, экспериментальное определение R_π для α-частиц труднореализуемо.

Очевидно, что R_π не может быть меньше радиуса планеты R_p, поэтому для максимального угла поворота вектора асимптотической скорости φ_{max} будет выполнено:

$$\sin\frac{\varphi_{max}}{2} = \frac{1}{1+(R_p/\mu_p)V_\infty^2} = \frac{1}{1+V_\infty^2/V_{pc}^2}, \tag{5}$$

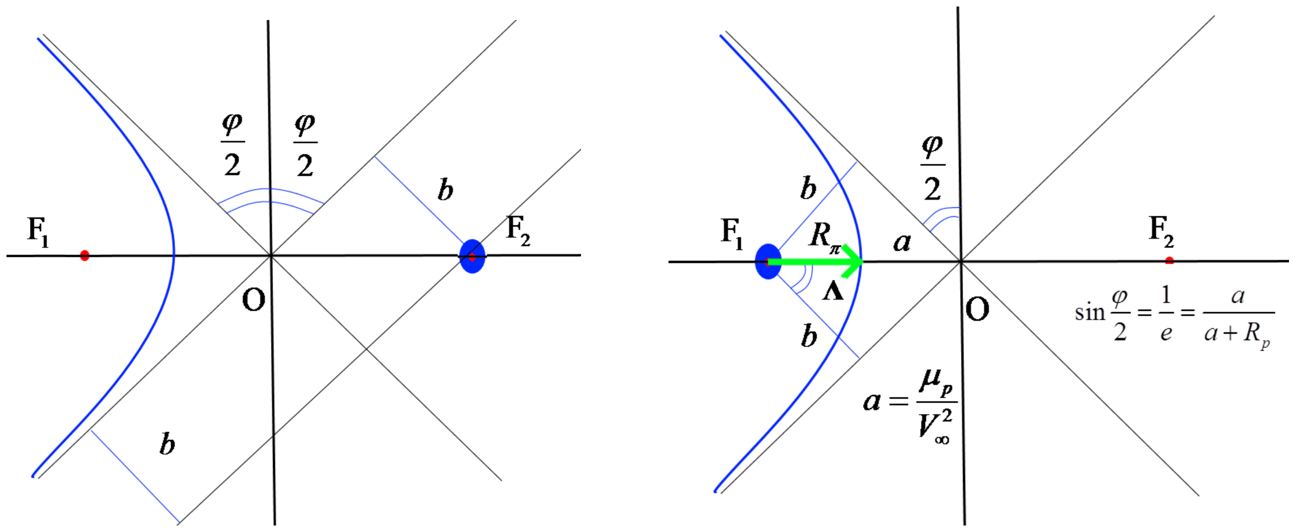
где $V_{pc} = \sqrt{\mu_p/R_p}$ – первая космическая скорость около поверхности планеты. Указанному случаю соответствует минимальное допустимое значение прицельной дальности в пучке $b_{\min}$, обеспечивающее проведение гравитационного маневра.

Подставляя в (3) выражение для прицельной дальности b [2-3, 12]

$$b = R_\pi \sqrt{1 + 2\,\frac{\mu_p}{R_\pi V_\infty^2}} \tag{6}$$

и воспользовавшись тождеством $ctg^2\dfrac{\varphi}{2} = \sec^2\dfrac{\varphi}{2} - 1$, приходим к классическому «астродинамическому» результату (4), что лишний раз подтверждает эквивалентность обоих способов описания угла поворота φ: «кулоновского» и гравитационного [2, 4-6].

Отличие геометрии рассеяния заряженных частиц и гравитационного рассеяния виртуальных траекторий КА на гравитационном манёвре иллюстрируют рис. 1, а и рис. 1, б. Практически разница заключается в инверсии номера фокуса, в котором расположено возмущающее тело.



а б

Рис. 1. Геометрия кулоновского и гравитационного рассеяния.
Зеленый вектор на рис. 1, б – вектор Лапласа $\mathbf{\Lambda}$

Структура гравитационного и кулоновского рассеяния схематически представлена на рис. 2, 3.

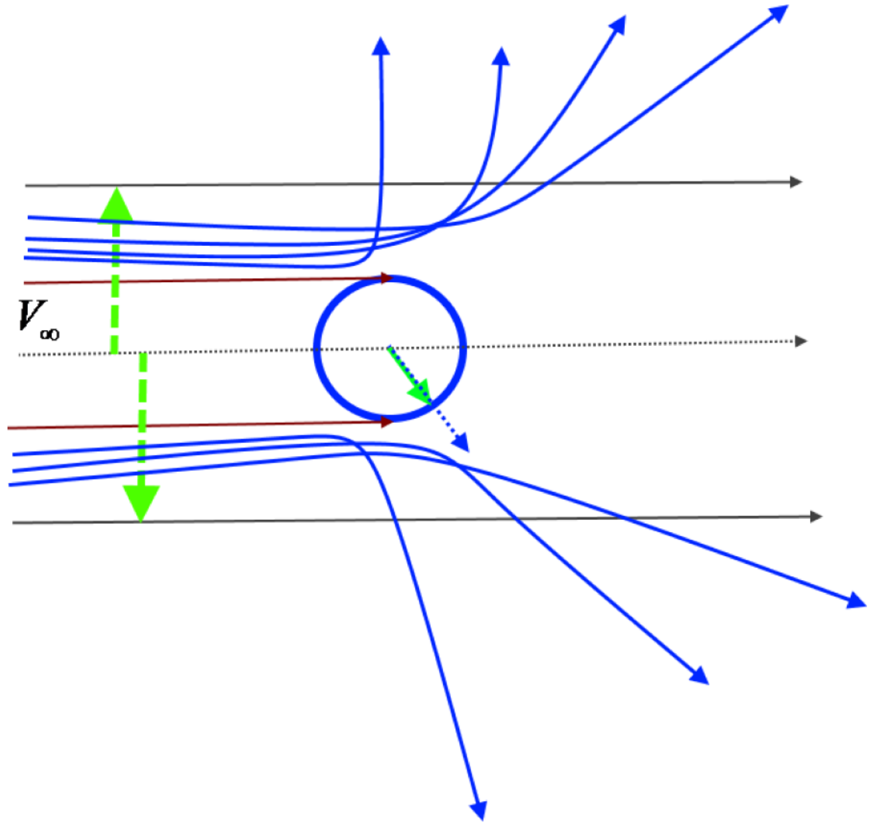


Рис. 2. Структура кулоновского рассеяния (“кубок”). Все соседние траектории расходятся с обязательным пересечением. Синий круг – рассеивающее зараженное ядро

