ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 71 за 2021 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

С.В. Поляков, М.А. Трапезникова,
А.Г. Чурбанов, Н.Г. Чурбанова

Расчет несжимаемых течений в системе пористое тело-свободный поток

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Расчет несжимаемых течений в системе пористое тело-свободный поток / С.В. Поляков [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 71. 19 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-71
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-71

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

С.В. Поляков, М.А. Трапезникова,
А.Г. Чурбанов, Н.Г. Чурбанова

Расчет несжимаемых течений в системе «пористое тело–свободный поток»

Москва — 2021

Поляков С.В., Трапезникова М.А., Чурбанов А.Г., Чурбанова Н.Г.

Расчет несжимаемых течений в системе пористое тело-свободный поток

В данной работе рассмотрена модель для сопряженного расчета систем «пористое тело−свободный поток». Она основана на обобщенных уравнениях Навье-Стокса, получаемых осреднением по характерному объему пористой среды и записанных для всей расчетной области, состоящей из двух отличающихся по составу среды подобластей. Для численной реализации данной модели разработан алгоритм расчета, основанный на методе конечных элементов для сопряженной формулировки уравнений импульса и неразрывности с применением метода Ньютона. Верификация разработанной расчетной методики проведена на двух верификационных тестах с использованием известных численных результатов других авторов.

Ключевые слова: модель Бринкмана, уравнения Навье-Стокса, свободное ПО, МКЭ, FEniCS, метод Ньютона

Polyakov S.V., Trpeznikova M.A., Churbanov A.G., Churbanova N.G.

Prediction of incompressible flows in a porous medium-free stream system

This paper deals with a model for coupled calculations of «porous medium−free flow» systems. It is based on the generalized Navier-Stokes equations obtained by averaging over a representative elementary volume of a porous medium and written for the entire computational domain consisting of two subdomains with different media. To implement numerically this model, a computational algorithm based on the finite element method for the coupled formulation of the equations for the momentum and continuity was developed by applying Newton's method. The verification of the developed calculation method was carried out on two verification cases using the known numerical results of other authors.

Key words: Brinkman’s model, Navier-Stokes equations, open software, FEM, FEniCS, Newton’s method

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Национального научного фонда Болгарии, проект № 20-51-18004-Болг_а.

The reported study was funded by RFBR and National Science Foundation of Bulgaria (NSFB), project number 20-51-18004-Bolg_a.

Введение

Течения жидкостей и газов в областях, включающих в себя насыщенное пористое тело и однородную жидкость, встречаются во многих индустриальных приложениях и природных явлениях. Это такие важные направления индустрии, как энергетика, различные теплообменники, устройства для накопления тепловой энергии, топливные элементы, сушка пористых материалов, а также жизненно важные системы человеческого организма, такие как респираторная система, система циркуляции крови с наличием био-мембран и т.д. [1]. Разумеется, важные прикладные задачи, связанные с такими потоками, возникают в различных исследованиях геологических систем, относящихся к добыче полезных ископаемых, их очистке и переработке [2, 3].

Сложности в создании адекватных математических моделей для таких течений связаны с их особенностями. А именно, здесь имеет место ярко выраженная многомасштабность и мультифизичность рассматриваемых процессов [4]. Течение однородной жидкости описывается уравнениями микроскопического масштаба (уравнениями Навье-Стокса), тогда как для описания течений в пористой среде используются уравнения макроскопического масштаба (законы Дарси [5], Бринкмана [6, 7] или Форхгеймера [8]), получаемые с помощью осреднения по репрезентативному элементарному объему [9]. Более того, течение жидкости в твердом каркасе зачастую осложнено дополнительными физическими явлениями, требующими совместного рассмотрения с основным процессом конвективного переноса.

Теоретические и прикладные результаты, полученные в многочисленных работах различных авторов по данной тематике, суммированы, например, в книгах [10−12]. В них же подробно обсуждаются и имеющиеся нерешенные вопросы. А именно, традиционные модели для описания течения в насыщенной пористой среде существенно отличаются друг от друга по порядку уравнений, наличию или отсутствию нелинейностей, а границы их применимости определены недостаточно четко. Далее, во всех этих моделях присутствуют эмпирические параметры, требующие экспериментальной подгонки для конкретного рассматриваемого случая. Это означает отсутствие универсальной модели с переменными входными параметрами, осуществляющими автоматический переход к рассматриваемому режиму течения. И наконец, существенные проблемы в создании математических моделей для описания течений с интерфейсом «пористое тело−однородная жидкость» связаны с необходимостью создания адекватных и универсальных граничных условий на интерфейсе, правильно отражающих протекающие здесь локальные физические процессы.

Немало сложностей возникает и при численной реализации рассматриваемых моделей. Существует два основных классических подхода для решения системы уравнений, описывающих систему «пористое

тело−свободный поток», каждый из которых обладает своими достоинствами и недостатками [13, 14]. В первом подходе расчет ведется во всей области, включающей в себя и пористое тело и свободный поток, где сопряженная система уравнений решается «сквозным счетом». Второй подход основан на раздельном расчете в двух областях соответствующих уравнений сохранения, т.е. относится к классу методов декомпозиции области с различными вариантами реализации граничных условий на интерфейсе. Наличие большого количества нюансов не позволяет заранее однозначно выделить один из этих подходов как наиболее оптимальный по всем характеристикам расчета (затрат памяти, времени счета, точности, устойчивости и т.д.).

В данной работе рассмотрена модель для расчета систем «пористое тело−свободный поток», основанная на обобщенных уравнениях Навье-Стокса. Они получены осреднением по характерному объему пористой среды и записаны для всей расчетной области, включающей и насыщенное пористое тело и однородную жидкость. Для численной реализации данной модели разработан алгоритм расчета, основанный на методе конечных элементов для сопряженной формулировки уравнений импульса и неразрывности с применением метода Ньютона. Верификация разработанной расчетной методики проведена на основе известных численных результатов других авторов.

1. Математическая модель

Рассматривается течение в системе, состоящей из свободного потока однородной жидкости и насыщенного пористого тела с интерфейсом между двумя средами. Изотермический поток несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости считается ламинарным и стационарным. Цель работы − исследовать оптимальную, на наш взгляд, математическую модель для рассматриваемого класса течений, разработать эффективный алгоритм ее расчета и оценить ее достоинства и недостатки в сравнении с расчетами других авторов.

1.1. Уравнения для свободного потока жидкости

Ламинарное течение однородной жидкости описывается стационарными уравнениями Навье-Стокса для несжимаемой жидкости (уравнениями переноса импульса и неразрывности соответственно):

$$\rho\nabla\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla\cdot(2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})), \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = 0.5(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$ есть тензор скоростей деформации. Здесь переменные ρ, $\mathbf{u}$ и p обозначают плотность, вектор скорости и давление соответственно, а μ есть динамическая вязкость.

