



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 65 за 2021 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**А.Д. Брюно, А.Б. Батхин**

Нормальная форма  
бинарного многочлена в  
критической точке второго  
порядка

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Брюно А.Д., Батхин А.Б. Нормальная форма бинарного многочлена в критической точке второго порядка // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 65. 20 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-65>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-65>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М. В. КЕЛДЫША  
Российской академии наук**

**А. Д. Брюно, А. Б. Батхин**

**Нормальная форма бинарного многочлена  
в критической точке второго порядка**

**Москва — 2021**

УДК 517.5+004.421.6

**Александр Дмитриевич Брюно, Александр Борисович Батхин**

Нормальная форма бинарного многочлена в критической точке второго порядка. Препринты института прикладной математики им. М. В. Келдыша, Москва, 2021.

Рассматривается вещественный многочлен от двух переменных. Его разложения вблизи нулевой критической точки начинаются с формы третьей степени. Находятся его простейшие формы, к которым приводится этот многочлен с помощью обратимых вещественных локальных аналитических замен координат. Сначала для кубической формы с помощью линейных замен координат получены нормальные формы. Их оказалось три. Затем для полного многочлена получены три нелинейные нормальные формы. Предложено упрощение вычисления нормальной формы. Рассмотрен содержательный пример.

**Ключевые слова:** кубическая форма, замена координат, нормальная форма, нелинейная нормализация.

**Alexander Dmitrievich Bruno, Alexander Borisovich Batkhin**

Normal form of a binary polynomial in the critical point of the second order.

We consider a real polynomial of two variables. Its expansion in the vicinity of the zero singular point begins with the third degree form. We find its simplest forms to which this polynomial is reduced by reversible real local analytic coordinate substitutions. First, the normal forms for the cubic form are obtained using linear coordinate substitutions. There are three of them. Then three non-linear normal forms were obtained for the full polynomial. A simplification of the computation of the normal form is proposed. A meaningful example is considered.

**Key words:** cubic form, coordinate change, normal form, non-linear normalization.

# 1. Введение

В окрестности нуля  $x = y = 0$  рассматривается вещественный многочлен

$$f(x, y) = \sum_{p,q} f_{pq} x^p y^q,$$

где  $0 \leq p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $p + q \geq 3$  и  $f_{pq}$  — вещественные коэффициенты. Ищется его простейший вид в классе вещественных аналитических обратимых замен координат

$$x = \xi(w, z), \quad y = \eta(w, z),$$

где  $\xi(0, 0) = \eta(0, 0) = 0$ . Эта задача разбита на две.

В разделе 2 рассматривается задача упрощения вещественной кубической формы

$$f_3(x, y) = f_{30}x^3 + f_{21}x^2y + f_{12}xy^2 + f_{03}y^3 \neq 0 \quad (1.1)$$

с помощью обратимых линейных вещественных замен координат

$$x = Au + Bv, \quad y = Cu + Dv, \quad (1.2)$$

где обратимость означает, что определитель

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC \neq 0. \quad (1.3)$$

**Теорема 1.** *Форма (1.1) с помощью замен (1.2) всегда приводится к одной из трёх нормальных форм:*

$$1. \quad f_3 = u^3 + v^3; \quad (1.4a)$$

$$2. \quad f_3 = u^3; \quad (1.4b)$$

$$3. \quad f_3 = u^2v. \quad (1.4c)$$

В разделе 3 рассматривается задача упрощения вещественного многочлена

$$g(u, v) = \sum_{p+q \geq 3} g_{pq} u^p v^q \quad (1.5)$$

с начальной кубической формой теоремы 1 в классе нелинейных вещественных аналитических замен координат

$$u = A_1w + \xi_1(w, z), \quad v = D_1z + \eta_1(w, z), \quad (1.6)$$

где  $A_1$  и  $D_1$  — ненулевые постоянные и ряды  $\xi_1, \eta_1$  начинаются с квадратичных членов.

**Теорема 2.** Многочлен (1.5) с помощью замен (1.6) всегда приводится к одной из трёх нормальных форм:

1.  $g = w^3 + z^3$ ;
2.  $g = w^3 + bz^4$ ,  $b = \pm 1$ , если в форме четвёртого порядка  $g_4(u, v)$  коэффициент  $g_{04} \neq 0$ ;
3.  $g = w^2z + \tau z^m$ ,  $m > 3$ ,  $\tau \in \{-1, 0, 1\}$ .

В разделе 4 доказана

**Теорема 3.** Если многочлен  $f(u, v)$  имеет укороченный многочлен  $\hat{f}(u, v)$  одного из трёх видов

1.  $\hat{f} = \alpha u^3 + \beta v^3$ ,
2.  $\hat{f} = \alpha u^3 + \beta v^4$ ,
3.  $\hat{f} = \alpha u^2v + \beta v^m$ ,

где числа  $\alpha, \beta \neq 0$ ,  $m > 3$ , то его нормальная форма относится к случаям 1, 2, 3 теоремы 2 соответственно и получается из укороченного многочлена  $\hat{f}(x, y)$  линейной диагональной заменой  $u = Aw$ ,  $v = Dz$ , где

- $A = \sqrt[3]{\alpha}$ ,  $D = \sqrt[3]{\beta}$  для вида 1;
- $A = \sqrt[3]{\alpha}$ ,  $D = \sqrt[4]{|\beta|}$  для вида 2;
- $A = \sqrt[2m]{|\beta|} / \sqrt{|\alpha|}$ ,  $D = \text{sign } \alpha / \sqrt[m]{|\beta|}$  для вида 3.

Определение укороченного многочлена  $\hat{f}$  см. в [1].

В разделе 5 рассматривается пример вычисления нормальной формы некоторого многочлена вблизи его особой точки второго порядка.

## 2. Доказательство теоремы 1

Будем различать три случая:

1. В форме (1.1) хотя бы один из коэффициентов  $f_{30}$  и  $f_{03}$  отличен от нуля.
2. В форме (1.1) коэффициенты  $f_{30} = f_{03} = 0$ , но  $f_{21}$  и  $f_{12}$  отличны от нуля.
3. В форме (1.1) коэффициенты  $f_{30} = f_{12} = f_{03} = 0$ , но  $f_{21} \neq 0$ .

**2.1. Случай 1.** Если  $f_{30} \equiv 0$ , а  $f_{03} \neq 0$ , то  $u$  и  $v$  поменяем местами. Это линейное преобразование. Пусть  $f_{30} \neq 0$ .

Положим  $x_1 = \sqrt[3]{f_{30}} x$ , тогда

$$f_3 = x_1^3 + a_1 x_1^2 y + a_2 x_1 y^2 + a_3 y^3, \quad (2.1)$$

где коэффициенты  $a_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , выражаются через коэффициенты формы (1.1).

