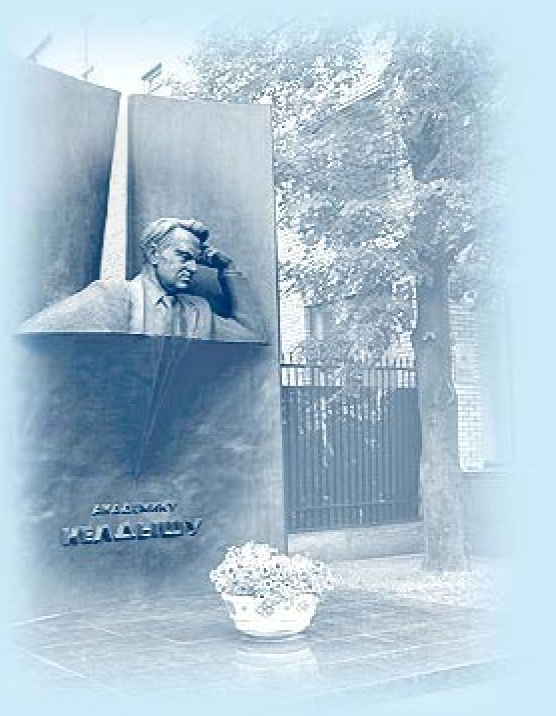
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 68 за 2021 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Колесниченко, М.Я. Маров

К моделированию динамической эволюции Вселенной под действием энтропийной силы, связанной с модифицированной энтропией Шарма-Миттала

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В., Маров М.Я. К моделированию динамической эволюции Вселенной под действием энтропийной силы, связанной с модифицированной энтропией Шарма-Миттала // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 68. 35 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-68
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-68

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

А.В. Колесниченко, М.Я. Маров

К моделированию динамической эволюции Вселенной под действием энтропийной силы, связанной с модифицированной энтропией Шарма–Миттала

Москва — 2021

Колесниченко А.В., Маров М.Я.

К моделированию динамической эволюции Вселенной под воздействием энтропийной силы, связанной с модифицированной энтропией Шарма–Миттала

В работе с помощью формализма Верлинда рассмотрено несколько сценариев эволюции Вселенной Фридмана–Робертсона–Уокера, которые возможны в рамках энтропийной космологии, основанной на новой модификации энтропийной меры Шарма–Миттала. Исследование, проводимое в рамках негауссовой статистической теории, использует несколько энтропийных мер, ассоциированных с поверхностью горизонта Вселенной из-за голографически хранящейся там информации. Сконструировано несколько вариантов обобщенных уравнений Фридмана, которые могут служить эффективной теоретической основой для описания динамической эволюции поверхностно плоской, однородной и изотропной Вселенной, порождая многообразные формы заключенной в ней материи. Предложенный подход, связанный с использованием вероятностных неэкстенсивных аспектов космологического горизонта поверхности Вселенной, соответствует известным основным требованиям, предъявляемым к термодинамическому моделированию динамического поведения космического пространства без привлечения концепции гипотетической темной энергии.

Ключевые слова: Энтропийная космология, модифицированные энтропии энтропии Шарма–Миттала и Реньи, ускоренное расширение Вселенной.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko, Mikhail Yakovlevich Marov

Modeling the dynamic evolution of the Universe under the influence of the entropic force associated with modified Sharma Mittal entropy.

Using the Verlind formalism, the paper considers several scenarios of the evolution of the Friedman–Robertson–Walker Universe, which arise in the framework of entropic cosmology based on the formulated new modification of the Sharma–Mittal entropy. The research, carried out in the framework of non-Gaussian statistical theory, uses several entropies associated with the surface of the horizon of the Universe due to the holographic information stored there. Several versions of the generalized Friedman equations have been constructed, which can serve as an effective theoretical basis for describing the dynamic evolution of a superficially flat, homogeneous and isotropic Universe, giving rise to various forms of matter enclosed in it. The proposed approach, associated with the use of probabilistic nonextensive aspects of the cosmological horizon of the surface of the Universe, meets all the known basic requirements for thermodynamic modeling of the dynamic behavior of outer space without involving the concept of hypothetical dark energy

Keywords: Entropy cosmology, modified entropies of the Sharma-Mittal and Renyi entropies, accelerated expansion of the Universe.

ВВЕДЕНИЕ

Среди множества сценариев ускоренного расширения Вселенной большое внимание совсем недавно привлекла «энтропийная космология», согласно которой гравитация воспринимается как своего рода сила, связанная с ростом энтропии из-за информации, хранящейся голографически на поверхности горизонта Вселенной. В энтропийной космологии предполагается, что энтропия на поверхности, ассоциируемой с горизонтом Вселенной, обусловлена голографически хранящейся на этой поверхности информацией. Понятие «энтропийная сила» впервые было предложено в работе (Verlinde, 2011), в которой гравитация объясняется через энтропию, т.е. имеет термодинамическое происхождение (Padmanabhan, 2010; Akbar, Cai, 2007; Abreu, Neto, 2021). Было показано, что исходя из голографического принципа образования пространства-времени[1)] неизбежно возникает гравитация, которая отождествляется с энтропийной силой $F_s = -TdS/dr$, обусловленной увеличением энтропии[2)], связанным с ростом площади, занимаемой материальными телами. В рамках гипотезы Верлинде в работе (Easson и др. 2011) была развита эвристическая теория ускоренного расширения Вселенной, базирующаяся на энтропийной силе. Авторами этой работы было показано, что наряду с традиционным объяснением ускоренного расширения Вселенной, основанным на наличии управляющей силы в уравнениях Фридмана, обусловленной гипотетической темной энергией, возможна альтернативная интерпретация динамической эволюции Вселенной, связанная с

---

[1]) Под голографией в космологии понимается информация о Вселенной, закодированная на поверхностном экране, расположенном на горизонте событий (области пространства-времени), который трактуется как двумерная поверхность Вселенной (см., например, [37]).

[2]) Согласно голографическому принципу энтропия хранится на голографических экранах, а рост информации, связанный с увеличением поверхности Вселенной, занимаемой материальными телами, приводит к увеличению энтропии; отсюда возникновение градиента энтропии (энтропийной силы), направленного против увеличения радиуса указанной площади поверхности.

наличием отталкивающей энтропийной силы, которая возникает при росте информации на экране поверхности хаббловского горизонта (Bekenstein, 1975; Hawking, 1975). Оказалось, что при таком подходе физическое понимание процесса ускорения Вселенной вполне объяснимо без привлечения концепции темной энергии, как некой постулируемой среды с отрицательным давлением.

Наконец, в целом ряде работ (см., например, Koivisto и др., 2011; Myung, 2011; Cai и др., 2010a; Cai, Saridakis, 2011; Qiu, Saridakis, 2012; Basilakos и др., 2012; Easson и др., 2012; Komatsu, Kimura, 2013, 2014; Wissner-Gross, Freer, 2013; Czinner, Iguchi, 2016; Moradpour, 2016; Moradpour и др., 2018, 2019; Keul и др., 2018; Komatsu, 2017, 2019; Sayahian Jahromi и др., 2018; Sheykhi, 2018; Aditya и др., 2019; Saridakis, Basilakos, 2021; Barrow и др., 2021; Sharma и др., 2021; Kolesnichenko, Marov, 2021), посвященных энтропийной космологии, были рассмотрены сценарии ускоренного расширения Вселенной под влиянием энтропийных сил различной природы. В этих исследованиях, наряду с температурой де Ситтера (de Sitter, 1917), используются различные энтропии, ассоциированные с космическим горизонтом Вселенной. Это энтропия Бекенштейна–Хокинга (Bekenstein, 1975), равнораспределенные по степеням свободы неэкстенсивные энтропии Тсаллиса–Чирто (Tsallis, Cirto, 2013), Каниадакиса (Kaniadakis, 2002; Sharma и др., 2021) и Барроу (Barrow, 2020; Padmanabhan и др., 2010); модифицированные энтропии Реньи (Czinner, Iguchi, 2016; Komatsu, 2017; Jahromi и др., 2018; Moradpour, 2019) и Шарма–Миттала (Sayahian Jahromi и др., 2018; Abreu и др., 2021). При этом в уравнениях общей теории относительности Эйнштейна вместо космологической постоянной Λ появляются дополнительные управляющие члены, связанные с используемой энтропией. С помощью видоизмененных подобным образом уравнений Фридмана было показано, что основанные на них теоретические модели могут объяснить текущую ускоренную фазу Вселенной, поскольку хорошо согласуются с данными по сверхновым звездам (см., например, Anagnostopoulos и др., 2020). Важно также отметить, что обнаруженное ускорение Вселенной получается сравнительно небольшим (порядка постоянной Хаббла), в отличие от его огромного значения, предсказываемого квантовой теорией поля в сочетании с общей теорией относительности[3]. Как видим, изучение влияния энтропийных сил на эволюцию Вселенной представляет несомненный интерес, поскольку из-за отталкивающего (антигравитационного) действия именно эти силы могут сыграть роль темной энергии как в форме космологической постоянной, так и в форме скалярных полей (Вайнберг, 2008).