1.2. Уравнения для течения в насыщенной пористой среде

Стационарное течение в насыщенной пористой среде описывается макроскопическими моделями, получаемыми из микроскопической путем осреднения по представительному элементарному объему. Как уже было сказано выше, основными моделями макроскопического масштаба являются законы Дарси, Бринкмана и Форхгеймера. Здесь используется модель Бринкмана, которая является альтернативой закона Дарси (см. подробное обсуждение данного вопроса в [11]).

В классическом варианте [6] эта модель формулируется в виде следующих уравнений сохранения импульса и неразрывности:

$$1/\phi\rho\nabla\cdot(1/\phi\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = -1/\phi\nabla(\phi p) + \nabla\cdot(2\mu_{eff}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) - \mu/k\,\mathbf{u}, \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{4}$$

где $\mu_{eff} = \mu[1+2.5(1-\phi)]$, а ϕ – это пористость. Здесь $\mathbf{u}$ есть скорость фильтрации (именуемая иногда как скоростью Дарси, другие синонимы смотри в [11]), а k – проницаемость в законе Дарси.

Скорость фильтрации $\mathbf{u}$ связана со скоростью жидкости $\mathbf{u}^{\mathrm{f}}$, входящей в уравнения Навье-Стокса (1),(2) (без верхнего индекса f), через соотношение Дюпюи-Форхгеймера:

$$\mathbf{u} = \phi\,\mathbf{u}^{\mathrm{f}}. \tag{5}$$

1.3. Раздельный метод расчета (метод декомпозиции области)

Раздельный метод расчета, именуемый иногда двухобластным, относится к классу методов декомпозиции области с присущими ему особенностями.

Во-первых, в стационарном случае необходимо строить итерационный процесс для получения решения с заданной точностью. Во-вторых, уравнения в разных областях могут быть разного порядка, что создает дополнительные трудности в реализации расчетов. А главное, в таком подходе возникает необходимость ставить граничные условия на интерфейсе «пористое тело–свободный поток», соответствующие особенностям рассматриваемых физических процессов.

Связь физических параметров при переходе через интерфейс получают из интегральных законов сохранения и выражают в виде условий на скачке при переходе через интерфейс, налагаемых на рассчитываемые величины. Очевидными такими условиями являются условия непрерывности потока массы и непрерывности давления. При этом они существенно зависят от структуры потока (свободный поток натекает по нормали на пористое тело или движется почти параллельно к нему). В параллельном случае зачастую на

интерфейсе ставят условия проскальзывания для касательной компоненты скорости, требующие экспериментальной подгонки входящих в эти условия параметров. Подробный обзор различных граничных условий на интерфейсе «пористое тело–жидкость» содержится, например, в работах [11, 15, 16]. При этом нет каких-то установившихся и тем более универсальных моделей для граничных условий такого типа, а идет постоянное их развитие [17]. Более того, в ряде работ показана неприменимость распространенных современных моделей граничных условий ко многим типам практических задач [18, 19].

1.4. Сопряженная формулировка уравнений

В данной работе используются обобщенные (макроскопические) уравнения Навье-Стокса, получаемые осреднением по характерному объему пористой среды, которые справедливы во всей расчетной области, состоящей из двух подобластей (пористое тело и однородная жидкость). В пористом теле данная модель сводится к модифицированному уравнению Бринкмана [7], дополненному конвективным членом и имеющим особое определение эффективной вязкости $\mu_{eff} = \mu/\varphi$. В области однородной жидкости используются уравнения Навье-Стокса, записанные в переменных давление–скорость фильтрации, что и позволяет сформулировать общую систему уравнений, записанную в единых переменных. В обзорных работах [10−12] наиболее ранними работами, обосновывающими и применяющими такую модель, считаются [20, 21]. Более современное использование этой модели содержится, например, в [22−24]. Она формулируется в виде следующих уравнений сохранения импульса и неразрывности:

$$1/\phi\rho\nabla\cdot(1/\phi\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = -1/\phi\nabla(\phi p) + \nabla\cdot(2\mu/\phi\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) - \mu/k\mathbf{u}, \tag{6}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{7}$$

где $\mu_{eff} = \mu/\phi$ из [7] уже подставлено в уравнение импульса (6). Напомним, что здесь $\mathbf{u}$ есть скорость фильтрации, которая в свободном потоке становится равной скорости жидкости, поскольку в нем $\phi = 1$.

Следует отметить, что все члены рассматриваемой системы уравнений (6),(7) записываются в консервативной форме без каких-либо дополнительных преобразований и/или упрощений. В работах [10−12, 20], в отличие от [21−24], уравнение импульса записывается в виде:

$$1/\phi\rho\nabla\cdot(1/\phi\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla\cdot(2\mu/\phi\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) - \mu/k\mathbf{u}, \tag{8}$$

что в случае переменной пористости является сомнительным упрощением.

Напомним, что в приведенных уравнениях член сопротивления Дарси присутствует только в пористом теле, а пористость ϕ меняется скачкообразно на интерфейсе. А именно, она постоянна и равна $\phi = 1$ в области свободного потока, тогда как в пористом теле она может изменяться в диапазоне значений

$0 < \phi < 1$. Зачастую такую «неприятную» с точки зрения вычислений ситуацию исправляют через «сглаживание» скачка пористости в окрестности интерфейса [26]. В нашем алгоритме решаются уравнения (6), (7) без каких-либо сглаживаний и/или модификаций вблизи интерфейса «пористое тело–свободный поток жидкости».

2. Численный метод

Разработанный алгоритм сопряженного расчета течений в системе «пористое тело–свободный поток» был реализован на основе открытой вычислительной платформы FEniCS [26−28].

Интегрированная вычислительная платформа FEniCS (Finite Element Computational Software) представляет собой универсальную и гибкую платформу для автоматизированного решения дифференциальных уравнений различного типа с использованием метода конечных элементов (МКЭ), имеющую встроенные функциональные возможности для генерации сеток для простых геометрий и визуализации графиков и изолиний. Она обладает определенными достоинствами, которые, собственно, и определили ее выбор среди многих других аналогов. Они заключаются в следующем. Платформа FEniCS имеет двуязычный интерфейс – это библиотека программ на C++ и Domain Specific Language-язык на Python, она реализована на платформах Linux/Windows, поддерживает комбинацию MPI и OpenMP, основана на МКЭ и имеет готовый широкий набор конечных элементов, а также позволяет использовать свободные библиотеки решателей алгебраических уравнений Hypre, PETSc, Trilinos и др.

Для решения уравнений (6), (7), записанных в слабой формулировке, использовался непрерывный метод Галеркина с элементами Тэйлора-Худа (P_2−P_1) [29]. Для проточных течений использовались стандартные граничные условия. А именно, это заданный профиль скорости на входе, условия прилипания или проскальзывания на стенках и модифицированные “do-nothing” условия [30] на выходе из канала, учитывающие наличие в уравнениях пористости.