Положим  $x_1 = x_2 - \frac{1}{3} a_1 y$ , тогда

$$f_3 = x_2^3 + b_2 x_2 y^2 + b_3 y^3,$$

где коэффициенты  $b_2, b_3$  полиномиально выражаются через коэффициенты  $a_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Если  $b_2 = 0$ , то при  $b_3 = 0$  имеем нормальную форму 2 (1.4b) из теоремы 1, а при  $b_3 \neq 0$  полагаем

$$u = x_2, \quad v = \sqrt[3]{b_3} y,$$

и получаем нормальную форму 1 (1.4a) теоремы 1.

Если  $b_2 \neq 0$ , то, полагая  $y_1 = \sqrt{|b_2|} y$ , получаем форму

$$f_3 = x_2^3 + \sigma x_2 y_1^2 + \gamma y_1^3, \quad \sigma = \pm 1, \quad (2.2)$$

где  $\sigma = \text{sign } b_2$  и  $\gamma = b_3/|b_2|^{3/2}$  — любое вещественное число.

Будем упрощать форму (2.2) с помощью линейных замен

$$x_2 = u + Bv, \quad y_1 = Cu + v. \quad (2.3)$$

Условие (1.3) здесь означает, что

$$BC \neq 1. \quad (2.4)$$

После замены (2.3) форма (2.2) принимает вид

$$f_3 = (\gamma C^3 + \sigma C^2 + 1) u^3 + (\sigma BC^2 + 3\gamma C^2 + 2\sigma C + 3B) u^2 v + \\ + (2\sigma BC + 3B^2 + 3\gamma C + \sigma) uv^2 + (B^3 + \sigma B + \gamma) v^3. \quad (2.5)$$

Коэффициенты при мономах  $u^2 v$  и  $uv^2$  аннулируются, если выполнены равенства

$$\sigma BC^2 + 3\gamma C^2 + 2\sigma C + 3B = 0, \quad (2.6)$$

$$2\sigma BC + 3B^2 + 3\gamma C + \sigma = 0. \quad (2.7)$$

Из уравнения (2.6) получаем

$$B = -\frac{3\gamma C^2 + 2\sigma C}{\sigma C^2 + 3}. \quad (2.8)$$

Подставив это выражение в уравнение (2.7), умножив его на  $(\sigma C^2 + 3)^2$ , приведя подобные члены и сократив на 3, получаем уравнение

$$-\gamma C^5 + (9\gamma^2 - \sigma) C^4 + 12\gamma\sigma C^3 + 2C^2 + 9C\gamma + 3\sigma = 0. \quad (2.9)$$

Этот многочлен распадается на множители

$$-(C^2 - 9\gamma C - 3\sigma)(\gamma C^3 + \sigma C^2 + 1). \quad (2.10)$$

Выделим тот исключительный случай, когда условие (2.4) не выполнено. Согласно (2.8) равенство  $BC = 1$  эквивалентно уравнению

$$2\sigma C^2 + 3\gamma C^3 + 3 + \sigma C^2 = 0,$$

т. е.

$$\gamma C^3 + \sigma C^2 + 1 = 0. \quad (2.11)$$

Поэтому второй множитель в (2.10) должен быть отличным от нуля, и уравнение (2.9) сводится к уравнению

$$C^2 - 9\gamma C - 3\sigma = 0. \quad (2.12)$$

Согласно (2.11) в исключительном случае имеем

$$\gamma = -\frac{\sigma C^2 + 1}{C^3}. \quad (2.13)$$

Подставляя это значение в уравнение (2.12), умножая его на  $C^2$  и приводя подобные члены, получаем уравнение

$$(C^2 + 3\sigma)^2 = 0, \text{ т. е. } C^2 = -3\sigma.$$

Вещественное значение  $C$  возможно только при  $\sigma = -1$ , тогда  $C = \pm\sqrt{3}$ . Из (2.13) получаем  $\gamma = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$ .

Итак, всегда, кроме исключительного случая

$$\sigma = -1, \quad \gamma = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad (2.14)$$

существует невырожденная замена (2.3), приводящая форму (2.2) к виду

$$f_3 = \alpha u^3 + \beta v^3, \quad (2.15)$$

где постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  отличны от нуля. Из формулы (2.5) имеем

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma C^3 + \sigma C^2 + 1, \\ \beta &= B^3 + \sigma B + \gamma. \end{aligned}$$

Согласно (2.11)  $\alpha = 0$  только в исключительном случае.

Аналогично, из уравнения (2.7) получаем

$$C = -\frac{3B^2 + \sigma}{2\sigma B + 3\gamma}.$$

Вырожденность  $BC = 1$  означает, что

$$\sigma B + 3B^3 + 3\gamma + 2\sigma B = 3(B^3 + \sigma B + \gamma) = 0.$$

Поскольку мы рассматриваем невырожденный случай, то  $\beta \neq 0$ . Замена

$$u_1 = \sqrt[3]{\alpha}u, \quad v_1 = \sqrt[3]{\beta}v$$

приводит форму (2.15) к нормальной форме 1 (1.4а) теоремы 1.

Согласно (2.14) форма (2.2) в исключительном случае раскладывается на множители

$$x_2^3 - x_2y_1^2 \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}y_1^3 = \left(x_2 \mp \frac{1}{\sqrt{3}}y_1\right)^2 \left(x_2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}y_1\right).$$

Поэтому, полагая

$$u = x_2 \mp \frac{1}{\sqrt{3}}y_1, \quad v = x_2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}y_1,$$

получаем нормальную форму 3 (1.4с) теоремы 1.

Итак, для случая 1 теорема 1 доказана.

**2.2. Случай 2.** В этом случае

$$f_3 = f_{21}x^2y + f_{12}xy^2, \tag{2.16}$$

где оба коэффициента  $f_{21}$  и  $f_{12}$  отличны от нуля. Преобразование

$$x = \sqrt[3]{\frac{f_{12}}{f_{21}^2}}x_1, \quad y = \sqrt[3]{\frac{f_{21}}{f_{12}^2}}y_1$$

приводит форму (2.16) к виду

$$f_3 = x_1^2y_1 + x_1y_1^2.$$

Выполняем замену  $x_1 = x_2 - \frac{1}{2}y_1$  и получаем форму  $f_3 = x_2^2y_1 - \frac{1}{4}y_1^3$ , которая после преобразования

$$x_2 = \frac{Y}{\sqrt[3]{2}}, \quad y_1 = -\sqrt[3]{4}X$$

приобретает вид

$$f_3 = X^3 - XY^2.$$

Но в разделе 2.1 было показано, что эта форма эквивалентна нормальной форме 1 (1.4а) теоремы 1.



