



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[А.В. Подлазов](#)

Дополнительное исследование
самоорганизованно-критической
модели Манны в случае
верхней критической
размерности

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Подлазов А.В. Дополнительное исследование самоорганизованно-критической модели Манны в случае верхней критической размерности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 76. 12 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2021-76>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-76>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.В. Подлазов

**Дополнительное исследование
самоорганизованно-критической
модели Манна в случае верхней
критической размерности**

Москва — 2021

А.В. Подлазов

**Дополнительное исследование самоорганизованно-критической модели
Манна в случае верхней критической размерности**

В работе исследуется природа верхней критической размерности для изотропных консервативных моделей кучи песка и рассчитываются возникающие в ней логарифмические поправки к степенным распределениям. Результаты проверяются экспериментально на примере модели Манна, для которой известно теоретическое решение во всех постановках, начиная с двумерной. Кроме того, на основе этого решения конструируется нетривиальный суперуниверсальный показатель для этой модели. Он характеризует распределение лавин по времени прохождения границей их области собственной ширины.

Ключевые слова: самоорганизованная критичность, кучи песка, модель Манна, масштабная инвариантность, степенные распределения, логарифмические поправки, верхняя критическая размерность, суперуниверсальные показатели

A.V. Podlazov

**Extra investigation of the self-organized critical Manna model
at higher critical dimension**

I investigate the nature of the upper critical dimension for isotropic conservative sandpile models and calculate the emerging logarithmic corrections to power-law distributions. I check the results experimentally using the case of Manna model with the theoretical solution known for all statement starting from the two-dimensional one. In addition, based on this solution, I construct a non-trivial super-universal indicator for this model. It characterizes the distribution of avalanches by time the border of their region needs to pass its width.

Key words: self-organized criticality, sandpiles, Manna model, scale invariance, power laws, logarithmic corrections, upper critical dimension, super-universal indices

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-01-00602).

Содержание

| | |
|---|----|
| Введение | 3 |
| Правила модели и обзор предшествующих результатов | 3 |
| Природа верхней критической размерности | 5 |
| Представление о логарифмических поправках | 6 |
| Расчет показателей логарифмических поправок | 7 |
| Результаты компьютерного эксперимента | 9 |
| Приложение | 10 |

ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей работе [1] автором было предложено теоретическое решение для самоорганизованно-критической модели Манна [2] для произвольной размерности пространства $d > 1$, т.е. критические и скейлинговые показатели для основных характеристик лавин были определены аналитически. Однако компьютерный эксперимент, результаты которого подтвердили бы правильность выполненных расчетов, был выполнен только для размерностей $d = 2; 3$.

Размерности $d \geq 4$ не исследовались экспериментально, поскольку для изотропных консервативных моделей типа кучи песка известно, что $d = 4$ является *верхней критической размерностью* [3,4,5]. При ее достижении геометрия решетки становится несущественной, поскольку реализованная на ней модель практически перестает отличаться от модели со случайным соседством. Вместе с тем, известно, что верхняя критическая размерность отличается наличием мультипликативных логарифмических поправок к степенным зависимостям, описывающих поведение критических систем при прочих размерностях. Исследованию этих поправок и посвящена настоящая работа.

ПРАВИЛА МОДЕЛИ И ОБЗОР ПРЕДШЕСТВУЮЩИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Модель Манна формулируется как клеточный автомат на d -мерной кубической решетке линейного размера L . Числа в ее ячейках интерпретируются как количество содержащихся в них песчинок. Ячейки, содержащие не менее $2d$ песчинок, считаются неустойчивыми и *опрокидываются*, передавая соседним ячейкам указанное число песчинок так, что каждая из них случайным образом выбирает, в какую ячейку перейти. При опрокидывании ячеек, находящихся на краю решетки, часть песчинок может выпасть за него, покидая кучу. Потеря кучей песчинок компенсируется их вбросом, осуществляемым в состоянии, когда все ячейки устойчивы. Для рассматриваемых здесь решеток четного размера L песчинки добавляются по одной в ячейку, случайным образом выбранную среди 2^d центральных, чем обеспечивается максимальная удаленность точки вброса от краев. Если в его результате происходит нарушение устойчивости ячейки, она опрокидывается, передавая песчинки соседкам и тем самым, возможно, нарушая их устойчивость. Развивается *лавина опрокидываний*, по завершении которой вбрасывается новая песчинка и всё повторяется.