При решении задач механики сплошной среды широко используется метод Ньютона. Он реализован во многих открытых пакетах и успешно применялся для решения уравнений Навье-Стокса, например, в работах [31] (на основе FEniCS), [32] (на основе MOOSE), [33] (на основе Nektar++) и т.д. Кроме того, он доступен во многих открытых библиотеках для решения алгебраических уравнений.

В наших расчетах для решения системы нелинейных уравнений, описанных выше, использовалась собственная внутренняя реализация метода Ньютона “newton_solver”, входящая в состав открытой платформы FEniCS [27]. Для решения линейных алгебраических уравнений в ней на каждой итерации использовалась открытая библиотека MUMPS [34, 35], предлагающая один из

лучших прямых решателей, работающий на параллельных вычислительных системах. При достаточно больших затратах памяти метод Ньютона обеспечивает очень быстрый расчет сложных систем нелинейных уравнений с очень высокой точностью. Во всех приведенных здесь расчетах критерий сходимости итераций составлял 10^{-10} для абсолютной невязки и 10^{-9} для относительной невязки, при этом число итераций во всех расчетах не превышало 13.

Разработанная расчетная методика допускает простое расширение для моделирования высокоскоростных течений рассмотренного типа, описываемых законом Форхгеймера [8], поскольку изначально ориентирована на решение нелинейных уравнений.

3. Верификационные расчеты

Для создания всех применявшихся здесь расчетных сеток использовался открытый сеточный генератор Gmsh [36, 37]. Пост-обработка полученных результатов и их визуализация были выполнены с помощью открытой системы пост-обработки ParaView [38], являющейся одной из наиболее популярных систем визуализации [39].

Для верификации разработанного алгоритма были использованы численные результаты двух известных тестов, впервые (насколько нам известно) рассчитанных в [40, 41]. В обеих этих работах использовался одно-областной подход и рассмотрен общий набор характерных значений управляющих параметров. Эти тесты являются стандартными для верификации алгоритмов расчета рассматриваемого класса течений [42−48].

3.1. Течение в плоском канале с пористой пробкой

Рассматривается плоский канал высотой H и длиной $L = 8H$, в середине которого расположена пробка из пористого материала длиной $L_{\text{plug}} = 2H$ с однородной пористостью $\phi = 0.7$. На входе в канал (левая граница расчетной области) задан параболический профиль скорости $\mathbf{u} = (6/H\, U_{\text{mean}}\, y\, (1 - y/H),\, 0)^T$, соответствующий полностью развитому течению в плоском канале. На выходе из канала (правая граница) заданы модифицированные “do-nothing” условия [30] с учетом пористости. На стенках канала вне пробки заданы условия прилипания и непротекания. На стенках внутри пробки, как и в работе [40], используются условия только непротекания (т.е. проскальзывания). Геометрия задачи показана на рис. 1 через карту значений пористости ϕ, меняющейся скачком от значения 1 в жидкости до значения 0.7 в пористой пробке.

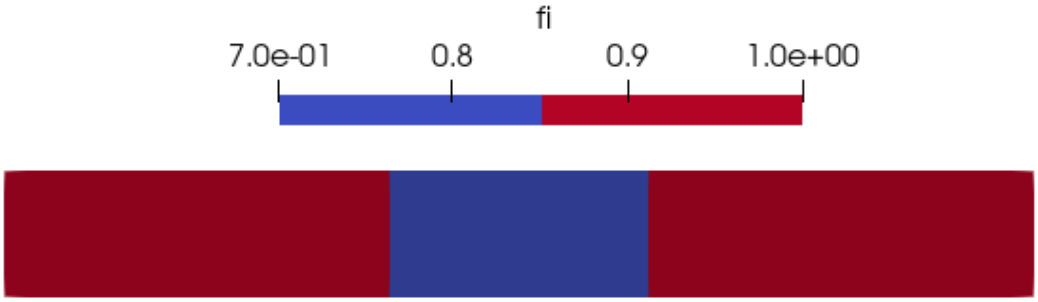

Рис. 1. Карта значений пористости ϕ

В этой задаче числа Рейнольдса и Дарси определяются как $Re = \rho\, U_{\text{mean}}\, H/\mu$ и $Da = k/H^2$ соответственно. Был рассчитан единственный вариант с $Re = 1$ и $Da = 10^{-2}$.

Эта задача имеет простой и понятный физический смысл. На участке перед пористой пробкой имеем развитый параболический профиль скорости для плоского канала. В пористой среде, где на стенках заданы условия проскальзывания и присутствует изотропный член сопротивления закона Дарси, в среднем сечении поток становится практически равномерным. В свободном потоке после пробки достаточно быстро вновь формируется параболический профиль скорости, поскольку участок стабилизации потока для $Re = 1$ очень мал.

Во всех расчетах этой и второй задачи сетки строились таким образом, чтобы интерфейс, разделяющий пористое тело и свободный поток, представлял собой прямую линию, проходящую через узлы сетки. Предварительные расчеты на различных сетках показали, что результаты расчета на сетке из 118 660 ячеек можно считать сеточно-независимыми для данной задачи. В этой сетке шаги в окрестности двух интерфейсов имели значение $h_1 \approx H/100$, а в остальной области $h_2 \approx H/50$.

На рис. 2 показано полученное распределение функции тока в канале. Как и предполагалось, в пористой пробке поток становится практически однородным. В силу малого значения Re, за пробкой профиль скорости быстро превращается в профиль, идентичный потоку перед пробкой.

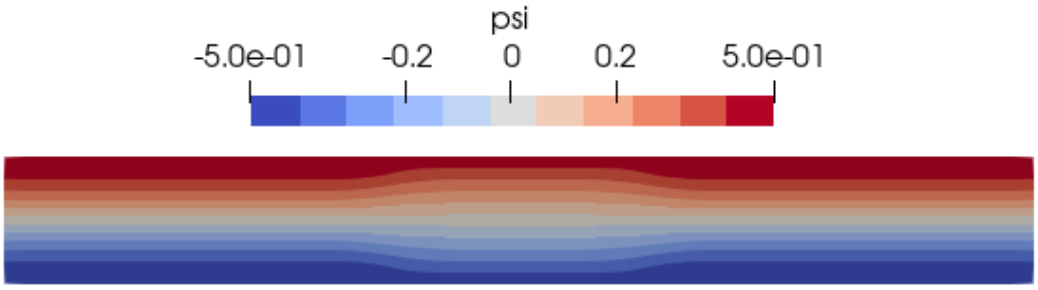

Рис. 2. Изолинии функции тока

Рис. 3 демонстрирует полученное распределение модуля скорости в канале, имеющее те же закономерности, что видны на рис. 2.