В настоящей работе, мотивированной результатами исследований (Sayahian Jahromi и др., 2018; Abreu и др. 2020), для объяснения эволюции ускоренно расширяющейся Вселенной в рамках негауссовых статистических теорий используется температура де Ситтера и неэкстенсивные энтропийные меры, ассоциированные с хаббловским горизонтом поверхности Вселенной из-за голографически хранящейся там информации (Nunes и др., 2016; Jahromi и др., 2018; Komatsu, 2017, 2019; Anagnostopoulos и др., 2020). Эффективность использования неэкстенсивных (негауссовых) статистик в космологическом контексте, необходимость привлечения которых возникает из-за дальнодействующей природы гравитации, заключается в появлении дополнительных параметров неэкстенсивности в выражениях для гравитационных сил. Это позволяет выбрать наиболее подходящие их значения при конструировании правдоподобных сценариев динамической эволюции Вселенной.

Нами предложена новая модификация энтропийной меры Шарма–Миттала (см. Sharma, Mittal, 1975; Колесниченко, 2018), описывающая эволюцию Вселенной и обобщающая модифицированные энтропии Реньи и Тсаллиса, кото-

---

[3]) Отождествление космологической постоянной с энергией вакуума не позволяет, к сожалению, проникнуть в существо темной энергии и приводит к пока неразрешимой проблеме, которая заключается в том, что наблюдаемое значение плотности тёмной энергии $\rho_{\Lambda_{obs}} \approx (10^{-3} ev)^4$ и ее теоретически предсказанное значение, $\rho_{\Lambda_{th}} \approx 10^{18} (Gev)^4$ отличаются на 120 порядков (здесь $v = v(\varphi)$ – потенциал скалярного поля φ (инфлатона) (см. Вайнберг, 2013).

рые были использованы ранее в работах (Sayahian Jahromi, 2018; Abreu и др., 2020; Sharma и др., 2021). При этом в новой модификации энтропии Шарма–Миттала[4)] предлагается использовать вместо традиционной энтропии Бекенштейна–Хокинга (Easson и др., 2011) энтропию Барроу, отвечающую квантовым гравитационным эффектам хаббловского горизонта поверхностности Вселенной (Anagnostopoulos и др., 2019, 2020; Barrow, 2020; Saridakis, 2020).

На основе модифицированной подобным образом энтропии Шарма–Миттала сконструировано несколько вариантов обобщенных уравнений Фридмана–Робертсона–Уокера, которые содержат дополнительные управляющие силы, соответствующие изменяющемуся во времени космологическому члену и зависящие от конкретной формы энтропии, изначально выбранной для описания гравитационных эффектов. В работе также отмечается совместимость этих негауссовых сценариев эволюции Вселенной с имеющимися данными космологических наблюдений. Полученные на основе формализма обобщенной энтропии Шарма–Миттала результаты соответствуют основным требованиям, предъявляемым к термодинамическому моделированию динамической эволюции Вселенной в терминах неэкстенсивной энтропии, включая дальнодействующие взаимодействия, такие как гравитация и антигравитация.

1. ИСХОДНЫЕ ЭНТРОПИЙНЫЕ МЕРЫ НА ГОЛОГРАФИЧЕСКОМ ГОРИЗОНТЕ ВСЕЛЕННОЙ

[4)] Новая модификация энтропии Шарма–Миттала базируется на неэкстенсивной энтропии Барроу, которая заменяет обычную энтропию Бекенштейна–Хокинга, используемую в энтропийном формализме, разработанном в работах (Moradpour и др., 2018; Abreu и др. 2020).

Представление о возникновении энтропийной силы на голографическом горизонте расширяющейся плоской Вселенной, имеющем ассоциированную энтропию и температуру, приводит к так называемой «энтропийной космологии», которая предполагает, что именно энтропийная сила ответственна за явление ускоренного расширения Вселенной. По этой причине неоднозначная составляющая темной энергии как в форме космологической постоянной Λ, так и в форме скалярных полей (Weinberg, 1989), может быть опущена в уравнениях Фридмана.

Рассмотрим прежде всего энтропийные силы, связанные с оригинальными энтропиями, традиционно используемыми в энтропийной космологии.

1.1. Энтропийная сила, связанная с энтропией Бекенштейна–Хокинга

В энтропийной космологии (Easson и др. 2011), по аналогии с термодинамическими характеристиками хаббловского горизонта черной дыры, описываемой своими температурой и энтропией, часто принимается, что область расширяющейся пространственно-плоской Вселенной (совпадающая с горизонтом Хаббла) имеет температуру, пропорциональную температуре де Ситтера, $T_S = \hbar H / 2\pi k$ (de Sitter, 1917), и связанную с ней ассоциированную энтропию Бекенштейна–Хокинга S_{BH}. В этом случае проблема связи космологической постоянной с энтропийной силой решается естественным образом (Verlinde, 2011).

В энтропийной космологии горизонт (радиус) Хаббла R_H и температура космологического горизонта Вселенной $T_H \simeq \gamma T_S$ определяются выражениями

$$R_H = c H^{-1}, \tag{1}$$

$$T_H = \frac{\hbar}{2\pi k} H = \frac{\hbar}{2\pi k}\frac{c}{R_H}, \tag{2}$$

где k и $\hbar = h / 2\pi$ – постоянная Больцмана и приведенная постоянная Планка–Дирака соответственно; $H(t) := a^{-1}\partial a / \partial t$ — параметр Хаббла, или хаббловская скорость расширения Вселенной (в современную эпоху

$H_0 = 2.2 \times 10^{-18} c^{-1}$); t — космическая временная координата; $a(t)$ — коэффициент расширения (масштабный фактор Робертсона–Уокера (см. Вайнберг, 2013).

Температуру горизонта Вселенной, тесно связанную с температурой де Ситтера, можно оценить как $T_H \simeq T_S \times \mathcal{O}(1) \sim 3 \times 10^{-30} K$, что намного порядков ниже температуры космического микроволнового фона, $T = 2.73K$.

Связанная с горизонтом Вселенной энтропия Бекенштейна–Хокинга задается следующим соотношением (Bekenstein, 1975)

$$S_{BH} := k\left(\frac{A_H}{A_{Pl}}\right) = k\frac{c^3}{\hbar G}\frac{A_H}{4}, \tag{3}$$

где $A_H = \pi R_H^2 = \pi c^2 H^{-2}$ – величина площади поверхности области хаббловского радиуса R_H; $A_{Pl} = \hbar G / c^3 \approx 2.612 \times 10^{-70} \mathcal{M}^2$ – площадь Планка. При подстановке величины A_H в соотношение (3) получим

$$S_{BH} = k\left(\frac{c^3}{\hbar G}\right)\pi R_H^2 = \left(\frac{k\pi c^5}{\hbar G}\right)\frac{1}{H^2} \equiv \frac{K}{H^2} \sim k(2.6 \pm 0.3) \times 10^{122}. \tag{4}$$

Здесь введена широко используемая нами в дальнейшем численная константа

$$K := \frac{\pi k c^5}{\hbar G} = \frac{\pi k c^2}{L_{Pl}^2} = \frac{\pi k c^2}{A_{Pl}} > 0, \tag{5}$$

где $L_{Pl} = \sqrt{\hbar G / c^3}$ – планковская длина.

Увеличение радиуса R_H на dR_H увеличивает энтропию S_{BH} на dS_{BH} в соответствии с

$$dS_{BH} = 2\pi\left(\frac{kc^3}{\hbar G}\right)R_H dR_H =$$

$$= 2\pi\left(\frac{kc^3}{\hbar G}\right)\left(\frac{c}{H}\right)dR_H = 2\left(\frac{K}{c^2}\right)R_H dR_H. \tag{6}$$

Горизонтальная энтропийная сила F_{BH} (антигравитация), отвечающая росту энтропии Бекенштейна–Хокинга, может быть определена как $F_{BH} := -T_H dS_{BH} / dR_H$. Здесь знак минус указывает направление увеличения энтропии или экран, которым в данном случае является горизонт событий (Easson и др. 2011). Тогда, используя соотношения (2) и (6), получим следующее выражение для энтропийной силы

$$F_{BH} = -\frac{\hbar H}{2\pi k} \frac{2K}{c^2} R_H = -\frac{c^4}{G}. \tag{7}$$

Давление этой силы на космологический горизонт Вселенной, приводящее к явлению антигравитации, определяется формулой

$$P_{BH} = \frac{F_{BH}}{4A_H} = -\frac{c^4}{G} \frac{1}{4\pi R_H^2} = -\frac{c^2}{4\pi G} H^2. \tag{8}$$

Заметим, что эта величина близка к измеренному отрицательному давлению (натяжению) темной энергии в форме космологической постоянной (Вайнберг, 2013). Таким образом, можно считать, что в голографическом подходе давление (эффект отталкивания) возникает не за счет отрицательного давления темной энергии, а за счет энтропийного натяжения, обязанного накоплению энтропии на горизонте Вселенной.