Независимо от начального состояния кучи после некоторого количества лавин она переходит в состояние, описываемое степенным распределением лавин по их характеристикам с плотностью вероятности вида

$$u(X) = X^{-(1+\alpha)} g(X/X_1) \text{ при } X \gg 1, \quad (1)$$

где α – *характеристический* показатель распределения. Скейлинговая функция g , примерно постоянная при малых значениях аргумента и убывающая

быстрее любой его степени при больших, описывает отклонение плотности от степенного вида, происходящее из-за конечности размеров системы. В силу масштабной инвариантности критического состояния величина X_1 , характеризующая события, крупные настолько, что они уже помещаются в систему размера L , растет как некоторая его степень:

$$X_1 \sim L^\nu, \quad (2)$$

где ν – *скейлинговый* показатель. При этом доля событий, не помещающихся в решетку, убывает с ее размером как

$$P\{X > X_1\} = \int_{X_1}^{\infty} u(X) dX \cong \int_{L^\nu}^{\infty} X^{-(1+\alpha)} g(XL^{-\nu}) dX \sim L^{-\varepsilon},$$

где *универсальный показатель*

$$\varepsilon = \alpha\nu = \text{const} \quad (3)$$

не зависит от того, какая именно характеристика лавины используется для его вычисления, поскольку если событие не помещается в систему, то не помещается сразу по всем своим характеристикам.

Сочетание формул (1) и (3) позволяет определить скейлинговое поведение и для среднего события

$$\langle X \rangle = \int X^{-\alpha} g(X/X_1) dX \sim L^\sigma, \text{ где } \sigma = \nu - \varepsilon. \quad (4)$$

В масштабно-инвариантном состоянии взаимосвязь разных характеристик события дается степенной формулой

$$Y^{\alpha_y} \sim X^{\alpha_x}, \quad (5)$$

получаемой из сохранения вероятности для некрупных событий, еще попадающих на степенной участок распределения (1).

Основными характеристикам лавины являются:

- T – *длительность* в параллельном времени (при одновременной обработке всех неустойчивых ячеек);
- N – *размер* – число опрокидываний, или длительность в последовательном времени (при обработке неустойчивых ячеек по одной);
- S – *d-мерный объем* – число ячеек, где произошли опрокидывания (без учета его кратности);
- C – *периметр* – число ячеек, получивших песчинки, но сохранивших устойчивость, дополненное числом песчинок, выпавших за край решетки;
- R – *линейная протяженность*, мерой которой может быть максимальное удаление затронутой ячейки от точки вброса.

Для модели получены следующие показатели [1]:

| X | α_x | v_x |
|-----|---------------------------|----------------------|
| T | $d/4$ | $12/(10-d)$ |
| N | $3d/(d+20)$ | $(d+20)/(10-d)$ |
| S | $3/(10-d)$ | d |
| C | $3d/(12-d)(d-1)$ | $(12-d)(d-1)/(10-d)$ |
| R | $3d/(10-d) = \varepsilon$ | 1 |

(6)

ПРИРОДА ВЕРХНЕЙ КРИТИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Верхняя критическая размерность находится на основе среднего столбца формулы (6) – при $d = 4$ характеристические показатели получают среднеполевые значения $\alpha_T = 1$, $\alpha_N = \alpha_S = \alpha_C = 1/2$ и $\alpha_R = 2$. Однако можно обойтись и без решения модели, проведя элементарный анализ двух процессов.