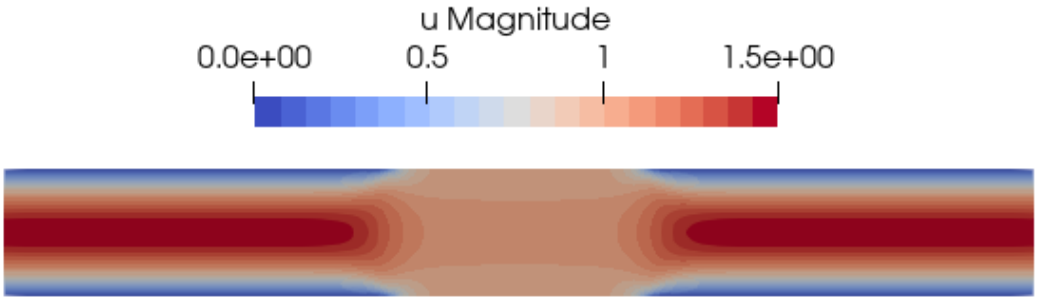

Рис. 3. Распределение модуля скорости в канале

На рис. 4 приведен профиль продольной скорости в среднем горизонтальном сечении канала, количественно отражающий эволюцию потока вдоль канала.

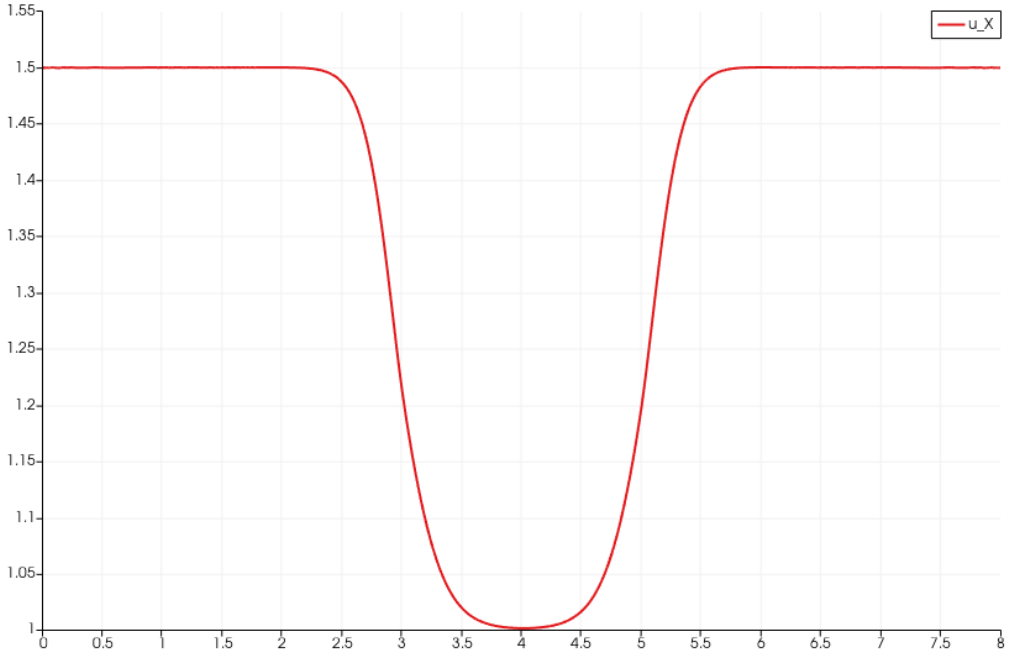

Рис. 4. Профиль продольной скорости вдоль среднего горизонтального сечения канала

Рис. 5 показывает распределение давления в среднем горизонтальном сечении канала. Как и в профиле скорости, решение не имеет осцилляций при переходе через интерфейсы.

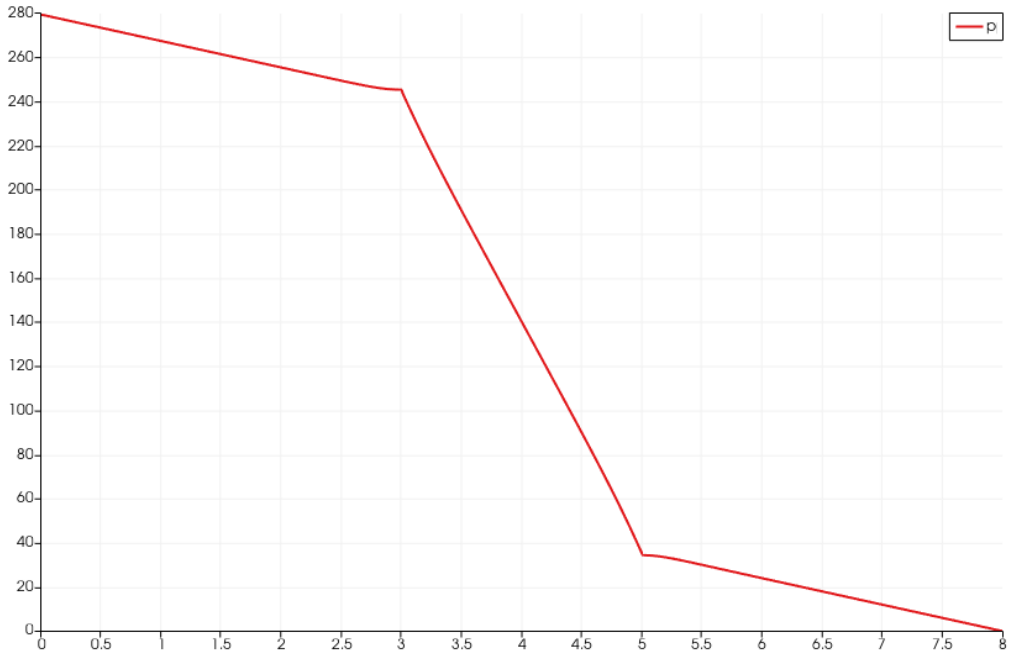

Рис. 5. Профиль давления в среднем горизонтальном сечении

3.2. Течение над пористым слоем в плоском канале

В данном тесте рассматривается плоский канал высотой $2H$ и длиной $L = 8H$. Канал разделен по горизонтали на две части: верхняя половина – свободный поток жидкости и нижняя половина – пористая среда с однородной пористостью $\phi = 0.7$. На входе в канал (левая граница расчетной области) задан равномерный профиль скорости $\mathbf{u} = (0.5,\ 0)^T$, как и в работе [42], который достаточно быстро преобразуется в установившийся вдоль потока профиль скорости. На выходе из канала (правая граница) заданы модифицированные “do-nothing” условия [30], учитывающие наличие в уравнениях пористости. На стенках канала везде заданы условия прилипания и непротекания. Геометрия задачи показана на рис. 6 через карту значений пористости ϕ.