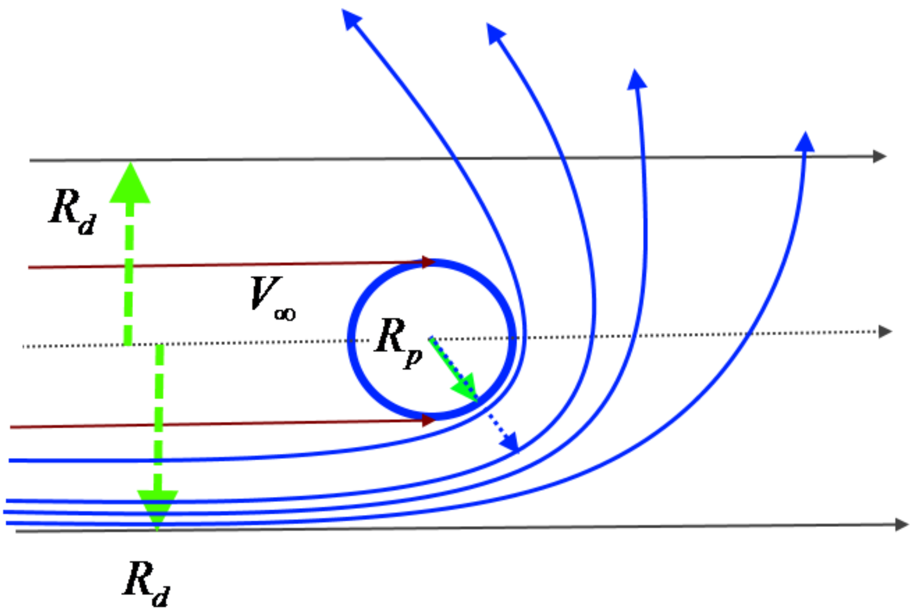


Рис. 3 а. Структура гравитационного рассеяния. Соседние траектории расходятся, не пересекаясь. Синий круг – рассеивающая планета-мишень. R_d – ширина трубки траекторий, равная радиусу сферы действия планеты

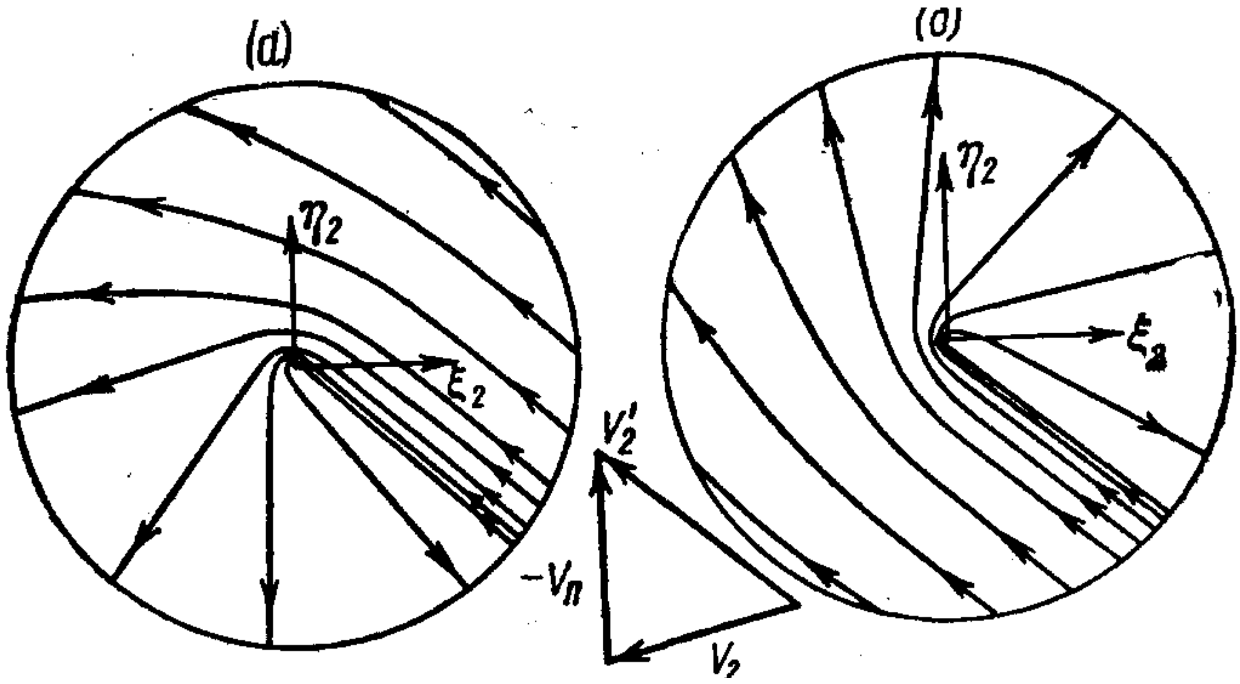


Рис. 3 б. Структура гравитационного рассеяния на прототипах В.А Егорова пучковых диаграмм [13]. Точки входа занимают примерно половину сферы действия. Соседние траектории расходятся, не пересекаясь

Утверждение. В предположении малости размеров сфер действия планет относительно протяженности межпланетных дуг (метод конических сечений – МКС) либо малости размеров рассеивающего центра относительно рассеянных кулоновских траекторий обе структуры рассеяния, кулоновское и гравитационное, становятся топологически идентичными одной общей структуре типа рассеивающей линзы, действие которой схематично изображено на рис. 4.

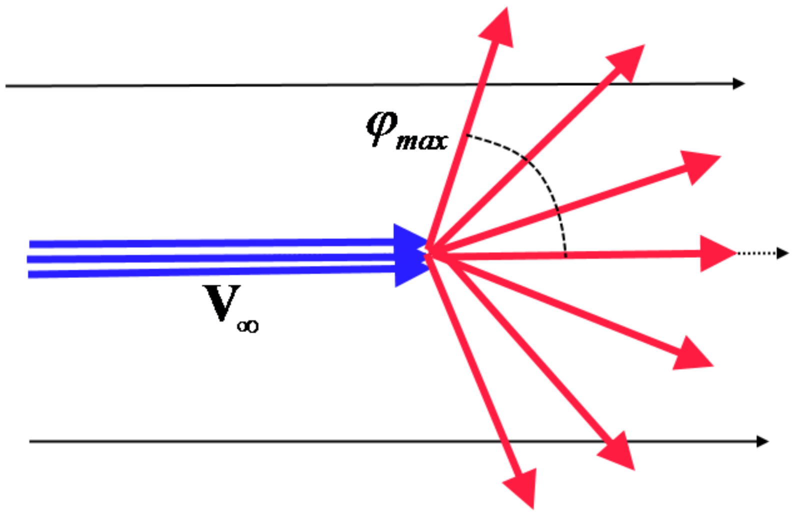


Рис. 4. Общая схема рассеяния в рамках МКС

В пространственном, 3D-случае структуру гравитационного и атомного рассеяния может эффективно представить $\mathbf{V}_\infty$-*сфера* [2, 7-9] (рис. 5), которая строится следующим образом. Рассматривается область, образованная концами возможных векторов асимптотической скорости $\mathbf{V}_\infty$ после совершения гравитационного манёвра при заданном векторе входной асимптотической скорости. Эта область представляет собой пересечение $\mathbf{V}_\infty$-*сферы* и телесного угла с раствором равным $\varphi_{\max}$ (сферической шапочкой).