1.2. Энтропийная сила, связанная с энтропией Барроу

Недавно в работе (Barrow, 2020) была предложена модель квантовой гравитационной пены пространства-времени для оценки энтропии черных дыр и Вселенной, поверхность которых может иметь сложную фрактальную структуру космологического горизонта (области пространства-времени) вплоть до сколь угодно малых масштабов (порядка планковской длины) из-за квантово-гравитационных эффектов. Введение фрактальной структуры горизонта Вселенной приводит к увеличению площади ее поверхности. Как известно, площадь поверхности Вселенной – это ключевая характеристика, которая определяет ее энтропию и информативность. Энтропия Барроу возникает, в частности, из-за того, что поверхность горизонта Вселенной может деформироваться вследствие квантово-гравитационных эффектов, а ее отклонение от энтропии Бекенштейна–Хокинга количественно определяется показателем степени деформации Δ, отвечающим фрактальной размерности поверхности.

Подобная фрактальная структура горизонта Вселенной приводит к конечному объему, но с бесконечной или конечной площадью (см. Barrow, 2020). Согласно космологической термодинамике возможные эффекты квантово-гравитационной пены пространства-времени в области космологического горизонта приводят к новому определению энтропии Вселенной – к неаддитивной энтропии Барроу S_{Bar} (Barrow, 2020), связанной с аддитивной энтропией Бекенштейна–Хокинга: $S_{Bar}/k := \left(S_{BH}/k\right)^{1+\Delta/2}$. При подстановке величин S_{BH} и k в это соотношение получим $S_{Bar} \sim 10^{120(1+\Delta/2)}$. Параметр Δ $(0 \le \Delta \le 1)$, являясь фрактальной массовой размерностью квантово-гравитационной пены, количественно определяет деформацию структуры горизонта Вселенной[5)].

Энтропию S_{Bar} можно представить в следующих формах:

$$S_{Bar} = k\left(\frac{A_H}{A_{Pl}}\right)^{1+\Delta/2} = k\left(\frac{\pi R_H^2}{A_{Pl}}\right)^{1+\Delta/2} =$$

[5)] Следует отметить, что при определении энтропии Барроу сложная фрактальная структура космологического горизонта моделируется аналогом сферической «снежинки Коха», использующим бесконечную убывающую иерархию соприкасающихся сфер вокруг горизонта событий Шварцшильда. Тем не менее, эта простая модель возможных проявлений квантово-гравитационной эффектов, имеет важные следствия для оценок энтропии Вселенной, которая обычно несколько больше чем в базовом сценарии, связанном с энтропией Бекенштейна–Хокинга.

$$= K\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2}\left(\frac{R_H}{c}\right)^{2+\Delta} = K\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} H^{-(2+\Delta)}. \qquad (9)$$

Здесь $A_{Pl} = \hbar G / c^3 \approx 2.612 \times 10^{-70}\, м^2$ – площадь Планка; A_H – величина площади стандартного горизонта; $K := \pi k c^2 / A_{Pl} > 0$. В случае, когда параметр $\Delta = 0$, что соответствует простейшей структуре космологического горизонта Вселенной, восстанавливается рассмотренная выше стандартная энтропия Бекенштейна–Хокинга, $S_{Bar} \equiv S_{BH} := k\left(A_H / A_{Pl}\right) = KH^{-2}$.

В случае когда $\Delta = 1$, то имеет место гладкая пространственно-временная структура горизонта Вселенной, при которой энтропия Барроу совпадает с так называемой равно распределенной по степеням свободы энтропией Тсаллиса –Чирто (Tsallis., Cirto, 2013; Padmanabhan, 2010). В этом случае формула (9) аналогична формуле для неаддитивной энтропии Тсаллиса и Чирто

$$S_{TC} := k\left(\frac{A_H}{A_{Pl}}\right)^{3/2} == K\left(\frac{K}{k}\right)^{1/2}\left(\frac{R_H}{c}\right)^{3} = K\left(\frac{K}{k}\right)^{1/2} H^{-3}, \qquad (10)$$

введенной этими авторами в рассмотрение при исследовании эволюции черных дыр на основе совершенно других физических принципов, отличных от фрактальной интерпретации горизонта Вселенной (см. Torres и др., 1997; Aditya и др., 2019; Wilk, Wlodarczyk, 2020; Waheed, 2020).

Ясно, что в общем случае среды с фрактальной размерностью $(0 < \Delta \le 1)$, космологические уравнения Фридмана, основанные на энтропийной силе Барроу, будут содержать, как показано ниже, новые дополнительные члены, позволяющие моделировать космологическое поведение Вселенной для различных моделей энтропии (Saridakis, 2020; Anagnostopoulos и др., 2020; Saridakis, Basilako, 2021).

Применяя рассмотренную в предыдущем подразделе процедуру вывода выражений для энтропийной силы и соответствующего давления на космологический горизонт Вселенной, но уже с энтропией Барроу, получим:

$$\frac{dS_{Bar}}{dR_H} = \frac{(2+\Delta)}{c} K \left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} \left(\frac{R_H}{c}\right)^{1+\Delta} = \frac{2+\Delta}{c} K \left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} H^{-(1+\Delta)}. \qquad (11)$$

Соответственно, э для энтропийной силы F_{Bar}, возникающей из-за деформации горизонта Вселенной, связанной с квантово-гравитационными эффектами, и для давления P_{Bar} этой силы на космологический горизонт Вселенной будем иметь:

$$F_{Bar} = -T_H \frac{dS_{Bar}}{dR_H} = -\frac{(2+\Delta)}{2G} \left(\frac{K}{k}\right)^{\frac{\Delta}{2}} R_H^{\Delta} c^{4-\Delta} = -\frac{2+\Delta}{2G} \left(\frac{K}{k}\right)^{\frac{\Delta}{2}} c^4 H^{-\Delta}, \qquad (12)$$

$$P_{Bar} = \frac{F_{Bar}}{4\pi R_H^2} = -\frac{(2+\Delta)}{2} \frac{c^{4-\Delta}}{4\pi G} \left(\frac{K}{k}\right)^{\frac{\Delta}{2}} R_H^{\Delta-2} = \frac{2+\Delta}{2} \frac{c^2}{4\pi G} \left(\frac{K}{k}\right)^{\frac{\Delta}{2}} H^{2-\Delta}. \qquad (13)$$

Здесь использовано следующее выражение для температуры де Ситтера

$$T_H = \frac{\hbar}{2\pi k} \frac{c}{R_H} = \frac{c^6}{2GKR_H} = \frac{c^5 H}{2GK}. \qquad (2^*)$$

Перейдем теперь к определению энтропийных сил, полученных на основе особого энтропийного формализма, предложенного в статье (Sayahian Jahromi и др., 2018).

2. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ЭНТРОПИИ РЕНЬИ И ШАРМА–МИТТАЛА НА ХАББЛОВСКОМ ГОРИЗОНТЕ ВСЕЛЕННОЙ

Оригинальные и модифицированные энтропии Реньи и Тсаллиса, возникающие согласно развиваемой концепции на горизонте неэкстенсивной Вселенной, широко используются в космологии (см., например, Biró, Czinner, 2013; Czinner, Iguchi, 2016; Aditya и др., 2019; Waheed, 2020**;** Abreu, Neto. 2021; Kolesnichenko, Marov, 2021). В частности, модифицированная энтропия Реньи успешно применяется к голографическому закону равнораспределения, предложенному Падманабханом для исследования термодинамических аспектов космической гравитации (Padmanabhan, 2010; Komatsu, 2017). При этом модифицированная энтропия Реньи S_{mod}^{R} связана с формальной заменой энтропии Тсаллиса, фигурирующей в логарифмической формуле (20) оригинальной энтропии Реньи, на энтропию Бекенштейна–Хокинга.

В рамках неэкстенсивной статистической механики был предложен (Sayahian Jahromi и др., 2018) особый энтропийный формализм, основанный на модифицированной двухпараметрической энтропии Шарма-Миттала, которая, являясь родоначальником целого семейства однопараметрических энтропий, в частности энтропий Реньи и Тсаллиса, рассматривает их как некоторые предельные однопараметрические случаи (Scarfone, Wada, 2005; Scarfone, 2006; Akturk и др., 2007; Колесниченко, 2019). Таким образом, эти и некоторые другие однопараметрические энтропии могут изучаться по единообразной схеме.

По мнению авторов данной работы, в качестве перспективных будущих исследований представляет несомненный интерес изучение еще одной модификации энтропии Шарля-Миттеля, которая приводит к новому сценарию в эволюционной космологии.