**2.3. Случай 3.** В этом случае

$$f_3 = f_{21}x^2y.$$

Линейной заменой  $u = x$ ,  $v = f_{21}y$  приводим эту форму к виду  $f_3 = u^2v$ , т. е. к нормальной форме 3 (1.4с) теоремы 1.

**2.4. Неэквивалентность нормальных форм 1, 2, 3 теоремы 1.** Покажем, что нормальная форма 1 (1.4а) и нормальная форма 2 (1.4b) не эквивалентны между собой.

Форма 2 есть  $f_3 = x^3$ . После линейной замены

$$x = Au + Bv, \quad y = Cu + Dv \quad (2.17)$$

она принимает вид

$$f_3 = A^3u^3 + 3A^2Bu^2v + 3AB^2uv^2 + B^3v^3. \quad (2.18)$$

Она имеет вид формы 1 (1.4а), только если  $A^2B = AB^2 = 0$ . Но тогда либо  $A = 0$ , либо  $B = 0$ , либо  $A = B = 0$ . В первых двух случаях форма (2.18) является формой вида 2 (1.4b). В третьем случае замена (2.17) вырождена.

Покажем теперь, что нормальная форма 3 (1.4с) не эквивалентна нормальной форме 1 (1.4а) и нормальной форме 2 (1.4b).

Форма  $f_3 = x^2y$  после замены (2.17) принимает вид

$$f_3 = A^2Cu^3 + (A^2D + 2ABC)u^2v + (2ABD + B^2C)uv^2 + B^2Dv^3.$$

Она имеет вид форм 1 и 2, только если

$$\begin{aligned} A^2D + 2ABC &= A(AD + 2BC) = 0, \\ 2ABD + B^2C &= B(2AD + BC) = 0. \end{aligned}$$

Эта система уравнений имеет 4 решения:

- 1)  $A = B = 0$ ;
- 2)  $A = 2AD + BC = 0$ , т. е.  $A = BC = 0$ ;
- 3)  $B = AD + 2BC = 0$ , т. е.  $B = AD = 0$ ;
- 4)  $AD + 2BC = 2AD + BC = 0$ , т. е.  $AD = BC = 0$ , ибо определитель этой однородной системы равен  $-3$ , т. е. отличен от нуля.

Для всех этих решений замена (2.17) вырождена.

Теорема 1 доказана.

## 2.5. Замечания к доказательству теоремы 1.

**Замечание 1.** Доказательство теоремы 1 можно провести, используя современный вариант теории исключений, опирающийся на вычисление базисов Грёбнера соответствующих идеалов [2, Гл. 2, 3].

Для приведения формы (2.2) к виду (1.4а) с помощью преобразования (2.3) составляется идеал  $\mathcal{J}_1$  из многочленов (2.6) и (2.7). Затем для идеала  $\mathcal{J}_1$  вычисляется его базис Грёбнера с лексикографическим порядком переменных  $C \prec B$ . Величины  $\sigma$  и  $\gamma$  в этом случае выступают в качестве параметров. Первым многочленом этого базиса (с точностью до знака) является полином (2.9), который факторизуется на множители (2.10).

Если задать другой лексикографический порядок  $B \prec C$  и вычислить новый базис Грёбнера, то его первым многочленом будет полином, раскладывающийся на множители

$$(3\sigma B^2 + 9\gamma B - \sigma^2)(B^3 + \sigma B + \gamma). \quad (2.19)$$

Наличие кубических множителей в формулах (2.10) и (2.19) гарантирует существование по крайней мере одного вещественного решения системы (2.6)–(2.7). На самом деле, для всех значений параметров  $\sigma, \gamma$ , кроме исключительного случая (2.14), имеется три набора решений указанной системы. В этом легко убедиться, если вычислить дискриминанты  $D_C^{(1)} = D_B^{(1)} = 3(4\sigma + 27\gamma^2)$  квадратичных множителей формул (2.10) и (2.19) и дискриминанты кубических множителей этих же формул:  $D_C^{(2)} = D_B^{(2)} = -(4\sigma + 27\gamma^2)$ . Разные знаки этих выражений обеспечивают наличие двух вещественных корней квадратичных множителей и одного вещественного корня кубических при  $D_C^{(2)} < 0 < D_C^{(1)}$ , либо трёх вещественных корней кубических множителей при  $D_C^{(1)} < 0 < D_C^{(2)}$ .

**Замечание 2.** Для преобразования многочлена (2.1) к нормальной форме 1 (1.4а) можно воспользоваться методом, который называется *преобразование Чирнгауза* (см. [3, Гл. 4, п. 19.1], [4, Ч. 1, § 6.2]). Его идея заключается в том, что исходный многочлен преобразуется к многочлену  $F(y)$  наиболее простого вида (обычно  $F(y) = y^3 - c$ ) с помощью вспомогательного многочлена  $h(x)$ .

Рассмотрим, например, как преобразовать форму (2.2) к виду (1.4а) с помощью вспомогательного квадратного многочлена  $h = X^2 + c_1X + c_2$ , где  $c_1, c_2$  — некоторые неизвестные величины. Сначала с помощью подстановки  $x_2 = X/y_1$  перейдём к многочлену  $\tilde{f}_3 = X^3 + \sigma X + \gamma$  от одной переменной  $X$ . Многочлен  $F(Y)$  — результат преобразования Чирнгауза — можно вычислить одним из двух способов:

- либо как результат  $\text{Res}_X(\tilde{f}_3(X), y - h(X))$  многочленов  $\tilde{f}_3(X)$  и  $h(X)$  относительно переменной  $X$ ;

- либо как характеристический многочлен матрицы  $\mathfrak{B}$  — аналога матрицы Безу [4; 5], составленной из коэффициентов остатков от деления  $X^k h(X)$  на  $f_3(X)$ .