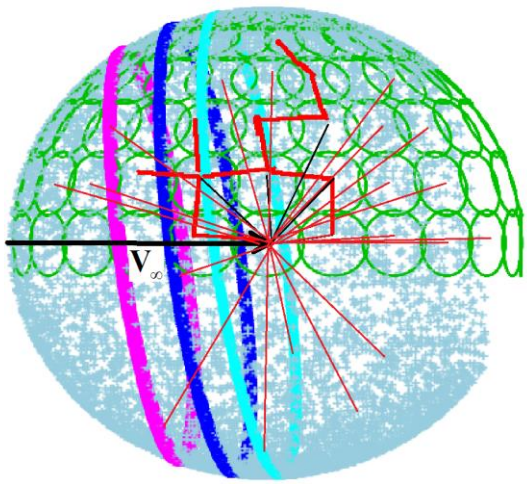


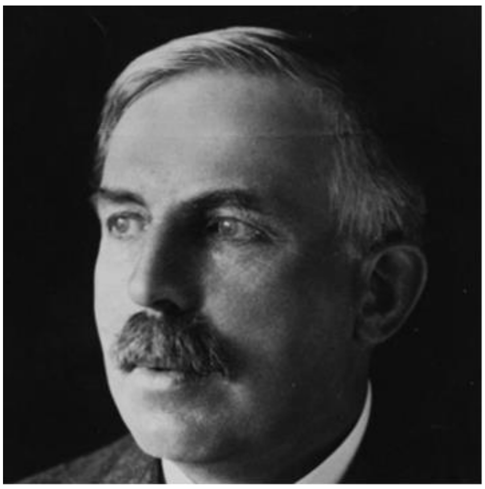
Рис. 5. 3D-структура гравитационного рассеяния в рамках МКС

2. Обобщённая формула Резерфорда для гравитационных воздействий

Как уже было отмечено выше, структуры силовой функции гравитационного взаимодействия U_{grav} и кулоновского электрического поля для разнозаряженных частиц $U_{Coulomb}$ оказываются полностью идентичными (рис. 4, 5). При исследовании поведения ансамбля траекторий пучку альфа-частиц соответствует пучок (трубка) динамически допустимых траекторий КА с инвариантным вектором $\mathbf{V}_\infty$ асимптотической скорости КА относительно рассеивающей мишени (планеты). Поведение пучка заряженных частиц при рассеянии описывается формулой Резерфорда [4-6]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q_\alpha \, q_{aim}}{8\pi\varepsilon_0 \, m_\alpha \, V_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \dfrac{\varphi}{2}}, \tag{7}$$

где $d\sigma$ – элементарная площадка нерассеянного пучка (так что число проходящих через неё частиц $dN = n\, d\sigma$, n – интенсивность пучка, характеризующая число частиц, проходящих через нормальную единичную поверхность за единицу времени), $d\Omega$ – телесный угол, в который попадают соответствующие альфа-частицы после рассеяния (рис. 5, 6, 7). Единицей измерения телесного угла в системе СИ является стерадиан, $d\sigma$ измеряется в м^2.



Эрнест Резерфорд, 1-й барон Резерфорд Нельсонский (1871/08/30 – 1937/10/19) — британский физик новозеландского происхождения, «отец» ядерной физики, почетный член Российской академии наук (1925). Сотрудник его лаборатории А.С. Рассел так описывал способность Резерфорда создавать грубые на вид, но поразительно приспособленные для экспериментальной работы приборы: "Одним движением издалека Резерфорд попадал ниткой в ушко иголки". В 1911 году своим знаменитым опытом рассеяния альфа-частиц доказал существование в атомах положительно заряженного ядра и отрицательно заряженных электронов вокруг него. На основе результатов опыта создал планетарную модель атома.

Получим *аналог формулы Резерфорда для рассеяния виртуальных траекторий КА при гравитационном маневре* (при гравитационном рассеянии).

Рассмотрим структуру рассеянной при совершении ГМ Виртуальной Трубки траекторий (ВИРТ). С целью получения степени расхождения соседних виртуальных траекторий КА проварьируем по b выражение (3) при заданных фиксированных значениях V_∞ и μ_p. Нетрудно видеть, что из (3) следует:

$$\frac{d\dfrac{\varphi}{2}}{\cos^2\dfrac{\varphi}{2}} = -\frac{\mu_p}{V_\infty^2}\frac{db}{b^2}, \tag{8}$$

откуда с учётом тождества

$$\operatorname{cosec}^2\frac{\varphi}{2} = 1 + \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} = 1 + \left(\frac{\mu_p}{V_\infty^2}\frac{1}{b}\right)^2 \tag{9}$$

получим:

$$db = -\frac{V_\infty^2}{2\mu_p}\left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right)d\varphi. \tag{10}$$

Знак минус в выражении (10) характеризует обратную пропорциональность b от φ, то есть с увеличением b угол φ уменьшается. Обычно в дальнейших вычислениях знак, за несущественностью, опускается [5].

Введём, по аналогии с [5-6], *эффективное сечение гравитационного рассеяния виртуальных траекторий* $d\sigma_\varphi = \dfrac{dN_\varphi}{n}$, где dN_φ – доля виртуальных траекторий КА, рассеиваемых на углы, лежащие в интервале $[\varphi, \varphi + d\varphi]$, n – «мгновенная поверхностная плотность ВИРТ», то есть среднее число прообразов траекторий, проходящих через единицу площади поперечного сечения ВИРТ. При равномерно засеянной ВИРТ $n = N/S_{beam}$, где N – общее число пробных траекторий, S_{beam} – общая площадь поперечного сечения ВИРТ.

Для числа траекторий-маркеров dN_φ выполнено $dN_\varphi = n\, d\sigma_\varphi$. Можно говорить, что $d\sigma_\varphi$ характеризует вероятность рассеяния в интервал $[\varphi, \varphi + d\varphi]$:

$$\frac{d\sigma_\varphi}{S_{beam}} = \frac{dN_\varphi}{N}.$$

Замечание 2. Для гравитационного рассеяния планет поперечные сечения ВИРТ можно описывать *пертурбационными кольцами* [3], внешний радиус которых равен радиусу сферы действия планеты r_d, а внутренний радиус (“минимальная прицельная дальность”) равен её полному эффективному радиусу $R_{эф}^{полн} = \sqrt{R_p^2 + 2\,R_p \frac{\mu_p}{V_\infty^2}}$ [12]. В таком случае $S_{beam} = \pi\left(r_d^2 - R_p^2 - 2\,R_p \frac{\mu_p}{V_\infty^2}\right)$. Таблица характеристических размеров пертурбационных колец для планет Солнечной системы приведена в [3].