Сначала рассмотрим распространение лавины по решетке. Если песчинки, передаваемые из опрокинувшейся ячейки ее соседкам, не взаимодействуют друг с другом, то $R \sim T^{1/2}$, т.е. линейная протяженность лавины изменяется в параллельном времени диффузионным образом. Для взаимодействующих песчинок (в силу их взаимного отталкивания) зависимость будет иметь больший показатель. Таким образом,

$$v_R \geq v_T/2. \quad (7)$$

Теперь рассмотрим развитие лавины как ветвящийся процесс, частицы которого соответствуют потерявшим устойчивость ячейкам. Их число – *активность* лавины $A \sim N/T$. Вследствие самоорганизации кучи в критическое состояние ветвящийся процесс имеет единичный коэффициент размножения частиц. И если они не взаимодействуют друг с другом, то $A \sim N^{1/2}$, т.е. активность изменяется в последовательном времени диффузионным образом. Отсюда получаем $N \sim T^2$. Для взаимодействующих частиц (в силу того, что соседки неустойчивых ячеек обеднены песчинками) зависимость будет иметь меньший показатель. Таким образом,

$$v_S \leq v_N \leq 2v_T, \quad (8)$$

поскольку объем области лавины S , очевидно, не превышает ее размера N .

С учетом очевидного значения $v_R = 1$ (см. далее) сочетание неравенств (7) и (8) накладывает ограничение на размерность области лавины $v_S \leq 4$. Это неравенство обращается в равенство при $d = 4$, т.е. вплоть до верхней критической размерности область лавины еще сохраняет компактность, а при $d > 4$ уже становится фрактальной.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ПОПРАВКАХ

В случае верхней критической размерности формулы (1) и (2) сменяются более сложными выражениями

$$u(X) = X^{-(1+\alpha)} \ln^{\tilde{\alpha}} X \cdot g(X/X_1),$$

где $X_1 \sim L^\nu / \ln^{\tilde{\nu}} L$,

требующими нахождения еще двух показателей $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\nu}$ для каждой характеристики события.

Пройдем снова тот путь, который привел к формулам (3), (4) и (5) для чисто степенной статистики, и посмотрим, как на этих формулах скажется введение логарифмических поправок. При этом следует помнить об их приближенном характере, не претендующем на полную самосогласованность. Поэтому мы здесь пренебрегаем логарифмами логарифмов, считая логарифмы разных характеристик лавины взаимно пропорциональными величинами.

По аналогии с выводом формулы (3) рассмотрим долю событий, не помещающихся в решетку

$$P\{X > X_1\} = \int_{X_1}^{\infty} u(X) dX \cong \int_{L^\nu / \ln^{\tilde{\nu}} L}^{\infty} X^{-(1+\alpha)} \ln^{\tilde{\alpha}} X \cdot g(X \ln^{\tilde{\nu}} L / L^\nu) dX \sim L^{-\tilde{\varepsilon}},$$

где *универсальный поправочный показатель*

$$\tilde{\varepsilon} = \alpha \tilde{\nu} + \tilde{\alpha} = \text{const}$$

также не зависит от того, какая именно характеристика лавины используется для его вычисления. Поскольку интеграл здесь берется по области больших X , при его вычислении мы полагаем $\ln X \sim \ln L$.

На смену формуле (4) приходит выражение

$$\langle X \rangle = \int X^{-\alpha} \ln^{\tilde{\alpha}} X \cdot g(X \ln^{\tilde{\nu}} L / L^\nu) dX \sim L^\sigma / \ln^{\tilde{\sigma}} L, \text{ где } \tilde{\sigma} = \tilde{\nu} - \tilde{\varepsilon}.$$

Хотя здесь интеграл берется уже по всей положительной полуоси, при его вычислении мы всё равно снова полагаем $\ln X \sim \ln L$, поскольку при $\alpha < 1$ он набирает свое основное значение в области больших X .

