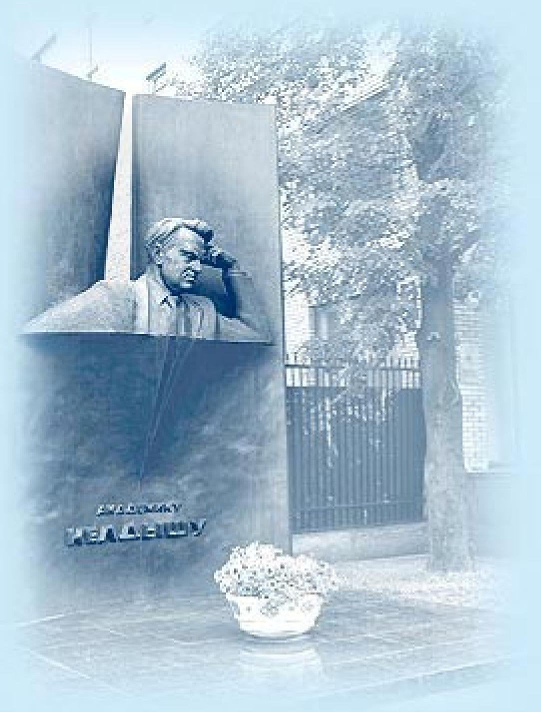
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 63 за 2021 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Д.М. Буланов, В.В. Сазонов

Установившееся вращательное движение спутника Фотон М-2

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Буланов Д.М., Сазонов В.В. Установившееся вращательное движение спутника Фотон М-2 // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 63. 36 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-63
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-63

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В.Келдыша

Д.М. Буланов, В.В. Сазонов

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА *ФОТОН М-2*

Москва – 2016

Буланов Д.М., Сазонов В.В.

Установившееся вращательное движение спутника Ф*отон М-2*

Вращательное движение спутника *Фотон М-2* (находился на орбите 31.V–16.VI.2005) в конце полета можно описать обобщенно-консервативной системой дифференциальных уравнений. Вековое изменение собственного кинетического момента этого спутника описывается так называемыми эволюционными уравнениями В.В. Белецкого, также образующими обобщенно-консервативную систему. В препринте исследована связь между этими системами. Уравнения движения спутника редуцированы к уравнениям 4-го порядка, описывающим движение оси симметрии спутника. Уравнения В.В. Белецкого имеют второй порядок и описывают движение орта собственного кинетического момента спутника. Решения этих систем уравнений, отвечающие реальному движению спутника, являются соответственно условно-периодическими и периодическими. В решениях системы 4-го порядка доминируют две частоты – высокая и низкая. Спектральный анализ показал, что низкая частота совпадает с частотой решений уравнений В.В. Белецкого, а решения этих уравнений достаточно точно совпадают с низкочастотной составляющей в решении системы 4-го порядка относительно переменных, задающих направление оси симметрии спутника.

Ключевые слова: искусственный спутник Земли, вращательное движение, обобщенно-консервативная система, условно-периодическое и периодическое движения, спектральный анализ

Bulanov D.M., Sazonov V.V.

Steady-state rotational motion of the Photon M-2 satellite

At the end of the flight, the attitude motion of the Photon M-2 satellite (it was in orbit 2005.05.31-2005.06.16) can be described by a generalized conservative system of differential equations. The secular change in the own kinetic moment of this satellite is described by the so-called evolutionary equations of Beletsky, which also form a generalized conservative system. The preprint examines the relationship between these systems. The satellite motion equations are reduced to equations of the 4th order describing the motion of the satellite axis of symmetry. Beletsky's equations are of the second order and describe the secular motion of the ort of the satellite's own kinetic moment. The solutions of these systems of equations corresponding to the real movements of the satellite are, respectively, conditionally periodic and periodic. The solutions of the 4th-order system are dominated by two frequencies – high and low ones. The spectral analysis showed that the low frequency coincides with the frequency of solutions of Beletsky’s equations. And the solutions of these equations coincide with the low-frequency component in the solution of the 4th-order system with respect to the variables that determine the direction of the axis of symmetry of the satellite.

Key words: spacecraft, attitude motion, generalized conservative system, conditionally periodic and periodic motion, spectral analysis

1. Введение. Ниже описывается продолжение работ [1, 2], в которых проведена повторная обработка магнитных измерений, выполненных в 2005 г. на спутнике *Фотон М-2*. Новая обработка использовала упрощенные модели вращательного движения спутника, согласованные с моделями, предложенными В.В. Белецким при анализе эволюции неуправляемого вращательного движения спутника в случае, когда это движение близко к регулярной прецессии Эйлера осесимметричного твердого тела [3]. Было установлено, что изменение собственного кинетического момента спутника хорошо описывается этими уравнениями во второй половине полета, когда непрерывно возраставшая угловая скорость спутника превышала 0.8°/с.

В одной из этих моделей фактическая орбита спутника (высота апогея 300 км, высота перигея 260 км) заменена круговой орбитой. Такая замена позволила использовать для описания движения спутника относительно центра масс автономную систему дифференциальных уравнений, которую на некоторых отрезках движения в конце полета можно свести к обобщенно-консервативной системе. В этом случае соответствующие уравнения Белецкого также обобщенно-консервативны, и связь между обеими системами уравнений удается исследовать более детально.

При исследовании этой связи обобщенно-консервативные уравнения вращательного движения спутника редуцируются к уравнениям 4-го порядка, описывающим движение оси симметрии спутника. Уравнения В.В. Белецкого имеют второй порядок и описывают движение орта собственного кинетического момента спутника. В орбитальной системе координат направление этого орта и орта оси симметрии спутника задаются одинаковыми парами углов. Изменения во времени одноименных углов обеих пар сравниваются на решениях, отвечающих реальным движениям спутника. Решения уравнений В.В. Белецкого – периодические, решения системы 4-го порядка – условно-периодические с двумя доминирующими частотами – высоко и низкой. Амплитуды остальных частот на порядок ниже. Спектральный анализ показал, что низкая частота совпадает с частотой решений уравнений В.В. Белецкого, а решения этих уравнений достаточно точно совпадают с низкочастотной составляющей в решении системы 4-го порядка относительно углов, задающих направление оси симметрии спутника.

2. Уравнения вращательного движения спутника. Спутник считаем осесимметричным твердым телом, центр масс которого движется по неизменной круговой орбите. Для записи уравнений движения спутника введем четыре правых декартовых систем координат.

Система $Ox_1x_2x_3$ образована главными центральными осями инерции спутника. Точка O – центр масс спутника, ось Ox_1 – ось материальной симметрии спутника. Эта ось близка к продольной оси спутника и направлена от спускаемого аппарата к приборному отсеку. Моменты инерции спутника относительно оси Ox_1 обозначим I_1, равные моменты инерции относительно осей Ox_2 и Ox_3 обозначим I_2.

Вспомогательная система координат $Oy_1y_2y_3$ служит для записи уравнений вращательного движения спутника. Ось Oy_1 совпадает с осью Ox_1; оси Ox_2, Ox_3 получаются из осей Oy_2, Oy_3 поворотом системы $Oy_1y_2y_3$ на угол χ вокруг оси Oy_1. Кинематическая связь между системами $Ox_1x_2x_3$ и $Oy_1y_2y_3$ задается условием, что проекция абсолютной угловой скорости второй из них на ось Oy_1 равна нулю. Проекции этой угловой скорости на оси Oy_2, Oy_3 обозначим w_2, w_3. Пусть абсолютная угловая скорость спутника $\boldsymbol{\omega}$ имеет в системе $Ox_1x_2x_3$ компоненты $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Тогда $\dot{\chi} = \omega_1$ и

$$\omega_2 = w_2 \cos\chi + w_3 \sin\chi, \quad \omega_3 = -w_2 \sin\chi + w_3 \cos\chi. \tag{1}$$

Здесь и ниже точкой обозначается дифференцирование по времени t.

В приборной системе координат $Oz_1z_2z_3$ интерпретируются данные измерений бортовых магнитометров. Эту систему можно перевести в систему $Ox_1x_2x_3$ двумя последовательными поворотами. Первый поворот выполняется на угол α_c вокруг оси Oz_2, второй поворот – на угол β_c – выполняется вокруг оси Oz_3, получившейся после первого поворота. В общем случае, чтобы задать положение одной системы координат относительно другой, необходимы три угла. В данном случае можно было бы ввести еще угол поворота приборной системы вокруг ее оси Oz_1, получившейся после первых двух поворотов. Однако поскольку направление одной из осей Ox_2, Ox_3 можно выбирать произвольно, третий угол удобно принять равным нулю, фиксировав тем самым положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $Oz_1z_2z_3$. Матрицу перехода между этими системами координат обозначим $\| b_{ij} \|_{i,j=1}^3$, где b_{ij} – косинус угла между осями Oz_i и Ox_j. Элементы этой матрицы выражаются через углы α_c и β_c по формулам

$$\begin{array}{lll} b_{11} = \cos\alpha_c \cos\beta_c, & b_{12} = -\cos\alpha_c \sin\beta_c, & b_{13} = \sin\alpha_c, \\ b_{21} = \sin\beta_c, & b_{22} = \cos\beta_c, & b_{23} = 0, \\ b_{31} = -\sin\alpha_c \cos\beta_c, & b_{32} = \sin\alpha_c \sin\beta_c, & b_{33} = \cos\alpha_c. \end{array}$$

Вращательное движение спутника изучается относительно орбитальной системы координат $OX_1X_2X_3$. Ее оси OX_1 и OX_3 направлены по геоцентрическим скорости и радиусу-вектору точки O. Матрицу перехода от системы $Oy_1y_2y_3$ к орбитальной системе обозначим $\| a_{ij} \|_{i,j=1}^3$, a_{ij} – косинус угла между осями OX_i и Oy_j. Элементы этой матрицы будем выражать в функции углов ψ, θ и δ которые введем так, чтобы система $OX_1X_2X_3$ переводилась в систему $Oy_1y_2y_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол ψ вокруг оси OX_3, 2) на угол θ вокруг новой оси OX_2, 3) на угол δ вокруг новой оси OX_1, совпадающей с осью Oy_1. Таким образом, θ – угол между осью Oy_1 и плоскостью OX_1X_2, ψ – угол между проекцией оси Oy_1 на плоскость OX_1X_2 и осью

OX_1. Эти два угла задают направление оси Oy_1 в орбитальной системе координат. Имеют место соотношения

$$a_{11} = \cos\psi\cos\theta, \qquad a_{12} = \cos\psi\sin\theta\sin\delta - \sin\psi\cos\delta,$$
$$a_{21} = \sin\psi\cos\theta, \qquad a_{22} = \sin\psi\sin\theta\sin\delta + \cos\psi\cos\delta,$$
$$a_{31} = -\sin\theta, \qquad a_{32} = \cos\theta\sin\delta,$$

$$a_{13} = \cos\psi\sin\theta\cos\delta + \sin\psi\sin\delta,$$
$$a_{23} = \sin\psi\sin\theta\cos\delta - \cos\psi\sin\delta,$$
$$a_{33} = \cos\theta\cos\delta.$$

Система уравнений вращательного движения спутника образована динамическими уравнениями Эйлера для угловых скоростей w_2, w_3 и кинематическими уравнениями Пуассона для первой и третьей строк матриц $\| a_{ij} \|$. В уравнениях Эйлера учитываются гравитационный и восстанавливающий аэродинамический моменты. При вычислении аэродинамического момента атмосфера считается неподвижной в абсолютном пространстве, ее плотность вдоль орбиты постоянна, внешняя оболочка спутника принимается сферой с центром на оси Ox_1. При сделанных допущениях аэродинамический момент характеризуется одним скалярным параметром. Вследствие симметрии принятой модели одно из уравнений Эйлера имеет вид $\dot{\omega}_1 = 0$, т.е. ω_1 – первый интеграл уравнений движения. Ниже постоянное значение ω_1 будем обозначать Ω. Система уравнений вращательного движения имеет вид

$$\dot{w}_2 + \lambda\Omega w_3 = -3\omega_0^2(1-\lambda)a_{31}a_{33} + pa_{13},$$
$$\dot{w}_3 - \lambda\Omega w_2 = 3\omega_0^2(1-\lambda)a_{31}a_{32} - pa_{12},$$

$$\dot{a}_{11} + w_2 a_{13} - w_3 a_{12} = -\omega_0 a_{31},$$
$$\dot{a}_{12} + w_3 a_{11} = -\omega_0 a_{32}, \qquad \dot{a}_{13} - w_2 a_{11} = -\omega_0 a_{33}, \tag{2}$$
$$\dot{a}_{31} + w_2 a_{33} - w_3 a_{32} = \omega_0 a_{11},$$
$$\dot{a}_{32} + w_3 a_{31} = \omega_0 a_{12}, \qquad \dot{a}_{33} - w_2 a_{31} = \omega_0 a_{13}.$$

Здесь ω_0 – орбитальная частота, p – аэродинамический параметр.

При численном интегрировании уравнений (2) единицей измерения времени служит 10^3с, единицы измерения других величин: $[\omega_i] = [w_i] = 10^{-3}\text{с}^{-1}$, $[p] = 10^{-6}\text{с}^{-2}$. Элементы второй строки матрицы в (2) вычисляются как векторное произведение ее третьей и первой строк. Формулы (1) и соотношение $\chi = \Omega(t - t_0)$, где t_0 начальный момент обрабатываемого отрезка данных, позволяют найти функции $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ и движение системы $Ox_1x_2x_3$, решая уравнения (2). Переменные a_{1i} и a_{3i} зависимы, они связаны условиями ортогональности матрицы $\| a_{ij} \|$. По этой причине начальные условия $a_{1i}(t_0)$ и $a_{3i}(t_0)$ выражаются через углы ψ, θ и δ. Параметры λ, p, α_c и β_c определяются из обработки данных измерений наряду с неизвестными начальными условиями движения спутника, т.е. служат параметрами согласования.

Уравнения (2) совпадают с одной из систем уравнений, принятой в [4], и несколько отличаются от уравнений, использованных в [2] – в (2) опущен постоянный момент вдоль оси Ox_1 (поэтому $\dot{\omega}_1 = 0$). Также в отличие от [2] учитывается перекос приборной системы координат $Oz_1z_2z_3$ относительно системы $Ox_1x_2x_3$. Постоянство ω_1 вынуждает рассматривать движения спутника, близкие его установившемуся движению, т.е. движения с достаточно большой и мало меняющейся компонентой угловой скорости ω_1. Введение уточняемых углов α_c, β_c (хотя их оценки малы) несколько увеличивает точность обработки магнитных измерений.

Уравнения (2) допускают обобщенный интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(w_2^2 + w_3^2) - \omega_0(\lambda\Omega a_{21} + w_2 a_{22} + w_3 a_{23}) - \frac{3}{2}\omega_0^2(1-\lambda)a_{31}^2 - p a_{11}, \qquad (3)$$

т.е. спутник – обобщенно-консервативная механическая система.

3. Реконструкция движения спутника по магнитным измерениям. На борту *Фотона М-2* находилась аппаратура "Мираж" с несколькими трехкомпонентными магнитометрами. Поскольку движение спутника было неуправляемым, данные измерений этой аппаратуры и уравнения (2) можно использовать для определения фактического вращательного движения спутника по обычным статистическим методикам. Методика, использованная ниже, состоит в следующем [5]. По измерениям, выполненным на некотором отрезке времени $t_0 \le t \le t_0 + T$, строились функции $\hat{h}_i(t)$, которые задавали на этом отрезке компоненты вектора местной напряженности магнитного поля в системе координат $Oz_1z_2z_3$. Среднеквадратичные ошибки аппроксимации не превышали 200γ ($1\gamma = 10^{-5}$ Э). Затем вычислялись псевдоизмерения $h_i^{(n)} = \hat{h}_i(t_n)$, $t_n = t_0 + nT/N$, где $n = 0, 1, 2, \ldots N$. Обычно было $T = 100 \div 300$ мин, $T/N \approx 1$ мин. Псевдоизмерения служили исходной информацией для отыскания решений уравнений (2), описывающих фактическое движение спутника.