2.1. Оригинальные меры энтропий Шарма–Миттала и Реньи

Рассмотрим вначале оригинальную двухпараметрическую энтропию Шарма–Миттала, которая определяется формулой

$$S_{SM}(q,r) := k\frac{\left(\sum_j p_j{}^q\right)^{(1-r)/(1-q)} - 1}{1-r}, \tag{14}$$

где $r,q>0$, $r\neq 1\neq q$, $r\neq q$. В выражении (14) $p=\{p_j\}_{j=1,\dots,\mathrm{W}}$ – дискретная случайная величина, а W обозначает количество доступных в системе микросостояний.

Энтропийная мера (14) включает как классическую, так и деформированные однопараметрические энтропии, в частности:

- энтропию Больцмана–Гиббса (Gibbs, 1960; Зубарев, 1971).

$$S_{SM}(q\to 1, r\to 1)=S_{BG}:=-k\sum_j p_j \ln p_j\,; \tag{15}$$

- энтропию Реньи (Renyi, 1961, 1970)

$$S_{SM}(q,r\to 1)=S_{Re}(q):=\frac{k}{1-q}\ln(\sum_j p_j^{\,q}),\quad q>0,\ q\neq 1; \tag{16}$$

- энтропию Тсаллиса (Havrda, Charvat, 1967; Daroczy, 1970; Tsallis, 1988)

$$S_{SM}(q,r=q)=S_{Ts}(q):=k\frac{\sum_j p_j^{\,q}-1}{1-q}); \tag{17}$$

В пределе $q\to 1$ как энтропия Тсаллиса, так и энтропия Реньи воспроизводят стандартную энтропию Больцмана–Гиббса (15).

Используя обозначение $\langle 1\rangle_q := \sum_j p_j^{\,q}$ для так называемой обобщённой статистической суммы, перепишем выражения (16) и (17) для энтропий Реньи и Тсаллиса в виде

$$S_{Re}=\frac{k}{1-q}\ln\left[\sum_j p_j^{\,q}\right]=\frac{k}{1-q}\ln\langle 1\rangle_q, \tag{18}$$

$$S_{Ts}=\frac{k}{1-q}\left[\sum_j p_j^{\,q}-1\right]=\frac{k}{1-q}\left(\langle 1\rangle_q-1\right), \tag{19}$$

Сопоставление выражений (18) и (19) даёт связь

$$S_{Re}=\frac{k}{1-q}\ln\left[1+\frac{1-q}{k}S_{Ts}\right] \tag{20}$$

Аналогично для энтропии Шарма–Миттала имеем:

$$S_{SM}(q,r)=\frac{k}{1-r}\left[\left(1+\frac{1-q}{k}S_{Ts}\right)^{\frac{1-r}{1-q}}-1\right]=\frac{k}{1-r}\left\{\left[\exp\left(k^{-1}S_{Re}\right)\right]^{\frac{1-r}{1-q}}-1\right\} \quad (21)$$

2.2. Модифицированные меры энтропий Шарма–Миттала и Реньи

Только в этом разделе для большей наглядности формул будем использовать следующие обозначения:

$$\alpha \equiv k/(1-q), \quad \beta \equiv k/(1-r). \quad (22)$$

Как было отмечено выше, модификация энтропий Реньи и Шарма–Миттала, предложенная в работах (Moradpour и др., 2018; Abreu и др. 2020), обеспечивается формальной заменой оригинальной энтропии Тсаллиса, фигурирующей в формулах (20) и (21) на энтропию Бекенштейна–Хокинга S_{BH}. В результате было получено следующее выражение для модифицированной энтропии Реньи

$$\tilde{S}_{Re}=\alpha\ln\left[1+S_{BH}/\alpha\right]. \quad (23)$$

Аналогично для модифицированной энтропии Шарма–Миттала имеет место представление (Abreu и др., 2020; Abreu, Neto, 2021)

$$\tilde{S}_{SM}=\beta\left[\left(1+S_{BH}/\alpha\right)^{\alpha/\beta}-1\right]. \quad (24)$$

Важно отметить, что физическая интерпретация подобной модификации указанных энтропий остается в настоящее время все-таки не вполне ясной. Тем не менее, в ряде работ (см., например, Czinner, Iguchi, 2016; Komatsu, 2017, 2019) было показано, что энтропии (23) и (24) могут служить эффективной теоретической основой для энтропийной космологии, порождая ее различные варианты.

Для получения нового варианта модификации энтропии Шарма–Миттала в настоящей работе нами предложено в оригинальном математическом ее выражении (формула (21)) заменить энтропию Тсаллиса на энтропию Барроу (9), описывающую сложную фрактальную структуре космологического горизонта. В результате получим следующие модифицированные энтропии Реньи и Шарма–Миттала

$$S_{Re}^{mod} = \alpha \ln\left[1 + S_{Bar} / \alpha\right], \tag{25}$$

$$S_{SM}^{mod} = \beta\left[\left(1 + S_{Bar} / \alpha\right)^{\alpha/\beta} - 1\right], \tag{26}$$

которые содержат параметры неэкстенсивности α и β и показатель степени деформации деформации космологической поверхности Δ, что позволяет конструировать многочисленные космологические модели эволюции Вселенной.

2.3. Энтропийная сила, связанная с модифицированной энтропией Шарма–Миттала

Энтропийную силу F_{SM}, отвечающую росту модифицированной энтропии Шарма–Миттала (26), будем определять как $F_{SM} = -T_H dS_{SM}^{mod} / dR_H$. Подставляя соотношения (9), (11) и (26) в это определение, получим

$$F_{SM} = -\frac{2+\Delta}{2}\left(\frac{c^4}{G}\right)\frac{\left(K/k\right)^{\Delta/2} H^{-\Delta)}}{\left(1 + \alpha^{-1} K \left(K/k\right)^{\Delta/2} H^{-(2+\Delta)}\right)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}}. \tag{27}$$

При написании этого выражения была использована следующая производная

$$\frac{dS_{SM}^{mod}}{dR_H} = \frac{1}{\left(1 + \alpha^{-1} S_{Bar}\right)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}} \frac{dS_{Bar}}{dR_H} =$$

$$= \frac{2+\Delta}{c}\frac{K\left(K/k\right)^{\Delta/2} H^{-(1+\Delta)}}{\left(1 + \alpha^{-1} K \left(K/k\right)^{\Delta/2} H^{-(2+\Delta)}\right)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}}, \tag{28}$$

полученная с учетом формул (2*), (9) и (11).

Соответственно, давление P_{SM} силы F_{SM} на космологический горизонт Вселенной определяется формулой

$$P_{SM} = \frac{F_{SM}}{4\pi R_H^2} = -\frac{2+\Delta}{8\pi}\left(\frac{c^2}{G}\right)\frac{\left(K/k\right)^{\Delta/2} H^{2-\Delta)}}{\left(1+\alpha^{-1}K\left(K/k\right)^{\Delta/2} H^{-(2+\Delta)}\right)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}}. \quad (29)$$

Энтропийная сила Реньи. Энтропийную силу F_{Re}, отвечающую росту модифицированной энтропии Реньи S_{Re}^{mod}, получим путем приравнивания показателя $(\beta-\alpha)/\beta = (r-q)/(1-q)$ в формуле (27) к единице. В результате будем иметь:

$$F_{Re} = -\frac{2+\Delta}{2}\left(\frac{c^4}{G}\right)\frac{H^2}{\alpha^{-1}K+\left(K/k\right)^{-\Delta/2} H^{(2+\Delta)}}. \quad (30)$$

Соответственно, давление P_{Re} этой силы на космологический горизонт Вселенной определяется соотношением

$$P_{Re} = \frac{F_{Re}}{4\pi R_H^2} = -\frac{2+\Delta}{8\pi}\left(\frac{c^2}{G}\right)\frac{1}{\alpha^{-1}K+(K/k)^{-\Delta/2} H^{2+\Delta}} H^4. \quad (31)$$

Если в формуле (30) положить $\Delta = 0$, то получим выражение для энтропийной силы Реньи, модифицированной с помощью энтропии Бекенштейна–Хокинга S_{BH}:

$$\tilde{F}_{Re} := -T_H \frac{d\tilde{S}_{Re}}{dR_H} = -\left(\frac{c^4}{G}\right)\frac{1}{1+K/\alpha H^2}. \quad (32)$$

Энтропийная сила Барроу и Тсаллиса-Чирто. Энтропийные силы Барроу F_{Bar} и Тсаллиса-Чирто F_{TC} также можно получить из формулы (27), полагая $(\alpha = \beta; \Delta = 1)$ и $(\alpha = \beta;\ \Delta = 0)$ соответственно. В результате будем иметь (см. Kolesnichenko, Marov, 2021):

$$F_{Bar} = -\frac{2+\Delta}{2}\left(\frac{c^4}{G}\right)\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} H^{-\Delta)}, \quad F_{TC} = -\frac{3}{2G}(K/k)^{1/2} c^4 H^{-1}. \qquad (33)$$

3. ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ КОСМОЛОГИИ ФРИДМАНА–РОБЕРТСОНА–УОКЕРА

В классической космологии модели эволюционирующей Вселенной конструируют на основе уравнений общей теории относительности Эйнштейна (см., например, Толмен, 2009; Вайнберг, 2013). Мы используем подход, основой которого служит построение уравнений Фридмана на основе модифицированного энтропийного формализма Шармы–Миттала, что является основной целью работы. Эту цель преследовали основные результаты по анализу различных типов неэкстенсивной энтропии, ответственной в рамках рассматриваемой концепции за возникновение энтропийной силы, изложенные в разделах 1-2.