Наконец, формула взаимосвязи разных характеристик события (5) усложняется до записи

$$Y^{\alpha_Y} / \ln^{\tilde{\alpha}_Y} Y \sim X^{\alpha_X} / \ln^{\tilde{\alpha}_X} X.$$

РАСЧЕТ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ПОПРАВК

Некоторые из показателей решения (6) в работе [1] были получены на основе непосредственно анализа правил модели. Пройдем этот путь снова, учитывая теперь и логарифмические поправки.

Линейная протяженность лавин, очевидно, ограничена только размерами решетки, т.е.

$$R_1 \sim L,$$

откуда получаются тривиальные показатели $\nu_R = 1$, $\tilde{\nu}_R = 0$.

Компактность лавин предполагает $S \sim R^d$, однако, коль скоро эта формула утрачивает применимость при $d > 4$, при $d = 4$ она может приобретать логарифмические поправки. Поэтому, хотя из этого соотношения вытекает значение $\nu_S = d$, про $\tilde{\nu}_S$ ничего уже сказать нельзя.

Путь каждой песчинки через систему представляет собой случайное блуждание, в силу чего среднее число опрокидываний, в которых песчинка успевает поучаствовать до того, как покинет решетку, квадратично по ее линейному размеру

$$\langle N \rangle \sim L^2,$$

причем эта формула точна в пространстве любой целой размерности. Отсюда получается не только $\sigma_N = \nu_N - \varepsilon = 2$, но и $\tilde{\sigma}_N = 0$, т.е. $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\nu}_N$.

То, что в пространстве верхней критической размерности песчинки перестают взаимодействовать между собой, в частности, означает возможность пренебречь повторными опрокидываниями ячеек в ходе лавины. Таким образом, $N \sim S$, т.е. не только $\nu_N = \nu_S$, но и $\tilde{\nu}_N = \tilde{\nu}_S$.

Для получения нетривиальных поправочных показателей сначала рассмотрим подробнее природу неравенства (7), связанного с перемещением песчинок по решетке. Коль скоро их взаимодействие в многомерном случае сводится к простому отталкиванию, адекватной моделью этого процесса является случайное блуждание без самопересечений. Если его траектория из T звеньев размещается в пространственной области характерного размера R , то установившийся режим роста описывается уравнением

$$\frac{dR}{dT} = \frac{\partial U}{\partial R},$$

где энергия отталкивания звеньев

$$U \sim \int_1^T t/R^d dt$$

находится суммированием их пространственной плотности вдоль траектории блуждания [6].

Это описание применимо к блужданию без самопересечений в пространстве любой размерности. Так, при $d < 4$ возникает классическая формула $R^{d+2} \sim T^3$, которую многие исследователи в течение ряда лет безуспешно пытались приспособить к решению моделей типа кучи песка в двумерной постановке [5,6,7,8,9,10]. Однако блуждание без самопересечений описывает развитие лавины только при $d \geq 4$. И если при $d > 4$ рост пространственной протяженности представляет собой обычную диффузию $R^2 \sim T$, то для $d = 4$ получается нетривиальная связь $R^2 \sim T \cdot \ln^{1/3} T$, т.е. $\tilde{\alpha}_R - \tilde{\alpha}_T = 1/3$, откуда $\tilde{\nu}_T = 1/3$.