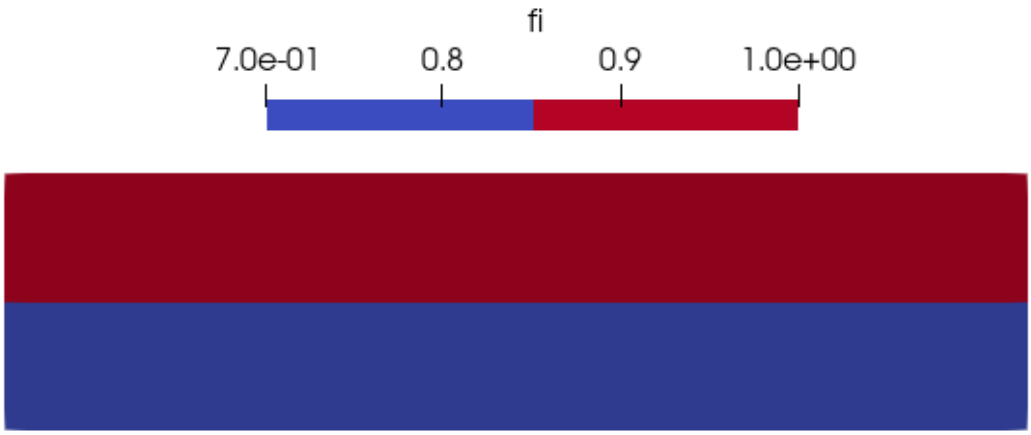

Рис. 6. Карта значений пористости ϕ

Данная задача имеет очевидный физический смысл, позволяющий легко качественно оценить правильность получаемых численных результатов. За участком стабилизации потока, который при малых значениях *Re* очень короткий, формируется установившийся вдоль потока профиль скорости. Для достаточно проницаемой пористой среды с $Da = 10^{-2}$ заметная часть потока движется через пористую среду, поэтому максимальная скорость свободного потока заметно отличается от течения Пуазейля в плоском канале с $U_{max} = 1.5$. При значительном уменьшении проницаемости до $Da = 10^{-4}$ пористое тело превращается практически в твердую стенку и профиль скорости стремится к классическому параболическому профилю.

Предварительные расчеты на различных сетках показали, что результаты расчета на сетке из 371 298 ячеек можно считать сеточно-независимыми. В этой сетке шаг во всей области составлял $h \approx H/100$.

Были рассчитаны два варианта с одинаковым $Re = 1$ и разными $Da = 10^{-2}$, 10^{-4}. Здесь число Рейнольдса определялось по высоте канала $2H$ и значению однородной скорости на входе $u_x = 0.5$.

На рис. 7 приведено распределение горизонтальной скорости в канале для случая $Da = 10^{-2}$. Заметно, что практически начиная с середины канала профиль скорости стабилизировался и не изменяется до выхода из канала.

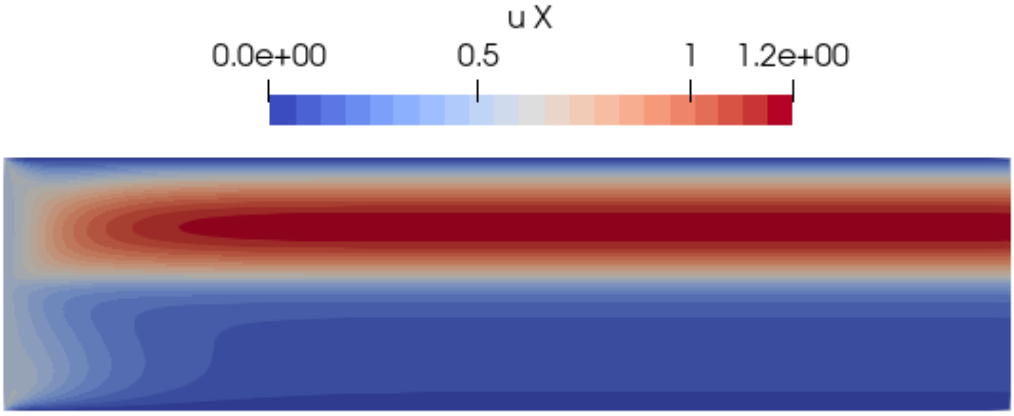

Рис. 7. Распределение горизонтальной скорости в канале

Для достаточно проницаемой пористой среды с $Da = 10^{-2}$ заметная часть потока движется через пористую среду, поэтому максимальная скорость свободного потока заметно отличается от течения Пуазейля в плоском канале с $U_{max} = 1.5$. Это видно на рис. 8, где показан стабилизированный профиль горизонтальной скорости на выходе из канала с $U_{max} \approx 1.25$.

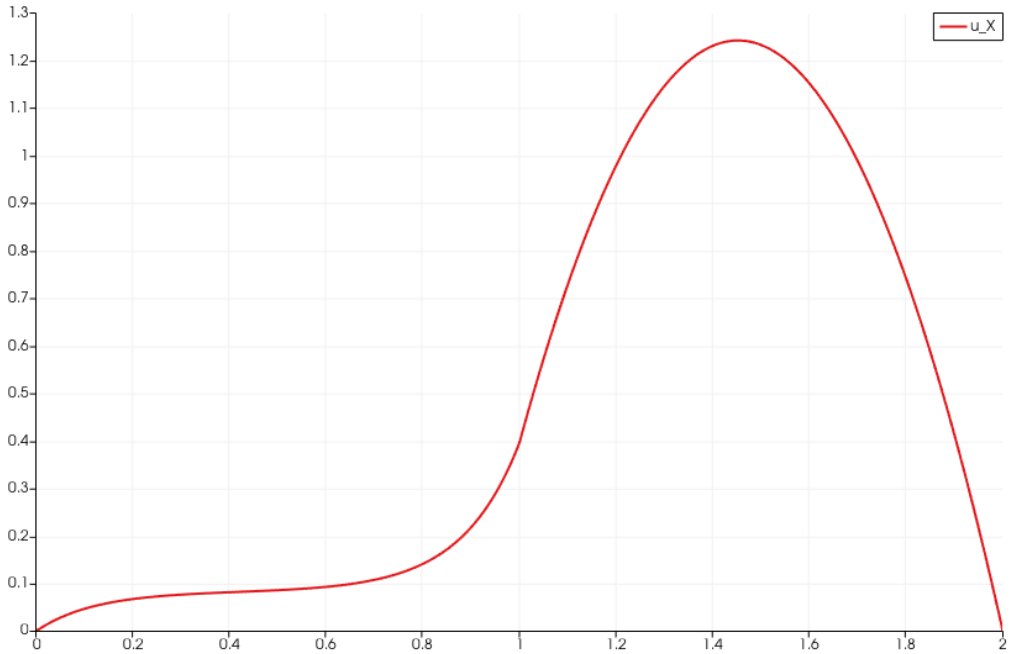

Рис. 8. Профиль горизонтальной скорости на выходе из канала, $Da = 10^{-2}$

На рис. 9 показан профиль давления в вертикальном сечении $x = 4$. Как и в случае скорости, никаких осцилляций при переходе через интерфейс здесь не наблюдается.