В соответствии с методом наименьших квадратов реконструкцией фактического движения спутника считалось решение уравнений (2), доставляющее минимум функционалу

$$\Phi = \sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{n=0}^{N}[h_i^{(n)} - h_i(t_n)]^2 - (N+1)\Delta_i^2\right\}, \qquad (4)$$

$$\Delta_i = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}[\,h_i^{(n)} - h_i(t_n)\,] \qquad h_i(t) = \sum_{j=1}^{3} b_{ij} h_j^{\circ}(t).$$

Здесь Δ_i – оценки постоянных смещений в псевдоизмерениях, $h_j^\circ(t)$ – компоненты напряженности МПЗ в точке O в системе координат $Ox_1x_2x_3$, рассчитываемые с помощью модели IGRF2005.

Чтобы использовать уравнения (2) для вычисления функционала (4), необходимо задать связь системы $OX_1X_2X_3$ с гринвичской системой координат, в которой задавалась реальная орбита спутника и вычислялась напряженность магнитного поля Земли. С этой целью фактическая орбита спутника на отрезке $t_0 \le t \le t_0 + T$ аппроксимировалась круговой орбитой. Аппроксимация строилась методом наименьших квадратом по достаточно точным значениям реального фазового вектора центра масс спутника, заданным на равномерной сетке с шагом 3 мин. Круговая орбита задавалась пятью элементами: радиусом, средним движением (орбитальной частотой ω_0), начальным значением аргумента широты, долготой восходящего узла и наклонением. Вдоль круговой орбиты вычислялись компоненты напряженности МПЗ в системе координат $OX_1X_2X_3$ на моменты t_n. Эти компоненты использовались при многократном вычислении функционала (4) в процессе его минимизации. С помощью решения уравнений (2) они пересчитывались в систему $Oy_1y_2y_3$ и затем в систему $Ox_1x_2x_3$. В качестве t_0 в уравнениях (2) всегда использовалась начальная точка обрабатываемого отрезка данных.

Оценку приемлемости сделанного перехода к круговой орбите, а также оценку ожидаемой точности аппроксимации псевдоизмерений экстремалью функционала (4) дает минимизация функционала

$$\Psi = \sum_{n=0}^{N} \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^{3} [\kappa h_i^{(n)} - \Delta_i']^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{3} [h_i^\circ(t_n)]^2} \right\}^2$$

по κ и Δ_i'. Здесь $\kappa \approx 1$ – масштабирующий коэффициент, Δ_i' – оценки постоянных смещений в псевдоизмерениях. Сумма под вторым радикалом в формуле для Ψ не зависит от ориентации спутника, а зависит только от положения точки O на орбите. При $T = 270\,\textit{мин}$ для большинства отрезков псевдоизмерений стандартное отклонение $\sigma_* = \sqrt{\Psi_{\min}/(N-3)}$ лежит в пределах 300÷400γ. Две типичные экстремали функционала Ψ приведены на рис. 1. В верхней части рисунка сравниваются модули вектора напряженности МПЗ, рассчитанные по псевдоизмерениям и по модели IGRF. Расчет по скорректированным псевдоизмерениям представлен маркерами, расчет по модели IGRF – сплошными линиями. Графики в нижней части рисунка характеризуют отклонения псевдоизмерений от модели. Эти графики – ломаные, вершины которых отвечают ошибкам аппроксимации. В функционал (4) подставлялись псевдоизмерения, масштаб которых был скорректирован множителем κ. Значения этого множителя уточнялись для каждого обрабатываемого отрезка данных. Смещения Δ_i' в последующих расчетах не использовались – более точные оценки смещений находятся посредством минимизации функционала (4).

Функционал (4) минимизировался по 10 величинам: начальным условиям решения системы (2) $\psi(t_0)$, $\theta(t_0)$, $\delta(t_0)$, $w_2(t_0)$, $w_3(t_0)$ и параметрам Ω, λ, p, α_c, β_c. Заключительный этап минимизации выполнялся методом Гаусса–Ньютона. Точность аппроксимации псевдоизмерений и разброс в оцениваемых величинах характеризовались соответствующими стандартными отклонениями. Стандартные отклонения рассчитывались в предположении, что ошибки в псевдоизмерениях $h_i^{(n)}$ некоррелированы и имеют одинаковые дисперсии, средние значения ошибок в псевдоизмерениях с одинаковым нижним индексом i одинаковы (величины Δ_i в (4) – оценки этих средних значений). Стандартные отклонения вычислялись так. Пусть $\Phi_{\min}$ – значение функционала (4) в точке минимума, C – матрица системы нормальных уравнений метода Гаусса–Ньютона в этой точке (матрица $2C$ приблизительно равна матрице квадратичной формы $d^2\Phi$ в точке минимума Φ). Тогда дисперсия ошибок в псевдоизмерениях оценивается величиной $\sigma_H^2 = \Phi_{\min}/(3N-10)$. Стандартные отклонения оцениваемых величин равны квадратным корням из соответствующих диагональных элементов матрицы $\sigma_H^2 C^{-1}$. Эти стандартные обозначим σ_ψ, σ_θ, σ_δ, σ_{w2}, σ_{w3}, σ_Ω, σ_λ, σ_p, $\sigma_{\alpha c}$, $\sigma_{\beta c}$.

Примеры реконструкции движения *Фотона М-2* описанным способом на 6 временных интервалах приведены на рис. 2–7 и в табл. 1–3. На этих интервалах $\omega_0 \approx 0.00116 c^{-1}$. В подписях к рисункам и в таблице использовано Всемирное координированное время (UTC). В табл. 1 приведены начальные точки интервалов t_0. Все интервалы имели длину $T \approx 270$ *мин*. Эта длина совпадает с длиной интервалов в [1, 2] (интервалы 1–3 и 6 под другими номерами рассматривались в указанных работах). При такой длине получаемые значения σ_H примерно в 4 раза превышают типичные значения σ_*, принятую модель движения спутника можно считать достаточно адекватной. Поскольку эта модель является упрощенной, с ее помощью реконструировались достаточно быстрые движения спутника, которые образовались через 5*сут* после начала неуправляемого движения.

Рис. 2–7 иллюстрируют качество аппроксимации псевдоизмерений с помощью найденных решений уравнений (2) и описываемое этими решениями движение спутника относительно орбитальной системы координат. Каждый рисунок естественным образом разбивается на три части – левую, среднюю и правую. В правой части сплошные кривые суть графики функций $h_i(t)$ на отрезке $t_0 \le t \le t_0 + T$, маркеры указывают точки $(t_n, h_i^{(n)} - \Delta_i)$, $n = 0, 1, 2, \ldots N$. Такие графики и графики остатков $h_i^{(n)} - \Delta_i - h_i(t_n)$ служили для выявления сбойных псевдоизмерений. Количественно аппроксимация псевдоизмерений характеризуется стандартным отклонением σ_H, значения которого приведены в табл. 1 и в подписях к рисункам. Приведенные примеры демонстрируют менее точную, чем в [1, 2] и, тем более, в [5] аппроксимацию псевдоизмерений. Значения σ_H

в табл. 1 несколько выше, чем в [1, 2]. Тем не менее, достигнутая точность достаточна для целей данной работы.

Дополнительные сведения о точности построенных реконструкций можно получить из табл. 2, 3. В этих таблицах размерные величины выражены в единицах, использованных при интегрировании уравнений (2). В табл. 2 приведены стандартные отклонения оценок параметров, задающих начальные условия найденных решений системы (2) (включая σ_Ω); в табл. 3 приведены оценки параметров p, λ, α_c, β_c и их стандартные отклонения.

В средней части рис. 2–7 помещены графики компонент угловой скорости w_2, и w_3 в найденных решениях уравнений (2), а также ее компонент Ω_2, Ω_3, о которых пойдет речь ниже. В левой части рисунков находятся графики зависимости от времени угла $\Lambda = \arccos a_{21}$ между осями Ox_1 и OX_2 и углов ψ, θ, задающих положение оси Ox_1 относительно орбитальной системы координат. Последние два угла рассчитывались с использованием формул

$$\cos\theta = \sqrt{a_{32}^2 + a_{33}^2}\,, \quad \sin\theta = -a_{31}, \quad \cos\psi = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}, \quad \sin\psi = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}.$$

В приведенных реконструкциях движение спутника похоже на регулярную прецессию Эйлера осесимметричного твердого тела. На каждом временном интервале это движение характеризуется величинами Ω и $\omega_\perp = \sqrt{w_2^2 + w_3^2}$. В точной регулярной прецессии Эйлера Ω и $\omega_\perp$ постоянны. Система (2) имеет первый интеграл (3), поэтому на ее решениях в общем случае $\omega_\perp \neq \mathrm{const}$. Однако в рассмотренных примерах величина $\omega_\perp$ изменяется в узких пределах. В таких движениях $\omega_\perp$ удобно характеризовать величинами

$$\overline{\omega}_\perp = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \omega_\perp\,dt, \quad \delta\omega_\perp = \left[\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} (\omega_\perp - \overline{\omega}_\perp)^2 dt\right]^{1/2}.$$

Значения величин Ω, σ_Ω, $\overline{\omega}_\perp$ и $\delta\omega_\perp$ указаны в табл. 1. Судя по значениям Ω и $\overline{\omega}_\perp$, движение спутника на интервалах 3 – 6 практически установилось.

4. Уравнения движения оси симметрии спутника. Для описания движений спутника, в которых ось Ox_1 отклоняется от оси OX_2 менее чем на $\pi/2$, положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $OX_1X_2X_3$ удобно задавать введенными выше углами ψ и θ; третий угол, поворот на который вокруг оси Ox_1 завершает преобразование системы $OX_1X_2X_3$ в систему $Ox_1x_2x_3$, обозначим φ. Преобразование $OX_1X_2X_3 \to Ox_1x_2x_3$ можно представить в виде суперпозиции преобразований $OX_1X_2X_3 \to Oy_1y_2y_3$ и $Oy_1y_2y_3 \to Ox_1x_2x_3$. Первое преобразование задается углами ψ, θ и δ, второе преобразование – углом χ. Повороты на углы δ и χ выполняются вокруг оси $Ox_1 = Oy_1$ в одном направлении, поэтому $\varphi = \delta + \chi$.

Если интересоваться только движением оси симметрии спутника Ox_1, то удобно использовать углы ψ, θ и комбинации угловых скоростей

$$\Omega_2 = \omega_2\cos\varphi - \omega_3\sin\varphi = w_2\cos\delta - w_3\sin\delta\,,$$

$$\Omega_3 = \omega_2\sin\varphi + \omega_3\cos\varphi = w_2\sin\delta + w_3\cos\delta\,,$$

где

$$\cos\delta = \frac{a_{33}}{\sqrt{a_{32}^2 + a_{33}^2}}, \qquad \sin\delta = \frac{a_{32}}{\sqrt{a_{32}^2 + a_{33}^2}}.$$

Такие переменные были использованы в [4]. Величины Ω_2 и Ω_3 – проекции угловой скорости спутника на оси Резаля, отвечающие углам ψ и θ. Графики этих величин в рассмотренных примерах приведены в средней части рис. 2–7.

Для переменных ψ, θ, Ω_2, Ω_3 справедливы уравнения [4]

$$\dot\theta = \Omega_2 - \omega_0\cos\psi\,, \qquad \dot\psi = \frac{\Omega_3}{\cos\theta} - \omega_0\operatorname{tg}\theta\sin\psi\,, \tag{5}$$

$$\dot\Omega_2 = -\left(\lambda\Omega + \Omega_3\operatorname{tg}\theta - \omega_0\frac{\sin\psi}{\cos\theta}\right)\Omega_3 + 3\omega_0^2(1-\lambda)\sin\theta\cos\theta + p\cos\psi\sin\theta,$$

$$\dot\Omega_3 = \left(\lambda\Omega + \Omega_3\operatorname{tg}\theta - \omega_0\frac{\sin\psi}{\cos\theta}\right)\Omega_2 + p\sin\psi\,.$$

Удобство переменных Ω_2, Ω_3 при спектральном анализе найденных движений заключается в том, что согласно уравнениям (5) эти переменные имеют одинаковый набор частот с переменными θ и ψ. Графики решений системы (5), описывающих движения спутника на интервалах из табл. 1, это – графики переменных θ, ψ, Ω_2, Ω_3 на рис. 2–7. Судя по графикам, найденные решения являются условно-периодическими с двумя доминирующими частотами. Эти частоты были определены с помощью спектрального анализа. Чтобы надежно определить их, исследуемые решения были продолжены на отрезок $t_0 \le t \le t_0 + {}$ $+ 50000с$ и вычислены в узлах сетки $\{t'_m\}_{m=0}^{M}$, $t'_m = t_0 + mh$, $h = 20с$, $M = 2500$. Основные приемы спектрального анализа изложим на примере последовательности $\theta_m = \theta(t'_m)$. Аналогичные последовательности, отвечающие остальным переменным системы (5) были исследованы по той же схеме. Более подробно эти приемы описаны в [6].

5. Спектральный анализ построенных реконструкций начинался с попытки выделить из данных θ_m отдельные гармонические составляющие (их еще называют циклическими трендами). С этой целью данные аппроксимировались функцией

$$\theta_{\text{ap}}(t) = a_0 + a\cos 2\pi f t + b\sin 2\pi f t\,,$$

где a_0, a, b и f – параметры. Значения параметров искались методом наименьших квадратов. Составим выражение

$$Z = \sum_{m=0}^{M} [\theta_m - \theta_{\text{ар}}(t'_m)]^2 . \tag{6}$$

Согласно методу наименьших квадратов определение параметров a_0, a, b и f сводится к минимизации по ним выражения (6). Функция $Z = Z(a_0, a, b, f)$ имеет, как правило, много локальных минимумов, поэтому ее минимизация проводилась поэтапно. Сначала в результате решения ряда одинаковых линейных задач наименьших квадратов вычислялись значения функции

$$Z_1(f) = \min_{a_0, a, b} Z(a_0, a, b, f)$$

в узлах достаточно мелкой равномерной сетки на отрезке $0 \le f \le F = (2h)^{-1}$ (смысл величины F пояснен ниже), строился график этой функции. Затем перебором по сетке находились приближенные значения точек минимума $Z_1(f)$. Абсциссы значимых (с достаточно малыми ординатами) точек минимума могут быть частотами искомых гармоник. Значения пробной частоты f, отвечающие значимым сеточным минимумам функции Z_1, служат оценками искомых частот исследуемых решений.

Для проверки значимости найденных частот другим способом наряду с функцией $Z_1(f)$ рассматривалась функция

$$I(f) = \left[\sum_{m=0}^{M} (\theta_m - \theta_*) \cos 2\pi f t'_m \right]^2 + \left[\sum_{m=0}^{M} (\theta_m - \theta_*) \sin 2\pi f t'_m \right]^2 ,$$

$$\theta_* = \frac{1}{M+1} \sum_{m=0}^{M} \theta_m ,$$

называемая периодограммой Шустера [6]. Пусть исследуемый набор данных θ_m образован значениями в точках t'_m функции

$$\theta_H(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{K} (a_k \cos 2\pi f_k t + b_k \sin 2\pi f_k t) , \tag{7}$$

где все $f_k > 0$ и среди них нет одинаковых. Составим выражение

$$I_1(f) = \left\{ \sum_{m=0}^{M} [\theta_H(t'_m) - a_0] \cos 2\pi f t'_m \right\}^2 + \left\{ \sum_{m=0}^{M} [\theta_H(t'_m) - a_0] \sin 2\pi f t'_m \right\}^2 .$$

Его можно преобразовать к виду

$$I_1(f) = \frac{(M+1)^2}{4} \sum_{k=1}^{K} (a_k^2 + b_k^2) [W(f - f_k) + W(f + f_k)] + \Delta I_1(f) ,$$

$$W(f)=\frac{1}{(M+1)^2}\left[\left(\sum_{m=0}^{M}\cos 2\pi f t'_m\right)^2+\left(\sum_{m=0}^{M}\sin 2\pi f t'_m\right)^2\right]=\frac{\sin^2\pi(M+1)fh}{(M+1)^2\sin^2\pi fh}.$$

Здесь $\Delta I_1(f)$ – сумма тригонометрических выражений вида $A\cos\phi+B\sin\phi$, где $\phi=f(t'_j-t'_i)\pm f_p t'_i\pm f_q t'_j$ $(i<j)$, коэффициенты A и B зависят от a_k, b_k.