Вычисления удобнее выполнять в любой из систем компьютерной алгебры (СКА). Авторы использовали СКА Maple [6; 7], хотя здесь подойдет любая СКА, например, бесплатная SymPy [8]. Применяя один из указанных выше способов, получаем многочлен

$$F(Y) = Y^3 + (2\sigma - 3c_2)Y^2 + (\sigma c_1^2 + 3\gamma c_1 - 4\sigma c_2 + 3c_2^2 + 1)Y + \gamma c_1^3 - \sigma c_1^2 c_2 + \gamma \sigma c_1 - 3\gamma c_1 c_2 + 2\sigma c_2^2 - c_2^3 - \gamma^2 - c_2. \quad (2.20)$$

Подберём теперь коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  многочлена  $h(X)$  так, чтобы коэффициенты при линейном и квадратном членах многочлена  $F(Y)$  были равны нулю:

$$2\sigma - 3c_2 = 0, \quad \sigma c_1^2 + 3\gamma c_1 - 4\sigma c_2 + 3c_2^2 + 1 = 0.$$

Базис Грёбнера этого идеала имеет вид

$$\mathcal{GBJ} = \{3\sigma c_1^2 + 9\gamma c_1 - 1, 3c_2 - 2\sigma\}. \quad (2.21)$$

Очевидно, что вещественные корни идеала  $\mathcal{GBJ}$  существуют при условии, что дискриминант  $D^{(1)} = 3(27\gamma^2 + 4\sigma)$  его первого многочлена неотрицателен, что согласуется с выводами замечания 1.

Упрощая свободный член многочлена (2.20) по модулю базиса Грёбнера  $\mathcal{GBJ}$ , получаем для него выражение

$$\delta = \frac{1}{81} D^{(1)} (9\gamma c_1^* - 2\sigma),$$

где  $c_1^*$  — один из корней первого многочлена базиса (2.21).

Итак, при условии  $D^{(1)} \geq 0$  форма (2.2) приводится к форме  $u^3 + \delta v^3$ , которая соответствует либо нормальной форме 1 (1.4a) при  $\delta \neq 0$ , либо нормальной форме 2 (1.4b) теоремы 1 при  $\delta = 0$ .

### 3. Доказательство теоремы 2

Здесь рассмотрим многочлен (1.5) последовательно по случаям 1, 2, 3 на стр. 3.

#### 3.1. Случай $g_3 = u^3 + v^3$ . Сделаем замену

$$u = u_1 - \frac{1}{3} g_{22} v^2.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} u^3 &= u_1^3 - g_{22}u_1^2v^2 + 3g_{22}u_1v^4 - \frac{1}{27}g_{22}^3v^6, \\ g_{22}u^2v^2 &= g_{22}u_1^2v^2 - \frac{2}{3}g_{22}^2u_1v^4 + \frac{1}{9}g_{22}^3v^6. \end{aligned}$$

Поэтому в новых координатах  $u_1, v$

$$g = u_1^3 + v^3 + \sum_{p+q \geq 4} \tilde{g}_{pq}u_1^p v^q, \quad (3.1)$$

где коэффициент  $\tilde{g}_{22} = 0$ .

Разобьём сумму (3.1) на две:

$$g = g^* + g^{**}, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} g^* &= u_1^3 \left[ 1 + \sum_{\substack{p \geq 3 \\ q \geq 0}} \tilde{g}_{pq}u_1^{p-3}v^q \right] \stackrel{\text{def}}{=} u_1^3 [1 + \alpha(u_1, v)], \\ g^{**} &= v^3 \left[ 1 + \sum_{\substack{0 \leq p \leq 2 \\ q \geq 3}} \tilde{g}_{pq}u_1^p v^{q-3} \right] \stackrel{\text{def}}{=} v^3 [1 + \beta(u_1, v)], \end{aligned}$$

а величины  $\alpha(u_1, v)$  и  $\beta(u_1, v)$  — это многочлены без свободных членов. Поэтому замена

$$w = u_1 \sqrt[3]{1 + \alpha(u_1, v)}, \quad z = v \sqrt[3]{1 + \beta(u_1, v)}$$

аналитична. Получаем нормальную форму 1 теоремы 2.

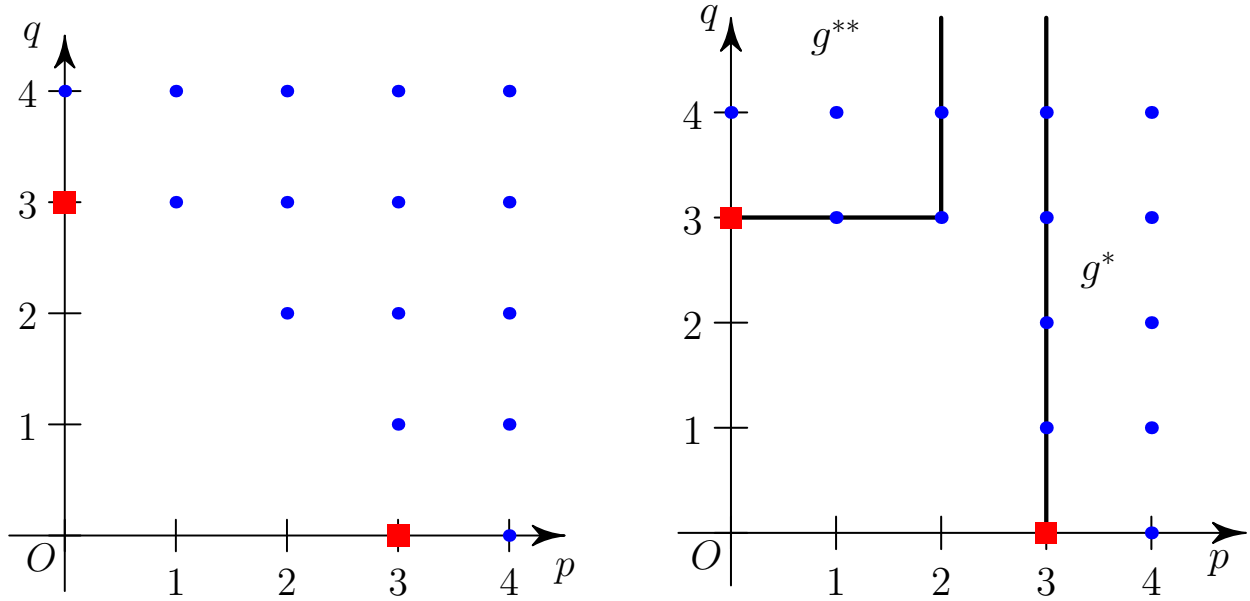
Для многочлена (1.5) множество точек  $(p, q)$ , для которых  $g_{pq} \neq 0$ , называется его *носителем*.

На рис. 1 показаны носители исходного многочлена (1.5) и преобразованного многочлена (3.1). При этом квадратиками выделены точки носителя нормальной формы (1.4а) и отчёркнуты носители для сумм  $g^*$  и  $g^{**}$ .

**3.2. Случай  $g_3 = u^3$ .** Пусть в разложении (1.5) коэффициент  $g_{04} \neq 0$ . Это и есть условие невырожденности формы  $g_4(u, v)$ . Можно считать, что  $g_{04} = \pm 1 \stackrel{\text{def}}{=} b$ .