В силу (3) соответствие $\varphi \Leftrightarrow b$ взаимно однозначно, и каждому телесному углу 3D-пространства Ω_φ, отвечающего интервалу плоского угла $[\varphi, \varphi + d\varphi]$, соответствует определённая кольцевая область поперечного сечения ВИРТ $d\sigma_\varphi$, отвечающая интервалу прицельной дальности $[b, b + db]$. Для числа dN_φ соответствующих виртуальных прообразов (им отвечает полая трубка, вырезанная из сплошной ВИРТ), верно соотношение $dN_\varphi = n\, d\sigma_\varphi$.

Тогда

$$dN_\varphi = \pi n\left((b + db)^2 - b^2\right) \approx n\, 2\pi b\, db,$$

$$d\sigma_\varphi = 2\pi b\, db, \tag{11}$$

откуда с учетом (10) следует, что

$$d\sigma_\varphi = -\frac{\pi b V_\infty^2}{\mu_p}\left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right) d\varphi. \tag{12}$$

При переходе от прообраза рассеянного пучка – плоского кольцевого элемента $d\sigma_\varphi$, к его образу – элементу телесного угла $d\Omega$, заключенному между конусами с углами раствора $\varphi, \varphi + d\varphi$, куда попадают рассеянные траектории КА после ГМ (рис. 6, 7, 8), воспользуемся соотношением $d\Omega = 2\pi \sin\varphi \, d\varphi$ (см., например, [5-6]). Тогда из (12) немедленно следует, что

$$d\sigma_{\varphi} = -\frac{1}{2}\frac{V_{\infty}^{2}}{\mu_{p}}\frac{b}{\sin\varphi}\left(b^{2} + \frac{\mu_{p}^{2}}{V_{\infty}^{4}}\right) d\Omega. \tag{13}$$

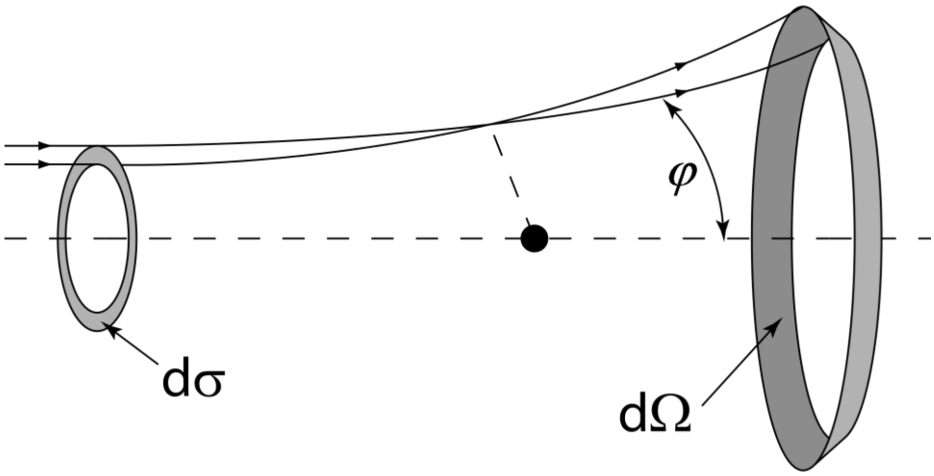


Рис. 6. Элементарная кольцевая площадка $d\sigma_{\varphi}$ и соответствующий ей телесный угол $d\Omega$ после рассеяния

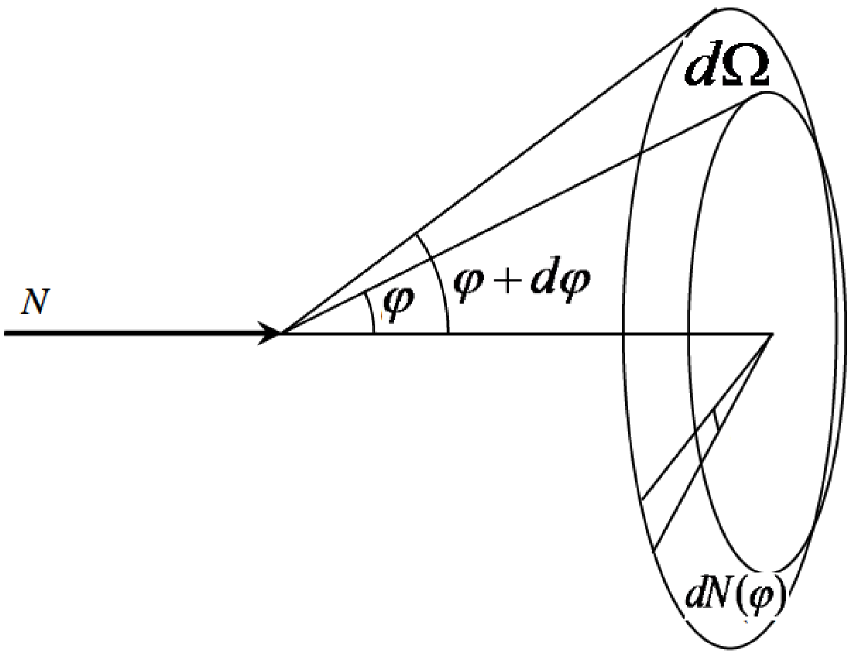


Рис. 7. Телесный угол $d\Omega$ при рассеянии

Воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi/2} = b^2 \frac{V_\infty^4}{\mu_p^2} + 1$$

и учитывая, что согласно (3)

$$b = \frac{\mu_p}{V_\infty^2} \frac{\sin\varphi}{2\sin^2 \varphi/2}, \quad \frac{b}{\sin\varphi} = \frac{\mu_p}{2V_\infty^2} \frac{1}{\sin^2 \varphi/2} = \frac{1}{2} \frac{\mu_p}{V_\infty^2} \left(b^2 \frac{V_\infty^4}{\mu_p^2} + 1 \right),$$

из (13), с учетом (5), получим, что

$$\frac{d\sigma_\varphi}{d\Omega} = -\frac{1}{4} \frac{V_\infty^4}{\mu_p^2} \left(b^2 + (\mu_p / V_\infty^2)^2 \right)^2 = -\frac{1}{4} \frac{V_\infty^4}{\mu_p^2} \left(b^2 + R_p^2 \frac{V_{pc}^4}{V_\infty^4} \right)^2. \qquad (14)$$

Полученное выражение (14) представляет собой *обобщение формулы Резерфорда* [5-6] на случай гравитационного рассеяния для прообраза рассеяния *на «левом конце»*. Оно выражает зависимость вероятности распределения рассеянных траекторий КА от прицельной дальности. Формула (14) показывает, что *число рассеянных после ГМ виртуальных траекторий КА убывает согласно биквадратической зависимости от прицельной дальности* b. Более лаконичный вывод этого соотношения приведен в Приложении 2.

