



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 91 за 2021 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Колесниченко

Применение гетерогенной
механики для
моделирования
газопылевого
экзопланетного диска. II.
Турбулентная стадия
образования субдиска

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. Применение гетерогенной механики для моделирования газопылевого экзопланетного диска. II. Турбулентная стадия образования субдиска // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 91. 43 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2021-91>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-91>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

А.В. Колесниченко

**Применение гетерогенной механики
для моделирования газопылевого
экзопланетного диска.
II. Турбулентная стадия образования
субдиска**

Москва — 2021

Колесниченко А.В.

Применение гетерогенной механики для моделирования газопылевого экзопланетного диска. II. Турбулентная стадия образования субдиска

Аннотация. В представленной работе применительно к проблеме реконструкции эволюции экзопланетного газопылевого облака разработана модель турбулентной гетерогенной среды, на основе которой возможно создание нового класса численных моделей космических газопылевых сред, учитывающих влияние на характер и развитие турбулентности инерционных свойств полидисперсной пылевой фазы, процессов тепло- и массопереноса, коагуляции, химических реакций и излучения. Это позволяет значительно расширить возможности численного моделирования разнообразных физико-химических явлений в таких космологических объектах, какими являются аккреционные газопылевые диски, образующиеся у звезд различных классов при их дифференциальном вращении вокруг центра тяжести и, в частности, исследовать их структуру, физико-химические и гидродинамические свойства и временную эволюцию.

Ключевые слова: космология, экзопланетный газопылевой диск, гетерогенная механика, сжимаемая турбулентность.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko

The use of heterogeneous mechanics for modeling a gas-dust protoplanetary disk: II. The laminar stage of subdisk formation.

Annotation. In the presented work, in relation to the problem of reconstructing the evolution of an exoplanetary gas-dust cloud, a model of a turbulent heterogeneous medium is developed, on the basis of which it is possible to create a new class of numerical models of space gas-dust media, taking into account the influence on the nature and development of turbulence of the inertial properties of a polydisperse dust phase, heat and mass transfer processes, coagulation, chemical reactions and radiation. This makes it possible to significantly expand the possibilities of numerical modeling of various physical and chemical phenomena in such cosmological objects as accretion gas and dust disks formed in stars of various classes during their differential rotation around the center of gravity and, in particular, to study their structure. physicochemical and hydrodynamic properties and time evolution.

Key words: cosmology, exoplanetary disk of gas and dust, heterogeneous mechanics, compressible turbulence.

Введение

Прежде всего отметим, что данная работа является продолжением предпринятого автором в 2020 году исследования по проблеме моделирования в рамках гетерогенной механики эволюции протопланетного турбулизованного газопылевого диска. В первой части работы [1] были представлены основы математического описания ламинарной стадии эволюции гетерогенного континуума, состоящего из двух соприкасающихся фаз – несущей газовой фазы и дисперсной фазы твердых конденсированных частиц, находящихся при общей температуре и давлении.

Следует отметить, что вещество протопланетного газопылевого облака представляет собой в общем случае сложную многофазную среду с областями разной плотности, температуры и степени ионизации, находящимися в состоянии сильной турбулизации. Понимание эволюции подобного облака является необходимой предпосылкой для решения вопроса об образовании экзопланет – вопроса, глубинно связанного с основополагающей проблемой космогонии, решение которой является на сегодняшний день крупнейшей задачей науки [2, 3].

К сожалению, в целом ряде современных моделей эволюции газопылевых протопланетных дисков некоторые физические процессы учитываются весьма приближенно или не учитываются вовсе. Это относится, в первую очередь, к гидродинамической турбулентности в газопылевой среде, являющейся одним из важнейших физических процессов, определяющих структуру и динамику подобных дисков. Актуальность этой проблемы становится еще более очевидной, если принять во внимание, что турбулентное вещество диска представляет собой неоднородную дисперсную среду, состоящую из газа (в общем случае многокомпонентного) и пылевых частиц различных размеров. При этом роль пылевых частиц в турбулизации дисковой среды, включая динамику их дрейфа в радиальном и ортогональном (к экваториальной плоскости звезды) направлениях, а также фазовые переходы при испарении и/или конденсации частиц с учетом температурной стратификации в диске, оказывается нередко определяющей.

По современным представлениям планеты формируются после потери гравитационной устойчивости пылевым субдиском, образованным в результате дифференциального вращения турбулентного протопланетного вещества по орбите вокруг солнечноподобной звезды и процессов аккреции при оседании пылевой составляющей к экваториальной (центральной) плоскости диска, перпендикулярной оси вращения [1,3-8]. Сплющивание вращающегося протопланетного облака является следствием противоборства двух основных динамических сил – гравитационной и центробежной. В условиях равновесия этих сил существенными для эволюции облака становятся более слабые факторы, такие как тепловые и вязкостные процессы, самогравитация диска и электромагнитные явления. Дискосое космическое вещество вследствие воздействия сил вязкого трения (возникающего в результате относительного сдвига элементов газозвеси при орбитальном движении) дрейфует к протозвезде по очень пологой спиральной траектории по мере того, как его момент количества движения передается наружу – из внутренних областей диска во внешние. Именно из газопылевого вещества субдиска, как теперь стало ясно, и образовалась наша Солнечная система путем возникновения дискретных центров уплотнения и последующего их роста (см., например, [1,9]).

Одной из ключевых в астрофизике точек зрения относительно происхождения и структуры околозвездных газопылевых аккреционных дисков любого рода является их турбулентная природа [10-15]. Протопланетные аккреционные диски обладают значительной вязкостью, что приводит, в сочетании с дифференциальным вращением вещества, к наличию постоянного «собственного» источника тепловой энергии в них. Наиболее вероятными причинами вязкости дифференциально вращающихся дисков являются сдвиговая турбулентность [16,17], а также хаотические магнитные поля (см. [18]), причем энергия последних часто сравнима с энергией гидродинамической турбулентности. При увеличивающейся массе протозвезды и росте плотности вещества диска важную роль начинают играть приливные взаимодействия, оказывающие, в частности, влияние на формирование концентрических газопылевых слоев [19].