Теперь аннулируем коэффициенты  $g_{13}$ ,  $g_{22}$  и  $g_{23}$  с помощью последовательных замен. Вначале выполняем подстановку  $v = v_1 - \frac{g_{13}}{4b}u$  и получаем новые коэффициенты  $\tilde{g}_{jk}$  разложения (1.5). Затем делаем подстановку  $u = u_1 - \frac{1}{3}\tilde{g}_{22}v_1^2 - \frac{1}{3}\tilde{g}_{23}v_1^3$ . Тогда полученная сумма

$$g(u_1, v_1) = u_1^3 + bv_1^4 + \sum \check{g}_{pq}u_1^p v_1^q \quad (3.3)$$



а) Носитель исходного многочлена (1.5).

б) Носитель преобразованного многочлена (3.1). Выделены носители рядов  $g^*$  и  $g^{**}$ .

Рис. 1. Носители многочленов (1.5) и (3.1). Случай 1. Точки главных членов обозначены квадратиками.

разбивается на две части (3.2), где

$$g^* = u_1^3 \left[ 1 + \sum_{\substack{p \geq 3 \\ q \geq 0}} \check{g}_{pq} u_1^{p-3} v_1^q \right] \stackrel{\text{def}}{=} u_1^3 [1 + \alpha(u_1, v_1)],$$

$$g^{**} = b v_1^4 \left[ 1 + \sum_{\substack{0 \leq p \leq 2 \\ q \geq 4}} \check{g}_{pq} u_1^p v_1^{q-4} \right] \stackrel{\text{def}}{=} b v_1^3 [1 + \beta(u_1, v_1)],$$

где  $\alpha(u_1, v_1)$  и  $\beta(u_1, v_1)$  — это многочлены без свободных членов. Поэтому замена

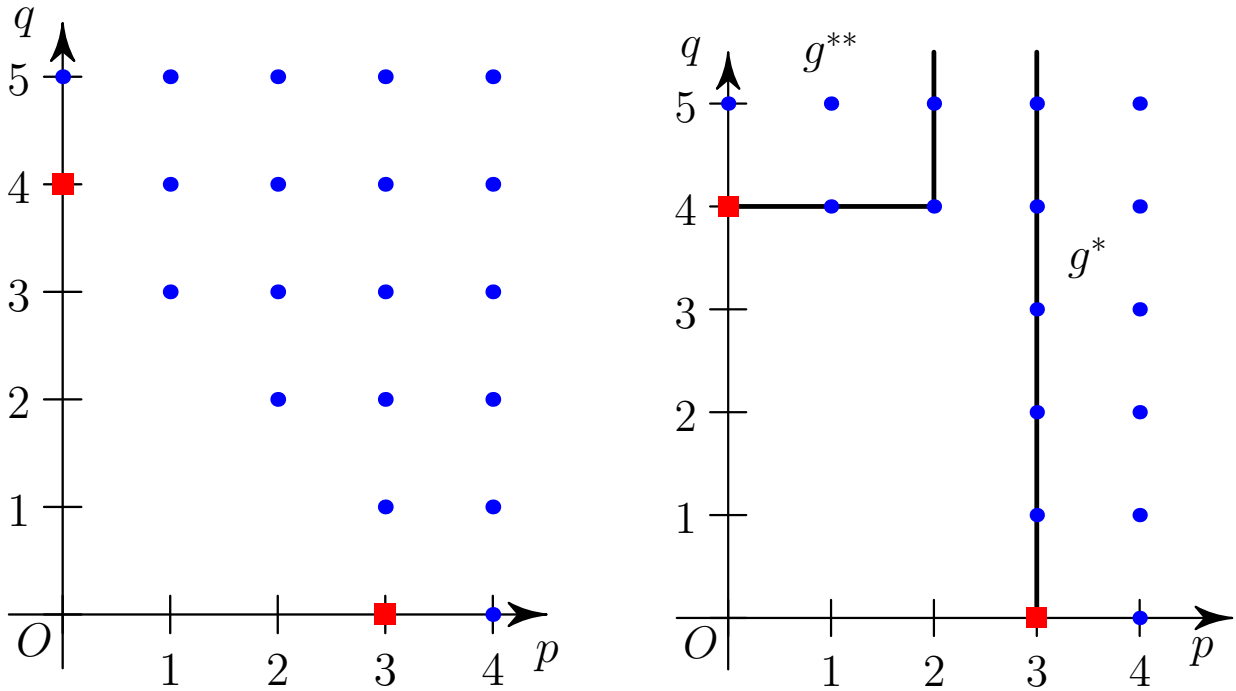
$$w = u_1 \sqrt[3]{1 + \alpha(u_1, v_1)}, \quad z = v_1 \sqrt[4]{1 + \beta(u_1, v_1)}$$

аналитична и приводит многочлен к нормальной форме 2 теоремы 2.

На рис. 2 показаны носители исходного многочлена (1.5) и преобразованного многочлена (3.3).

**3.3. Случай  $g_3 = u^2 v$ .** Согласно [1] многоугольник Ньютона многочлена  $g$  имеет вершину  $(p, q) = (2, 1)$ , а многочлен  $g$  имеет корень в виде сходящегося степенного ряда

$$v = \sum_{k \geq 2}^{\infty} \varphi_k u^k \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(u).$$



а) Носитель исходного многочлена (1.5).

б) Носитель преобразованного многочлена (3.3). Выделены носители рядов  $g^*$  и  $g^{**}$ .

Рис. 2. Носители многочленов (1.5) и (3.3). Случай 2. Точки главных членов обозначены квадратиками.

Сделаем замену  $v = v_1 - \varphi(u)$ . Тогда  $g(u, v_1)$  делится на  $v_1$ . Теперь по теореме о неявной функции уравнение  $\frac{\partial g(u, v_1)}{\partial u} = 0$  имеет решение в виде сходящегося степенного ряда

$$u = \psi(v_1) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 2}^{\infty} \psi_k v_1^k.$$

После замены  $u = u_1 - \psi(v_1)$  получаем

$$g(u_1, v_1) = u_1^2 v_1 + \sum \tilde{g}_{pq} u_1^p v_1^q, \quad (3.4)$$

где все  $\tilde{g}_{p0} = 0$  и все  $\tilde{g}_{1q} = 0$ . Поэтому сумма  $g$  разбивается на две части (3.2), где

$$\begin{aligned} g^* &= u_1^2 v_1 \left[ 1 + \sum \tilde{g}_{p1} u_1^{p-2} v_1^{q-1} \right] \stackrel{\text{def}}{=} u_1^2 v_1 [1 + \alpha(u_1, v_1)], \\ g^{**} &= \beta(v_1) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=m}^{\infty} \beta_k v_1^k, \quad m > 3, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $\alpha(u_1, v_1)$  и  $\beta(v_1)$  суть сходящиеся степенные ряды без свободных членов, причём ряд  $\beta(v_1)$  начинается с некоторого члена  $\beta_m v_1^m$ , либо  $\beta(v_1) \equiv 0$ .