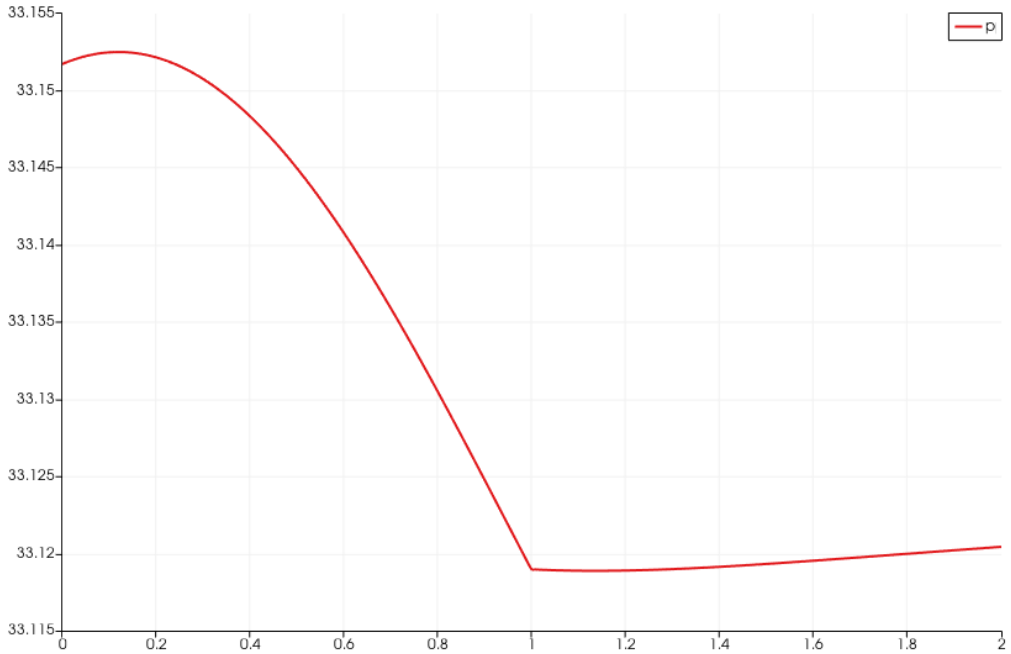

Рис. 9. Профиль давления в вертикальном сечении $x = 4$, $Da = 10^{-2}$

В случае менее проницаемой среды $Da = 10^{-4}$ пористое тело становится практически твердой стенкой, и поэтому поток в пористом теле незначителен, а

профиль скорости в свободном потоке быстро стабилизируется и становится параболическим с U_{max} = 1.5 (см. рис. 10).

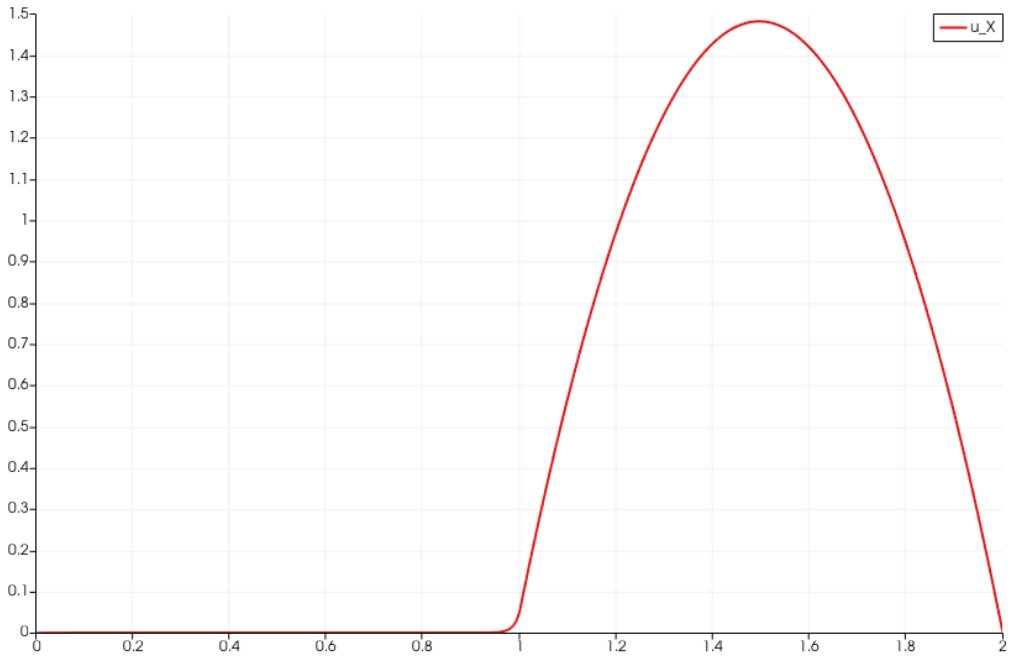

Рис. 10. Профиль горизонтальной скорости на выходе из канала, $Da = 10^{-4}$

Следующий рис. 11 показывает установившийся профиль ε_{xy}-компоненты тензора скоростей деформации в выходном сечении канала.