Существует обширная литература по моделированию эволюции околосолнечного протопланетного облака без пылевой составляющей (см., например, пространную библиографию в монографии [12]). Вместе с тем немногочисленные публикации по запыленным дисковым системам охватывают сравнительно узкий круг задач, относящихся к данной проблеме, поскольку используемые модели турбулентности двухфазных сред «газ–твердые частицы» не могут быть признаны вполне удовлетворительными (см., например, [20-30]). В общем случае при моделировании дисковой среды важно учитывать обратное влияние пыли на турбулентность потока, которое не является, вообще говоря, однозначным и сильно зависит от величины объемного содержания (концентрации) и инерционности пылевых частиц. В частности, на определенных этапах эволюции подобной гетерогенной смеси становятся существенными такие механизмы воздействия пылевой компоненты на турбулентность в диске, как генерирование дополнительных турбулентных возмущений за счет коллективных эффектов, связанных с межчастичными столкновениями твердых частиц [31], образование вихревых структур за обтекаемыми крупными частицами при отрыве несущего газового потока, а также совместное влияние этих двух механизмов турбулизации течения и т.д. Кроме этого, само присутствие в турбулентной среде полидисперсной примеси существенно усложняет гидродинамику диска, способствуя реализации дополнительных режимов течения космического вещества.

Помимо этого существенно влияние турбулентности на процесс коагуляции частиц, которое в различных ситуациях может сказываться совершенно неожиданным образом, однако, по-видимому, турбулентность всегда способствует коагуляции [32]. Так, если внутренний колмогоровский масштаб турбулентности λ_K меньше или сравним с размером дисперсных частиц, то имеет место турбулентное блуждание частиц (аналогичное броуновскому), приводящее к их взаимному столкновению, т.е. к турбулентной коагуляции, дополняющей эффективную в спокойном газе гравитационную коагуляцию. Турбулентные пульсации могут также способствовать втягиванию мелкодисперсных частиц в гидродинамический след или в зону действия индукционных сил в случае одноименно заряженных частиц, а также могут содействовать электростатической коагуляции путем разрушения экранировки (см. [32,33]).

Основываясь на доступных результатах лабораторных и модельных исследований (см., например, [34]), можно в первом приближении считать, что столкновения сравнительно мелких (примерно миллиметровых) частиц при скоростях < 1 м/с приводят к их объединению. По-видимому, на возникающих при этом структурах возможно преобладание процессов интеграционных над деструктивными даже при скоростях > 10 м/с. Эффективным механизмом аккумуляции твердых частиц может быть

также, наряду с гравитационной, негравитационная аккреция, связанная с броуновской коагуляцией, электрической коагуляцией, турбулентно-броуновской коагуляцией заряженных и нейтральных частиц и т.п. (подробнее см. [12,35]). В результате роста инерционности частиц они все в меньшей степени будут участвовать в пульсационном (вихревом) движении газозвеси, что приводит, в конечном итоге, к их эффективному оседанию к экваториальной плоскости протозвезды и агломерации. Таким образом, вопреки распространенному мнению, что турбулентность в газопылевой среде субдиска не способствует укрупнению частиц (см. напр., обзор [36]), ситуация может быть обратной, что подтверждают и полученные в работе [37] результаты наблюдений. Тем не менее пока остается открытым вопрос о том, как и за какие времена происходит рост в турбулентной среде диска зародышей планетезималей начиная примерно от метровых размеров [38-44].

Наконец, коснемся еще одного важного механизма, с которым связано создание космогонических моделей. Едва ли есть основания подвергать сомнению тот факт, что при образовании и в процессе эволюции околозвездного диска существенную роль играли электродинамические (плазменные) эффекты. Космическая плазма в общем случае является пылевой, т.е. содержит мельчайшие частицы пыли (см. [45]). Так как любой аккреционный диск содержит пылевые частицы различных размеров, то существует, по-видимому, некоторый граничный линейный масштаб (обычно он бывает порядка 10^{-5} – 10^{-7} м), зависящий от величины электромагнитного и гравитационного полей, заряда и плотности частиц, который разделяет достаточно малые частицы, являющиеся частью пылевой плазмы, и достаточно большие частицы, движение которых определяется воздействием неэлектромагнитных сил. Известно, что основными физическими процессами, определяющими поверхностный заряд пылинок, являются фотоэлектронная эмиссия и столкновения с плазменными электронами и положительными ионами (см., например, [46]). Вместе с тем пылевая частица в космической плазме чаще заряжается отрицательно до потенциала порядка нескольких вольт в результате столкновений с электронами. В совокупности процессов формирования диска и его эволюции чрезвычайно важную роль играет электризация пылевых частиц при их оседании и взаимодействии с магнитным полем звезды, что требует учета влияния соответствующих электродинамических эффектов в дифференциально-вращающейся среде. В частности, при движении электропроводной двухфазной среды в электромагнитном поле на заряженные частицы действует пондеромоторная сила Лоренца, что приводит к возникновению ряда дополнительных эффектов, особенно при турбулизации течения [47,48]. Следует заметить, что развитая турбулентность способна также приводить к формированию в диске мезомасштабных относительно устойчивых газопылевых когерентных структур, обеспечивающих, по-видимому, наиболее благоприятные условия для механического и физико-химического взаимодействия между частицами вещества (см. [49-52]). В результате происходят самопроизвольное образование и рост конденсированной пылевой компоненты (пылевых кластеров), интенсификация фазовых переходов и тепломассопереноса при различных значениях термогидродинамических параметров несущей и дисперсной фаз, существенная модификация спектра колебаний в сильно запыленной среде и т.п.