Функция $W(f)$ называется функцией окна [6]. Она – четная, периодическая с периодом h^{-1} и удовлетворяет соотношениям $0\le W(f)\le 1$, $W(0)=1$. Ее наименьший положительный нуль равен $[(M+1)h]^{-1}$. Функция окна периодическая с периодом $2F$. Значимые максимумы (пики) функции окна равны 1 и достигаются в точках $F_l=2lF$ $(l=0,1,2,\dots)$. Вне малых окрестностей этих точек $W(f)<0.01$. С увеличением M ширина пиков этой функции сужается. В силу четности и периодичности функция окна полностью определяется своими значениями на отрезке $0\le f\le F$.

Для $\Delta I_1(f)$ не удается найти простых эффективных оценок, но при $M>>K$ вкладом этого слагаемого в значения функции $I_1(f)$ вблизи точек ее значимых максимумов можно пренебречь и принять

$$I_1(f)\approx\frac{(M+1)^2}{4}\sum_{k=1}^{K}(a_k^2+b_k^2)[W(f-f_k)+W(f+f_k)].$$

Отсюда, учитывая поведение функции $W(f)$, находим точки таких максимумов. Они определяются соотношениями $|f\pm f_k|=F_l$. Пусть все $f_k<F_1/2=F$. Тогда на отрезке $0\le f\le F$

$$I_1(f)\approx\frac{(M+1)^2}{4}\sum_{k=1}^{K}(a_k^2+b_k^2)W(f-f_k),$$

и отыскание значимых максимумов функции $I_1(f)$ на этом отрезке позволяет в принципе определить все частоты выражения (7). Частота F называется частотой Найквиста. Именно она служила верхней границей диапазона частот, для которых вычислялась функция $Z_1(f)$. В случае рассматриваемых видеоданных $F=12.5$ Гц.

Здесь необходимо отметить следующее. Корректная интерпретация частот в данных на равномерной временной сетке с шагом h возможна лишь в том случае, если в этих данных отсутствуют частоты, превышающие частоту Найквиста $F=0.5/h$. Если в данных присутствует гармоническая составляющая частотой $f>F$, то она либо исказит составляющие с частотами $|f\pm F_l|$ при значениях l, для которых $0\le|f\pm F_l|\le F$, либо проявится как дополнительная частота. Этот эффект называется наложением частот. Чтобы избежать его, надо быть уверенным, что на интервале $f>F$ исследуемая функция не имеет значимых циклических трендов. В случае рассматриваемых движений спутника *Фотон М-2* значимых циклических трендов нет уже при $f > 0.002$*Гц*.

Периодограмма Шустера используется следующим образом. Если функция $I_1(f)$ имеет значимый максимум в точке f_*, то f_* близка одной из частот выражения (7). При $f_* \approx f_k$ величина $2\sqrt{I_1(f_*)}/(M+1) \approx \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, т.е. является оценкой амплитуды гармоники с частотой f_k. Так как погрешность соотношения $a_0 = \theta_*$ обычно весьма мала, в выписанных соотношениях функцию $I_1(f)$ можно заменить функцией $I(f)$.

Ниже для удобства вместо графиков функций $\Psi_1(f)$ и $I(f)$ приводятся графики функций

$$E(f) = \sqrt{\frac{Z_1(f)}{M-2}}, \qquad A(f) = \frac{2}{M+1}\sqrt{I(f)}. \tag{8}$$

Минимумы функции $E(f)$ дают оценки средней квадратичной ошибки аппроксимации функции $x(t)$ выражением (1), максимумы функции $A(f)$ – оценки амплитуды $\sqrt{a^2 + b^2}$. Функцию $A(f)$ называют амплитудным спектром. Вне малой окрестности точки $f = 0$ амплитудным спектром может служить и функция $\tilde{A}(f) = \sqrt{a^2(f) + b^2(f)}$, где $a(f)$ и $b(f)$ находятся при вычислении функции $Z_1(f)$ (при $f < \pi/T$ соответствующая задача наименьших квадратов плохо обусловлена). Значимые максимумы функций $A(f)$ и $\tilde{A}(f)$ практически совпадают.

Пусть с использованием периодограмм $Z_1(f)$ и $I(f)$ описанным выше способом найдены частоты f_k $(k = 1, 2, \ldots, K; K << N)$. Отвечающий этим частотам тренд (сумму циклических трендов) ищем в виде (7). Коэффициенты a_k и b_k находим, решая линейную задачу наименьших квадратов. Сравнение выражения (7) с исходной функцией $\theta(t)$ на сетке $\{t'_m\}$ дает объективную оценку точности построенной аппроксимации и определения частот f_k.

Ниже функции (8), построенные по сеточным значениям переменных θ, ψ, Ω_2, Ω_3, снабжены одноименными нижними индексами. Примеры построенных аппроксимаций для движений, продолженных с интервалов 3 и 6, приведены на рис. 8–15. В левых частях этих рисунков приведены графики функций (8), в правых частях – графики, иллюстрирующие точность построенных аппроксимаций. В верней половине правых частей в единых системах координат приведены графики исходных функций и аппроксимирующих выражений (7) (ломаные с абсциссами вершин в узлах сетки $\{t'_m\}$ и ординатами, равными значениям функций). Графики практически совпадают, поэтому в нижней половине правых частей рис. 8–15 приведены графики разностей $\Delta\theta = \theta(t) - \theta_H(t)$ и т. д. В подписях к рисункам приведены частоты и амплитуды циклических трендов, использованных в аппроксимациях; амплитуда указана под частотой.

В каждой реконструкции частоты трендов с большими амплитудами в разных переменных практически совпадают, частоты с малыми амплитудами совпадают несколько хуже.

Как видно из рисунков, в рассматриваемых реконструкциях присутствуют две доминирующих частоты. Более точно, в переменных θ и ψ присутствуют две таких частоты, назовем их низкая и высокая, а в переменных Ω_2 и Ω_3 присутствует только одна из них – высокая. Низкая частота в Ω_2 и Ω_3 также присутствует, но определяется со смещением, и ей отвечает весьма малая амплитуда. Высокая частота связана с так называемым нутационным движением спутника. Оно существует при угле нутации (между вектором кинетического момента и осью симметрии Ox_1), отличном от нуля и π. Это движение проявляется в компонентах угловой скорости Ω_2, Ω_3, ω_2, ω_3 и w_2, w_3. Для пары w_2, w_3 эта частота (циклическая) близка $\lambda\Omega$, для пары ω_2, ω_3 она близка $(1-\lambda)\Omega$. В регулярной прецессии Эйлера указанные выражения для частот – точные.

Низкая частота, как будет сейчас показано, это частота векового движения собственного кинетического момента спутника относительно орбитальной системы координат. Чтобы установить это, рассмотрим эволюционные уравнения В.В. Белецкого, полученные усреднением уравнений (2) по регулярной прецессии Эйлера. Эти уравнения имеют вид [1, 2]

$$\dot{\mathbf{e}}_L = \frac{3\omega_0^2}{2l}(1-\lambda)(1-3c^2)(\mathbf{E}_3\cdot\mathbf{e}_L)(\mathbf{E}_3\times\mathbf{e}_L) + \frac{pc}{l}(\mathbf{E}_1\times\mathbf{e}_L),$$

$$\dot{\omega}_\perp = 0, \quad l = \sqrt{\lambda^2\Omega^2 + \omega_\perp^2}, \quad c = \frac{\lambda\Omega}{l}.$$

Здесь $\mathbf{e}_L$ – орт собственного кинетического момента спутника, $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_3$ – орты осей OX_1 и OX_3 соответственно. В этих уравнениях $\omega_\perp$, l и c – постоянные величины. В скалярной форме последние уравнения запишем в орбитальной системе координат. Орт $\mathbf{e}_L$ параметризируем углами $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\theta}$ так, чтобы в орбитальной системе $\mathbf{e}_L = (\cos\tilde{\psi}\cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\psi}\cos\tilde{\theta}, -\sin\tilde{\theta})$. Заметим, что орт оси Ox_1 в орбитальной системе параметризируется такими же формулами, в которых вместо углов $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\theta}$ используются углы ψ и θ. В переменных $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\theta}$ эволюционные уравнения В.В. Белецкого выглядят так:

$$\dot{\tilde{\psi}}\cos\tilde{\theta} = -\kappa_g \sin\tilde{\theta}\cos\tilde{\theta} + (\kappa_a\cos\tilde{\psi} - \omega_0\sin\tilde{\psi})\sin\theta, \tag{9}$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\kappa_a\sin\tilde{\psi} - \omega_0\cos\tilde{\psi},$$

$$\kappa_g = \frac{3\omega_0^2}{2l}(1-\lambda)(1-3c^2), \quad \kappa_a = \frac{pc}{l}, \quad l = \sqrt{\lambda^2\Omega^2 + \omega_\perp^2}, \quad c = \frac{\lambda\Omega}{l}.$$

Здесь κ_g и κ_a – параметры, значения которых на каждом интервале обработки магнитных измерений выражаются через найденные для этого интервала величины Ω, λ, p и $\overline{\omega}_{\perp}$.

Уравнения (9) допускают первый интеграл

$$\frac{\kappa_g}{2}\sin^2\tilde{\theta}+(\kappa_a\cos\tilde{\psi}-\omega_0\sin\tilde{\psi})\cos\tilde{\theta}$$

и интегрируются в квадратурах [3]. Они также сохраняют свой вид при замене

$$t\to -t\,,\quad \theta\to-\theta\,. \tag{10}$$

Решения уравнений (10), расположенные в области $|\theta|<\pi/2$, $|\tilde{\psi}-\pi/2|<\pi/2$, периодические. Сдвиг по времени, допускаемый в решениях автономных систем, в можно выбрать так, чтобы сдвинутое периодическое решение удовлетворяло краевым условиям

$$\tilde{\theta}(0)=\tilde{\theta}\left(\frac{T}{2}\right)=0\,, \tag{11}$$

где T – период решения. Используя только инвариантность уравнений (9) относительно преобразования (10), можно доказать [7], что всякое решение краевой задачи (9), (11) является T-периодическим, в котором переменная $\tilde{\psi}$ – четная, а переменная $\tilde{\theta}$ – нечетная функции времени.

Решения краевой задачи (9), (11), аппроксимирующие низкочастотную составляющую в угловых переменных системы (5), находились следующим образом. Величина, обратная низкой частоте на данном временном интервале, принималась в качестве периода T. Параметры κ_g и κ_a в (9) рассчитывались по значениям величин Ω, λ, p и $\overline{\omega}_{\perp}$, полученным в результате обработки магнитных измерений на этом интервале. Методом пристрелки решалась краевая задача (9), (11). Определяемой величиной служило начальное условие $\tilde{\psi}(0)$. Ее первое приближение находилось вычитанием из $\pi/2$ амплитуды тренда с низкой частотой T^{-1}. Решения задачи (9), (11) для интервалов 3 и 6 представлены в левых частях рис. 16, 18 графиками функций $\tilde{\theta}(t)$ и $\tilde{\psi}(t)$, $0\le t\le 2T$.

Сопоставление движений, найденных обработкой магнитных измерений, и решений задачи (9), (11) выполнялось по следующей схеме. Периодические функции $\tilde{\theta}(t)$ и $\tilde{\psi}(t)$ аппроксимировались дискретными рядами Фурье [8]. Нечетная функция $\tilde{\theta}(t)$ разлагалась в ряд по синусам, четная функция $\tilde{\psi}(t)$ разлагалась в ряд по косинусам В каждом аппроксимирующем выражении использовалось 200 гармоник. Построенные ряды обозначим $\tilde{\theta}_F(t)$, $\tilde{\psi}_F(t)$. Составлялось выражение

$$F(\tau)=\sum_{m=0}^{M}\{[\theta(t'_m)-\tilde{\theta}_F(t'_m-t_0-\tau)]^2+[\psi(t'_m)-\tilde{\psi}_F(t'_m-t_0-\tau)]^2\}\,,$$

которое минимизировалось по τ на достаточно мелкой сетке. Найденные таким образом значения τ приведены в подписях к рис. 16 и 18. В правых частях этих рисунков приведены графики функций $\tilde{\theta}_F(t-t_0-\tau)$ и $\tilde{\psi}_F(t-t_0-\tau)$, $t_0 \le t \le t_0 + {} + 50000c$.

В левых частях рис. 17, 19 в единых системах координат приведены графики функций $\theta(t)$, $\psi(t)$ и рядов Фурье $\tilde{\theta}_F(t-t_0-\tau)$, $\tilde{\psi}_F(t-t_0-\tau)$. В правой части этих рисунков представлены графики разностей $\Delta\theta = \theta(t) - \tilde{\theta}(t-t_0-\tau)$, $\psi(t) - \tilde{\psi}(t-t_0-\tau)$. Все графики построены по значениям соответствующих функций на сетке $\{t'_m\}_{m=0}^{M}$. Как видно из графиков, решения уравнений (10) адекватно представляют низкочастотную составляющую в переменных θ и ψ построенных реконструкций. Низкая частота действительно связана с вековым движением собственного кинетического момента спутника.

Система (5) в [4] обозначена как система (6). Система (10) в той работе не рассматривалась, но если ее использовать и выполнить необходимые расчеты, то и в случае *Фотона-12* придем к результатам, качественно и даже количественно совпадающим с описанными выше. Периодические решения, найденные в [4], возникают в случаях, когда низкочастотная составляющая в решениях системы (6) из [4] имеет малую амплитуду и в реконструкциях движения *Фотона-12* присутствует только одна доминирующая частота. Эти случаи характеризуются тем, что собственный кинетический момент спутника лежит вблизи нормали к плоскости его орбиты, и в таких движениях его изменение весьма мало – происходит в основном за счет регрессии узла орбиты спутника.

Литература

1. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Исследование эволюции вращательного движения спутника *Фотон М-2* // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 116. https://keldysh.ru/papers/2020/prep2016_116.pdf.
2. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Исследование эволюции вращательного движения спутника *Фотон М-2* // Космические исследования. 2020. Т. 58. № 4. С. 291-304.
3. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Издательство МГУ, 1975.
4. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Периодическая аппроксимация вращательного движения спутника *Фотон-12* // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 90. https://keldysh.ru/papers/2020/prep2020_90.pdf.
5. Абрашкин В.И., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е., Казакова А.Е., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Неуправляемое движение спутника *Фотон М-2* и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2007. Т.45. №5. С.450-470.
6. Теребиж В.Ю. Анализ временных рядов в астрофизике. М.: Наука, 1992.
7. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах. М.: Мир, 1966.
8. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1960.