С учетом известных соотношений для c_{hyp}, a_{hyp}, фокального расстояния и действительной полуоси гиперболы, $c_{hyp}^2 = a_{hyp}^2 + b^2$, $a_{hyp} = \frac{\mu_p}{V_\infty^2}$ [12], обобщенная формула Резерфорда запишется как

$$\frac{d\sigma_\varphi}{d\Omega} = \frac{c_{hyp}^4}{4\, a_{hyp}^2}. \qquad (15)$$

Замечание 3. Обобщённая формула Резерфорда для гравитационного рассеяния в каноническом виде, через параметры *“на правом конце”*, может быть получена и формально из (7) с помощью замены:

$$m_\alpha \to m_{sc}, q_\alpha \to m_{sc}, \frac{q_{aim}}{4\pi\varepsilon_0} \to \mu_p. \qquad (16)$$

Выражение (7) после подстановки (16) преобразуется к обобщённой формуле Резерфорда для гравитационного рассеяния через параметры *“на правом конце”*:

$$\frac{d\sigma_\varphi}{d\Omega} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\mu_p}{V_\infty^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\dfrac{\varphi}{2}} = -\frac{1}{4}\left(\frac{V_\infty^2}{\mu_p}\right)^2 \left(b^2 + (\mu_p / V_\infty^2)^2\right)^2. \qquad (17)$$

Подставляя в (17) непосредственно выражение (4) для угла φ поворота вектора асимптотической скорости через расстояние перицентра пролётной гиперболы R_π, можно прийти к новой форме обобщённой формулы Резерфорда гравитационного рассеяния траекторий КА, выражаемой через эксцентриситет e пролётной гиперболы:

$$\frac{d\sigma_\varphi}{d\Omega} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\mu_p}{V_\infty^2}\right)^2 \left(1 + R_\pi \frac{V_\infty^2}{\mu_p}\right)^4 = -\frac{e^4}{4} a_{hyp}^2. \qquad (18)$$

Ниже собраны основные полученные в работе обобщенные формулы Резерфорда (ОФР) через параметры на левом конце, на правом конце и в перицентре:

$$\begin{cases} \dfrac{d\sigma_\varphi}{d\Omega} = -\dfrac{c_{hyp}^4}{4\, a_{hyp}^2} = -\dfrac{1}{4}\dfrac{V_\infty^4}{\mu_p^2}\left(b^2 + \dfrac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right)^2, \\[2ex] \dfrac{d\sigma_\varphi}{d\Omega} = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\mu_p}{V_\infty^2}\right)^2 \dfrac{1}{\sin^4\dfrac{\varphi}{2}} = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\mu_p}{V_\infty^2}\right)^2 e^4, \\[2ex] \dfrac{d\sigma_\varphi}{d\Omega} = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\mu_p}{V_\infty^2}\right)^2 \left(1 + R_\pi \dfrac{V_\infty^2}{\mu_p}\right)^4, \\[2ex] dN_\varphi = n\, d\sigma_\varphi\ . \end{cases} \qquad (19)$$

Структура функции рассеяния траекторий: формулы (19) показывают, что обобщенное преобразование Резерфорда состоит из двух блоков:

инвариантного коэффициента однородного расширения $\left(\frac{V_\infty^2}{\mu_p}\right)^2$ и одноосной деформации, зависящей от прицельной дальности $\left(b^2+\frac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right)^2=\left(b^2+R_p^2\frac{V_{pc}^4}{V_\infty^4}\right)^2$.

3. Постановка вычислительного эксперимента

Вкратце опишем опыты Резерфорда с пучками заряженных частиц [5]. Параллельный пучок α-частиц испускался радиоактивным веществом в вакууме и попадал на тонкую фольгу из золота. При прохождении через фольгу α-частицы рассеивались на различные углы. Рассеянные частицы ударялись об экран из сернистого цинка, вызывая сцинтилляции – вспышки света. Количество вспышек в темноте фиксировалось через микроскоп. Большинство α-частиц рассеивалось на малые телесные углы порядка 1–3°. Отдельные α-частицы отклонялись на большие углы, до 150º (одна из нескольких тысяч). Малая вероятность отклонения на большие углы свидетельствовала о малых размерах рассеивающего ядра. В силу малости толщины фольги в эксперименте считалось, что α-частица взаимодействует лишь с одним ядром. В таблице 1 представлены типовые замеры сцинтилляций (“на правом конце” эксперимента по рассеиванию пучка), полученные Резерфордом [5].

В традиционной постановке пучкового баллистического проектирования на левом конце моделирования формируется равномерно распределенная ВИРТ траекторий КА. Это производится с помощью специальных методик [1-3, 14]. Таким образом, ситуация становится идентичной постановке опытов Резерфорда по атомному рассеянию. В дальнейшем производится прохождение ВИРТ мимо планеты-цели согласно точным эфемеридам. Производится селекция полученных траекторий. Для дальнейшего моделирования оставляются только те траектории, которые при дальнейшем продолжении траектории «дуплетом» попадают во вторичную целевую планету. Ценность найденного набора таких траекторий состоит в их достоверности, “действительности”, поскольку они выстроены в реальных эфемеридах и не требуют решения каскада итерационных процедур и задач Ламберта. В свою очередь, каждая из них может использоваться в качестве опорной оси для нового пучка с локализацией и углубленной детализацией (Zoom-методика [1-3, 7-10]).

Отметим, что при баллистическом проектировании постановка вычислительного эксперимента и само моделирование происходит в направлении, обратном опыту Резерфорда по анализу рассеяния заряженных частиц (рис. 2, 7). Значение телесного угла Ω (на конце справа) не является здесь известной величиной. Напротив, величина b прицельной дальности на левом конце становится априорно задаваемым проектным значением согласно соответствующей задаче Коши начальной ВИРТ. Общее число пробных траекторий N в трубке также известно априори, поскольку может задаваться по желанию. Рис. 8 иллюстрирует работу развитых Zoom-методик при поиске комфортабельных туров в системе Юпитера с целью посадки на галилееву луну Ганимед [1, 2].