Наиболее адекватное моделирование движения газозвеси в газопылевом протопланетном диске можно провести, по-видимому, в рамках механики гетерогенных сред, с учетом специфики физико-химических свойств фаз, процессов тепло-, массопереноса и излучения, химических реакций, фазовых переходов, процессов коагуля-

ции, дробления и т.д. Изучение эволюции подобных сред связано с привлечением новых термогидродинамических параметров и решением уравнений, более сложных, чем те, с которыми приходится иметь дело в «обычной» гидродинамике.

Как правило, в перечисленных выше и некоторых других известных публикациях по континуальному моделированию аккреционных дисков с учетом пылевой составляющей исходят из уравнений неразрывности, движения и энергии для каждой фазы в отдельности [6,11,29,53-56]. Вместе с тем моделирование эволюции газопылевого облака можно выполнить в рамках односкоростного приближения гетерогенной механики, аналогичного моментному методу Чепмена–Энскога решения системы кинетических уравнений Больцмана для многокомпонентных газовых смесей [57,58]. Своеобразие этого подхода в рассматриваемом случае состоит в том, что континуальное описание дисковой среды возможно проводить исходя из законов сохранения массы, импульса и энергии для системы в целом, дополненных определяющими соотношениями для ряда термогидродинамических потоков, как внутрифазных, так и межфазных. В частности, для потоков межфазной диффузии могут быть использованы обобщенные соотношения Стефана–Максвелла, выведенные для гетерогенных сред методами неравновесной термодинамики в работе [57,59]. Важно также подчеркнуть, что применение только одного суммарного континуума для моделирования турбулентного космического вещества позволяет выполнить осреднение Фавра [60] гидродинамических уравнений достаточно аккуратно [35].

Основные предположения модели. Предполагая далее локальное термодинамическое равновесие в пределах каждой фазы, а также локальное термодинамическое равновесие излучения с веществом, воспользуемся для описания гидродинамических движений в газопылевой среде феноменологической теорией многожидкостных взаимопроникающих континуумов, учитывающей, в частности, динамические эффекты из-за несовпадения гидродинамических скоростей $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ фаз, входящих в состав системы (см., например, [59,61,62]).

Для каждой из двух фаз в каждой пространственно-временной точке (\mathbf{r}, t) определим массовую плотность, гидродинамическую скорость, внутреннюю энергию и другие термогидродинамические параметры, относящиеся к своему континууму и своей химической составляющей взвеси. При этом в качестве характеристик фазы будем использовать величины, осредненные как по совокупному элементарному макрообъему $\delta\mathcal{V} = \sum_\alpha \delta\mathcal{V}_\alpha$, относящемуся к гетерогенной системе в целом, так и по части $\delta\mathcal{V}_\alpha$ элементарного объема, занимаемой отдельной фазой α . В частности, наряду с размазанной по совокупному объему $\delta\mathcal{V}$ массовой плотностью $\hat{\rho}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ фазы α , далее будем использовать истинную (физическую) плотность $\rho_\alpha(\mathbf{r}, t)$, равную отношению массы частиц фазы α в элементарном макрообъеме $\delta\mathcal{V}$ к части этого объема $\delta\mathcal{V}_\alpha$ (занимаемой только фазой α). Тогда

$$\rho_\alpha = \hat{\rho}_\alpha / s_\alpha, \quad s_\alpha := \delta\mathcal{V}_\alpha / \delta\mathcal{V}, \quad \sum_\alpha s_\alpha = 1,$$

где $s_\alpha(\mathbf{r}, t)$ – так называемое объемное содержание α -фазы. Именно истинная плотность ρ_α фазы совместно с другими параметрами состояния (такими как температура $T_\alpha(\mathbf{r}, t)$, внутренняя энергия $e_\alpha(\mathbf{r}, t)$ и энтропия $S_\alpha(\mathbf{r}, t)$) определяет термодинами-

ческие свойства элементарной макрочастицы α -фазы в различных ее состояниях. Кроме того, величины $s_\alpha(\mathbf{r}, t)$ непосредственно влияют и на гидродинамическое движение фаз, поскольку фигурируют в соответствующих уравнениях движения. Одновременно будем предполагать, что между отдельными химическими компонентами k дисковой системы возможны r независимых химических реакций, включая межфазные реакции и случаи, когда химические превращения сводятся просто к перемещению компоненты k из одной фазы в другую.

Предположим также, что все пылевые частицы независимо от их размеров имеют одну и ту же гидродинамическую скорость $\mathbf{u}_d(\mathbf{r}, t)$. Тогда массовую плотность $\rho(\mathbf{r}, t)$ и среднemasсовую гидродинамическую скорость $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ смеси в целом можно определить соотношениями

$$\rho = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} s_{\alpha} = \rho_g (1-s) + \rho_d s,$$

$$\mathbf{u} = \rho^{-1} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} s_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} = \frac{\rho_g (1-s)}{\rho} \mathbf{u}_g + \frac{\rho_d s}{\rho} \mathbf{u}_d.$$

Здесь $s_d(\mathbf{r}, t)$ – объемная концентрация пылевой фазы, $s_g + s_d = 1$; индекс "d" у параметра s_d далее будем опускать, $s_d \equiv s$.