Таблица 1. Результаты обработки измерений МПЗ, выполненных на спутнике *Фотон М-2*

Инт. №	Дата, VI.05	t_0, UTC	σ_H, γ	Ω, град./с	σ_Ω, град./с	$\overline{\omega}_\perp$, град./с	$\delta\omega_\perp$, град./с
1	5	10:36:28	1460	0.9322	0.00030	0.1464	0.011
2	7	09:18:53	1256	1.0673	0.00027	0.1295	0.010
3	8	09:20:09	1210	1.1120	0.00024	0.1128	0.010
4	8	18:57:22	1233	1.1258	0.00020	0.1079	0.010
5	9	01:21:00	1348	1.1357	0.00027	0.1119	0.010
6	9	09:21:25	1033	1.1499	0.00022	0.1122	0.011

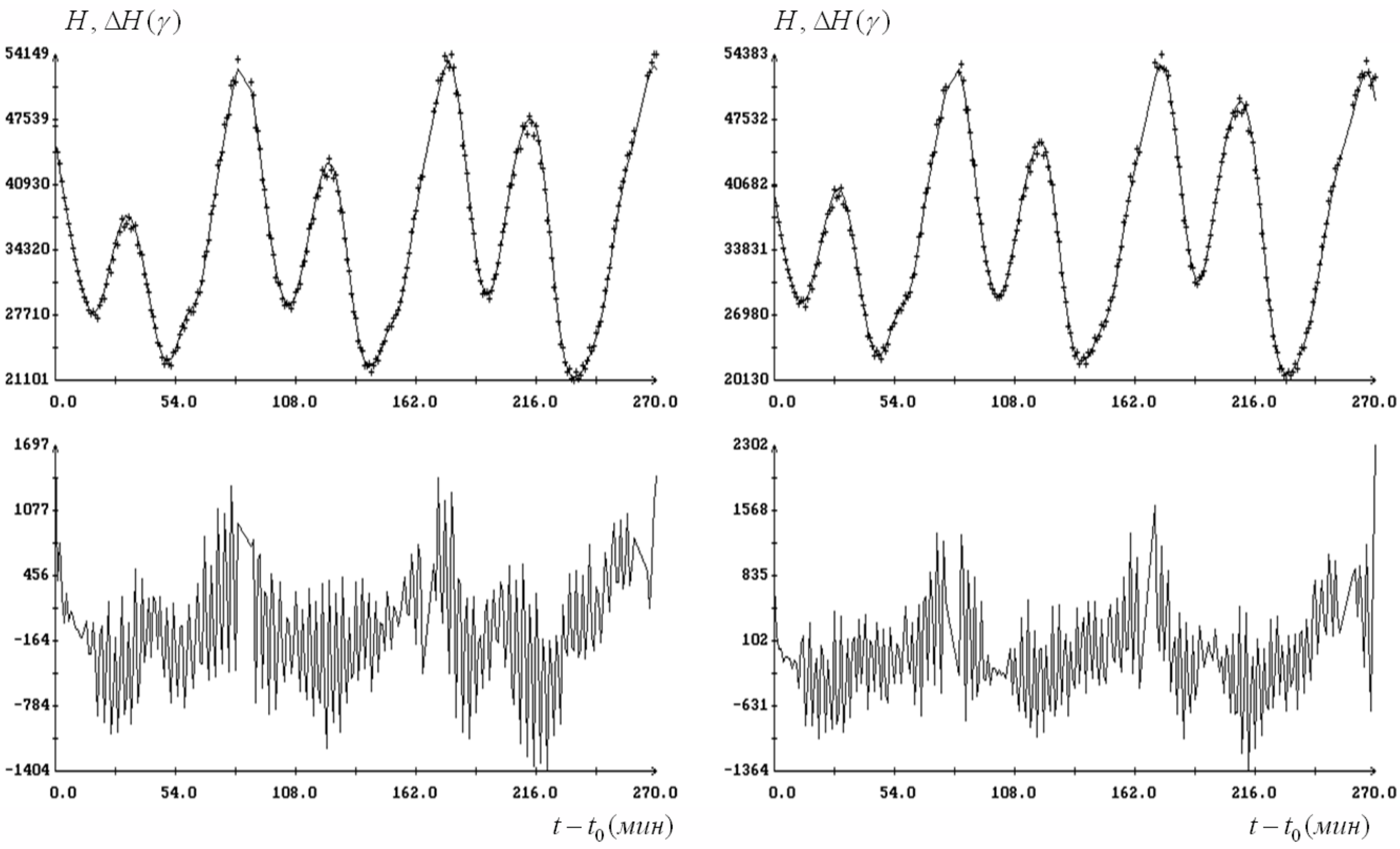
Таблица 2. Стандартные отклонения оценок начальных условий вращательного движения

Инт. №	σ_ψ	σ_θ	σ_φ	σ_Ω	σ_{w2}	σ_{w3}
1	0.0059	0.0068	0.0067	0.0052	0.032	0.011
2	0.0057	0.0063	0.0049	0.0048	0.012	0.030
3	0.0052	0.0063	0.0065	0.0043	0.024	0.021
4	0.0046	0.0039	0.0050	0.0035	0.024	0.013
5	0.0056	0.0069	0.0063	0.0046	0.032	0.018
6	0.0064	0.0020	0.0088	0.0039	0.012	0.026

Таблица 3. Оценки и стандартные отклонения параметров уравнений движения

Инт. №	p	σ_p	λ	σ_λ
1	– 0.1229	0.021	0.2642	0.00024
2	– 0.0948	0.022	0.2611	0.00022
3	– 0.1073	0.022	0.2623	0.00019
4	– 0.1805	0.020	0.2619	0.00015
5	– 0.1383	0.025	0.2612	0.00019
6	– 0.1354	0.020	0.2608	0.00017

Инт. №	α_c	$\sigma_{\alpha c}$	β_c	$\sigma_{\beta c}$
1	– 0.0045	0.0033	0.0184	0.0033
2	– 0.0022	0.0029	0.0156	0.0029
3	– 0.0039	0.0027	0.0179	0.0028
4	– 0.0044	0.0024	0.0193	0.0024
5	– 0.0046	0.0028	0.0176	0.0028
6	– 0.0073	0.0023	0.0161	0.0023



(а) (б)

Рис. 1. Сравнение модулей измеренной и расчетной напряженности МПЗ; (а) момент времени $t_0 = 09{:}\ 18{:}\ 53$ UTC 07.06.2005, $\sigma_* = 322\gamma$; (б) момент времени $t_0 = 09{:}\ 21{:}\ 25$ UTC 09.06.2005, $\sigma_* = 318\gamma$.

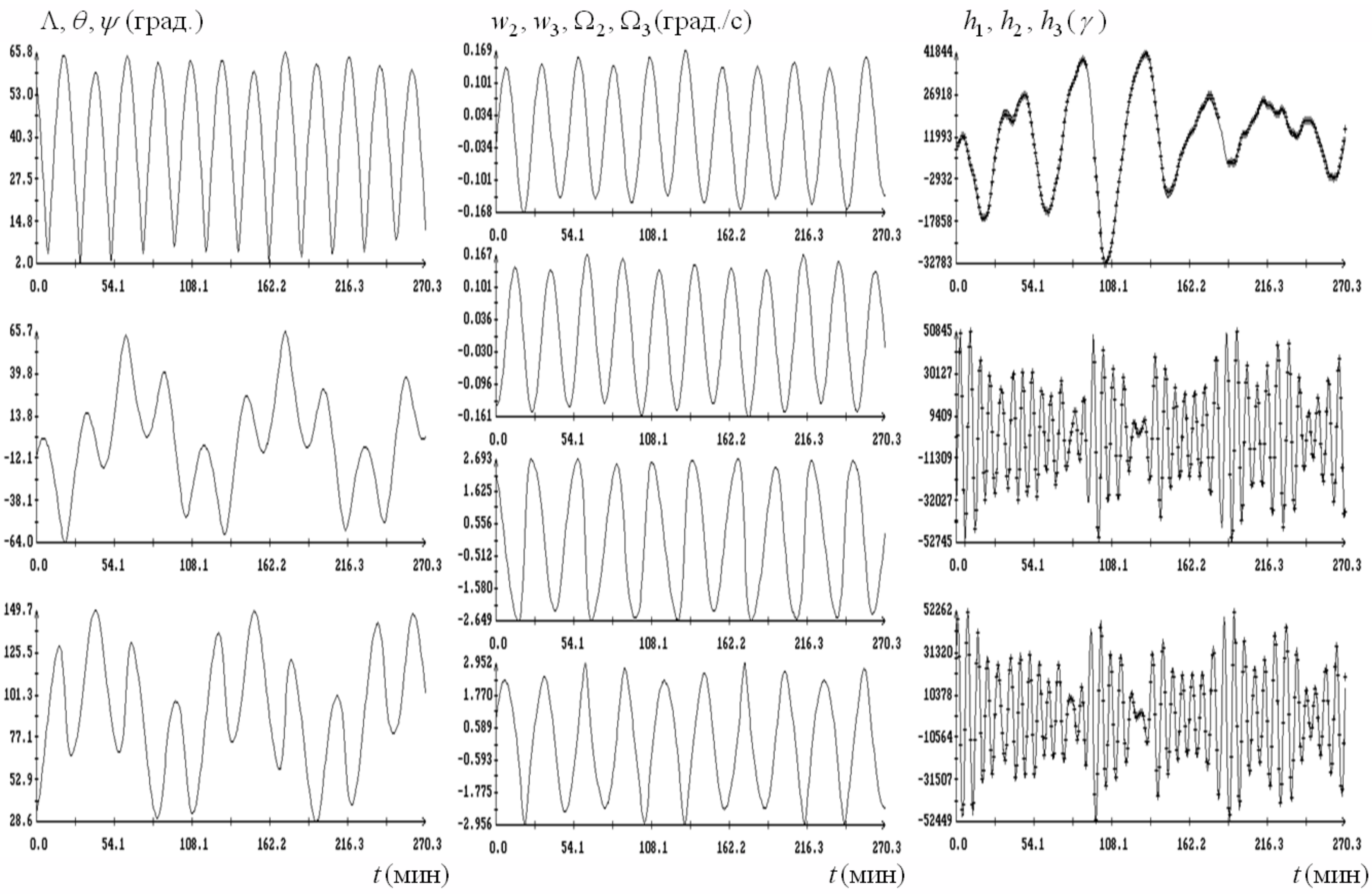


Рис. 2. Интервал 1. Момент $t = 0$ соответствует 10:36: 28 UTC 05.06.2005, $\Omega = 0.9322°/c$, $\sigma_H = 1460\gamma$.

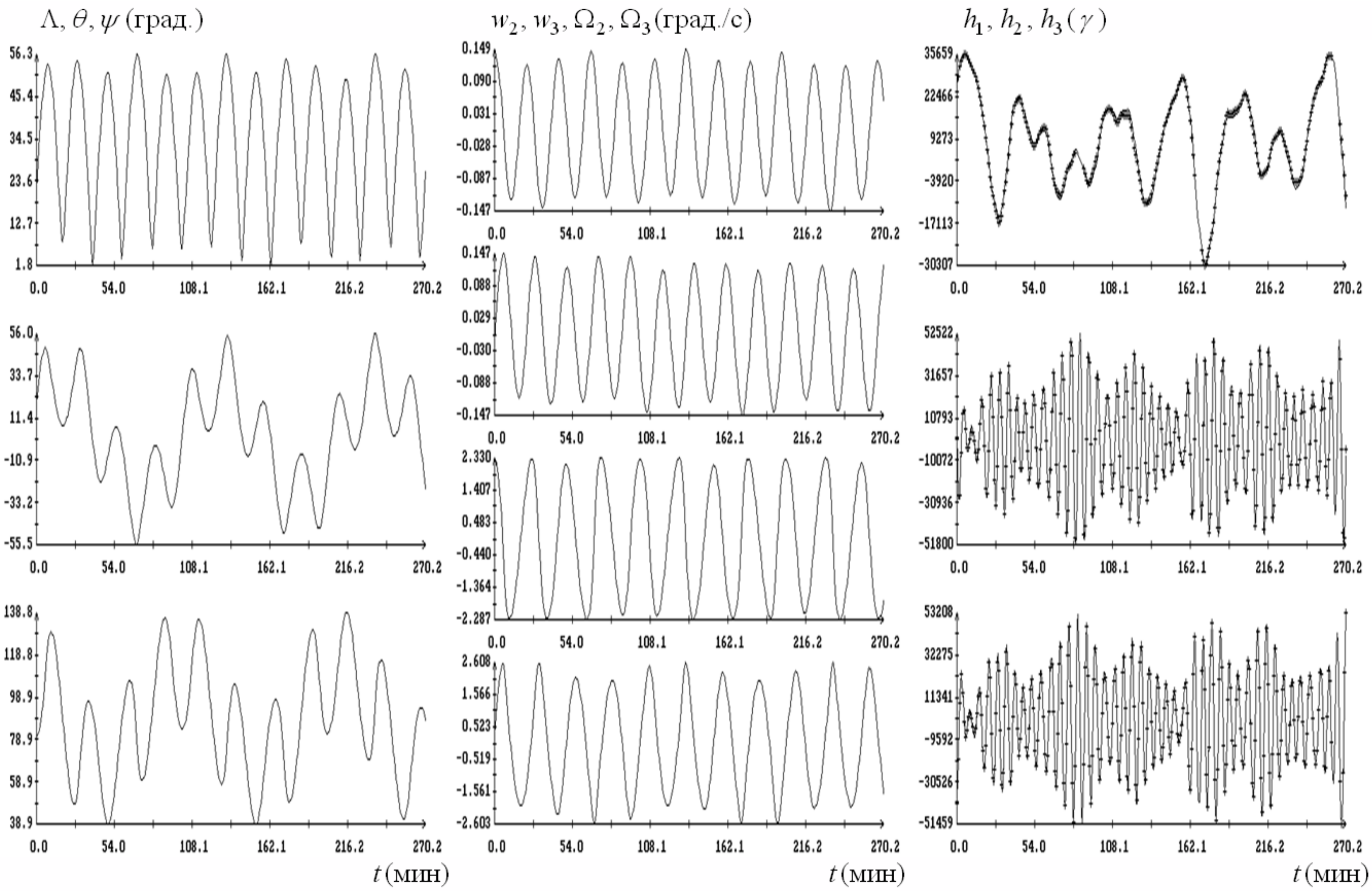


Рис. 3. Интервал 2. Момент $t = 0$ соответствует 09:18:53 UTC 07.06.2005, $\Omega = 1.0673°/c$, $\sigma_H = 1256\,\gamma$.