Если  $\beta \neq 0$ , то замена  $z = \sqrt[m]{\beta(v_1)/\text{sign } \beta_m}$  приводит ряды (3.5) к виду

$$g^* = \frac{1}{\sqrt[m]{|\beta_m|}} u_1^2 z [1 + \tilde{\alpha}(u_1, z)],$$

$$g^{**} = \tau z^m,$$

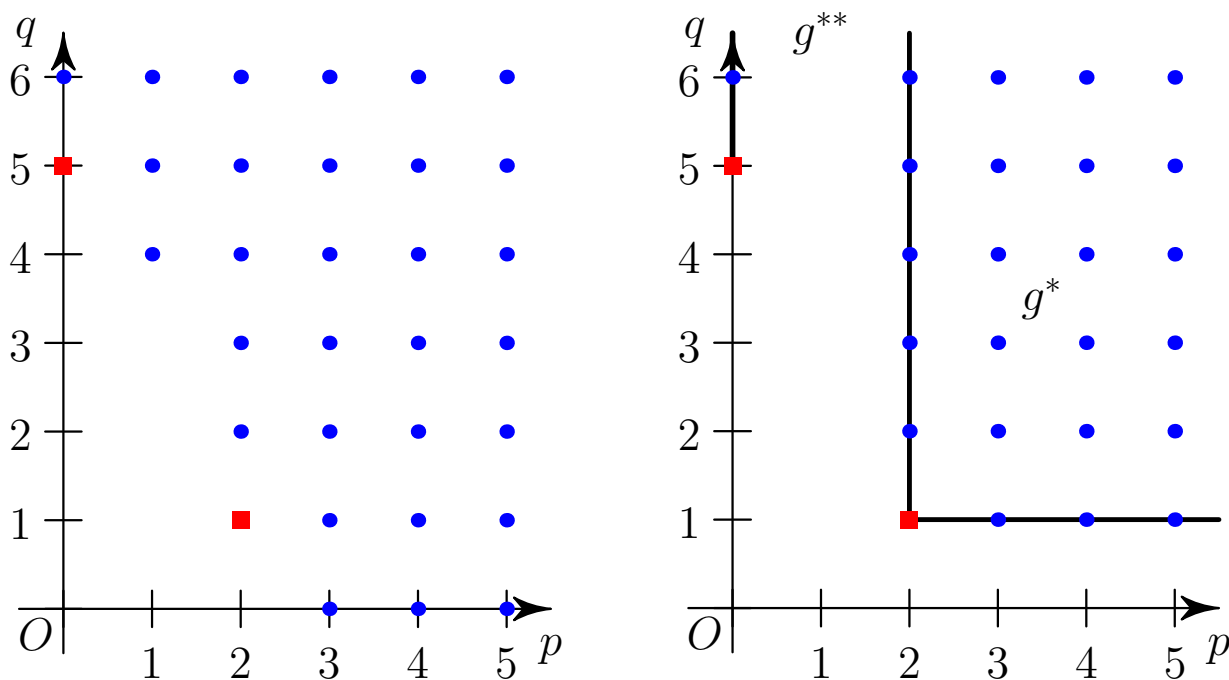
где  $\tau = \text{sign } \beta_m = \pm 1$ . Если  $\beta \equiv 0$ , то  $\tau = 0$ .

Теперь замена

$$w = u_1 \sqrt{\frac{1 + \tilde{\alpha}}{\sqrt[m]{|\beta_m|}}}$$

приводит многочлен к нормальной форме 3 теоремы 2.

На рис. 3 показаны носители исходного (1.5) и преобразованного многочленов (3.4).



а) Носитель исходного многочлена (1.5).

б) Носитель преобразованного многочлена (3.4). Выделены носители рядов  $g^*$  и  $g^{**}$ .

Рис. 3. Носители многочленов (1.5) и (3.4). Случай 3. Точки главных членов обозначены квадратиками.

Доказательство окончено.

#### 4. Доказательство теоремы 3

В ситуациях теоремы 3 нелинейные преобразования координат в доказательстве теоремы 2 не меняют укороченного многочлена  $\hat{f}$  и приводят исходный

многочлен к укороченному. Выписанные в формулировке теоремы 3 линейные замены приводят укороченные многочлены к нормальным формам теоремы 2.

Теорема доказана.

## 5. Пример

Вычислим нормальную форму некоторого нетривиального многочлена вблизи его критической точки второго порядка. Кроме этого, определим расположение линий уровня её нормальной формы вблизи этой критической точки так, как это описано в работе авторов [9]. Все дальнейшие вычисления выполнялись в СКА Maple [6] с использованием алгоритмов компьютерной алгебры из пакетов Groebner, PolyhedralSets и algcurves. Такие же вычисления несложно реализуются в других СКА, например, в Mathematica [10] или в SymPy [8].

В работах [11; 12] изучалась устойчивость в линейном приближении некоторой многопараметрической системы Гамильтона. В процессе исследования был получен многочлен  $g(x, y, z)$  6-го порядка от трёх переменных  $x, y, z$  (см. формулу (3.7) в [12]). Здесь исследуем многочлен  $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, y, z)|_{z=0}$ , имеющий следующий вид

$$\begin{aligned} f(x, y) = & 64x^3 + 1728yx^2 + 15552y^2x + 46656y^3 + 13x^4 + 412yx^3 + 2782y^2x^2 \\ & + 828y^3x - 37827y^4 + 2x^5 + 82yx^4 + 740y^2x^3 + 3156y^3x^2 + 6490y^4x \\ & + 20250y^5 + 4yx^5 + 48y^2x^4 + 344y^3x^3 + 1200y^4x^2 + 2500y^5x. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Легко видеть, что многочлен (5.1) имеет в нуле особую точку 2-го порядка. Если составить полиномиальный идеал

$$\mathcal{J} = \left\{ f(x, y) - c, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\},$$

а затем вычислить для него базис Грёбнера с чисто лексикографическим порядком  $c \prec y \prec x$ , то можно найти все его критические точки. Для вычисления их порядков надо в них вычислить частные производные до их ненулевых значений.

Вычисления показывают, что имеется две вещественных критических точки  $x_1 = y_1 = 0$  порядка 2 и  $x_2 = -9/2, y_2 = 3/2$  порядка 1, соответствующих критическому значению  $c_1^* = 0$ , а также две вещественных критических точки порядка 1, соответствующих критическим значениям  $c_2^* \approx -476393.035$  и  $c_3^* \approx 51.504$ . Координаты двух последних критических точек являются вещественными корнями многочленов шестой степени, которые здесь не приводятся из-за их громоздкости.