Грустная ирония заключается в том, что именно для четырехмерного случая в работе [6], откуда автор почерпнул идею приведенного расчета, тот был выполнен с ошибкой. Чтобы она не повторялась, детализируем выкладки. Для начала будем искать решение в простейшем виде $R \sim T^\gamma$, заменяя интегрирование умножением, а дифференцирование делением, как это обычно делается при обращении со степенными зависимостями, учитываемыми с точностью до коэффициента. Тогда, с одной стороны, энергия отталкивания

$$U \sim R^2/T \sim T^{2\gamma-1},$$

а с другой –

$$U \sim \int_1^T t^{1-d\gamma} dt \sim t^{2-d\gamma} \Big|_1^T.$$

Если $2 > d\gamma$, то можно пренебречь значением на нижнем пределе и получить из уравнения $2\gamma - 1 = 2 - d\gamma$ показатель $\gamma = 3/(4 + d)$ для $d < 4$. Если $2 < d\gamma$, то можно пренебречь значением на верхнем пределе и получить из уравнения $2\gamma - 1 = 0$ показатель $\gamma = 1/2$ для $d > 4$. Наконец, если $2 = d\gamma$, то эти два случая сходятся на значении $\gamma = 1/2$, однако поскольку в результате интегрирования возникает логарифм, требуется усложнение изначального предположения и поиск решения уже в виде $R \sim T^{1/2} \cdot \ln^\delta T$. Тогда, с одной стороны,

$$U \sim \ln^{2\delta} T$$

(пренебрегая меньшими степенями логарифма), а с другой –

$$U \sim \int_1^T dt/t \ln^{4\delta} t \sim \ln^{1-4\delta} T,$$

откуда получается уравнение $2\delta = 1 - 4\delta$, и дающее показатель $\delta = 1/6$.

Теперь рассмотрим подробнее природу неравенства (8), связанного с размножением неустойчивых ячеек. Здесь рассуждения аналогичны приведенным выше с той разницей, что моделью служит развивающийся на решетке критиче-

ский ветвящийся процесс, частицы которого взаимно отталкиваются, избегая попадания в одни и те же ячейки (по всей видимости, специального названия такой процесс не имеет). Установившийся режим роста числа частиц A описывается в параллельном времени N уравнением

$$\frac{dA}{dN} = \frac{\partial U}{\partial A},$$

где энергия отталкивания частиц

$$U \sim \int_1^A a/R^d da$$

находится суммированием их пространственной плотности по всем местам их расположения. Для $d = 4$ получаем связь $A^2 \sim N/\ln^{1/3} N$, которую удобнее переписать в виде $T^2 \sim N \cdot \ln^{1/3} N$, т.е. $\tilde{\alpha}_T - \tilde{\alpha}_N = 1/6$, откуда $\tilde{\nu}_N = 1$. Это позволяет определить универсальный поправочный показатель $\tilde{\epsilon} = 1$ и на его основе показатели $\tilde{\nu}_S = 1$, $\tilde{\alpha}_T = 2/3$, $\tilde{\alpha}_N = \tilde{\alpha}_S = 1/2$ и $\tilde{\alpha}_R = 1$.

Ненайденными остаются только показатели для периметра C , т.е. чисто геометрической, а не динамической характеристики лавины. Чтобы здесь ввести динамику, рассмотрим отношение числа ячеек в объеме $V \sim R^4$, ограниченном линейной протяженностью области лавины R , к числу ячеек, собственно затронутых лавиной, $S \sim R^4/\ln R$. На каждую опрокинувшуюся ячейку в пределах линейной протяженности лавины приходится $k \sim V/S \sim \ln R$ ячеек, в остальных из которых опрокидываний не случилось из-за неспособности лавины захватить всё пространство большой размерности.

Динамика коэффициента k описывается уравнением $dk \sim dV/V$, пусть априори и неочевидным, но апостериори понятным. Однако интерес представляет динамика отношения S/C , т.е. того числа ячеек, с которых одна песчинка выносится на границу области лавины. По мере роста k это отношение совершает симметричное случайное блуждание, т.е. $S/C \sim \sqrt{k}$, откуда получаются показатели $\tilde{\alpha}_C = 1/4$ и $\tilde{\nu}_C = 3/2$, завершающие расчет поправок.

РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Плотности распределений имеют степенной вид лишь в области промежуточной асимптотики. Чем больше ограничивающий ее размер системы, тем надежнее результаты моделирования. Более конкретно, решетку можно считать большой, если отношение ее объема к площади открытого края $L/2d \gg 1$. В многомерном случае ресурсом, лимитирующим размер решетки, оказывается не быстрое действие, а компьютерная память. Поэтому результаты моделирования, которое было ограничено относительно небольшими решетками, выглядят

несколько непривычно. На рис. 1 можно видеть, как графики постепенно приближаются к тому их асимптотическому положению, которое должно получиться для системы бесконечного размера. Вместе с тем совмещение графиков для решеток с ребром в сотни ячеек уже можно считать удовлетворительным и подтверждающим правильность расчета поправочных показателей.

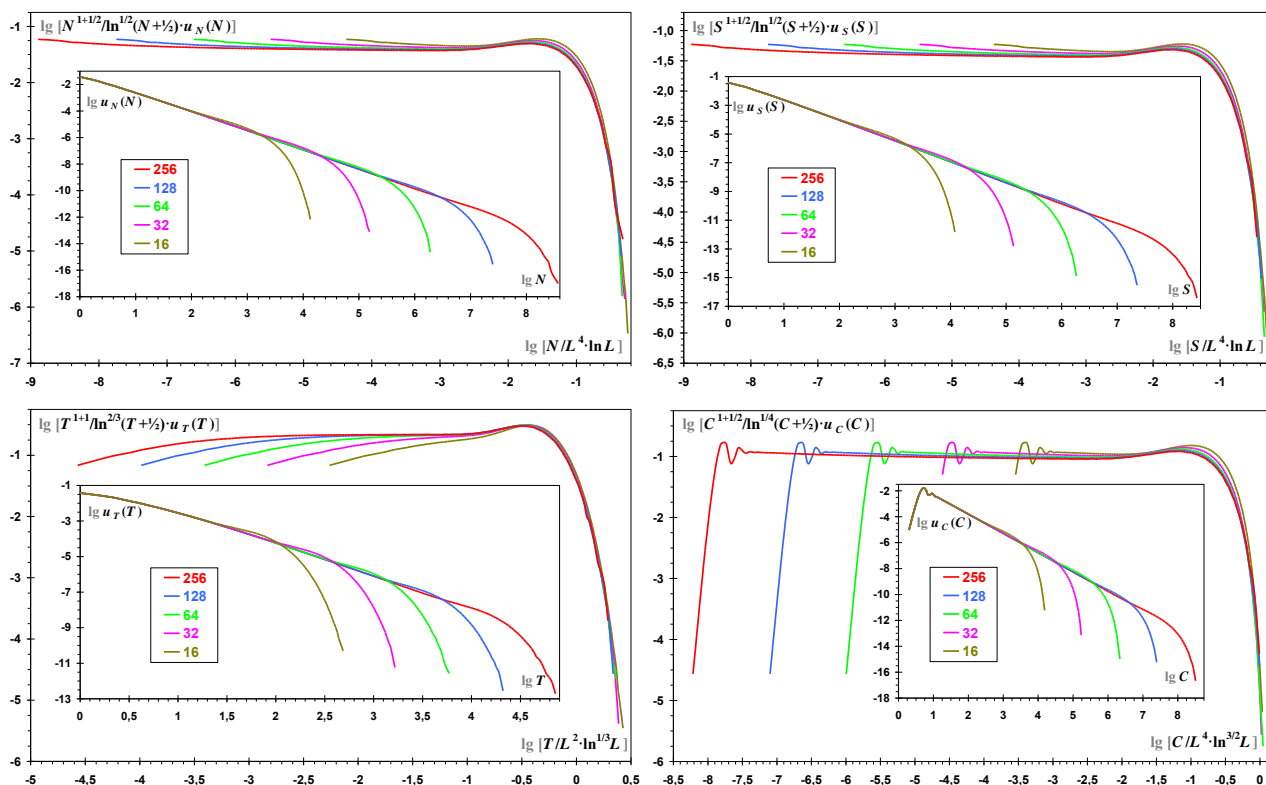


Рис. 1. Распределение характеристик лавин в четырехмерной постановке

При домножении ординаты на $X^{1+\alpha}/\ln^\alpha X$ и делении абсциссы на $L^V/\ln^{\hat{V}} L$ графики, полученные для систем различного размера L , должны совмещаться при $1 \ll X$, а кроме того, выполаживаться при $1 \ll X \ll X_1$.