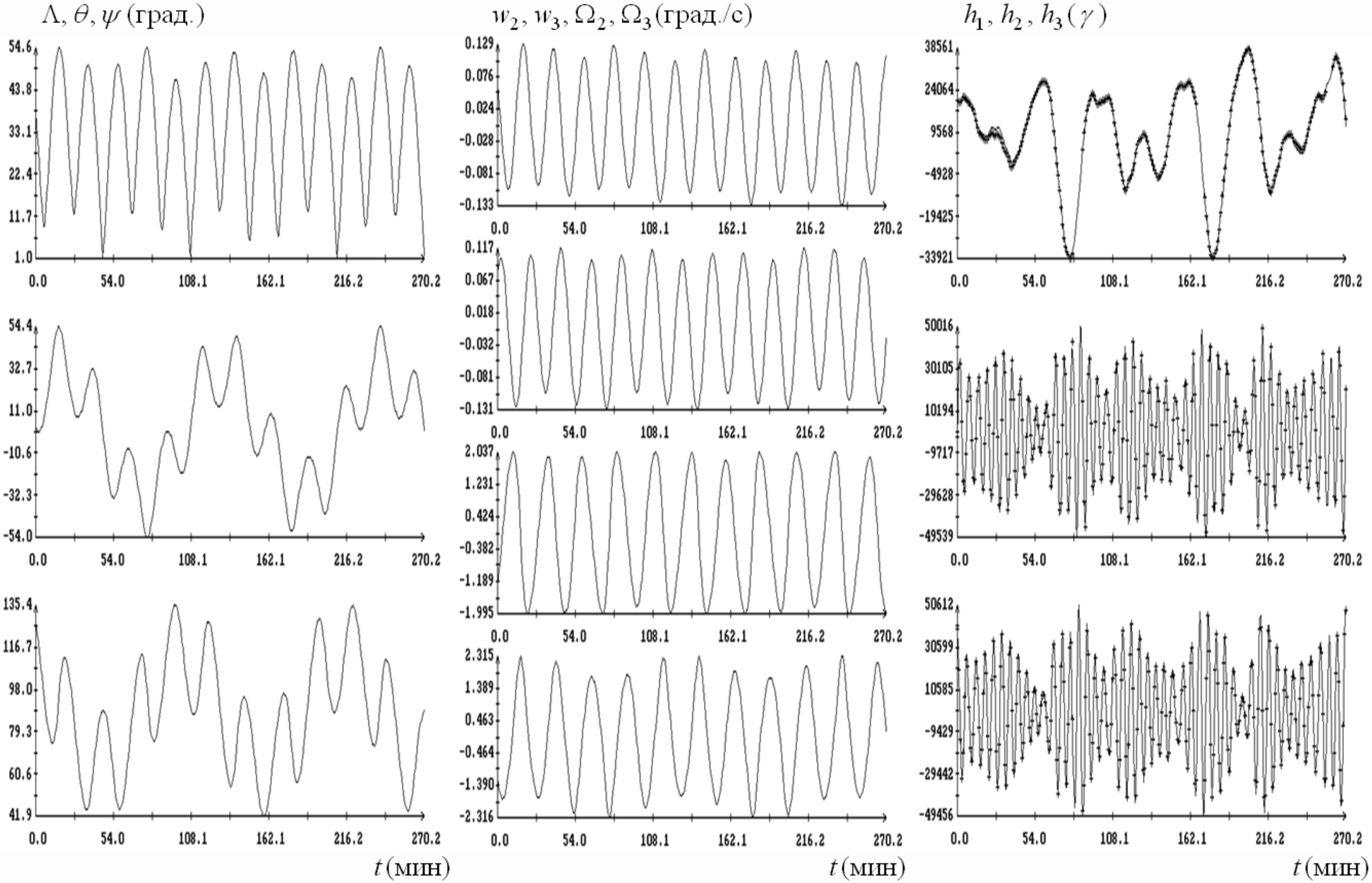


Рис. 4. Интервал 3. Момент $t = 0$ соответствует 09:20: 09 UTC 08.06.2005, $\Omega = 1.1120°/c$, $\sigma_H = 1210\,\gamma$.

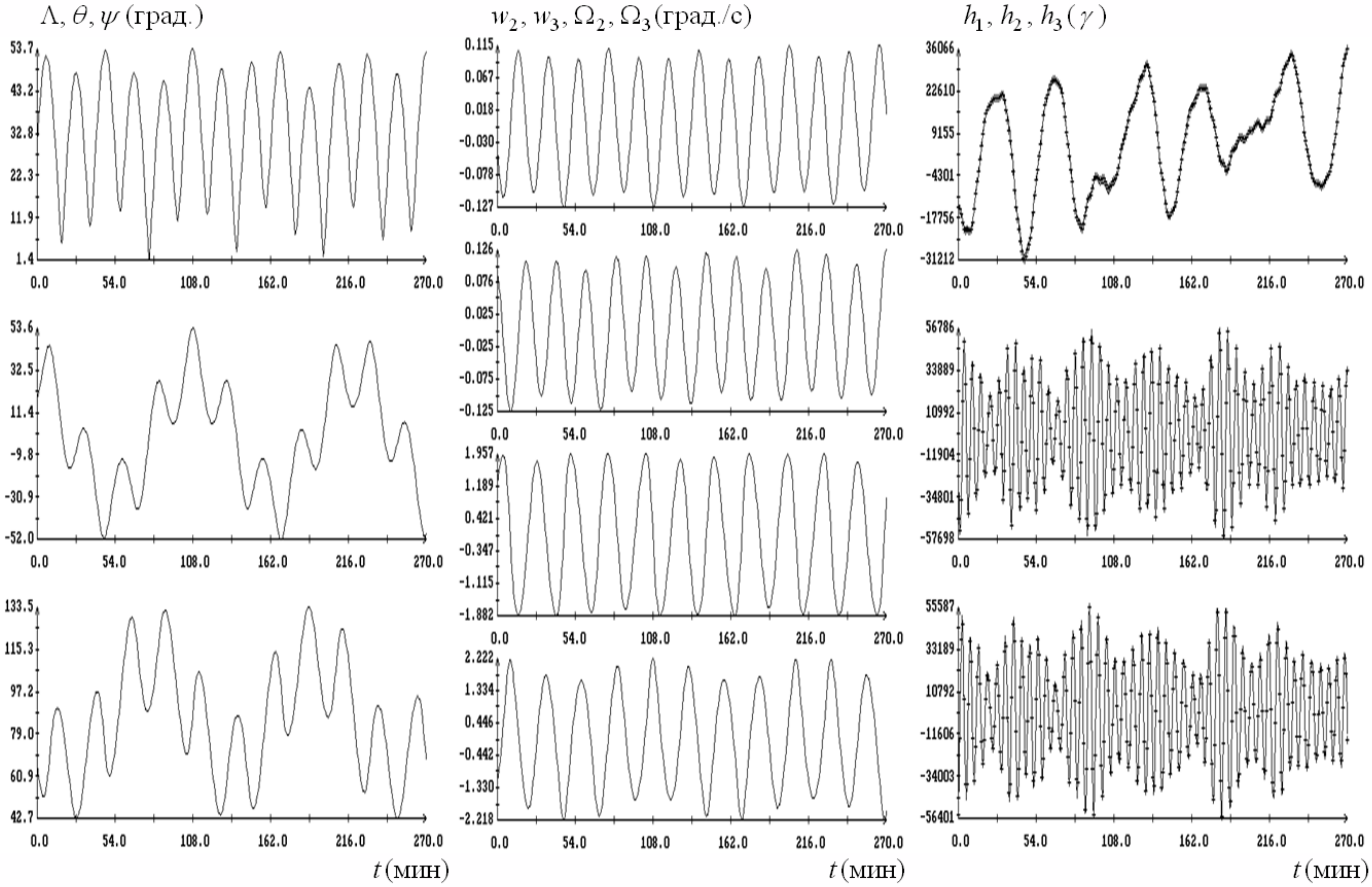


Рис. 5. Интервал 4. Момент $t = 0$ соответствует 18:57: 22 UTC 08.06.2005, $\Omega = 1.1258°/c$, $\sigma_H = 1233\gamma$.

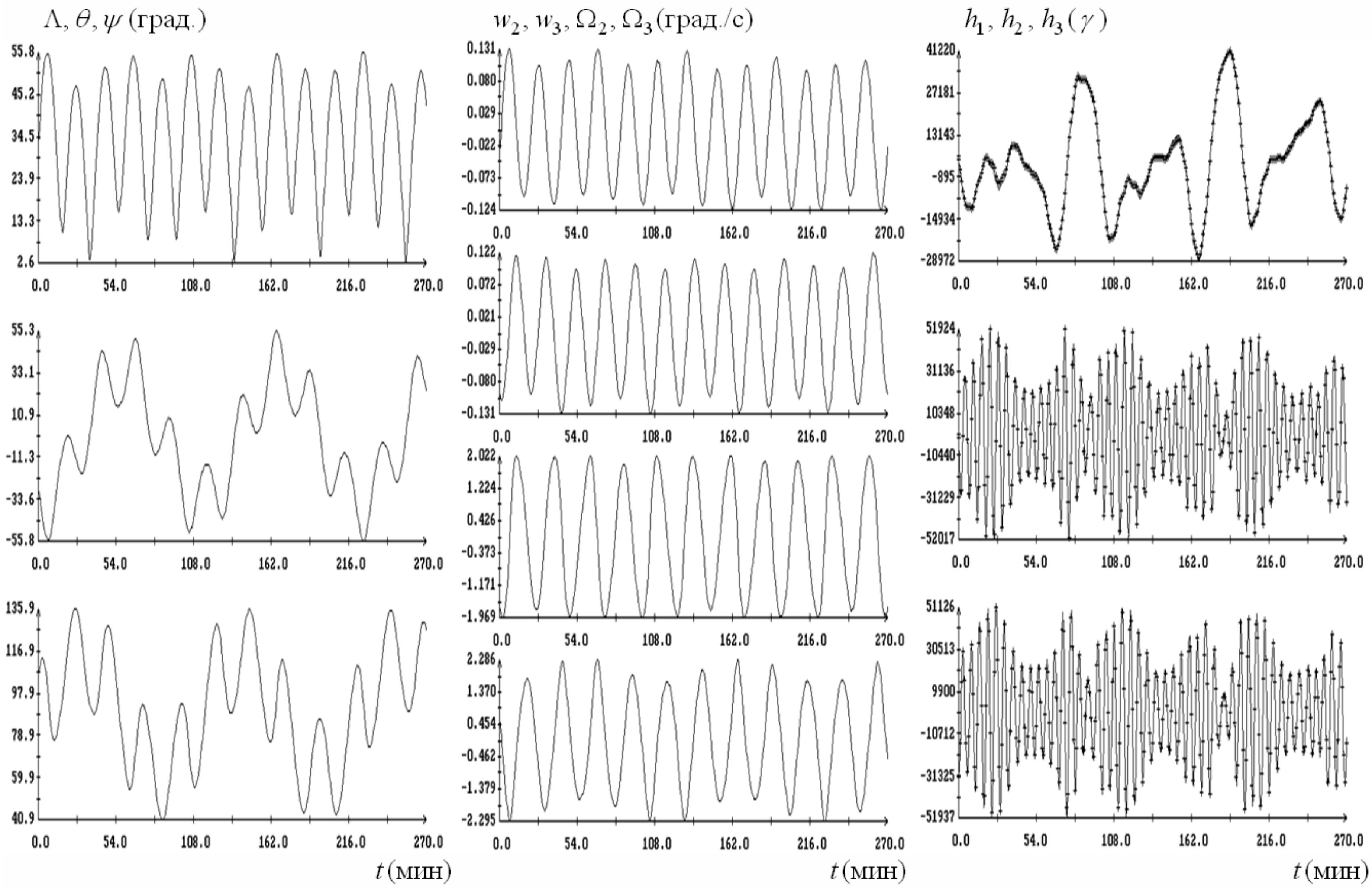


Рис. 6. Интервал 5. Момент $t=0$ соответствует 01:21:00 UTC 09.06.2005, $\Omega = 1.1357°/c$, $\sigma_H = 1348\gamma$.

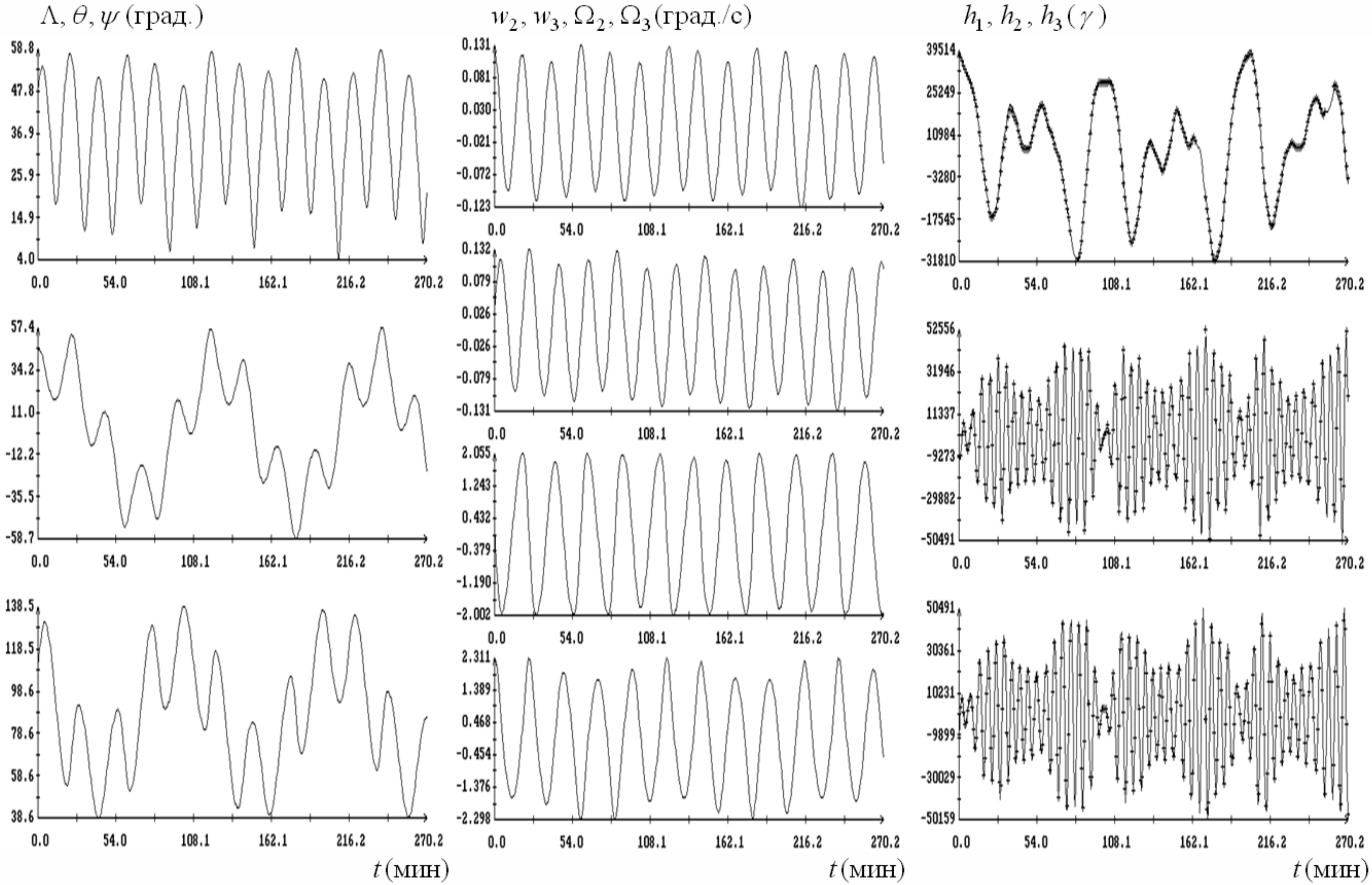


Рис. 7. Интервал 6. Момент $t = 0$ соответствует 09:21:25 UTC 09.06.2005, $\Omega = 1.1499°/c$, $\sigma_H = 1033\,\gamma$.