Ограничимся рассмотрением эволюционной плоской модели Вселенной, которая является бесконечной в пространстве, однородной, изотропной и расширяющейся. При этом будем считать, что Вселенная моделируется некоторой космологической жидкостью, дисперсные частицы которой суть галактики. На таком уровне крупномасштабного усреднения структура Вселенной симметрична и не имеет особенностей.

В плоском гиперпространстве пространственно-временной линейный интервал имеет вид метрики Робертсона–Уокера

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \qquad (34)$$

которому соответствует метрический тензор $g_{\mu\nu}$ с галилеевыми компонентами

$g_{00}=c^2;\ g_{11}=g_{22}=g_{33}=-a(t)^2;\ g_{\mu\nu}=0\ \textit{при}\ \mu\neq\nu;\ g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}$, где t — космическая временная координата; $a(t)$ – коэффициент расширения (масштабный фактор Робертсона–Уокера.

Будем рассматривать идеальную космологическую жидкость, которая определяется как среда, в каждой точке которой существует локально инерциальная декартова система отсчета, движущаяся вместе с жидкостью; при этом сама жидкость однородна по всем направлениям. Для такой среды тензор энергии-импульса, играющий роль источника гравитационного поля, в принятой системе координат имеет вид $T_{\mu\nu}=(\rho c^2+P)u_\mu u_\nu+Pg_{\mu\nu}$, где $\rho=\rho(t)$, $P=P(\rho)$ — соответственно плотность и скалярное давление жидкости (включающей материю и излучение) в момент времени t. Здесь введена четырехмерная скорость $u_\mu=\partial x_\mu/\partial s$, которая определена условием, что в сопутствующей локально инерциальной декартовой системе отсчета ее компоненты равны $u_0=1$ и $u_{\mu\neq 0}=0$. Таким образом, в состоянии покоя компоненты тензора $T_{\mu\nu}$ имеют следующий вид (Мизнер и др., 1977):

$$T_{00}=\rho c^2;\quad T_{11}=T_{22}=T_{33}=-P;\quad T_{\mu\nu}=0\ \textit{при}\ \mu\neq\nu. \tag{35}$$

Заметим, что в плоской модели Вселенной[6]) трехмерная кривизна является нулевой, однако четырехмерное пространство остается кривым.

3.1. Уравнения Фридмана–Робертсона–Уокера в гравитации Эйнштейна

Далее будем рассматривать стандартную модель Фридмана для пространственно плоской открытой Вселенной. В сделанных предположениях из урав-

[6]) Как известно, пространство является плоским только в том случае, если отношение $\Omega:=\rho/\rho_{cr}\cong 1$, где $\rho_{cr}:=3H^2/8\pi G$ – критическая массовая плотность (вещество + излучение). По современным наблюдательным данным величина $\Omega=1.02\pm 0.02$.

нений общей теории относительности Эйнштейна следуют два уравнения поля Фридмана для масштабного фактора $a(t)$

$$\left(\frac{1}{a}\frac{\partial a(t)}{\partial t}\right)^2 \equiv H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{\Lambda}{3}, \tag{36}$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = -4\pi G\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] + \frac{\Lambda}{3}, \tag{37}$$

описывающих эволюцию Вселенной. Здесь $H(t) := a^{-1}\partial a/\partial t$ — параметр Хаббла, или хаббловская скорость расширения Вселенной, текущее значение которой близко к планковскому (см. Anagnostopoulos и др., 2020); $\rho = \rho_m + \rho_R$ – общая плотность вещества и радиации. Уравнения (36) и (37) включают дополнительный управляющий параметр $\Lambda/3$, (который часто может быть опущенным), объясняющий при надлежащем определении ускоренное расширение поздней Вселенной (Weinberg, 1989).

Из уравнений (36) и (37) легко получить следующий закон сохранения энергии (уравнение неразрывности)

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + 3H(t)\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] = 0. \tag{38}$$

Для этого необходимо продифференцировать уравнение (36) и результат скомбинировать с уравнением (37), которому удовлетворяет давление. Это уравнение может быть выведено также непосредственно из первого закона термодинамики, если рассматривать Вселенную как термодинамическую систему, ограниченную видимым горизонтом и расширяющуюся адиабатически (*Ryden*, 2003).

Таким образом, фундаментальными уравнениями динамической космологии, основанными на метрике Робертсона–Уокера, являются уравнения ускорения (36), уравнение сохранения энергии (38) и уравнение состояния (зависимость давления $P(t)$ от $a(t)$), которые определяют коэффициент расширения $a(t)$ (Friedmann, 1922).

Ранее в статье (Колесниченко, Маров, 2021) был рассмотрен сценарий ускорения космического пространства под воздействием энтропийных сил, связанных с энтропиями пропорциональными площади космологического горизонта Вселенной. К таким энтропиям относятся приведенные в первом разделе этой статьи энтропии Бекенштейна–Хокинга, Барроу и Тсаллиса–Чирто. Однако простая формула площади для энтропии не выполняется в теориях космической гравитации с высшими производными (Cai, Kim, 2005). Поэтому представляется целесообразным получить обобщенные уравнения Фридмана–Робертсона–Уокера в рамках теории гравитации, основанной на рассмотренных выше модифицированных энтропиях, зависящих от свободных параметров деформации (Δ) и неэкстенсивности (α,β). Эти результаты непосредственно связаны с голографическими свойствами гравитации.

3.2. Обобщенные уравнения Фридмана–Робертсона–Уокера

Согласно общей теории относительности, гравитационное поле создается не только плотностью среды, но и давлением в комбинации $\rho(t)+P(t)/c^2$ (см. Черепащук, Чернин, 2004). Предполагая далее, что в развиваемом нами варианте энтропийной космологии, основанном на модифицированной энтропии Шарма–Миттала, эффективное давление постулируемого аналога космической жидкости P'_{SM}, вызывающее эволюцию Вселенной (в частности, энтропийную силу и антигравитацию), определяется соотношением

$$P'_{SM}=P+P_{SM}=P-\frac{1}{4\pi G}\frac{2+\Delta}{2}\frac{c^2(K/k)^{\Delta/2}H^{2-\Delta}}{\left[1+(1-q)(K/k)^{1+\Delta/2}H^{-(2+\Delta)}\right]^{\frac{r-q}{1-q}}}, \qquad (39)$$

где давление P_{SM} задается формулой (29). При использовании эффективного давления P'_{SM} классические уравнения Фридмана (36) и (38), принимают следующий обобщенный вид:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = -4\pi G\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] + \frac{(2+\Delta)}{2}\frac{\left(K/k\right)^{\frac{\Delta}{2}} H(t)^{2-\Delta}}{\left[1+(1-q)\left(K/k\right)^{1+\frac{\Delta}{2}} H(t)^{-(2+\Delta)}\right]^{\frac{r-q}{1-q}}}. \quad (40)$$

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + 3H\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] = \frac{3}{4\pi G}\frac{(2+\Delta)}{2}\frac{\left(K/k\right)^{\frac{\Delta}{2}} H(t)^{3-\Delta}}{\left[1+(1-q)\left(K/k\right)^{1+\frac{\Delta}{2}} H(t)^{-(2+\Delta)}\right]^{\frac{r-q}{1-q}}}. \quad (41)$$

Наличие нескольких свободных параметров в этих уравнениях позволяет получить различные варианты движущих сил, вызывающих отклонение от «стандартной» голографической модели Вселенной, предложенной Верлинде (Verlinde, 2011).

Ниже приведено несколько вариантов моделей фридмановской Вселенной, полученных исходя из модифицированной энтропии Шарма–Миттеля.