Чтобы при перемасштабировании ординаты избежать деления на ноль для событий единичного размера, под логарифмом к значению характеристик искусственно добавляется $1/2$. Величина этой добавки не принципиальна, т.к. сказывается только на левых частях графиков.

Исходные плотности показаны на врезках. В двойном логарифмическом масштабе степенной вид плотности в области промежуточной асимптотики представляется линейным участком графика.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Кроме расширения перечня экспериментальных результатов и инструментария, обеспечивающего их анализ, за время, прошедшее с момента публикации работы [1], был получен новый и чисто теоретический результат. Он недостаточно масштабен для отдельной публикации, но, тем не менее, представляется весьма важным. Кроме того, здесь, как и ранее, речь идет о логарифмических, а не о степенных зависимостях.

Модель Манни имеет два тривиальных суперуниверсальных (не зависящих от размерности пространства) показателя: $v_R = 1$ и $\sigma_N = 2$. Однако у нее есть и нетривиальный суперуниверсальный показатель. Будучи компактной при $d \leq 4$, область лавины всё же имеет фрактальную границу ширины $W \sim C/R^{d-1}$. Граница области проходит свою ширину за время $Q \sim W/(R/T) \sim TC/S$. Из решения (б) получается соотношение $v_Q = \varepsilon$ и, согласно формуле (3), $\alpha_Q = 1$.

Несмотря на практические неудобства при обработке плотностей для дробных выражений, полученный результат легко проверяется экспериментально. Формула (4) дает показатель $\sigma_Q = 0$, что означает $\langle Q \rangle \sim \log L$, в правильности чего позволяет убедиться рис. 2.

Хотя данный результат был получен автором лишь апостериори, т.е. на основе анализа уже решенной модели, однако к нему можно было бы прийти и на основе общих соображений. В самом деле, по мере развития лавины время прохождения ее границей своей ширины должно возрастать, но возрастать чрезвычайно медленно, поскольку на периферии лавины опрокидывания едва происходят. А самым медленным законом роста характеристики является такой, при котором ее среднее значение зависит от размера системы логарифмически, т.е. с нулевым показателем.