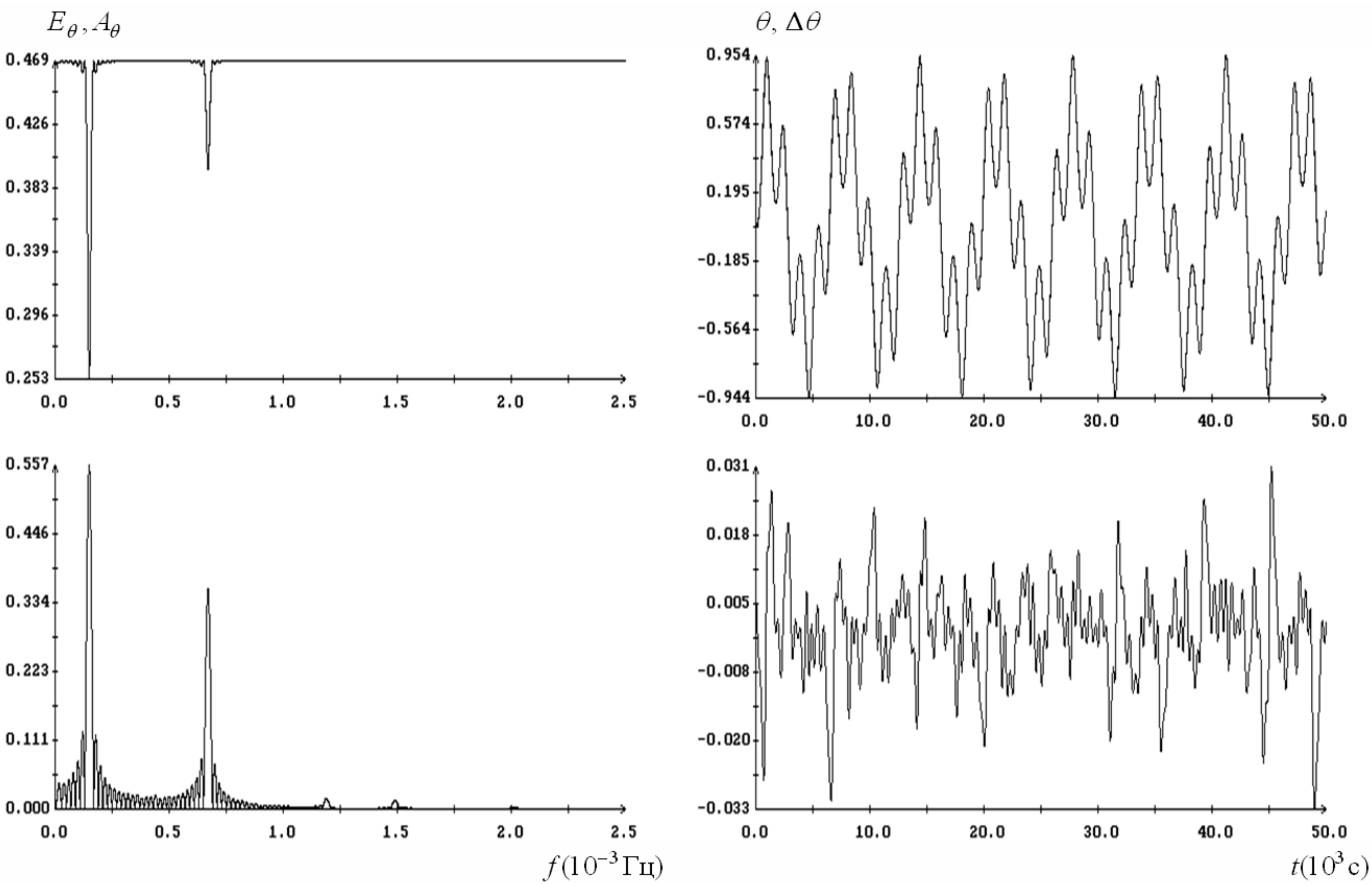


Рис. 8. Интервал 3. Угол θ. Частоты: 0.1493, 0.6702, 1.1893, 1.4902 (0.001*Гц*);
амплитуды: 0.5580, 0.3572, 0.0164, 0.0145 (рад.).

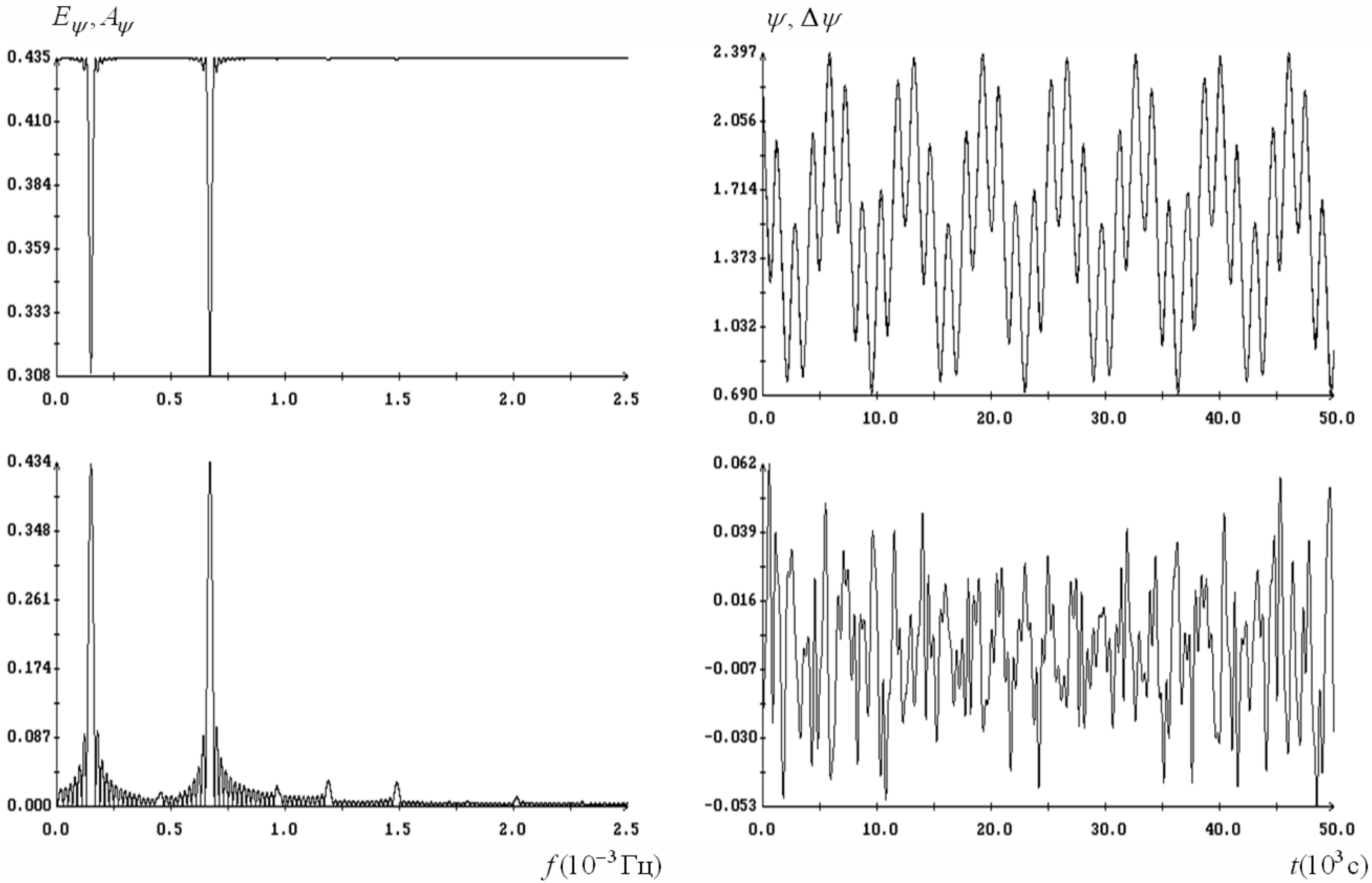


Рис. 9. Интервал 3. Угол ψ. Частоты: 0.1492, 0.6707, 1.4889, 1.1879, 0.9631 (0.001*Гц*);
амплитуды: 0.4324, 0.4329, 0.0299, 0.0294, 0,0171 (рад.).

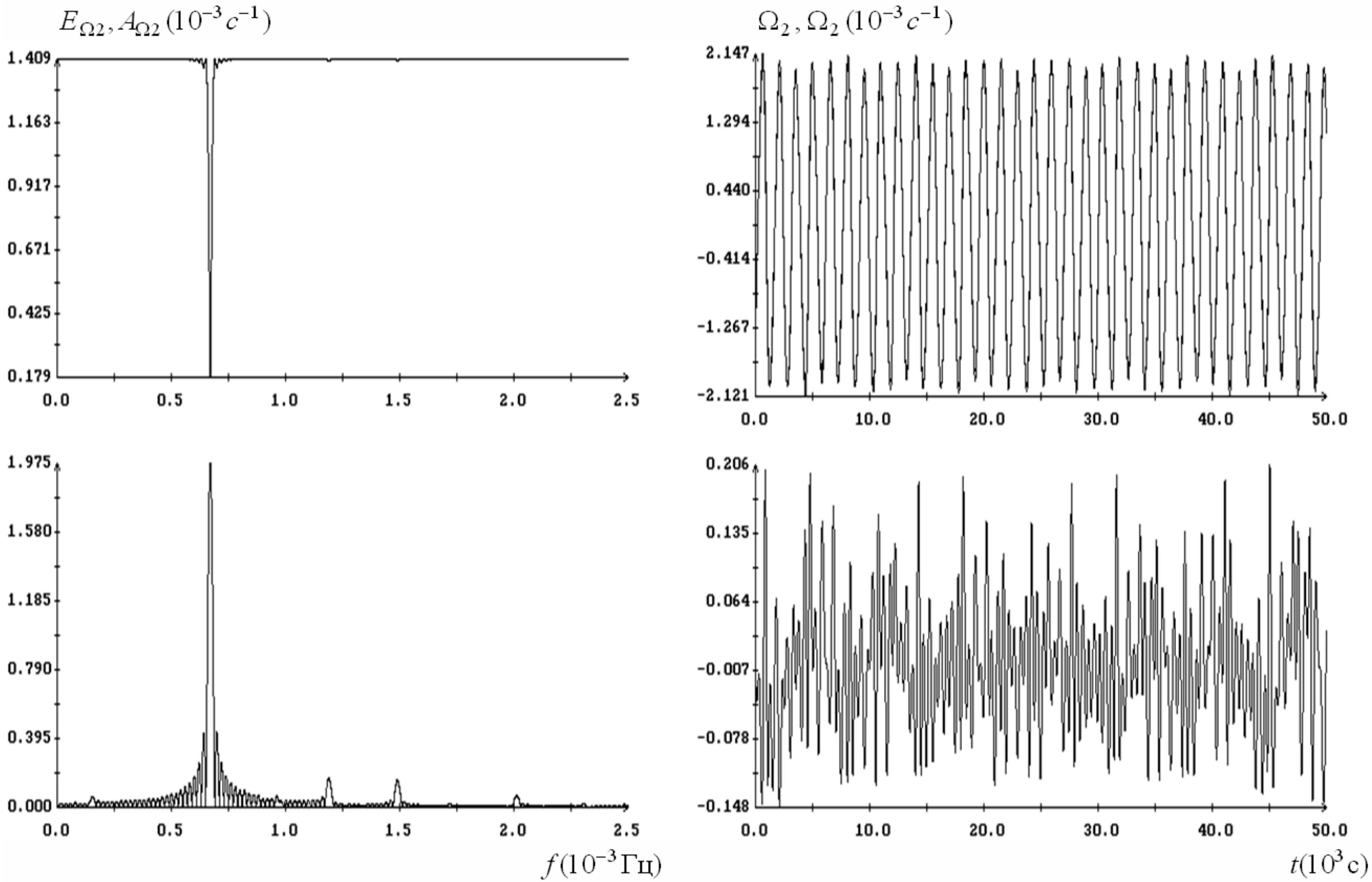


Рис. 10. Интервал 3. Угловая скорость Ω_2. Частоты: 0.6704, 1.1879, 1.4899, 0.1558 (0.001*Гц*); амплитуды: 1.9746, 0.1671, 0.1578, 0.0445 ($0.001\ c^{-1}$).

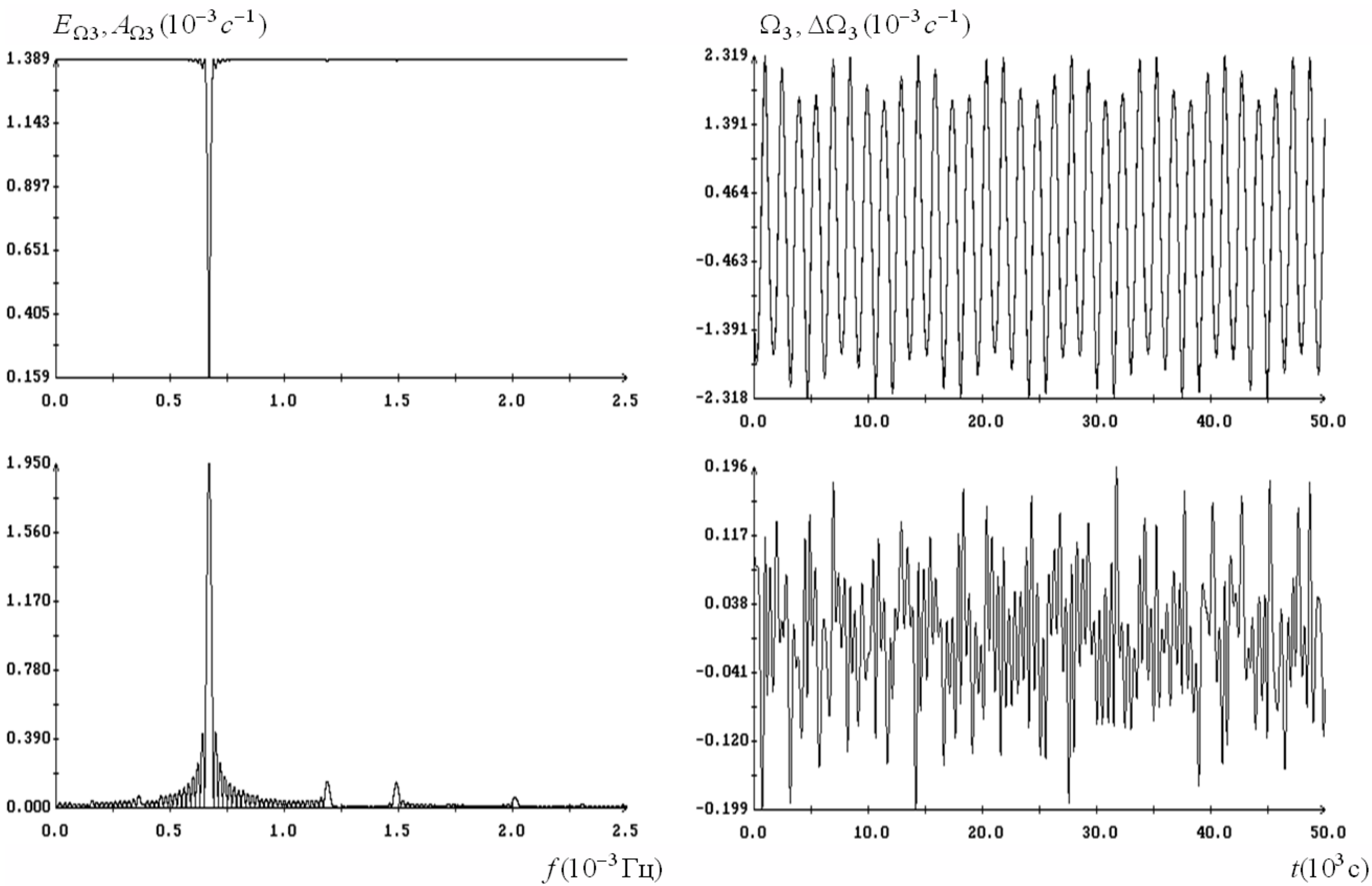


Рис. 11. Интервал 3. Угловая скорость Ω_3. Частоты: 0.6704, 1.1885, 1.4912, 0.1585, 2.0402 (0.001*Гц*); амплитуды: 1.9492, 0.1452, 0.1395, 0.0144, 0.0142 (0.001 c^{-1}).