Кроме этого, будем предполагать, что движение дисперсной смеси в газопылевом диске можно адекватно описать при следующих допущениях:

- пылевые частицы – твердые и недеформируемые, сферичны по форме и полидисперсны;
- предполагается несжимаемость вещества пылевых частиц, $\rho_d = const$;
- истинная плотность пылевых частиц много больше истинной плотности газа, $\rho_d \gg \rho_g$;
- объемная концентрация дисперсной фазы мала ($s^2 \ll 1$), так что членами порядка s^2 в уравнениях гетерогенной механики можно пренебречь;
- несущая фаза – сжимаемый многокомпонентный совершенный газ;
- вязкостью и теплопроводностью дисперсной фазы можно пренебречь, $\mathcal{P}_d = 0, \mathbf{q}_d = 0$;
- предполагается термическое равновесие фаз, $T_g = T_d = T$;
- рассматривается однодавленческое приближение, $p_g = p_d = p(\rho_g, T)$;
- теплообмен между дисперсными частицами и несущим газом отсутствует.

Помимо этого предполагается, что каждая фаза представляет собой гомогенную n -компонентную смесь (причем каждое химически значимое вещество экзопланетного облака присутствует в каждой фазе α). Далее для обозначения фаз будем использовать нижние греческие индексы α, β, \dots , а нижние латинские индексы в круглых скобках типа (k) или (i) у любой величины будем относить к молекулярной составляющей фазы. Газовая фаза ($\alpha = g$) является несущей средой, описываемой моделью вязкой жидкости. Дисперсная фаза ($\alpha = d$), присутствующая в виде пылевых включений, является невязкой и не теплопроводной.

1. Осредненные уравнения баланса масс. Коэффициенты турбулентного переноса

Далее будем рассматривать экзопланетное турбулентное газопылевое облако, как континуальную среду, мгновенные движения которой могут быть описаны системой уравнений гетерогенной механики при случайной выборке начальных и граничных условий. Тогда макроуравнения турбулентного движения можно получить путем теоретико-вероятностного осреднения уравнений ((76)-(81) часть I) ламинарного движения газопылевой среды), используя средневзвешенное осреднение по Фавру $\langle \mathcal{A} \rangle = \overline{\rho \mathcal{A}} / \bar{\rho}$ [60] для скорости $\langle \mathbf{u} \rangle$, температуры $\langle T \rangle$, массовых концентраций $\langle c_\alpha \rangle$ и т.п., и осреднение по Рейнольдсу $\overline{\mathcal{A}}$ для давления p , массовой плотности ρ , а также для всех «молекулярных» термодинамических потоков $\mathcal{J}_\alpha, \mathbf{q}, \mathcal{P}, \xi_\rho$ газозвеси.

Осредненное уравнение неразрывности. Легко видеть, что осредненная массовая плотность $\bar{\rho}$ и средневзвешенная гидродинамическая скорость газозвеси $\langle \mathbf{u} \rangle = \overline{\rho \mathbf{u}} / \bar{\rho}$ удовлетворяют уравнению неразрывности для среднего движения

$$\partial \bar{\rho} / \partial t + \nabla \cdot (\bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle) = 0, \text{ или } \bar{\rho} D(1/\bar{\rho})/Dt - \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0. \quad (1)$$

При осреднении соотношения $\rho d\mathcal{A}/dt = \partial(\rho \mathcal{A})/\partial t + \nabla \cdot (\rho \mathcal{A} \mathbf{u})$ с учетом уравнения (1), получим широко используемое далее операторное соотношение

$$\overline{\rho d\mathcal{A}dt} = \overline{\partial(\rho \mathcal{A})/\partial t} + \overline{\nabla \cdot (\rho \mathcal{A} \mathbf{u})} = \bar{\rho} D\langle \mathcal{A} \rangle / Dt + \nabla \cdot \mathcal{J}_\mathcal{A}^{turb}, \quad (2)$$

где $\bar{\rho} D\langle \mathcal{A} \rangle / Dt = \partial(\bar{\rho} \langle \mathcal{A} \rangle) / \partial t + \nabla \cdot (\bar{\rho} \langle \mathcal{A} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle)$; $\mathcal{J}_\mathcal{A}^{turb} := \overline{\rho \mathcal{A} \mathbf{u}''} = \bar{\rho} \langle \mathcal{A} \mathbf{u}'' \rangle$ (3)

– так называемый турбулентный поток, связанный с переносом субстанции \mathcal{A} турбулентными пульсациями скорости.

Приведем уже здесь выражение для турбулентного потока \mathcal{J}_v^{turb} удельного объема $v = 1/\rho$, который фигурирует в ряде осредненных уравнений движения газозвеси, в частности в энергетических уравнениях. Используя формулу (3) для потока и соотношение $v'' = -\rho' / \rho \bar{\rho}$, непосредственно следующее из определения пульсации $v'' = v - \langle v \rangle = -\rho' / \rho \bar{\rho}$, получим

$$\mathcal{J}_v^{turb} \equiv \overline{\rho v'' \mathbf{u}''} = \overline{-\rho' \mathbf{u}''} / \bar{\rho} = \overline{\mathbf{u}''}. \quad (4)$$

Далее будем предполагать, что в турбулизованном течении флуктуируют только объемное содержание пыли s и истинная плотность газа ρ_g (это ключевое предположение развиваемого здесь подхода); тогда из соотношения $\rho = \rho_g(1-s) + \rho_d s$ следует

$$\rho' / \bar{\rho} \cong (1 - \bar{s}) \rho'_g / \bar{\rho} + \langle \sigma \rangle s' = \langle C_g \rangle \rho'_g / \bar{\rho}_g + \langle \sigma \rangle s'. \quad (5)$$

Здесь введено обозначение $\langle \sigma \rangle := (\rho_d - \bar{\rho}_g) / \bar{\rho} \cong \rho_d / \bar{\rho}$ для превышения плотности пылевых частиц над осредненной плотностью газа и использовано определение $\langle C_g \rangle := (1-s)\rho_g / \bar{\rho} \cong \bar{\rho}_g / \bar{\rho}$ для осредненной массовой концентрации газовой фазы; при этом для пылевой фазы имеем $\langle C_d \rangle \equiv \rho_d \bar{s} / \bar{\rho} \cong \bar{s} \langle \sigma \rangle$, причем $\langle C_g \rangle + \langle C_d \rangle = 1$.