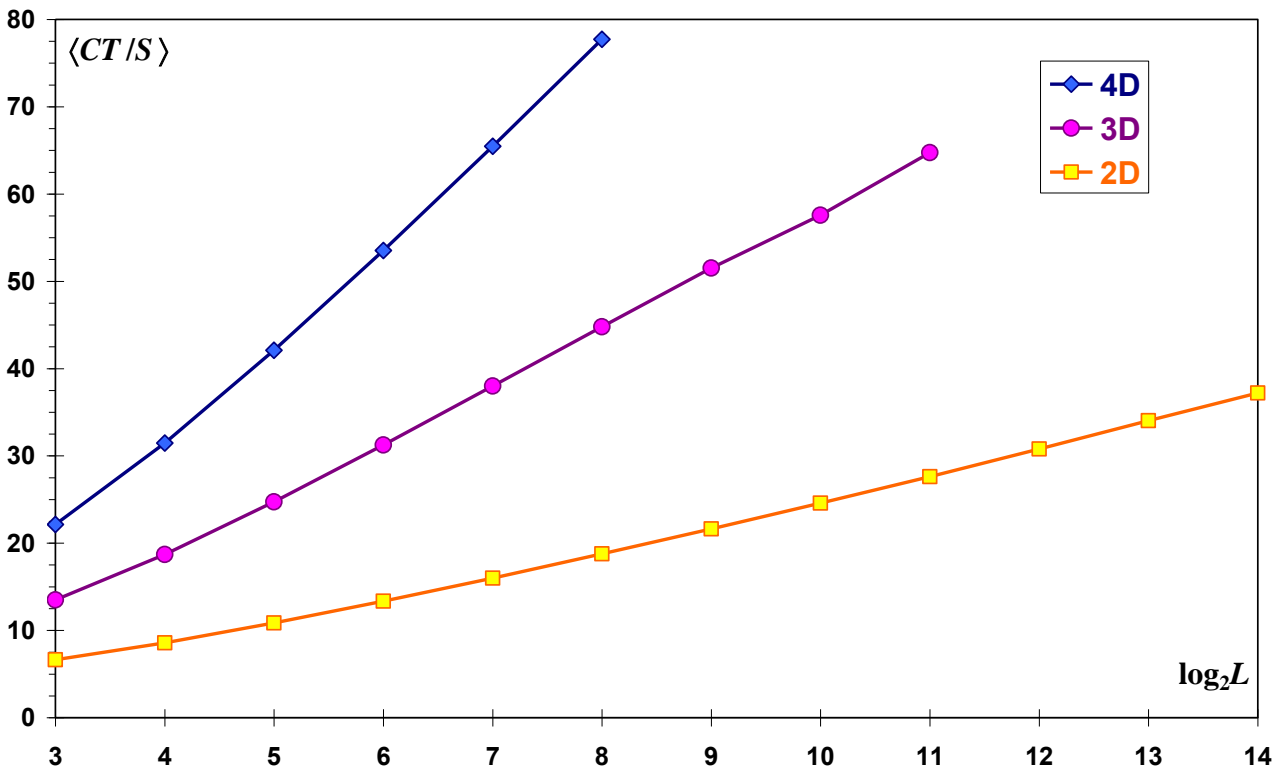


Рис. 2. Среднее время, необходимое границе лавины для прохождения своей ширины

В отличие от других характеристик лавины, средние значения которых при увеличении размера системы возрастают как некоторая его степень, для этой характеристики наблюдается лишь логарифмический рост.

Литература

1. [Подлазов А.В. Решение самоорганизованно-критической модели Манны произвольной размерности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. №125.](#)
2. *Manna S.S.* Two-state model of self-organized criticality // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1991. V.24, N7, p.L363–L639.
3. *Kitavev D.V., Lübeck S., Grassberger P., Priezzhev V.B.* Scaling of waves in the Bak–Tang–Wiesenfeld sandpile model // *Phys. Rev. E.* 2000. V.61, N1, p.81-92.
4. *Priezzhev V.B.* The upper critical dimension of the Abelian sandpile model // *J. Stat. Phys.* 2000, V.98, N3/4, p.667-684.
5. *Lübeck S., Usadel K.D.* Bak–Tang–Wiesenfeld sandpile model around upper critical dimension // *Phys. Rev. E.* 1997. V.56, N5, p.5138-5143.
6. *Zhang Y-C.* Scaling theory of self-organized criticality // *Phys. Rev. Lett.* 1989. V.63, N5, p.470-473.
7. *Díaz-Guilera A.* Dynamic renormalization group approach to self-organized critical phenomena // *Europhys. Lett.* 1994. V.26, N3, p.177-182.
8. *Ben-Hur A., Biham O.* Universality in sandpile models // *Phys. Rev. E.* 1996. V.53, N2, p.R1317–R1320.
9. *Lübeck S., Usadel K.D.* Numerical determination of the avalanche exponents of the Bak–Tang–Wiesenfeld model // *Phys. Rev. E.* 1997. V.55, N4, p.4095-4099.
10. *Biham O., Milshstein E., Malcai O.* Evidence for universality within the classes of deterministic and stochastic sandpile models // *Phys. Rev. E.* 2001. V.63, p.061309.