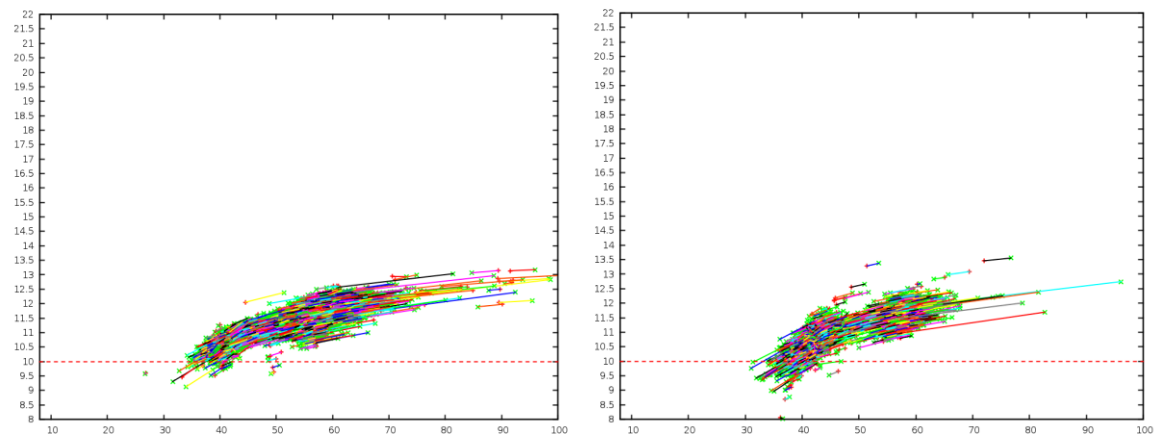


Рис. 8. Иллюстрация на диаграмме Тиссерана работы развитых Zoom методик [1, 2] при поиске комфортабельных туров в системе Юпитера с целью посадки на галилееву луну Ганимед. Увеличение стартового числа пробных частиц до 500 000 приводит к обнаружению среди сольных ГМ “подъёма” – перекрестного ГМ с Каллисто, необходимого для понижения асимптотической скорости КА относительно Ганимеда

Для обеспечения итерационной работы алгоритма поиска сценариев ГМ на каждом шаге необходима хотя бы одна попадающая в сферу действия планеты виртуальная траектория КА. После совершения ГМ около очередной цели мы должны попасть в сферу действия следующей по расписанию целевой планеты. Определяющую роль в ее покрытии пучком траекторий приобретает достаточная плотность траекторий КА в ВИРТ на выходе из сферы действия после ГМ. Характерным числом траекторий в “отслеживающей” ВИРТ может в первом приближении считаться число элементов автопокрытия орбиты целевой планеты (то есть минимального числа виртуальных сфер действия планеты, покрывающих ее орбиту [3]). Согласно анализу, проведенному авторами в [3], получены таблицы мощности автопокрытий основных планет и спутников Солнечной системы. Таблицы мощности автопокрытий [3] приведены в Приложении 1.

Ситуация с первичным обнаружением целевой планеты с помощью ГМ-рассеянных ВИРТ осложняется ее резерфордовской неравномерностью, выражаемой соотношениями (19). Идеальной рассеянной ВИРТ могла бы стать равномерно торчащая во все стороны структура (“морской ёж”, рис. 4). Однако резерфордовское рассеяние превращает “идеального морского ежа” в обычного, сухопутного, “егоровского ежа” [13], с сильным зачёсом в одну сторону (рис. 3, б).

4. Таблицы рассеяния

Как уже указывалось, структуры силовой функции гравитационного взаимодействия U_{grav} и кулоновского электрического поля для разнозаряженных частиц $U_{Coulomb}$ оказываются идентичными, а рассеяние пучка заряженных частиц описывается формулой Резерфорда (7). В таблице 1 представлены типовые замеры числа отраженных траекторий α-частиц в кулоновском поле единичного отталкивающего ядра (сцинтилляций) в зависимости от угла отклонения φ, полученные Резерфордом и его учениками для рассеяния α-частиц на фольге из золота [4].

Таблица 1

Рассеяние α-частиц для различных углов φ
Общее число пробных траекторий N=142120

Угол отклонения φ, град	15	22.5	30	45	60	75	105	120	135	150
Среднее число отсчетов	132000	27300	7800	1435	477	211	69.5	51.9	43.0	33.1
$\Delta N \sin^4(\varphi/2)$	38.4	39.6	35.0	30.8	29.8	29.1	27.5	29.0	31.2	28.8

В этой таблице в средней строке приведены числа сцинтилляций, соответствующие некоторому диапазону углов со средним значением, указанным в верхней строке.

При моделировании гравитационного рассеяния силовым полем притягивающей планеты (гравитационного маневра) обычно первоначально формируется равномерно заполненная трубка виртуальных траекторий КА, которая будет рассеиваться. Как было показано авторами в [3], характерные размеры этой ВИРТ не должны превышать цилиндра с радиусом r_d сферы действия этой планеты. Представим аналогичные модельные таблицы гравитационного рассеяния траекторий КА при совершении ГМ, посчитанные по соотношениям (14), (19). Модельное значение $\frac{V_\infty}{V_{pc}} = 1.0$.

Таблица 2

Гравитационное рассеяние для различных углов φ (параметр на правом конце).
Общее число пробных траекторий N=300000

Углы поворота φ, град	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50
Число отсчетов	276237	17330	3445	1100	456	223	122	73	47

Таблица 3

Гравитационное рассеяние для различных значений прицельной дальности b (параметр на левом конце) Общее число пробных траекторий N=1427845

Прицельная дальность b, в радиусах планеты R_p	2–3	3–4	4–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35
Число отсчетов	25	100	289	676	10201	51076	160801	391876	811801

Как уже отмечалось, характерным числом траекторий в «отслеживающей» ВИРТ может в первом приближении считаться число элементов автопокрытия орбиты целевой планеты [3]. Таблицы мощности автопокрытий [3] приведены в Приложении 1. Анализ таблиц с учетом этих оценок для «автопокрытия» орбиты целевой планеты [3] показывает, что в случае планет Земля и Венера при равномерном заполнении ВИРТ для углов поворота порядка 20° требуется вовлечение в вычислительный эксперимент как минимум 300 000 пробных траекторий.

5. Метод регуляризации рассеянных траекторий (метод выпрямления)

Многим исследователям-баллистикам знакома проблема неустойчивости, возникающая при выполнении итерационных процедур в процессе моделирования ГМ. В первую очередь речь идёт о сходимости метода Ньютона (и его модификаций) при вычислении действительных эфемеридных траекторий КА по прообразу найденного решения задачи Эйлера-Ламберта [2, 14]. Одна из причин кроется в гиперболическом расхождении соседних виртуальных траекторий КА в процессе ГМ. Структура гравитационного рассеяния представлена на рис. 2, а. Соседние траектории расходятся с возрастающим от угла рассеяния градиентом. В результате возникает существенный промах пробной эфемеридной траектории КА мимо планеты-мишени. Использование пучков траекторий повышает вероятность встречи с планетой хотя бы одной из них. При этом всё равно требуется достаточная плотность рассеянного пучка, не позволяющая проскочить планете-мишени в промежутке между траекториями. Зачастую это требует рассмотрения миллионов виртуальных вариантов [1-3, 7-10].