Используя (4) и (5), получим искомое выражение для турбулентного потока удельного объема \mathcal{J}_v^{turb} в газопылевой среде

$$\mathcal{J}_v^{turb} := -\overline{\rho' u''} / \bar{\rho} = -\langle \sigma \rangle \overline{s' u''} - (1 - \rho_d \bar{s} / \bar{\rho}) \overline{\rho'_g u''} / \bar{\rho}_g. \quad (6)$$

Важно отметить, что используемые в модели приближенные выражения для величин ρ' и $\langle C_g \rangle$ (как и для некоторых других пульсирующих параметров среды) имеют место лишь тогда, когда справедливы неравенства $\overline{A'B'} / \bar{A} \bar{B} \ll 1$ и $\langle A''B'' \rangle / \langle A \rangle \langle B \rangle \ll 1$ для любых (но не равных скорости \mathbf{u}) пульсирующих параметров A и B .

Осредненное уравнение диффузии дискретной фазы. Применим теперь оператор осреднения (2) к диффузионному уравнению ((12) части I) для пылевых частиц; в результате получим следующее балансовое уравнение для осредненной массовой концентрации пыли, $\langle C_d \rangle := \langle \tilde{\rho}_d / \rho \rangle = \rho_d \bar{s} / \bar{\rho}$:

$$\bar{\rho} D \langle C_d \rangle / Dt + \nabla \cdot (\overline{\mathcal{J}_d} + \mathcal{J}_d^{turb}) = \overline{\sigma_{dg}}, \quad \overline{\sigma_{dg}} := \sum_{\rho=1}^r v_{d,\rho} \bar{\xi}_{\rho}. \quad (7)$$

Здесь $\overline{\mathcal{J}_d}$ – осредненный «молекулярный» диффузионный поток пыли, определяемый соотношением $\overline{\mathcal{J}_d} := \overline{\rho C_d C_g \mathbf{w}} \cong \bar{\rho} \langle C_d \rangle \langle C_g \rangle \bar{\mathbf{w}} \cong \rho_d \bar{\rho}_g \bar{s} \bar{\mathbf{w}} / \bar{\rho}$; $\mathbf{w} := (\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_g)$ – относительная скорость пыли и газа; $\mathcal{J}_d^{turb} := \overline{\rho C_d'' u''} = \rho_d \overline{s u''}$ – турбулентный диффузионный поток пыли.

Заметим, что для турбулентного потока диффузии газа имеет место соотношение $\mathcal{J}_g^{turb} := \overline{\rho C_g'' u''} = -\overline{\rho C_d'' u''} = -\mathcal{J}_d^{turb}$. Если записать выражение для турбулентного потока пыли в виде $\mathcal{J}_d^{turb} = \rho_d \bar{s} \mathcal{J}_v^{turb} + \rho_d \overline{s' u''}$, то, с учетом (6), можно получить другое выражение для турбулентного потока удельного объема

$$\mathcal{J}_v^{turb} = -(\bar{\rho} \langle \sigma \rangle / \rho_d \bar{\rho}_g) \mathcal{J}_d^{turb} - (1 - \bar{s}) \overline{\rho'_g u''} / \bar{\rho}_g, \quad (8)$$

которое будет использоваться далее.

Для замыкания диффузионного уравнения (7) необходимо иметь определяющее соотношение для турбулентного диффузионного потока $\mathcal{J}_d^{turb} := \bar{\rho} \langle C_d'' u'' \rangle$. В литературе имеется несколько подходов к моделированию подобного рода корреляционных моментов второго порядка, различающихся степенью сложности [35]. Здесь мы ограничимся наиболее простым градиентным соотношением, которое получается тради-

ционным способом при использовании понятия пути «смешения». Допуская существование некоторого эффективного пути смешения $\xi_{\mathcal{A}}$ переносимой субстанции \mathcal{A} (представляющего собой расстояние, на которое перемещаются турбулентные вихри в потоке, прежде чем они разрушатся в результате взаимодействия с другими возмущениями) и обозначая через \mathcal{A}_L'' лагранжеву турбулентную пульсацию переносимой субстанции \mathcal{A} , соответствующую эйлеровой пульсации \mathcal{A}'' , можно написать $\mathcal{A}_L'' = \mathcal{A}'' + \xi_{\mathcal{A}} \cdot \nabla \langle \mathcal{A} \rangle$. Предположим теперь, что пылевая фаза обладает свойством неуничтожимости $(C_d)''_L \cong 0$ (т.е. ее количество в элементарном объеме не изменяется за время, в течение которого она движется, не смешиваясь с несущим газовым потоком); тогда справедливо выражение $C_d'' = -\xi_d \cdot \nabla \langle C_d \rangle$. В результате для турбулентного потока диффузии пыли будем иметь следующее определяющее соотношение

$$\mathcal{J}_d^{turb} := \overline{\rho C_d'' \mathbf{u}''} = -\bar{\rho} \langle \mathbf{u}'' \xi_d \rangle \cdot \nabla \langle C_d \rangle = -\bar{\rho} \mathcal{D}_d^{turb} \cdot \nabla \langle C_d \rangle = -\bar{\rho} \rho_d \mathcal{D}_d^{turb} \cdot \nabla (\bar{s} / \bar{\rho}). \quad (9)$$

Здесь диада $\mathcal{D}_d^{turb} := \langle \mathbf{u}'' \xi_d \rangle$ определяет несимметричный тензор коэффициентов турбулентной диффузии пыли, учитывающий в общем анизотропном случае различия интенсивностей турбулентных пульсаций скорости вдоль разных осей координат. Соотношение (9) эквивалентно утверждению, что турбулентный поток \mathcal{J}_d^{turb} пропорционален градиенту осредненной концентрации пыли $\langle C_d \rangle$ и имеет по отношению к нему обратное направление. Коэффициенты турбулентной диффузии определяются экспериментально или на базе физического анализа.