Уравнения Фридмана, полученные с использованием модифицированной энтропии Реньи $\boldsymbol{S^{Re}_{mod}}$. Эти уравнения можно получить из уравнений (40) и (41), при устремлении параметра неэкстенсивности r к единице. В результате будем иметь:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = -4\pi G\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] + \frac{2+\Delta}{2}\frac{H(t)^4}{(1-q)(K/k) + (K/k)^{-\Delta/2} H(t)^{(2+\Delta)}}, \quad (42)$$

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + 3H\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] = \frac{3}{4\pi G}\frac{2+\Delta}{2}\frac{H(t)^5}{(1-q)(K/k) + (K/k)^{-\Delta/2} H(t)^{(2+\Delta)}}. \quad (43)$$

Уравнения Фридмана, основанные на модифицированной энтропии Реньи $\tilde{S}^{Re}$. Полагая в уравнениях (42) и (43) параметр деформации равным нулю ($\Delta = 0$), получим следующие обобщенные уравнения Фридмана

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} + 4\pi G\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] = \frac{H(t)^2}{1 + (1-q)(K/k)H(t)^{-2}}, \qquad (44)$$

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + 3H\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] = \frac{3}{4\pi G}\frac{H(t)^3}{1 + (1-q)(K/k)H(t)^{-2}}, \qquad (45)$$

основанные на энтропии Реньи, модифицированной с помощью энтропии Бекенштейна–Хокинга (ср. Sayahian и др., 2018).

Классические уравнения энтропийной космологии. Устремляя в уравнениях (44) и (45) параметр неэкстенсивности q к единице, получим

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = -4\pi G\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] + H(t)^2, \qquad (46)$$

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + 3H\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] - \frac{3}{4\pi G}H(t)^3 = 0. \qquad (47)$$

Эти уравнения можно рассматривать как обобщенные уравнения ускорения (36) и непрерывности (38) для энтропийной космологии, выведенные с использованием энтропии Бекенштейна–Хокинга. Величина H^2 в этих уравнениях связана с энтропийной силой, которая может объяснить ускоренное расширение Вселенной без введения понятия темной энергии − космического вакуума (связанного с космологической постоянной), плотность энергии которого отрицательна. Заметим, что энтропия Бекенштейна–Хокинга пропорциональна площади космологического горизонта Вселенной, благодаря чему модель, основанная на этой энтропии, предсказывает только расширяющуюся с равномерным ускорением Вселенную. Как было показано в работе (Easson и др., 2011), эта модель ускоренного расширения Вселенной способна обеспечить хорошее соответствие данным по сверхновым звездам.

Ускоренное расширение Вселенной под воздействием энтропийной силы Барроу. Устремляя теперь в уравнениях (42) и (43) параметр экстенсивности q к единице, получим уравнения

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t}+4\pi G\left[\rho(t)+\frac{P(t)}{c^2}\right]=\frac{2+\Delta}{2}\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2}H(t)^{2-\Delta}, \qquad (48)$$

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t}+3H\left[\rho(t)+\frac{P(t)}{c^2}\right]=\frac{3}{4\pi G}\frac{2+\Delta}{2}\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2}H(t)^{3-\Delta}, \qquad (49)$$

описывающие при использовании для поверхности горизонта Вселенной энтропии Барроу как космологическое ускорение, так и замедление (Колесниченко, Маров, 2021).

Важно отметить, что случай нулевой деформации ($\Delta = 0$) соответствует энтропийной силе Барроу, которая полностью соответствует стандартной энтропийной силе, рассмотренной в работе (Easson и др., 2011). Следует вместе с тем подчеркнуть, что, как отмечалось авторами работы (Anagnostopoulos и др., 2020), опиравшимися на указанные выше наблюдательные данные космической хронометрии с целью прямых измерений параметра Хаббла, этим данным лучше соответствует значение параметра деформации, равное $\Delta = 0.094$. Другими словами, допускается, что небольшое отклонение от стандартной голографической энтропии Бекенштейна–Хокинга является более предпочтительным.

В общем случае, когда $0 < \Delta < 1$, мы имеем новый космологический сценарий проявления энтропийной силы, основанный на энтропии Барроу, связанной с квантово-гравитационными эффектами горизонта Вселенной. Этот сценарий позволяет моделировать космологическое состояние и эволюцию Вселенной при различных модификациях управляющей гравитационной силы Барроу (см. Saridaki, 2020).

Ускоренное расширение Вселенной под воздействием энтропийной силы Тсаллиса–Чирто. Вариант $\Delta = 1$ в уравнениях (48) и (49), соответствующий максимальной деформации космологического горизонта из-за квантово-гравитационных эффектов, связан с энтропией Тсаллиса–Чирто (Tsallis., Cirto, 2013). Соответствующие обобщенные уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} + 4\pi G\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] = \frac{3}{2}\left(\frac{K}{k}\right)^{1/2} H(t), \tag{50}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H(t)\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] = \frac{3}{4\pi G}\frac{3}{2}\left(\frac{K}{k}\right)^{1/2} H(t)^2. \tag{51}$$

Сценарий проявления этой энтропии предсказывает как замедление, так и ускоренное расширение Вселенной (см. Basilakos и др.,2009). Из уравнения (50) следует, что управляющий силовой член в этой модели пропорционален хабб-ловской скорости расширения Вселенной H, в отличие от аналогичного энтропийного силового члена в модели Бекенштейна–Хокинга, который пропорционален H^2.

Отметим, что космологические уравнения, подобные уравнениям (50) и (51), неоднократно обсуждались в литературе при моделировании эволюции Вселенной, основанной на различных аппроксимациях переменного космологического члена (см., например, (Basilakos и др.,2009). С другой стороны, полученная из обобщенной энтропии Тсаллиса–Чирто энтропийная сила (33) ведет себя так же, как и движущая сила вязкой космологической жидкости с объемной вязкостью η, с использованием которой в моделях вязкой космологии объясняется ускоренное расширение Вселенной. Действительно, выражение для эффективного давления $P'_{TC}(t) = P(t) - \frac{3c^3}{8\pi G}\left(\frac{K}{k_B}\right)^{1/2} H(t)$ в уравнении (50), аналогично выражению $P'(t) = P(t) - 3\eta H(t)$ для давления в моделях вязкой космологии, предложенных для описания темной материи. В моделях этого типа предполагается, что Вселенная заполнена космологической жидкостью с объемной вязкостью η, которая может генерировать энтропию однородной и изотропной Вселенной (см. Padmanabhan, Chitre, 1987; Meng, Dou 2009). Приведенное сходство стало возможным по причине того, что введенная на основе голографического принципа неаддитивная энтропия Тсаллиса–Чирто ведет себя так, как если бы это была классическая энтропия однородной и изотропной Вселенной, порожденная объемным вязким напряжением космологической жидкости (Li, Barrow, 2009; Sebastian, 2010).

Итак, все модели, рассмотренные в этом разделе, как и многие другие, сконструированные на базе обобщенных уравнений Фридмана (40)-(41), описывают эволюцию Вселенной без использования представлений о наличии гипотетической темной энергии, аналогом которой служит космологическая постоянная. Несомненно, что их дальнейший анализ будет способствовать более глубокому пониманию нетрадиционной термодинамики и статистических аспектов пространства-времени и гравитации.

4. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ НЕАДИАБАТИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ ВСЕЛЕННОЙ

4.1. Термодинамический вывод уравнения сохранения космической энергии

Закон сохранения энергии (38) может быть получен также непосредственно из первого закона термодинамики, если рассматривать Вселенную как термодинамическую систему, ограниченную космологическим горизонтом и расширяющуюся адиабатически (Ryden, 2003).

Согласно первому закону термодинамики, принцип сохранения полной энергии для неаддитивных систем можно записать в виде соотношения Гиббса $T\partial S/\partial t = \partial E/\partial t + P\partial V/\partial t$, выражающего скорость изменения энтропии S при движении элемента неаддитивной среды вдоль его траектории (Колесниченко, 2018, 2019). Здесь $\partial E / \partial t$ и $\partial V / \partial t$ – изменения во времени внутренней энергии и объема области вещества и излучения Вселенной соответственно [7)].

Рассмотрим теперь сферу начального радиуса $\hat{r}_s$, расширяющуюся вместе с универсальным расширением Вселенной, так что ее собственный радиус $R_H(t)$ в момент времени t определяется выражением $R_H = a(t)\hat{r}_s$. Тогда объем $V(t)$ сферы равен $V(t) = (4\pi / 3)\hat{r}_s^3 a(t)^3$. Отсюда

$$\frac{\partial V(t)}{\partial t} = \frac{4\pi}{3}\hat{r}_s^3\left(3a^2\frac{\partial a(t)}{\partial t}\right) = V\left(\frac{3}{a}\frac{\partial a(t)}{\partial t}\right) = 3VH. \quad (52)$$

Для внутренней энергии сферы имеем $E(t) = \varepsilon(t)V(t)$, где $\varepsilon(t)$–плотность внутренней энергии, определяемая соотношением $\varepsilon(t) = \rho(t)c^2$. Отсюда скорость изменения внутренней энергии сферы $E(t)$ определяется как

$$\frac{\partial E(t)}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t}V + \varepsilon\frac{\partial V(t)}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} + 3H\varepsilon\right)V = \left(\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + 3H\rho\right)c^2\left(\frac{4\pi}{3}R_H^3\right). \quad (53)$$

Подставляя это выражение в соотношение Гиббса, получим второй закон термодинамики для расширяющейся или сжимающейся Вселенной:

$$T_H\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} + P\frac{\partial V}{\partial t} = \left(\frac{\partial E}{\partial t} + 3H(\varepsilon + P)\right)V = \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)\right]c^2\left(\frac{4\pi}{3}R_H^3\right). \quad (54)$$

Рассмотрим сначала изоэнтропические (обратимые и адиабатические) движения космического вещества, для которых энтропия каждой частицы среды остается в первом приближении постоянной на протяжении всего пути элемента среды, т.е. $\partial S / \partial t = 0$. Для них уравнение (54) сводится к ранее получен-

---

[7)] Следует заметить, что в общем случае для каждой из используемых в модели эволюции Вселенной энтропийных мер должна соответствовать своя температура хабловского горизонта.