Находим кубическую форму в особой точке 2-го порядка  $x = y = 0$ :

$$f_3(x, y) = 64x^3 + 1728yx^2 + 15552y^2x + 46656y^3 = 64(x + 9y)^3.$$



Тогда замена

$$u = 4(x + 9y), \text{ т. е. } x = (u - 9y)/4 \quad (5.2)$$

приводит её к нормальной форме 2 (1.4b). В новых переменных  $(u, y)$  многочлен записывается в следующем виде (промежуточный многочлен):

$$\begin{aligned} f(u, y) = & u^3 - 34992 y^4 + 3240 u y^3 - \frac{253}{2} u^2 y^2 - \frac{7}{8} u^3 y + \frac{13}{256} u^4 \\ & + 97920 y^5 - 11000 u y^4 + 528 u^2 y^3 - \frac{37}{4} u^3 y^2 - \frac{u^4 y}{32} + \frac{u^5}{512} \\ & - 97344 y^6 + 13936 u y^5 - 870 u^2 y^4 + 29 u^3 y^3 - \frac{33}{64} u^4 y^2 + \frac{u^5 y}{256}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Как описано, например, в [1], вычислим его носитель  $S(f)$ , найдём его выпуклую оболочку  $\Gamma(f)$  — многоугольник Ньютона — и выделим в нём ребро  $\Gamma_1$ , внешняя нормаль которого лежит в третьем квадранте. Описанные объекты показаны на рис. 4.

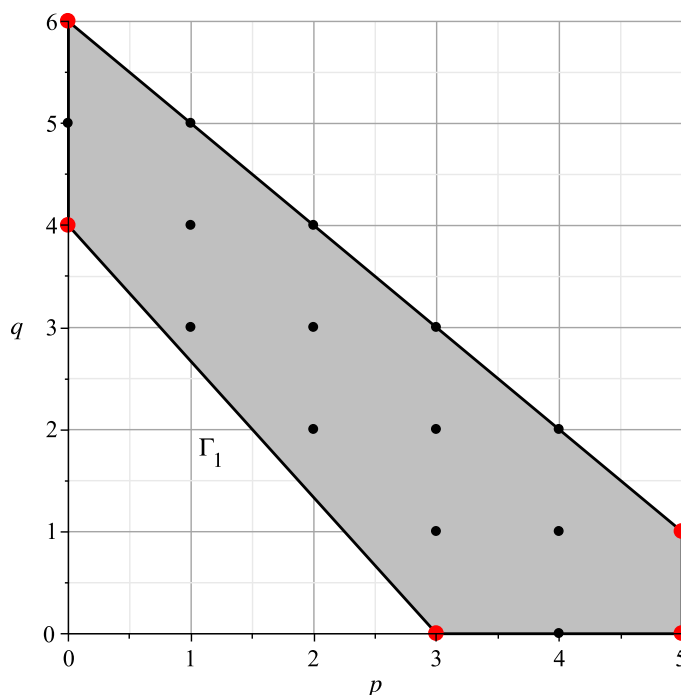


Рис. 4. Многоугольник Ньютона  $\Gamma(f)$  многочлена (5.2).

Этому ребру соответствует укороченный многочлен

$$\hat{f}(u, y) = u^3 - 34992 y^4. \quad (5.4)$$

Многочлен (5) соответствует виду 2 теоремы 3, следовательно, преобразованием

$$u = w, \quad y = \sqrt[4]{34992} z = 63^{3/4} z \quad (5.5)$$

он приводится к нормальной форме  $g$  вида 2 теоремы 2:

$$g(w, z) = w^3 - z^4. \quad (5.6)$$

Теперь построим линии уровня  $w^3 - z^4 = c$  нормальной формы (5) вблизи критической точки  $w = z = 0$  для значений  $c = -0.5$ ,  $c = 0$  и  $c = 0.5$ . На рис. (5) они показаны соответственно синим, чёрным и красным цветом.

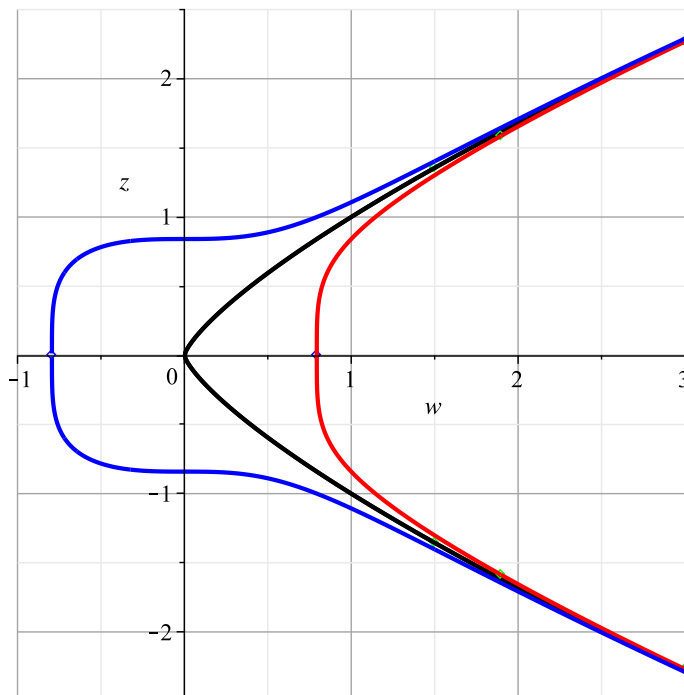


Рис. 5. Линии уровня нормальной формы (5) для значений  $c = -0.5$  (синий),  $c = 0$  (чёрный) и  $c = 0.5$  (красный).

Отметим, что с помощью пакета `algcurves` СКА Maple можно установить, что кривая  $f(u, y) = 0$  имеет род 0, т. е. допускает рациональную параметризацию

$$u(\tau) = \frac{(8\tau^2 + 420\tau + 8100)\tau^4}{(15\tau + 675)(\tau^2 + 30\tau + 450)^2}, \quad y(\tau) = -\frac{(\tau^2 + 45\tau + 900)\tau^3}{(2\tau + 90)(\tau^2 + 30\tau + 450)^2}.$$

Вид линий уровня  $f(u, y) = c$  для значений  $c = -0.5$ ,  $c = 0$  и  $c = 0.5$  вблизи начала координат показан соответственно синим, чёрным и красным цветом на рис. 6. Нетрудно видеть, что нормальная форма (5) качественно точно воспроизводит поведение линий уровня промежуточного многочлена (5.2).