В случае изотропного турбулентного поля тензор \mathcal{D}_d^{turb} является шаровым, $\mathcal{D}_d^{turb} = \mathcal{D}_d^{turb} \mathbf{I}$, т.е. определяется одним коэффициентом турбулентной диффузии пыли \mathcal{D}_d^{turb} ; тогда

$$\mathcal{J}_d^{turb} = -\bar{\rho} \mathcal{D}_d^{turb} \nabla \langle C_d \rangle \cong -\mathcal{D}_d^{turb} (\rho_d \bar{\rho}_g / \bar{\rho}) (\nabla \bar{s} - \bar{s} \nabla \ln \bar{\rho}_g), \quad (10)$$

и диффузионное уравнение (7) принимает вид

$$\bar{\rho} D \langle C_d \rangle / Dt + \nabla \cdot \left\{ \bar{\rho}_g \langle C_d \rangle \bar{\mathbf{w}} - \bar{\rho} \left(v^{turb} / \text{Sc}^{turb} \right) \nabla \langle C_d \rangle \right\} = \overline{\sigma_{dg}}. \quad (11)$$

Здесь величина σ_{dg} характеризует интенсивность перехода массы из фазы d в фазу g за счет химических реакций и процессов испарения или конденсации вещества в портопланетном облаке; v^{turb} – турбулентный аналог коэффициента кинематической вязкости газопылевой смеси; $\text{Sc}^{turb} := v^{turb} / \mathcal{D}_d^{turb}$ – турбулентное число Шмидта для дисперсной фазы (безразмерный коэффициент порядка единицы, зависящий от природы пылевой субстанции и являющийся некоторой функцией безразмерных характеристик потока).

Коэффициент турбулентного переноса; число Стокса. Отметим, что коэффициенты турбулентного переноса в любой турбулентной среде, в отличие от соответствующих коэффициентов молекулярного переноса, описывают не просто ее тер-

динамические и свойства, но и состояние турбулентного поля и потому непосредственно зависят от масштаба осреднения пульсирующих структурных параметров. Если пылевые частицы очень малы и в силу этого их движение практически ничем не отличается от движения несущих молей газа, то для них имеет место равенство коэффициентов турбулентной диффузии D_d^{turb} и турбулентной вязкости ν^{turb} газа. В этом случае коэффициент D_d^{turb} оценивается, например, выражением

$$D_d^{turb} \cong \nu^{turb} = \sqrt{bl} \cong (\varepsilon l)^{1/3} l = \varepsilon^{1/3} l^{4/3}, \text{ когда } l > \lambda_K, \quad (12)$$

в котором использованы следующие обозначения: b – турбулентная энергия газопылевой среды в целом [(см. (44)]; $\varepsilon \cong b^{3/2} / l \cong v_g^3 / \lambda_K^4$ – скорость диссипации турбулентной энергии газа; $\lambda_K \cong (v_g^3 / \varepsilon)^{1/4}$ – колмогоровский (внутренний) масштаб турбулентности; l – пространственным масштабом турбулентности в данной точке потока.

Вместе с тем многочисленные экспериментальные данные (см., например, [39]) подтверждают равенство $D_d^{turb} \cong \nu^{turb}$ лишь для очень мелких частиц, когда безразмерное число Стокса $Stk \ll 1$ в крупномасштабном пульсационном движении. Заметим, что в общем случае для гетерогенного турбулентного течения можно ввести несколько чисел Стокса, равных отношению времени динамической релаксации пылевых частиц к тем или иным временным масштабам течения (например, к временному колмогоровскому масштабу турбулентности $\tau_K \cong (v_g / \varepsilon)^{1/2}$, или к крупномасштабному пульсационному движению среды $\tau_L \propto b / \varepsilon$), которые характеризуют инерционность частиц по отношению к выбранному масштабу течения в турбулентном потоке.

В случае кеплеровского дифференциального вращения твердых частиц в диске, где имеется градиент осредненной скорости в радиальном направлении, важно учитывать инерционность частиц при анализе процесса релаксации осредненных скоростей фаз. Для этого удобно определить число Стокса следующим образом $Stk = \omega_{turb} \tau_{relax}$, где

τ_{relax} – время динамической релаксации (динамической инерционности) частиц, принадлежащих наиболее крупным вихрям с масштабом L (макромасштаб турбулентности); ω_{turb} – нижний предел частоты турбулентных пульсаций несущего газового потока в диске; тогда частота ω_{turb} определяет медленные макроскопические изменения параметров течения и согласно Сафронову [3, 9] для солнечного диска задается в

виде $\omega_{turb} = \Omega_{K,mid}$, где $\Omega_{K,mid} \equiv \sqrt{GM_\odot / \hat{r}^3}$ – орбитальная частота (кеплеровская угловая скорость в районе центральной плоскости диска). В работе [13] эта оценка для турбулентного потока была несколько уточнена $\omega_{turb} \approx \zeta \Omega_{K,mid}$, где $\zeta \approx 0.0126$.