Полученные аналитические законы гравитационного рассеяния (19) являются инструментом для эффективного проектирования гравитационных манёвров. С их использованием может быть компенсирована проблема нелинейной неравномерности рассеянного пучка, выражаемая обобщённой формулой Резерфорда (10). Действительно, при равномерном распределении виртуальных траекторий в ВИРТ (например – по алгоритму И.М. Соболя [14]), наиболее эффективные траектории КА, в смысле воздействия на них ГМ, то есть наиболее близко пролетающие над ГМ-планетой, оказываются затем и наиболее «одиночными». Вероятность промаха мимо следующей планеты-мишени одиночной траектории велика. Однако при изменении закона распределения начальных виртуальных траекторий ситуация может кардинально поменяться. Вместо равномерного распределения траекторий $n = n_0 = const$ установим для начальной ВИРТ неоднородное распределение $\tilde{n}$ по закону:

$$\tilde{n}(b) = \frac{n_0}{\left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right)^2}, b \in [R_{эф}^{полн}, r_d] \ . \tag{20}$$

Тогда из (14)

$$dN_\varphi = \tilde{n}(b)\, d\sigma_\varphi = \frac{n_0}{\left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right)^2} d\sigma_\varphi, \tag{21}$$

откуда

$$\frac{dN_\varphi}{d\Omega}=\frac{\tilde{n}(b)\,d\sigma_\varphi}{d\Omega}=-\frac{n_0}{4}\frac{V_\infty^4}{\mu_p^2}\frac{\left(b^2+\frac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right)^2}{\left(b^2+\frac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right)^2}=-\frac{n_0}{4}\frac{V_\infty^4}{\mu_p^2}. \tag{22}$$

Зависимость плотности рассеянных виртуальных траекторий КА от прицельной дальности (и от угла φ) исчезает. В итоге получается равномерно рассеянный гравитацией (по углу φ) пучок траекторий КА.

В таблице 4 представлены модельные таблицы отрегулированного, «распрямленного», гравитационного рассеяния траекторий КА при совершении ГМ, посчитанные по соотношениям (21), (22) (модельное значение $\frac{V_\infty}{V_{pc}}=1.0$).

Таблица 4

Распрямленное (отрегулированное) гравитационное рассеяние для различных углов φ (параметр на правом конце). Общее число пробных траекторий N=300000

Углы поворота φ, град	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35
Прицельная дальность, R_p	22.9–11.5	11.5–7.6	7.6–5.7	5.7–4.5	4.5–3.7	3.7–3.2
Число отсчетов	50000	50000	50000	50000	50000	50000

Видим, что распределение траекторий по значениям прицельной дальности стало неравномерным. Специально задавая траектории в ВИРТ подобным образом, можно существенно повысить эффективность поиска подходящей последовательности ГМ.

6. Управляемое апостериорное формирование пучка рассеянных траекторий (продвинутая Zoom-методика фокусировки)

Как указывалось выше, полученные аналитические законы гравитационного рассеяния (19) позволяют компенсировать проблему нелинейной неравномерности рассеянного пучка, выражаемую обобщённой формулой Резерфорда (14), (17). На выходе из ГМ, согласно распределению (20), получается равномерно распределённый по углу φ пучок траекторий. Однако можно пойти дальше. Подобным образом возможно не только компенсировать вышеуказанную неравномерность, но и обратить её в другую сторону, сфокусировав пучок на актуальном значении угла φ: $\varphi = \varphi^*$, которому, согласно (3), соответствует значение прицельной дальности $b^* = \frac{\mu_p}{V_\infty^2} ctg\,\frac{\varphi^*}{2}$. В качестве φ^* может фигурировать приблизительное, проектное значение угла поворота вектора асимптотической скорости КА, приближающее КА к встрече со следующей планетой-мишенью. Пучок траекторий достаточной мощности, сфокусированный около φ^*, позволит сконцентрировать поиск на перспективном интервале $\varphi \in [\varphi^* - \Delta\varphi, \varphi^* + \Delta\varphi]$, где выявить уже и единичную точную траекторию для ГМ. В свою очередь теперь она уже может быть использована в качестве опорной оси для поиска семейства перспективных траекторий посредством дополнительно углубленной детализации (продвинутая Zoom-методика фокусировки [1-3, 14-15]).

Вместо регулирующего распределения траекторий $\tilde{n}(b) = n_0\left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right)^{-2}$ установим для начальной ВИРТ фокусирующее распределение $\widehat{n}(b,b^*)$ по закону:

$$\widehat{n}(b,b^*) = \begin{cases} N_{forced}\left(b^2 + \dfrac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right)^{-2}, b \in [b^* - \Delta b, b^* + \Delta b] \\ 0,\ b \notin [b^* - \Delta b, b^* + \Delta b] \end{cases}, \qquad (23)$$

где $N_{forced} = N\dfrac{[R_{эф}^{полн}, r_d]}{2\,\Delta b} \gg n_0$. Тогда

$$\frac{dN_\varphi}{d\Omega} = \frac{\widehat{n}(b,b^*)\,d\sigma_\varphi}{d\Omega} = -\frac{N_{forced}}{4}\frac{V_\infty^4}{\mu_p^2}. \qquad (24)$$

Зависимость плотности рассеянных виртуальных траекторий КА от прицельной дальности (и от угла φ) не только исчезает, но значительно увеличивается за счет фокусировки равномерно рассеянного гравитацией (по углу φ) пучка траекторий КА в окрестности $\varphi = \varphi^*$.

В таблице 5 представлены модельные значения сфокусированного “распрямленного” гравитационного рассеяния траекторий КА при совершении ГМ, посчитанные по соотношениям (23), (24). Модельное значение $\dfrac{V_\infty}{V_{pc}} = 1.0$.

Таблица 5

Сфокусированное и распрямленное гравитационное рассеяние в окрестности угла φ=15° (параметр на правом конце). Общее число пробных траекторий N=300000

Угол поворота φ, град	10–15	15–20	20–25
Прицельная дальность, R_p	11.5–7.6	7.6–5.7	5.7–4.5
Число отсчетов	100000	100000	100000

Из таблицы следует, что распределение траекторий по углам, как и следовало ожидать, получилось равномерное и находится в нужном диапазоне, тогда как распределение траекторий по значениям прицельной дальности, соответственно, стало существенно неравномерным. В результате оказывается возможно целенаправленно формировать ВИРТ.

Заключение

Одним из типов гравитационного рассеяния в Солнечной системе являются гравитационные манёвры (ГМ), хотя масштабами Солнечной системы фактор гравитационного рассеяния в структурах гравитирующих объектов Вселенной далеко не ограничен [15-16]. В работе вводится понятие эффективного гравитационного сечения рассеяния и получена обобщенная формула Резерфорда для гравитационного рассеяния. Полученные аналитические законы гравитационного рассеяния позволяют осуществлять эффективное моделирование гравитационных манёвров. С их использованием может быть компенсирована проблема нелинейной неравномерности рассеянного пучка, выражаемая обобщённым законом Резерфорда, а также появляется возможность целенаправленного фокусирования пучка траекторий при гравитационном маневре. Ценность найденного набора таких траекторий состоит в их достоверности, поскольку они выстроены в реальных эфемеридах и не требуют решения каскада итерационных процедур и задач Ламберта. В свою очередь, каждая из них может использоваться в качестве опорной оси для нового пучка с локализацией и углубленной детализацией.