ному уравнению неразрывности (38) для адиабатического расширения Вселенной.

4.2. Обобщенное энергетическое уравнение для моделирования неадиабатической эволюции Вселенной

При моделировании эволюции Вселенной в рамках неадиабатической энтропийной космологии изменение энтропии системы не равно нулю, $\partial S / \partial t \neq 0$ (см. Frolov, Kofman, 2003; Cai, Kim, 2005; Akbar, Cai, 2007). Для вычисления этой величины в уравнении (54) будем использовать формулу (29) для модифицированной энтропии Шарля–Миттела, полученную с помощью энтропии Барроу (Barrow, 2020), как наиболее общую в рассматриваемом здесь случае. В результате получим

$$T_H \frac{\partial S_{SM}^{mod}}{\partial t} = -\frac{(2+\Delta)c^5}{2G} \frac{(K/k)^{\Delta/2} H^{-\Delta-2}}{\left[1+\alpha^{-1} K (K/k)^{\Delta/2} H^{-(2+\Delta)}\right]^{\frac{r-q}{1-q}}} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (55)$$

С учетом этого выражения энергетическое уравнение (54), записанное в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = T_H \frac{\partial S_{SM}^{mod}}{\partial t} \left(\frac{3}{4\pi}\right) c^{-5} H^3,$$

принимает вид обобщенного закона сохранения энергии

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) =$$

$$= -\frac{3}{4\pi G} \frac{(2+\Delta)}{2} \frac{(K/k)^{\Delta/2}}{\left[1+(1-q)(K/k)^{1+\Delta/2} H^{-(2+\Delta)}\right]^{\frac{r-q}{1-q}}} H^{-\Delta+1} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (56)$$

Правая часть этого уравнения связана с неадиабатическими процессами в космологическом пространстве. Если параметр Хаббла $H = 0$ или если $H = const$, то уравнение (56) сводится к классическому уравнению неразрывности (38) для адиабатического расширения Вселенной. В общем случае неадиабатической эволюции Вселенной на основе уравнения (56) можно получить целый набор обобщенных систем космологических уравнений Фридмана для масштабного фактора.

Таким образом, методы энтропийной космологии, основанные на предложенной модификации энтропии Шарля–Миттела, являются достаточно эффективными для конструирования целого набора моделей, которые позволяют найти количественные оценки ускоренного расширения Вселенной в соответствии с данными наблюдений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исходя из формализма Верлинда исследованы обобщенные космологические сценарии ускоренного расширения (сжатия) неэкстенстивной Вселенной Фридмана–Робертсона–Уокера, которые возможны в рамках энтропийной космологии, основанной на модифицированной энтропийной мере Шарма–Миттала с показателем деформации, учитывающим сложную фрактальную структуру поверхности космологического горизонта. Использование двухпараметрической энтропии Шарма–Миттала, которая является родоначальником целого семейства однопараметрических энтропий, в частности однопараметрических энтропий Реньи и Тсаллиса, позволяет изучать различные сценарии динамической эволюции неэкстенсивной Вселенной по единообразной схеме. Выполненное в рамках негауссовой статистической теории исследование использует несколько неэкстенсивных энтропий (таких как энтропии Реньи, Тсаллиса-Чирто, Шарма–Миттала и Барроу), ассоциированные с поверхностью горизонта Вселенной из-за хранящейся там голографически информации. Эффект негауссовой статистики в космологическом контексте заключается в видоизменении управляющей энтропийной силы в уравнениях гравитационного поля Эйнштейна.

Рассмотренная в работе модификация неэкстенсивной энтропии Шарма–Миттала базируется на энтропии Барроу, которая заменяет энтропию Бекенштейна–Хокинга, фигурирующую в известных энтропийных формализмах. Смысл такой замены состоит в том, что наличие энтропии Барроу, учитывающей возможные эффекты квантово-гравитационной пены на канве пространства-времени в области космологического горизонта, создает дополнительные средства для оценки ускоренного расширения Вселенной, которое в большинстве случаев несколько больше, чем в базовом сценарии, основанном на энтропии Бекенштейна–Хокинга.

В результате авторами получен целый набор новых модифицированных уравнений Фридмана, в которых вместо космологической постоянной фигурируют управляющие силы, наличие которых приводит к различным сценариям эволюции Вселенной в зависимости от конкретной формы энтропии, изначально выбранной для описания горизонта событий. Другими словами, предложенный в работе энтропийный формализм может служить эффективной теоретической основой для описания динамической эволюции Вселенной, порождая ее модифицированные формы. В работе также отмечается совместимость этих негауссовых модификаций с космологическими наблюдениями.

Таким образом, предложенный здесь подход, связанный с использованием вероятностных негауссовых (неэкстенсивных) аспектов хаббловского горизонта поверхности Вселенной, соответствует известным требованиям, предъявляемым к термодинамическому моделированию динамического поведения космоса без привлечения концепции темной энергии. Это обстоятельство, несомненно, побуждает к более глубокому изучению вероятностных неэкстенсивных аспектов пространства-времени из-за дальнодействующей природы гравитации. Результаты моделирования динамической эволюции Вселенной, выполненного на основе приведенных в статье космологических уравнений, предполагается рассмотреть в других публикациях авторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Вайнберг С. Космология. М.: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2013. 608 с.

Зубарев Д.П. Неравновесная статистическая механика. М.: Наука, 1971. 416 с.

Колесниченко А.В. Двухпараметрический энтропийный функционал Шарма–Миттала как основа семейства обобщенных термодинамик неэкстенсивных систем // Mathematica Montisnigri. 2018. V. XLII. P.74-101.

Колесниченко А.В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД (Синергетика: от прошлого к будущему. № 87) 2019. 360 с.

Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Том 2. Изд-во «Мир». 1977. 525 с.

Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология. М.: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2009. 520 с.

Черепащук А.М., Чернин А.Д. Вселенная, жизнь, черные дыры.–Фрязино: «Век 2», 2004, 320 с.

Aditya Y., Mandal S., Sahoo P., Reddy D. Observational constraint on interacting Tsallis holographic dark energy in logarithmic Brans Dicke theory // Eur. Phys. J. 2019. V. 79. №.12. P. 1020) [arXiv:1910.12456].

Akbar M., Cai R. G. Thermodynamic Behavior of Friedmann Equations at Apparent Horizon of FRW Universe // Phys. Rev. D. 2007. V.75, P.084003 [arXiv:hep-th/0609128].

Abreu E. M. C., Neto J. A., Barboza E. M. Jr., Mendes A. C. R., Soares B. B. On the equipartition theorem and black holes non-Gaussian entropies // Modern Physics Letters A. 2020. V. 35. № 32 P. 2050266 (7 pages).

Abreu E.M.C., Neto J.A. Some statistical approaches in the apparent horizon entropy and the generalized second law of thermodynamics // arXiv:2107. 04869 v1 [gr-qc] 10 Iul 2021.

Aktürk E., Bagci G. B., Sever R. Is Sharma-Mittal entropy really a step beyond Tsallis and Renyi entropies? // 2007. Eprint arXiv: cond-mat/0703277.

Anagnostopoulos F.K., Basilakos S., Saridakis E.N. Observational constraints on Barrow holographic dark energy // Eur. Phys. J. C. 2020. V.80. P. 826 (1-9).

Anagnostopoulos F. K., Basilakos S., Kofinas G., Zarikas V. Constraining the Asymptotically Safe Cosmology: cosmic acceleration without dark energy // JCAP. 2019. V. 053 [arXiv:1806.10580].

Basilakos S., Polarski D., Sola J. Generalizing the running vacuum energy model and comparing with the entropic-force models // Phys. Rev. D 2012. V.86.№ 4. P. 043010

Basilakos S., Plionis M., Sola J. Hubble expansion and structure formation in time varying vacuum models // Phys. Rev. D. 2009. V. 80. №8. P 083511

Barrow J. D .The area of a rough black hole // Physics Letters B. 2020. V. 808. P 135643.

Barrow J. D., Basilakos S., Saridakis E.N. Big Bang Nucleosynthesis constraints on Barrow entropy // Physics Letters B. 2021. V.815. № 9 P.136134

Bekenstein J.D. Black Holes and Entropy//Phys. Rev. D. 1975. V.7. № 8. P. 2333-2346.