Для малых сферических частиц (например, с диаметром $\ll 1$ см на 1 а.е., или ~ 600 см на 10 а.е.) время динамической релаксации определяется законом Эпштейна $\tau_{relax}^{Ep} = \rho_d \hat{d}_d / 2\rho c_{sg}$ [см. формулу ((21), часть I)]. Здесь $\hat{d}_d < \lambda_g$ – длина свободно-

го пробега молекул газа; $\lambda_g \sim 1$ см на 1 а.е. Однако для грубодисперсных сферических частиц эта формула несколько видоизменяется. Наиболее простое выражение для τ_{relax} можно получить, когда число Рейнольдса для пыли $Re_d = \hat{d}_d |\mathbf{w}| / v_g = 2\hat{d}_d |\mathbf{w}| / \lambda_g c_{sg}$ имеет достаточно малые значения, $Re_d < 1$ (что имеет место для так называемых стоксовых частиц). Это неравенство справедливо, например, для частиц с диаметрами между 1 и 10 см на 1 а.е., и между 600 и 1000 см на 10 а.е. [21]. В этом случае, согласно формуле ((22), часть I), коэффициент аэродинамического сопротивления $C_D = 9Re_d^{-1}$ и время динамической релаксации τ_{relax} будут определяться законом Стокса ($\hat{d}_d > \lambda_g$)

$$\tau_{relax}^{St} = \hat{d}_d \rho_d / 2\bar{\rho} C_D |\mathbf{w}| \cong \hat{d}_d \rho_d Re_d / 18\bar{\rho} |\mathbf{w}| = \rho_d \hat{d}_d^2 / 18\bar{\rho} v_g. \quad (13)$$

Таким образом, инерционность стоксовой частицы зависит от характеристик среды, в которой она движется. Кроме того, если частицы не слишком малы (и в силу этого увлекаются несущими их молями газа не полностью), то их относительные скорости, приобретаемые за счет турбулентных пульсаций, существенно зависят от их массы. Заметим, что в случае движения нестоксовой частицы ее инерционность зависит от числа Рейнольдса для пыли Re_d и может быть записана в виде

$$\tau_{relax} = \tau_{relax}^{St} / C(Re_d), \text{ где}$$

$$C(Re_d) = \begin{cases} 1 + 0.179 Re_d^{1/2} + 0.013 Re_d, & Re_d \leq 10^3; \\ 0.0183 Re_d, & Re_d > 10^3 \end{cases} \quad (14)$$

– некоторая поправочная функция, учитывающая влияние сил инерции на время релаксации нестоксовой частицы (коэффициент аэродинамического сопротивления частицы равен $C_D(Re_d) = 9Re_d^{-1} C(Re_d)$). Разность пульсационных скоростей частиц разного размера обуславливает их сближение и увеличивает вероятность столкновений. С этим обстоятельством связан также и инерционный механизм коагуляции частиц в турбулентном потоке. Таким образом, для полидисперсной дисковой среды справедлива формула (ср., например, [63])

$$Sc^{turb} = \frac{v^{turb}}{D_d^{turb}} \cong (1 + Stk) \sqrt{1 + 3|\bar{\mathbf{w}}|^2 / 2b}, \quad Stk = \zeta \Omega_{K,mid} \frac{\rho_d \hat{d}_d^2}{18\rho v_g C(Re_d)}. \quad (15)$$

Определяющее уравнение для осредненной скорости относительного движения фаз. Осредняя определяющее уравнение ((19)*, часть I) для актуальных значений вектора \mathbf{W} , в результате получим

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \theta_{gd} \bar{\mathbf{w}} &\cong -D\bar{\mathbf{w}} / Dt - \overline{(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}} + \nabla \bar{p} / \bar{\rho}_g = \\ &= -D\bar{\mathbf{w}} / Dt - \mathbf{J}_v^{turb} \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}} - \overline{\mathbf{u}'' \cdot \nabla \mathbf{w}'} - \overline{(\bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \langle \mathbf{u} \rangle} - \overline{(\mathbf{w}' \cdot \nabla) \mathbf{u}''} + \nabla \bar{p} / \bar{\rho}_g - \overline{(\bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \mathcal{J}_v^{turb}} = \\ &= -D\bar{\mathbf{w}} / Dt - \overline{(\bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \langle \mathbf{u} \rangle} + \nabla \bar{p} / \bar{\rho}_g. \end{aligned} \quad (16)$$

При получении этого соотношения мы пренебрегли пульсациями относительной скорости \mathbf{w}' (что справедливо для достаточно крупных частиц, когда $\bar{\mathbf{w}} \gg \mathbf{w}'$) и произведениями осредненных термодинамических потоков различной природы, как членами второго порядка малости. Кроме этого, здесь было использовано тождественное преобразование

$$\overline{d\mathcal{A}/dt} \equiv D\bar{\mathcal{A}}/Dt + \mathcal{J}_v^{turb} \cdot \nabla \bar{\mathcal{A}} + \overline{\mathbf{u}'' \cdot \nabla \mathcal{A}'}, \quad (17)$$

которое может быть получено путем осреднения производной $d\mathcal{A}/dt$.

2. Осредненное уравнение Смолуховского

Турбулентность приводит к двоякого рода явлениям, влияющим на процесс коагуляции в дисперсной системе. Во-первых, под действием турбулентных пульсаций частицы приобретают дополнительную относительную скорость, что в свою очередь изменяет ядро коагуляции $K(w, u)$, характеризующее вероятность столкновения частиц в системе (см., например, [33]). Здесь с известной определенностью пока можно говорить о двух эффектах, ускоряющих коагуляцию. Первый из них связан с увеличением коэффициента захвата за счет турбулентного перемешивания, в результате чего число столкновений твердых частиц существенно увеличивается по сравнению с ламинарным потоком. Второй эффект связан с наличием сдвига в поле скоростей турбулентного потока, который приводит к изменению условий захвата в области значений $K(w, u)$, близких к нулю, и увеличивает вероятность коагуляции мелких частиц (см., например, [64]).