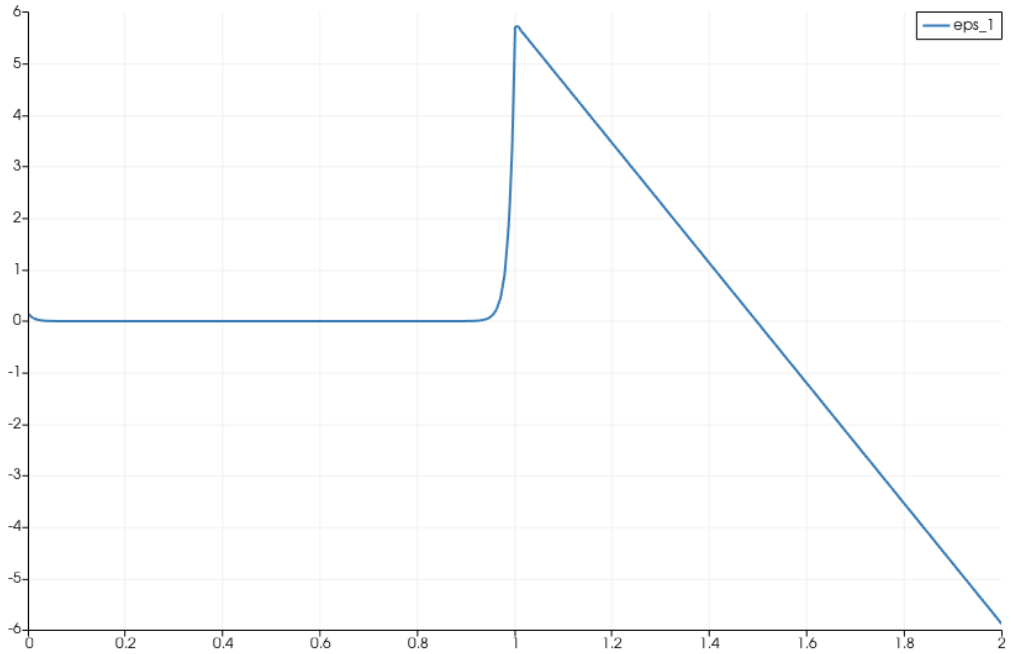

Рис. 11. Профиль ε_{xy} на выходе из канала, $Da = 10^{-4}$

Как и в предыдущем тесте, все рассчитанные переменные не имеют осцилляций при переходе через интерфейс.

Полученные численные результаты для обеих задач хорошо согласуются с расчетами [40, 41]. Следует подчеркнуть, что в данной работе использовались более подробные сетки, аппроксимации более высокого порядка, отличающиеся граничные условия и, самое главное, другое уравнение импульса (модель Бринкмана в данной работе в отличие от модели Дарси в [40, 41]), поэтому полное совпадение сравниваемых результатов вряд ли возможно.

Заключение

В данной работе исследуются течения в системах «пористое тело–однородная жидкость», для моделирования которых разработан эффективный численный алгоритм и получены следующие результаты:

- рассмотрена математическая модель для описания несжимаемых течений в системе «пористое тело–однородная жидкость», основанная на обобщенных уравнениях Навье-Стокса, полученных осреднением по характерному объему пористой среды и записанных для всей расчетной области, состоящей из двух подобластей с разными средами. В пористом теле данная модель сводится к модифицированному уравнению Бринкмана, тогда как в области однородной жидкости используются уравнения Навье-Стокса, записанные в переменных давление–скорость фильтрации. Следует отметить, что все члены рассматриваемой системы уравнений записываются в консервативной форме без каких-либо дополнительных преобразований и/или упрощений;
- для численной реализации данной модели разработан алгоритм расчета, основанный на методе конечных элементов для сопряженной формулировки нелинейных уравнений импульса и неразрывности с использованием метода Ньютона. Он реализован на основе открытой вычислительной платформы FEniCS с использованием открытой библиотеки MUMPS в качестве прямого солвера для решения алгебраических уравнений. Используется непрерывный метод Галеркина с элементами Тэйлора-Худа (P_2–P_1). При этом для всех переменных используются однородные аппроксимации во всей расчетной области без каких-либо их модификаций вблизи интерфейса «пористое тело–однородная жидкость». «Сглаживание» интерфейса через «размазывание» скачка пористости в его окрестности также не используется;
- верификация разработанной расчетной методики проведена на основе известных численных результатов других авторов и показала ее эффективность по скорости расчета, а также хорошую точность получаемых результатов. Численные результаты демонстрируют отсутствие осцилляций всех рассчитываемых переменных при переходе через интерфейс «пористое тело–свободный поток».

Список литературы

1. A. Bejan, I. Dincer, S. Lorente, A.F. Miguel, and A.H. Reis. *Porous and Complex Flow Structures in Modern Technologies.* Springer Science+Business Media, New York, NY, 2004.
2. *Handbook of Porous Media* (K. Vafai (ed.)), 3rd ed. CRC Press, Boca Raton, FL, 2015.
3. M.K. Das, P.P. Mukherjee, and K. Muralidhar. *Modeling Transport Phenomena in Porous Media with Applications*. Springer Nature Publishing AG, Cham, Switzerland, 2018.
4. R. Helmig, B. Flemisch, M. Wolff, and B. Faigle. Efficient Modeling of Flow and Transport in Porous Media Using Multi-physics and Multi-scale Approaches. In: *Handbook of Geomathematics* (W. Freeden, M.Z. Nashed, T. Sonar (eds.)), 2nd ed., pp.703−749. Springer-Verlag, Berlin, 2015.
5. H.P.G. Darcy. *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*. Victor Dalmont Editeur, Paris, France, 1856.
6. H.C. Brinkman. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Appl. Sci. Res.* A, **1** (1947) 27−34.
7. J.A. Ochoa-Tapia and S. Whitaker. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid−I. Theoretical development. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **38**(14) (1995) 2635−2646.
8. P. Forchheimer. *Wasserbewegung Durch Boden*. Zeitschrift Des Vereines Deutscher Ingenieure, Berlin, Deutschland, 1901.
9. S. Whitaker. *The Method of Volume Averaging.* Springer Science+Business Media, Dordrecht, Netherlands, 1999.
10. M. Kaviany. *Principles of Heat Transfer in Porous Media,* 2nd ed. Springer Science & Business Media, New York, NY, 2012.
11. D.A. Nield and A. Bejan. *Convection in Porous Media,* 5th ed. Springer International Publishing AG, Cham, Switzerland, 2017.
12. M. Nazari, Y. Mahmoudi, and K. Hooman. Introduction to Fluid Flow and Heat Transfer in Porous Media. In: *Convective Heat Transfer in Porous Media* (Y. Mahmoudi, K. Hooman, K. Vafai (eds.)), pp.3−18, CRC Press, Boca Raton, FL, 2020.
13. B. Goyeau, D. Lhuillier, D. Gobin, and M.G. Velarde. Momentum transport at fluid-porous interface. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **46** (2003) 4071−4081.
14. D. Gobin and B. Goyeau. Natural convection in partially porous media: a brief overview. *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*, **18** (3/4) (2008) 465−490.
15. M. Ehrhardt, J. Fuhrmann, E. Holzbecher, and A. Linke. Mathematical Modeling of Channel-Porous Layer Interfaces in PEM Fuel Cells. WIAS Preprint No. 1375, Berlin, Germany, 2008.
16. M. Discacciati. Coupling Free and Porous-Media Flows: Models and Numerical Approximation. In: *Simulation of Flow in Porous Media*:

Applications in Energy and Environment (P. Bastian, J. Kraus, R. Scheichl, M. Wheeler (eds.)), pp.107−138. de Gruyter, Berlin, Germany, 2013.