Полученные гарантирующие полуаналитические оценки для необходимого числа виртуальных траекторий КА в пучке при моделировании ГМ около массивных тел Солнечной системы обеспечивают возможность неограниченного продолжения итерационной процедуры поиска баллистических сценариев межпланетных миссий.

Библиографический список

1. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г. Гравитационные маневры космического аппарата в системе Юпитера // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2014. № 3. С. 149-167.
2. Боровин Г.К., Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Заславский Г.С., Захваткин М.В., Корянов В.В., Лавренов С.М., Морской И.М., Симонов А.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Баллистико-навигационное обеспечение полетов автоматических космических аппаратов к телам Солнечной системы / Под ред. А.Г. Тучина. МО., Химки, «НПО Лавочкина», 2018, 336 с. ISBN 978 5-905646-12-6.
3. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Гравитационное рассеяние при совершении гравитационных манёвров и пертурбационные кольца в Солнечной системе // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 2. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-2
4. Резерфорд Э. Избранные научные труды. Строение атома и искусственное превращение элементов. М.: Наука, 1972. 533 с.
5. Евдокимов К.Е. Атомная физика. https://portal.tpu.ru/SHARED/e/EVDOKIMOV/Teach/course_at/Lectures/
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — Издание 4-е, исправленное. — М.: Наука, 1988. — 215 с. — («Теоретическая физика», том I). ISBN 5-02-013850-9.
7. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Методика формирования больших наклонений орбит космических аппаратов с использованием гравитационных маневров // Доклады Академии наук. 2017. Т. 472. № 4. С. 403-406.
8. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Формирование орбит космического аппарата с большим наклонением к

эклиптике посредством многократных гравитационных маневров // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2017. № 2. С. 108-132.

9. Grushevskii A., Golubev Yu., Koryanov V., Tuchin A., Tuchin D. Advanced Methods of Low Cost Mission Design for Jovian Moons Exploration // Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Aerospace Technology. 2018. V. 16. № 7. P. 679-686.
10. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Гравитационные манёвры около Венеры для выхода на внеэклиптические положения. Резонансная асимптотическая скорость // Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы, 2019. Т. 53. № 4. С. 256-264.
11. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики: Учебник. 3-е издание, переработанное и дополненное. — М.: Издательство Московского университета, 2019. — 728 с. ISBN 978-5-19-011288-7
12. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М., Наука, 1990. 448 с. ISBN 5-02-014090-2.
13. Егоров В.А. О некоторых задачах полета к Луне // УФН, 1957, LXIII, с. 73-117.
14. Соболь И.М. Равномерно распределенные последовательности с дополнительным свойством равномерности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1976. Том 16. № 5. С. 1332–1337.
15. Сажин М.В., Черепащук А.М. Микролинзирование двойных и кратных звезд // Письма в «Астрон. журн.». 1994. Т. 20, № 9. С. 613-619.
16. Wambsganss J., Gravitational lensing in astronomy, Living Rev. Relativity. 1998, №1. [Online Article]: cited on January 26, 2004, https://link.springer.com/article/10.12942/lrr-1998-12
17. Fukushima T. System of astronomical units and constants. IAU – WGRS /SGAC, 1990, Circ. 13.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Параметры мощности автопокрытия для планет Солнечной системы и спутников Юпитера

Параметры мощности автопокрытия (минимального числа «опорных элементов покрытия» орбиты – собственных виртуальных сфер действия) для планет Солнечной системы и Луны (P1.1) и спутников Юпитера (P1.2) [3].

Таблица P1.1

Минимальное число опорных элементов на орбите для выявления возможности ГМ в Солнечной системе

Планета	$\mu_p/\mu_\odot$ согласно [17]	r_d, а.е.	r_o, а.е.	N_d	N_k
Меркурий	$1.660137 \bullet 10^{-7}$	0.001	0.387	1216	2106
Венера	$2.4478383 \bullet 10^{-6}$	0.004	0.723	568	984
Земля	$3.0034896 \bullet 10^{-6}$	0.006	1	524	907
Марс	$3.2271514 \bullet 10^{-7}$	0.004	1.52	1193	2066
Юпитер	$9.5459429 \bullet 10^{-4}$	0.322	5.2	51	88
Сатурн	$2.85815 \bullet 10^{-4}$	0.364	9.53	82	142
Уран	$4.365785 \bullet 10^{-5}$	0.346	19.19	174	301
Нептун	$5.150314 \bullet 10^{-5}$	0.580	30.07	52	90
Луна		0.00044	0.0026	18	31

Таблица P1.2

Минимальное число опорных элементов на орбите для выявления возможности ГМ в системе Юпитера

Спутник	μ_s/μ_p	r_d, км	r_o, км	N_d	N_k
Ио	$4.7 \bullet 10^{-5}$	7834	421800	169	293
Европа	$2.5 \bullet 10^{-5}$	9722	671100	217	376
Ганимед	$7.8 \bullet 10^{-5}$	24350	1070400	138	239
Каллисто	$5.7 \bullet 10^{-5}$	37681	1882700	157	272

Анализ таблиц показывает [3], что наиболее трудоёмким (согласно числу опорных элементов) является поиск ГМ в Солнечной системе для Марса и Меркурия, и для галилеевой луны Европы – в системе Юпитера.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Экспресс-вывод обобщенной формулы Резерфорда (ОФР) для гравитационного рассеяния

Этап 1. Проварьируем квадрат прицельной дальности b^2 согласно выражению (3):

$$b^2 = \left(\frac{\mu_p}{V_\infty^2}\right)^2 ctg^2\frac{\varphi}{2} \equiv a_{hyp}^2 ctg^2\frac{\varphi}{2},$$

$$2bdb = -\frac{a_{hyp}^2\, ctg\frac{\varphi}{2}\, d\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}},$$

$$d\sigma = 2\pi b db = -\frac{\pi a_{hyp}^2 \cos\frac{\varphi}{2}\, d\frac{\varphi}{2}}{\sin^3\frac{\varphi}{2}} = -\frac{a_{hyp}^2}{4}\frac{2\pi\sin\varphi\, d\varphi}{\sin^4\frac{\varphi}{2}} = -\frac{a_{hyp}^2}{4}\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\varphi}{2}}.$$

Приходим к выражению ОФР (17) на правом конце.

Этап 2. Учтем, что согласно (4)

$$\sin^4\frac{\varphi}{2} = e^{-4},$$

где e – эксцентриситет гиперболы рассеяния.

Тогда

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{e^4}{4}a_{hyp}^2 = -\frac{a_{hyp}^2}{4}\left(\frac{a_{hyp}^2 + b^2}{a_{hyp}^2}\right)^2 = -\frac{\left(a_{hyp}^2 + b^2\right)^2}{4\, a_{hyp}^2}.$$

Приходим к выражению (14) ОФР на левом конце.

Оглавление