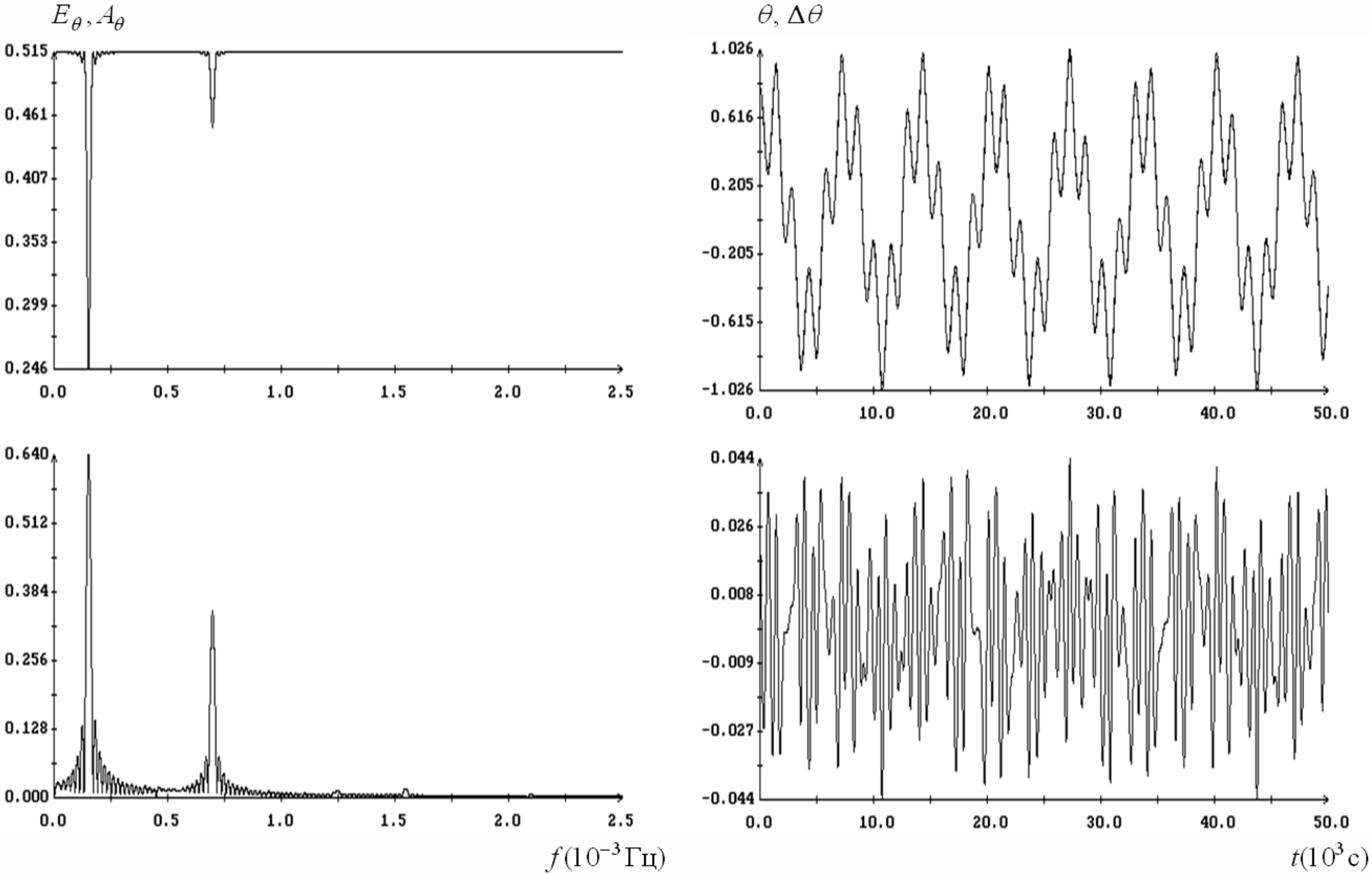


Рис. 12. Интервал 6. Угол θ. Частоты: 0.1519, 0.6971 (0.001*Гц*);
амплитуды: 0.6357, 0.3465 (рад.).

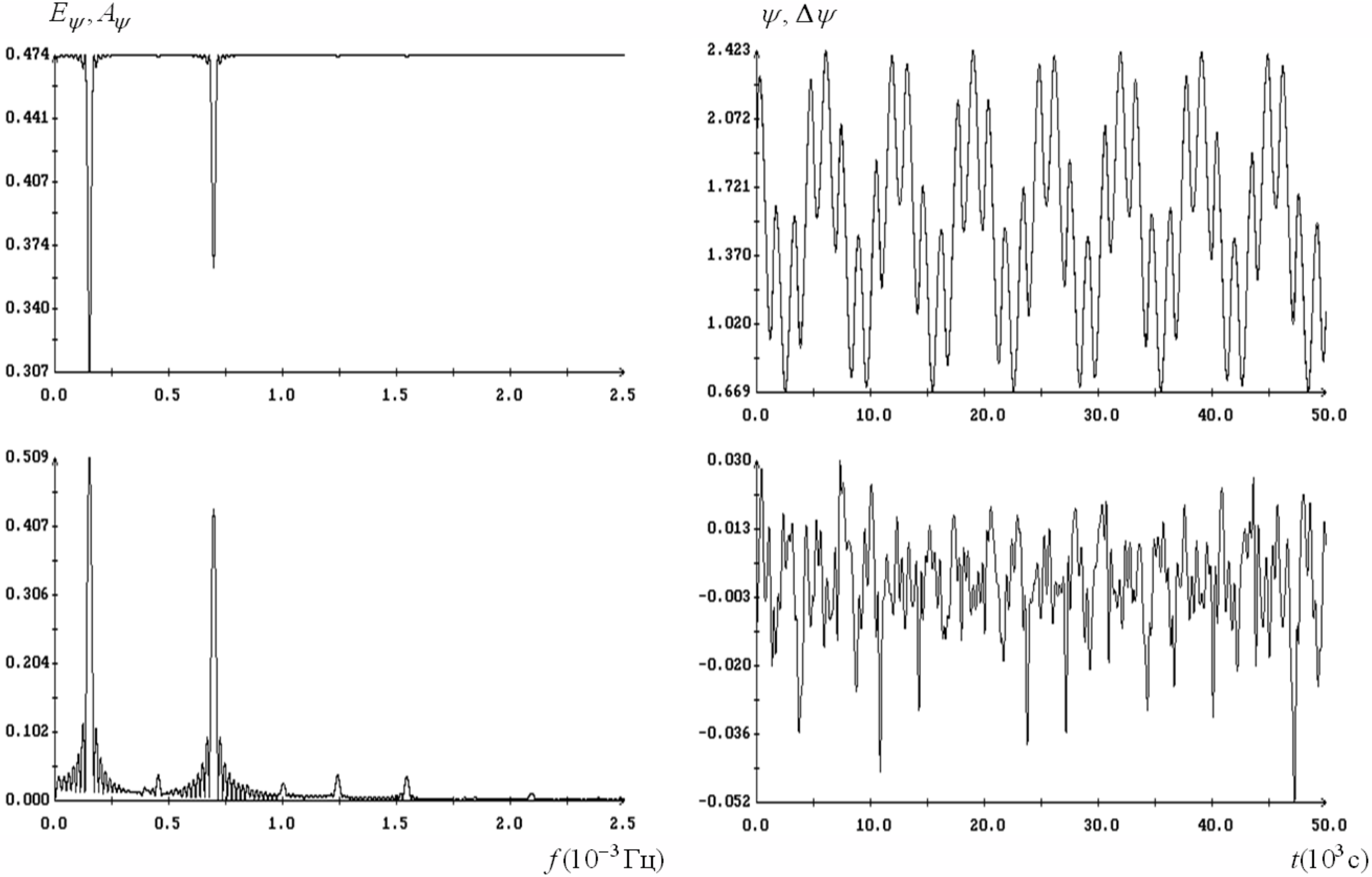


Рис. 13. Интервал 6. Угол ψ. Частоты: 0.1519, 0.6971, 1.2416, 1.5451, 0.4537, 1.0033, 2.092 (0.001*Гц*); амплитуды: 0.5029, 0.4278, 0.0347, 0.0328, 0.0251, 0.0230, 0.111 (рад.).

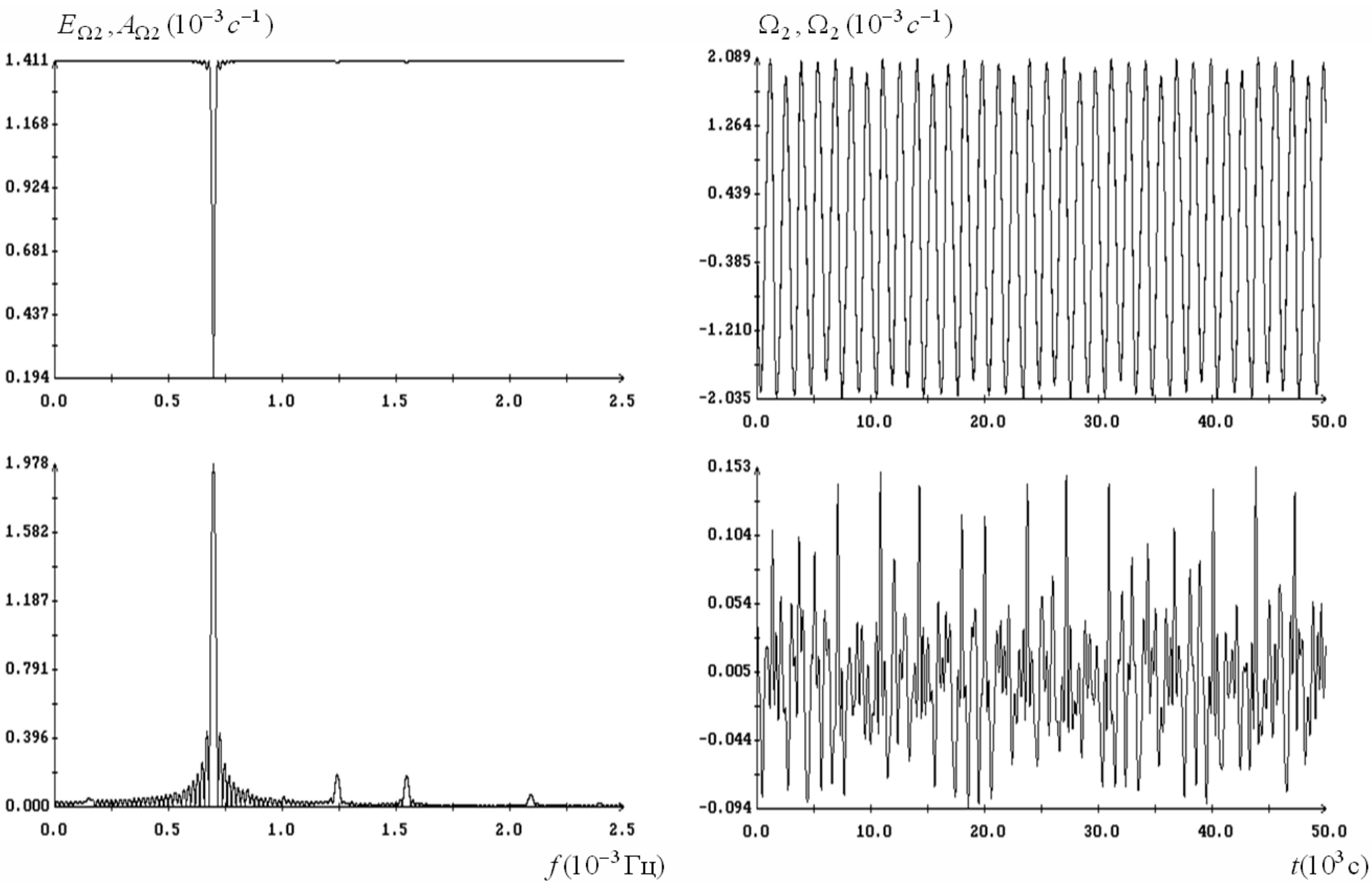


Рис. 14. Интервал 6. Угловая скорость Ω_2. Частоты: 0.6971, 1.2413, 1.5460, 2.0921, 0.1519 (0.001*Гц*); амплитуды: 1.9740, 0.1827, 0.1703, 0.0713, 0.0570 ($0.001\,c^{-1}$).

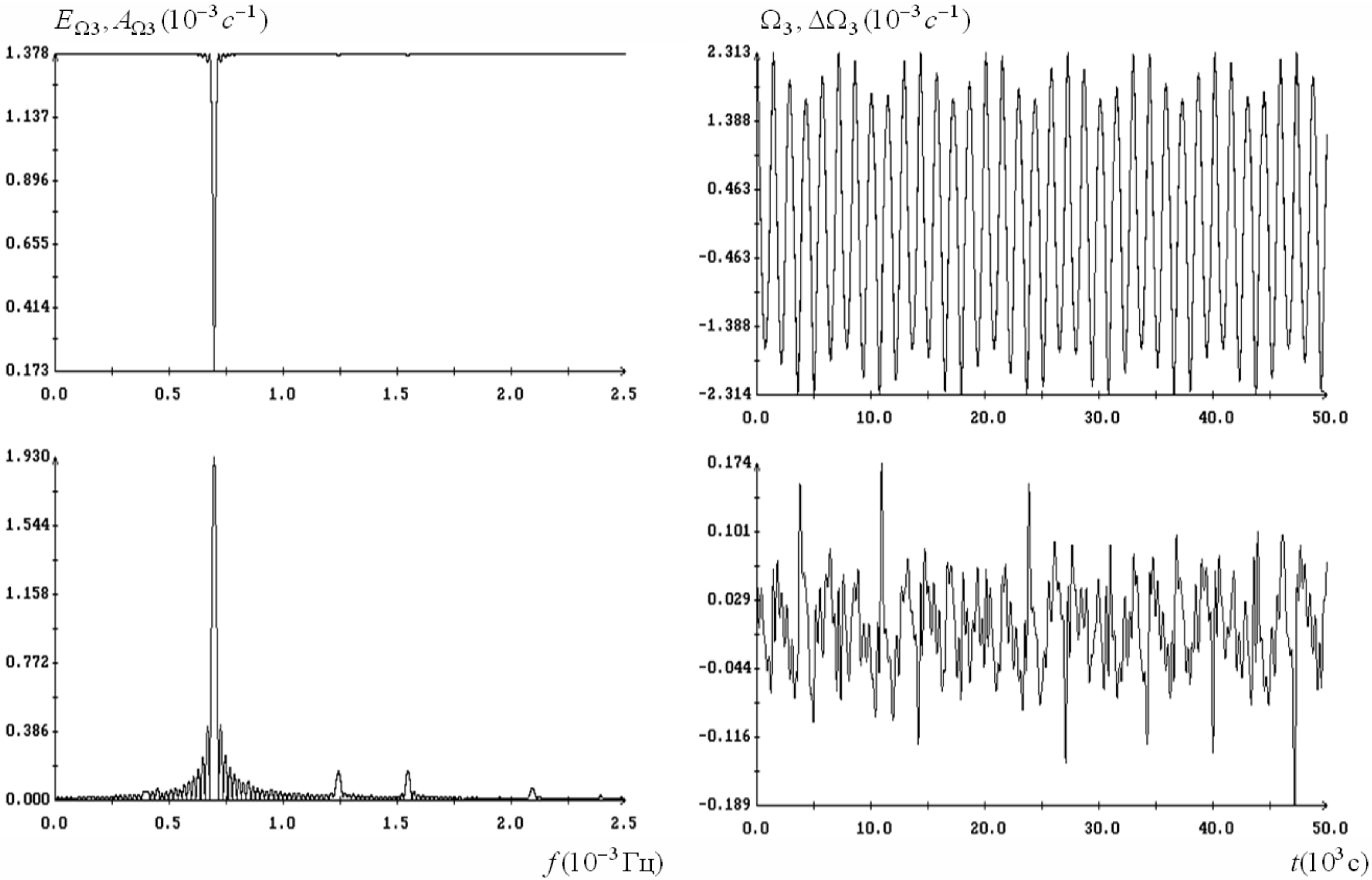


Рис. 15. Интервал 6. Угловая скорость Ω_3. Частоты: 0.6971, 1.2426, 1.5467, 2.0921, 0.3910 $(0.001\,Гц)$;
амплитуды: 1.9324, 0.1621, 0.1515, 0.0661, 0.0413 $(0.001\,c^{-1})$.