Biró T. S., Czinner V. G. A *q*-parameter bound for particle spectra based on black hole thermodynamics with Rényi entropy. Physics Letters B. 2013. V.726. № 4-5. P. 861-865.

Cai Y.-F., Liu J., Li H. Entropic cosmology: A unified model of inflation and late-time acceleration // Physics Letters B. 2010a. V. 690. P. 213-219.

Cai Y.-F.,. Saridakis E. Inflation in entropic cosmology: Primordial perturbations and non-Gaussianities // Physics Letters B. 2011. V. 697. P. 280-287.

Cai R. G., Kim S. P. First law of thermodynamics and Friedmann equations of Friedmann-Robertson-Walker universe //, JHEP. 2005. V. 0502. P. 050 [arXiv:hep-th/0501055].

Czinner V. G., Iguchi H. Rényi entropy and the thermodynamic stability of black holes // Phys. Lett. B. 2016. V. 752. P. 306-310.

Daroczy Z. Generalized information function// Inform. Control. 1970. V.16. P.36-51.

Easson D. A., Frampton P. H., Smoot, G. F. Entropic accelerating universe // Physics Letters B. 2011. V. 696. № 3, P. 273-*277./* arXiv.1002.427 v3[hep.-th.] 24 Oct 2010.

Easson D. A., Frampton P. H., Smoot, G. F. Entropic Inflation // arXiv.1003.1528 v3[hep.-th.] 13Apr 2012.

Frolov A. V., Kofman L. Inflation and de Sitter thermodynamics // JCAP. 2003. V. 0305. P. 009 [arXiv:hep-th/0212327].

Jahromi A. S, Moosavi S., Moradpour H., Graca J. M., Lobo I., Salako I., Jawad A. //Generalized entropy formalism and a new holographic dark energy model. Physics Letters B. 2018. V.780, P. 21-24.

Havrda J., Charvat F. Quantification Method of Classification Processes// Kybernetika. 1967. V.3. P.30-35.

Friedmann A. Über die Krümmung des Raumes // Zeitschrift für Physik. 1922. V. 10, P. 377-386.

Gibbs J. W. Elementary principles in statistical mechanics: 1902. New York: Charles Scribner's Sons. 1960.

Hawking S. W. Particle Creation By Black Holes // Commun Math. Phys. 1975. V. 43. 199-220.

Kaniadakis G. Statistical mechanics in the context of special relativity // Physical review E. 2002. V. 66. № 5. P. 056125.

Keul N.D., Oruganty K., Bergman E.T.S., Beattie N.R., McDonald W.E., Kadirvelraj R., Gross M.L., Phillips R.S., Harvey S.C., Wood Z.A. The entropic force generated by intrinsically disordered segments tunes protein function // Nature. 2018. V.563. P. 584-588.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Scenario of accelerated universe expansion under exposure to entropic forces related to with the entropies of Barrow and Tsallis−Cirto // Mathematica Montisnigri. 2021. V. L. P. 80-103.

Komatsu E., et al. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation // Astrophys. J. Suppl. Ser. 2011. V. 192. №2. article id. 18, 47 pp.

Komatsu N., Kimura S. Non-adiabatic-like accelerated expansion of the late universe in entropic cosmology // Phys. Rev. D. 2013. V.87, P. 043531.

Komatsu N., Kimura S. Evolution of the universe in entropic cosmologies via different formulations //Physical Review D, 2014. V. 89. № 12. P.123501.

Komatsu N. Cosmological model from the holographic equipartition law with a modified Rényi entropy // Eur. Phys. J. C. 2017. V. 77. P.229-241.

Komatsu N. Generalized thermodynamic constraints on holographic-principle-based cosmological scenarios //Physical Review D. 2019. V. 99. P. 043523.

Koivisto T.S., Mota D. F., Zumalacárregui M. Constraining entropic cosmology // J. Cosmol.Astropart. Phys. 2011. № 02. id.027;

Li B., Barrow J. Does bulk viscosity create a viable unified dark matter model? // Physical Review D, 2009. V. 79. № 10. P. id. 103521

Meng X.-H., Dou X. Friedmann cosmology with bulk viscosity: a concrete model for dark energy // Communicationsin Theoretical Physics. 2009. Vl. 52. № 2. P. 377-38.

Moradpour H. Implications, consequences and interpretations of generalized entropy in the cosmological setups // Int. J. Theor. Phys. 2016. V. 55. № 9. P. 4176-4184.

Moradpour H. Sheykhi S., Corda C., Salako I.G. Implications of the generalized entropy formalisms on the Newtonian gravity and dynamics // Physics Letters B. 2018. V.783. P. 82-85.

Moradpour H., Corda C., Ziaie A. H., Ghaffari S. The extended uncertainty principle inspires the R´enyi entropy // EPL (Europhysics Letters). 2019. V. 127. №. 6. P. 60006

Myung Y.S. Entropic force and its cosmological implications // Astrophys. Space Sci. 2011. V. 335. № 2. P. 553-559.

Nunes R. C., Barboza E. M., Abreu E. M. C., Neto J. A. Probing the cosmological viability of non-gaussian statistics // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2016. V. 08. P. 051.

Padmanabhan T. Thermodynamical Aspects of Gravity: New insights // Rept. Prog. Phys. 2010. V.73. № 4. P.046901 (44pp) [arXiv:0911.5004].

Padmanabhan T., Chitre S. M. Viscous universes. Physics Letters A, 1987. V. 120. №. 9. P. 433-436.

Padmanabhan T. Equipartition of energy in the horizon degrees of freedom and the emergence of gravity // Modern Physics Letters A, 2010. V. 25. № 14. P. 1129-1136.

Qiu T., Saridakis E. N. Entropic force scenarios and eternal inflation // Phys. Rev. D. 2012. V.85. P. 043504.

Renyi A. On Measures of Entropy and Information, in Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. Prob. 1960.V. 1. University of California Press, Berkeley, Los Angeles, 1961. p. 547-561.

Renyi A. Probability Theory. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1970. 573 p.

Ryden B. Introduction to Cosmology. Cambridge University Press. 2017. 279 p.

Saridakis E.N., Basilakos S. The generalized second law of thermodynamics with Barrow entropy. Eur. Phys. J. C .2021.V. 81:644-649.

Saridakis E. N. Modified cosmology through spacetime thermodynamics and Barrow horizon entropy // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2020. P. 1-10.

Sayahian Jahromi A., Moosavi S. A., Moradpour H., Morais Graça J. P., Lobo I. P., Salako I. G., Jawad A. Generalized entropy formalism and a new holographic dark energy model // Physics Letters B. 2018. V.780. P.21-24.

Scarfone A. M., Wada T. Thermodynamic equilibrium and its stability for microcanonical systems described by the Sharma–Taneja–Mittal entropy // Physical Review E. 2005. V. 72 № 2. id. 026123.

Sharma B.D., Mittal D.P. New non-additive measures of relative information // J. Comb. Inform. & Syst.Sci.1975. V.2. P.122-133.

Sharma U. K., **Dubey V. C., Ziaie, A. H., Moradpour, H.** Kaniadakis Holographic Dark Energy in non-flat Universe // Eprint arXiv:2106.08139. 2021.

Sheykhi A. Modified Friedmann equations from Tsallis entropy // Physics Letters B. 2018. V. 785. P.118-126.

de Sitter W. On the relativity of inertia. Remarks concerning Einstein's latest hypothesis //Proc. Roy. Acad. Sci. (Amsterdam). 1917. V. 19. P. 1217-1225.

Sebastian, L. Dark viscous fluid coupled with dark matter and future singularity // European Physical Journal C. 2010. V. 69. P. 547-553.

Susskind L. The World as a hologram // J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 11 P. 6377-6396.

Torres D.F., Vucetich H., Plastino A. Early Universe Test of Nonextensive Statistics // Phys. Rev. Lett. 1997. V.79. № 9. P. 1588-1590.

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V.52. № 1/2. P.479–487.

Tsallis C., Cirto L. J.L. Black hole thermodynamical entropy // Eur. Phys. J. C. 2013. V. 73. P.2487.

Verlinde E. On the origin of gravity and the laws of Newton // J. High Energy Phys. 2011. V. 4. P. 1-26.

Waheed S. Reconstruction paradigm in a class of extended teleparallel theories using Tsallis holographic dark energy // Eur. Phys. J. Plus. 2020. V. 135. № 1. P. 11.

Weinberg S. The cosmological constant problem **//** Reviews of Modern Physics. 1989. V. 61. № 1. P.1-23.

Wilk G., Wlodarczyk Z. On the interpretation of nonextensive parameter *q* in Tsallis statistics and Levy distributions // Phys. Rev. Lett. 2000. V.84. P. 2770.

Wissner-Gross A.D., Freer C.E. Causal entropy forces // Phys. Rev. Lett. 2013, V.110, 168702. OhysRevLett.110.168702.

ОГЛАВЛЕНИЕ