17. P. Angot, B. Goyeau, and J.A. Ochoa-Tapia. Asymptotic modeling of transport phenomena at the interface between a fluid and a porous layer: Jump conditions. *Physical Review* E, **95** (2017) 063302.
18. E. Eggenweiler and I. Rybak. Unsuitability of the Beavers-Joseph interface condition for filtration problems. *J. Fluid Mech*., **892** (2020) A10.
19. I. Rybak, C. Schwarzmeier, E. Eggenweiler, and U. Rude. Validation and calibration of coupled porous-medium and free-flow problems using pore-scale resolved models. *Comput. Geosciences*, **25** (2021) 621−635.
20. R.A. Wooding. Steady state free thermal convection of liquid in a saturated permeable medium. *J. Fluid Mech*., **2**(3) (1957) 273−285.
21. C.T. Hsu and P. Cheng. Thermal dispersion in a porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **33**(8) (1990) 1587−1597.
22. P. Nithiarasu, K.N. Seetharamu, and T. Sundararajan. Finite element modelling of flow, heat and mass transfer in fluid saturated porous media. *Arch. Comput. Methods Eng*., **9**(1) (2002) 3−42.
23. M.J.S. de Lemos. *Turbulence in Porous Media: Modeling and Applications*. Elsevier, London, 2012.
24. H.T. Low, H.X. Bai, P. Yu, Y. Zeng, and S.H. Winoto. Fluid dynamics and mass transfer in a perfusion bioreactor with a porous wall. *Int. J. Materials, Mechanics and Manufacturing*, **2**(3) (2014) 230−234.
25. M. Rakotobe, D. Ramalingom, P.-H. Cocquet, and A. Bastide. Modelling of flow through spatially varying porous media with application to topology optimization. arXiv Preprint arXiv:2004.10712, 2020.
26. FEniCS Project [Электронный ресурс]. URL: https://fenicsproject.org/ (дата обращения: 14.10.2021).
27. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method: the FEniCS Book* (A. Logg, K.-A. Mardal, G.N. Wells (eds.)). Springer-Verlag, Berlin, 2012.
28. H.P. Langtangen, A. Logg. *Solving PDEs in Python: The FEniCS Tutorial*, Vol. I. Springer Open, 2016.
29. R. Glowinski. Finite Element Methods for Incompressible Viscous Flow. In: *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. IX, (P.G. Ciarlet, J.L. Lions (eds.)), pp.3−1176. North-Holland, Amsterdam, 2003.
30. V. John. *Finite Element Methods for Incompressible Flow Problems*. Springer International Publishing AG, Cham, Switzerland, 2016.
31. A.G. Churbanov, O. Iliev, V.F. Strizhov, and P.N. Vabishchevich. Numerical simulation of oxidation processes in a cross-flow around tube bundles. *Appl. Math. Modelling*, **59** (2018) 251−271.
32. J. Guo, S. Zhang, C. Yang, J. Wang, S. Huang, and K. Wang. Preliminary verification of incompressible Navier-Stokes equations solved by the Newton

method. *Int. J. Advanced Nuclear Reactor Design Technology*, **2** (2020) 69−85.

33. Z.-G. Yan, Y. Pan, G. Gastiglioni, K. Hillewaert, J. Peiro, D. Moxey, and S.J. Sherwin. Nektar++: Design and implementation of an implicit, spectral/*hp* element, compressible flow solver using a Jacobian-free Newton Krylov approach. arXiv Preprint arXiv:2002.04222, 2020.
34. MUMPS: MUltifrontal Massively Parallel sparse direct Solver [Электронный ресурс]. URL: http://mumps.enseeiht.fr/ (дата обращения: 14.10.2021).
35. P.R. Amestoy, G. Joslin, J.-Y. L'Excellent, F.-X. Roux, and X. Vasseur, MUMPS direct solver: applications at Hutchinson, current research and perspectives. *MATHIAS 2013 meeting*, TOTAL, Paris La Défense, France, Oct. 23−25, 2013.
36. Gmsh [Электронный ресурс]. URL: https://gmsh.info/ (дата обращения: 14.10.2021).
37. C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **79**(11) (2009) 1309−1331.
38. ParaView [Электронный ресурс]. URL: https://www.paraview.org/ (дата обращения: 14.10.2021).
39. *The Visualization Handbook* (C.D Hansen, C.R. Johnson (eds.)). Elsevier Butterworth-Heinemann, Burlington, MA, 2005.
40. D.K. Garthling, C.E. Hickox, and R.C. Givler. Simulation of coupled viscous and porous flow problems. *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, **7**(1/2) (1996) 23−48.
41. V.A.F. Costa, L.A. Oliveira, B.R. Baliga, and A.C.M. Sousa. Simulation of coupled flows in adjacent porous and open domains using a control-volume finite-element method. *Numer. Heat Transfer*, Part A: Appl., **45**(7) (2004) 675−697.
42. L. Betchen, A.G. Straatman, and B.E. Thompson. A nonequilibrium finite-volume model for conjugate fluid/porous/solid domains. *Numer. Heat Transfer*, Part A: Appl., **49**(6) (2006) 543−565.
43. H. Bai, P. Yu, S.H. Winoto, and H.T. Low. Lattice Boltzmann method for flows in porous and homogenous fluid domains coupled at the interface by stress jump. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **60** (2009) 691–708.
44. M. Nordlund, M. Stanic, A.K. Kuczaj, E.M.A. Frederix, and B.J. Geurts. Improved PISO algorithms for modeling density varying flow in conjugate fluid-porous domains. *J. Comput. Physics*, **306** (2016) 199−215.
45. A.S. Kozelkov, S.V. Lashkin, V.R. Efremov, K.N. Volkov, and Yu.A. Tsibereva. An implicit algorithm for solving Navier-Stokes equations to simulate flows in anisotropic porous media. *Computers&Fluids*, **160** (2018) 164−174.

46. H.J Aguerre, C.I. Pairetti, C.M. Venier, S.M. Damian, and N.M. Nigro. An oscillation-free flow solver based on flux reconstruction. *J. Comput. Physics*, **365** (2018) 135−148.
47. Z. Li, H. Zhang, Y. Liu, and J.M. McDonough. Implementation of compressible porous–fluid coupling method in an aerodynamics and aeroacoustics code part I: Laminar flow. *Appl. Math. Comput.*, **364** (2020) 124682.
48. P.V. Bulat and K.N. Volkov. Simulation of incompressible flows in channels containing fluid and porous regions. *Int. J. Industrial Systems Eng.*, **34**(3) (2020) 283−300.

Оглавление

Введение 3
1. Математическая модель 4
1.1. Уравнения для свободного потока жидкости 4
1.2. Уравнения для течения в насыщенной пористой среде 5
1.3. Раздельный метод расчета (метод декомпозиции области) 5
1.4. Сопряженная формулировка уравнений 6
2. Численный метод 7
3. Верификационные расчеты 8
3.1. Течение в плоском канале с пористой пробкой 8
3.2. Течение над пористым слоем в плоском канале 11
Заключение 15
Список литературы 16