Наконец, покажем на рис. 7 расположение линий уровня  $f(x, y) = c$  вблизи начала координат исходного многочлена (5.1) для значений  $c = -0.5$ ,  $c = 0$  и  $c = 0.5$ . С учётом линейных преобразований (5) и (5) рис. 5 качественно точно даёт представление о поведении линий уровня исходного многочлена вблизи критической точки второго порядка.

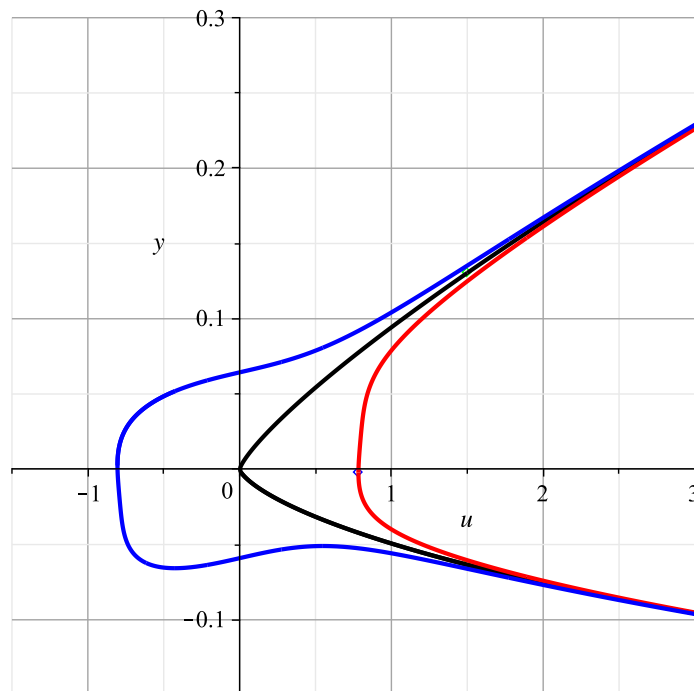


Рис. 6. Линии уровня промежуточного многочлена (5.2) для значений  $c = -0.5$  (синий),  $c = 0$  (чёрный) и  $c = 0.5$  (красный).

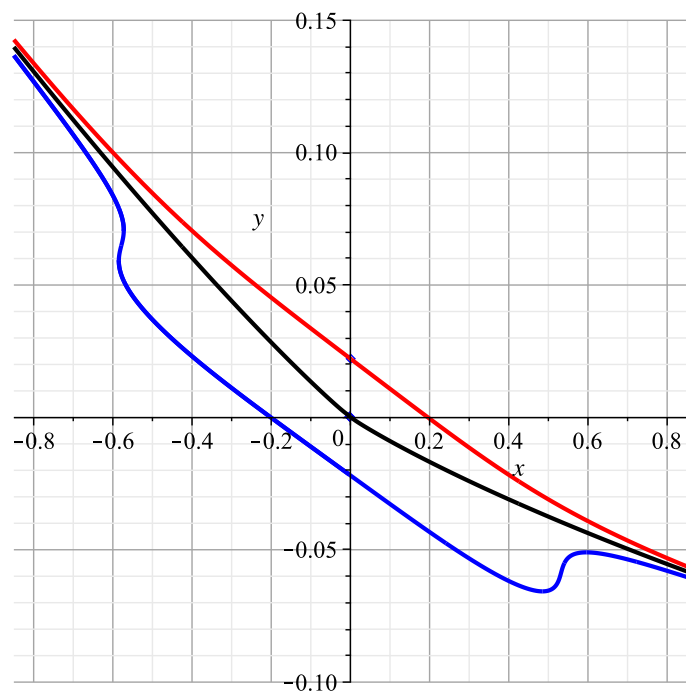


Рис. 7. Линии уровня исходного многочлена (5.1) для значений  $c = -0.5$  (синий),  $c = 0$  (чёрный) и  $c = 0.5$  (красный).

## Список литературы

1. Брюно А. Д., Батхин А. Алгоритмы и программы вычисления корней многочлена от одной или двух неизвестных // Программирование. 2021. № 5. С. 22—43. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0132347421050046>.
2. Кокс Д., Литтл Д., О’Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. М.: Мир, 2000. 687 с.
3. Прасолов В. В. Многочлены. 4-е изд., исправленное. М.: МЦНМО, 2014. 336 с.
4. Калинина Е. А., Утешев А. Ю. Теория исключения: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. 72 с.
5. Батхин А. Б. Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Программирование. 2016. Т. 42, № 2. С. 8—21.
6. Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc.. Maple. Version 2019. Waterloo, Ontario, 2019. URL: <https://hadoop.apache.org>.
7. Thompson I. Understanding Maple. Cambridge University Press, 2016. 228 p.
8. Meurer A. [et al.]. SymPy: symbolic computing in Python // PeerJ Computer Science. 2017. Vol. 3. e103. ISSN 2376–5992. DOI: 10.7717/peerj-cs.103. URL: <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103>.
9. Брюно А., Батхин А. Линии уровня многочлена на плоскости: Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. Москва, 2021. DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-57>. eprint: [https://keldysh.ru/papers/2021/prep2021\\_57.pdf](https://keldysh.ru/papers/2021/prep2021_57.pdf). URL: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-57>.
10. Wolfram S. The Mathematica Book. Wolfram Media, Inc., 2003. 1488 p.
11. Брюно А. Д., Батхин А. Б. Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии // Программирование. 2012. № 2. С. 12—30.
12. Батхин А. Б., Брюно А. Д., Варин В. П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Прикл. мат. мех. 2012. Т. 76, № 1. С. 80—133.

## Список рисунков

1	Носители исходного и преобразованного многочленов. Случай 1.	12
2	Носители исходного и преобразованного многочленов. Случай 2.	13
3	Носители исходного и преобразованного многочленов. Случай 3.	14
4	Многоугольник Ньютона $\Gamma(f)$ многочлена (5.2).	16
5	Линии уровня нормальной формы (5)	17
6	Линии уровня промежуточного многочлена (5.2)	18
7	Линии уровня исходного многочлена (5.1)	19

## Оглавление

1	Введение	3
2	Доказательство теоремы 1	4
2.1	Случай 1	4
2.2	Случай 2	7
2.3	Случай 3	8
2.4	Неэквивалентность нормальных форм 1, 2, 3 теоремы 1	8
2.5	Замечания к доказательству теоремы 1	9
3	Доказательство теоремы 2	10
3.1	Случай 1	10
3.2	Случай 2	11
3.3	Случай 3	12
4	Доказательство теоремы 3	14
5	Пример	15
	Список литературы	19
	Список рисунков	20