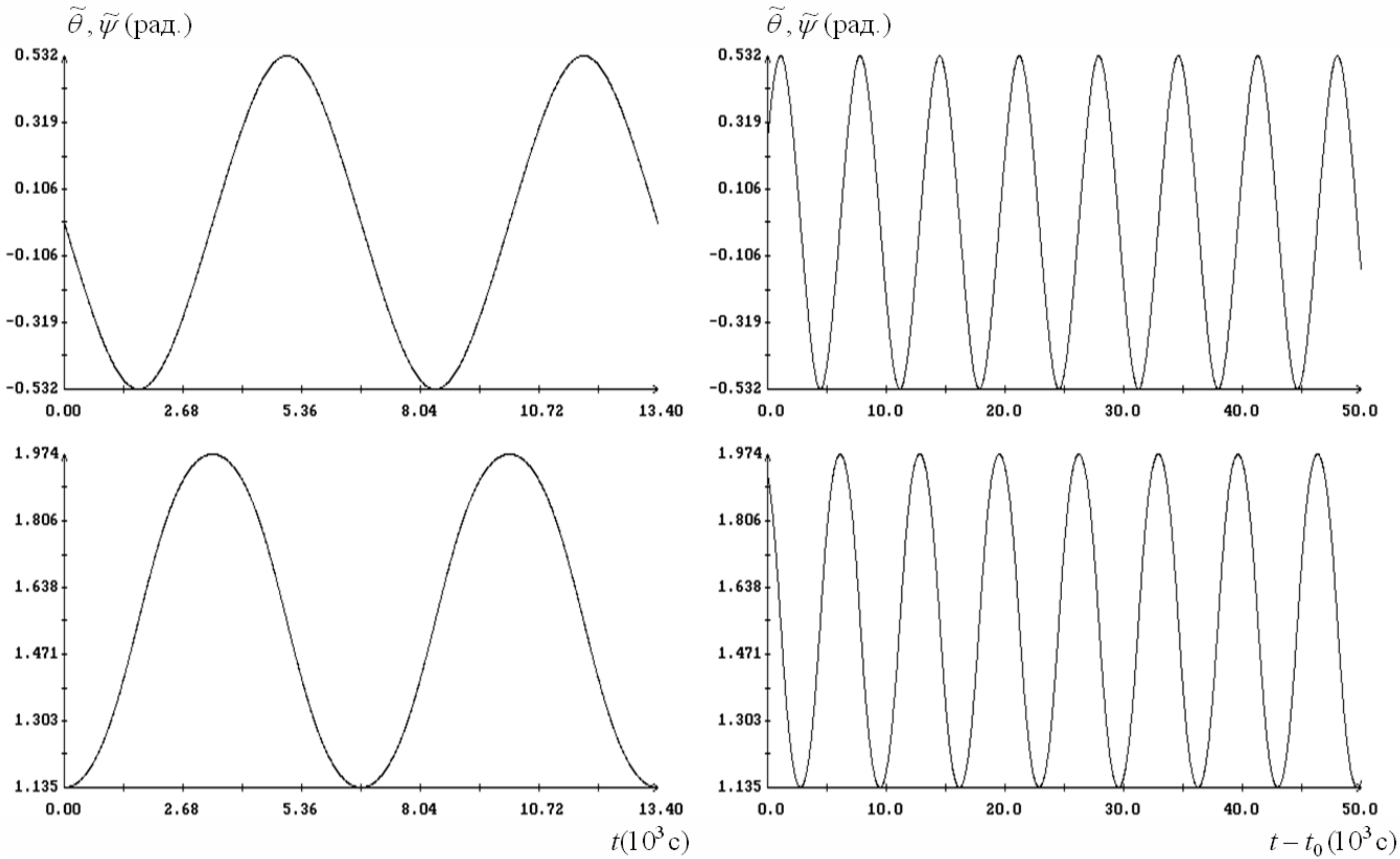


Рис. 16. Интервал 3. Слева – периодическое решение уравнений (10), $T = 6702.41\,c$. Справа – аппроксимация этим решением низкочастотной составляющей решения уравнений (5), $\tau = 2763\,c$.

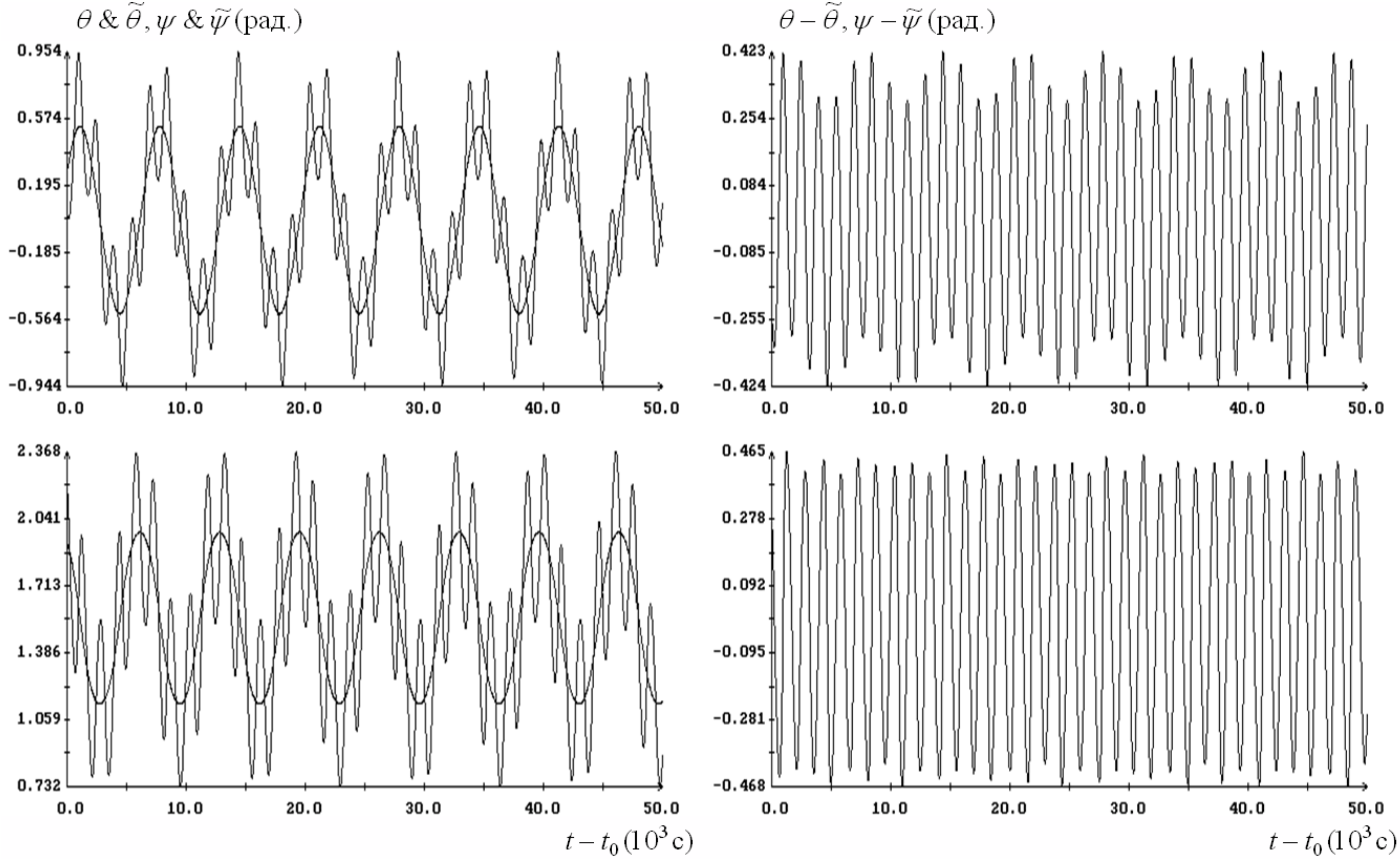


Рис. 17. Интервал 3. Слева – сравнение решений уравнений (5) относительно угловых переменных с решениями уравнений (10). Справа высокочастотная составляющая угловых переменных уравнений (5).

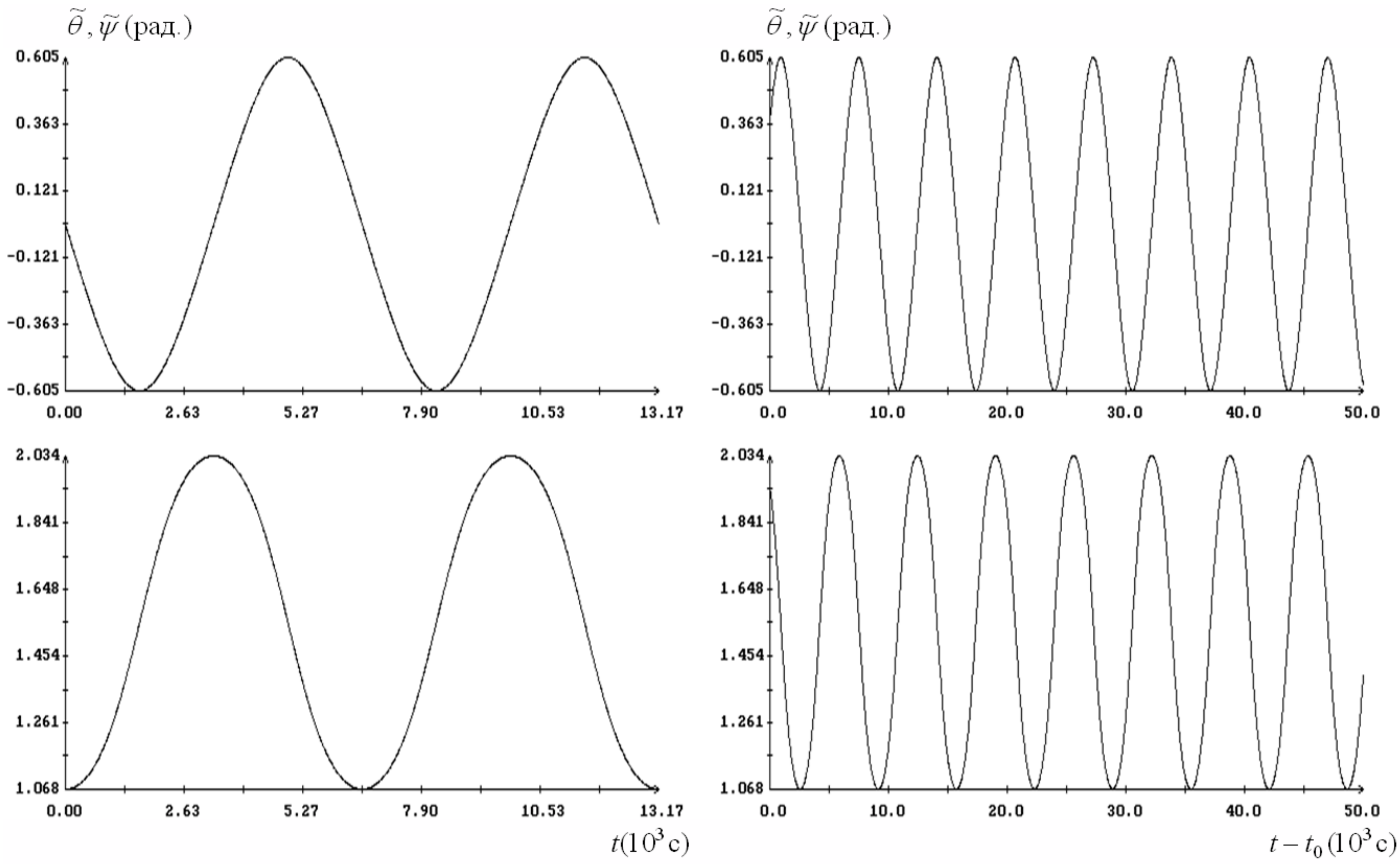


Рис. 18. Интервал 6. Слева – периодическое решение уравнений (10), $T = 6583.28\,c$, справа – аппроксимация этим решением низкочастотной составляющей решения уравнений (5), $\tau = 2561\,c$.

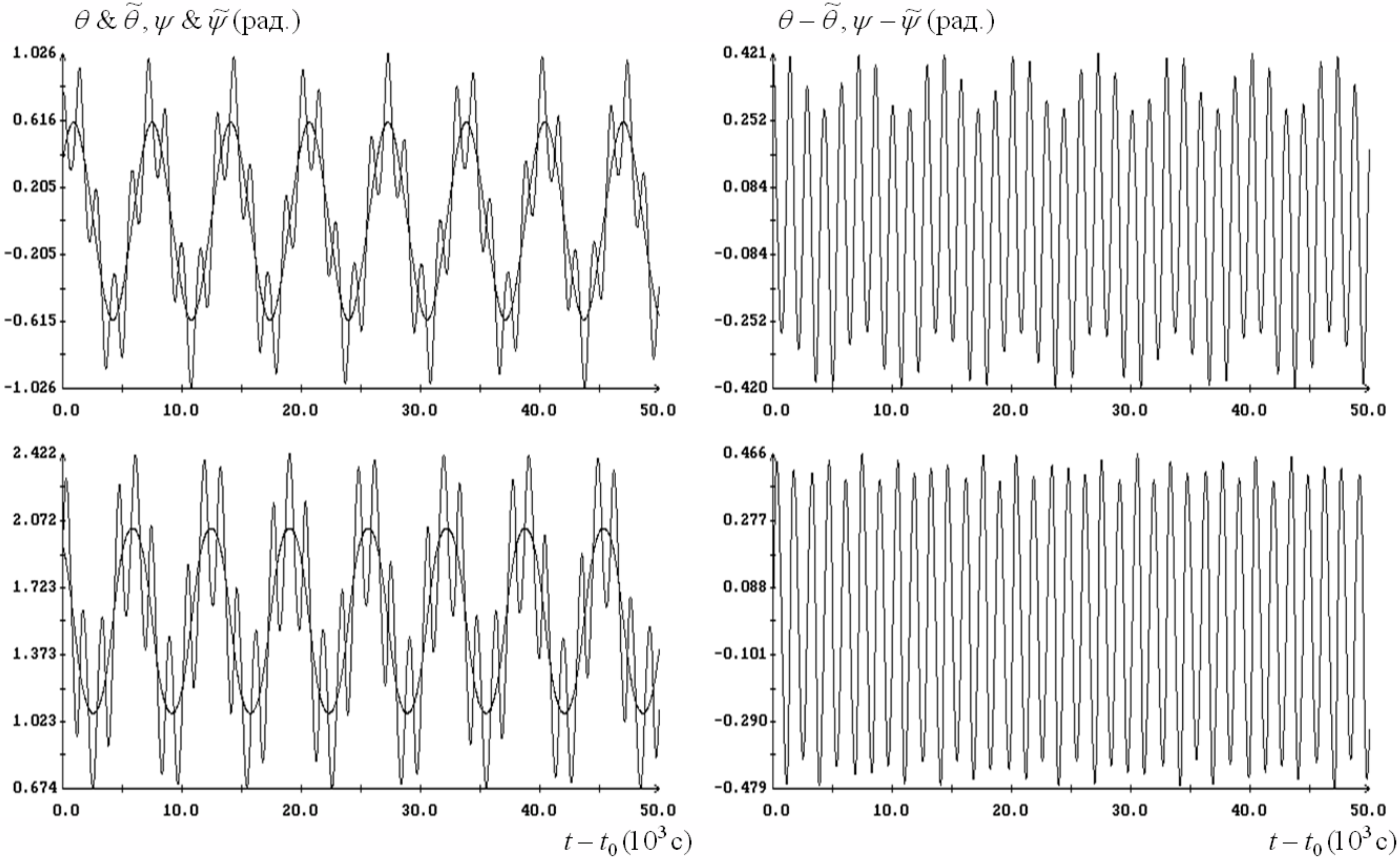


Рис. 19. Интервал 6. Слева – сравнение решений уравнений (5) относительно угловых переменных с решениями уравнений (10). Справа высокочастотная составляющая угловых переменных уравнений (5).