Явления второго типа связаны с коллективным поведением частиц в турбулизованной системе. Турбулентность, увеличивая локальные неоднородности распределения коагулирующих частиц до масштабов, сравнимых со средним расстоянием между частицами, приводит к возникновению флуктуаций функции распределения частиц по размерам $f(u, \mathbf{r}, t)$ на макроскопических расстояниях. С физической точки зрения это колебание концентрации частиц с объемом u , в силу нелинейного характера уравнений коагуляции (33, часть I), приводит к тому, что в области с повышенной концентрацией частиц коагуляция ускоряется, а с пониженной – замедляется, так что в среднем это приводит к иной скорости коагуляции, чем в однородном случае ($u = const$), и способствует более быстрому появлению крупных частиц.

Такой процесс может быть описан формальным осреднением уравнения коагуляции (33, часть I)

$$\begin{aligned} & \bar{\rho} D \left(\overline{f(u)/\bar{\rho}} \right) / Dt + \nabla \cdot \left(\mathbf{J}_f^{turb}(u) + \overline{f(u)} \langle C_g \rangle \bar{\mathbf{w}} \right) = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^u \overline{f(w)} \overline{f(u-w)} K(w, u-w) dw - \overline{f(u)} \int_0^\infty \overline{f(w)} K(w, u) dw + \\ & = \frac{1}{2} \int_0^u \overline{f'(w)} \overline{f'(u-w)} K(w, u-w) dw - \int_0^\infty \overline{f'(u)} \overline{f'(w)} K(w, u) dw, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\mathcal{J}_f^{turb}(u) := \overline{\rho(f/\rho)'' \mathbf{u}''} = -\bar{\rho} \mathcal{D}_u^{turb} \nabla \left(\overline{f(u)/\bar{\rho}} \right)$ – турбулентный поток пылевых частиц объема u ; $\langle C_g \rangle = (1 - \bar{s}) \bar{\rho}_g / \bar{\rho}$; \mathcal{D}_u^{turb} – коэффициент турбулентной диффузии для частиц u -фракции, выражение для которого получено, например, в работе [65].

Уравнение (17) является незамкнутым, поскольку функция $\gamma(u, w) := \overline{f'(u)f'(w)}$ не определена. Уравнение для $\gamma(u, w)$ можно получить путем умножения исходного уравнения (33, часть I) на f и последующего стохастического осреднения по ансамблю возможных реализаций, в результате чего получится уравнение, содержащее среднее от произведения трех функций f' . Подобная операция приводит к бесконечной цепочке уравнений. Проблема замыкания последней может быть решена лишь путем введения какой-либо гипотезы.

Если проинтегрировать уравнение (18) по размеру u , то получим уравнение для осредненного полного числа дисперсных частиц $\bar{N}_d(\mathbf{r}, t)$ в виде:

$$\bar{\rho}D(\bar{N}_d / \bar{\rho}) / Dt = -\nabla \cdot (\mathbf{J}_{N_d}^{turb} + \bar{N}_d(1 - \bar{s})\bar{\rho}_g \bar{\mathbf{w}} / \bar{\rho}) - \\ - \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty K(w, u) \bar{f}(w) \bar{f}(u) dw du - \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty K(w, u) \gamma(u, w) dw du + \sum_k \sum_{\rho=1}^r v_{d(k), \rho} \bar{\xi}_\rho,$$

где $\mathcal{J}_{N_d}^{turb} = \int_u \mathcal{J}_f^{turb}(u) du$ – турбулентный поток числа пылевых частиц, для которого справедливо представление $\mathcal{J}_{N_d}^{turb} = \overline{N_d \mathbf{u}''} = \mathcal{J}_d^{turb} / \rho_d \hat{u}_d$. Так как функция $\gamma(u, w)$ должна быть положительно определенной в силу своей симметрии по u и w , то коагуляция в турбулизованной среде с неравномерно распределенными частицами должна происходить быстрее. В заключение заметим, что вопрос о влиянии флуктуаций на скорость коагуляции, несмотря на свою важность, до настоящего времени является практически неразработанным и требует дальнейшего исследования.

3. Осредненное уравнение движения гетерогенной среды

Осредняя по Фавру мгновенное уравнение движения (формула (35), часть I) газопылевой смеси, рассматриваемой как единое целое, при учете операторного соотношения (2) получим

$$\bar{\rho}D\langle \mathbf{u} \rangle / Dt = -\nabla \bar{p}_{sum} + \nabla \cdot (\mathcal{R} + \bar{\mathcal{P}}_{sum} + \bar{\mathcal{P}}_{rel}) + \bar{\rho}G \mathcal{M}_\odot |\tilde{\mathbf{r}}|^{-3} \tilde{\mathbf{r}}, \quad (19)$$

где $\mathcal{R} := -\overline{\rho \mathbf{u}'' \mathbf{u}''} = -\bar{\rho} \langle \mathbf{u}'' \mathbf{u}'' \rangle$ – тензор турбулентных (рейнольдсовых) напряжений, являющийся симметричным тензором второго ранга и описывающий турбулентные напряжения, обусловленные пульсациями поля турбулентных скоростей газопылевого континуума в целом; $\bar{\mathcal{P}}_{rel}$ – осредненный тензор «относительных» напряжений, который возникает из-за инерционных эффектов относительного движения фракции твердых частиц и газа [см. (37), часть I)]; $\bar{\mathcal{P}}_{sum} = \sum_\alpha \bar{\mathcal{P}}_\alpha \cong \bar{\mathcal{P}}_g$ – тензор, равный сумме тензоров вязких напряжений для отдельных фаз, (по предположению $\mathcal{P}_d \cong 0$).

Заметим, что в развитом турбулентном двухфазном потоке, т.е. при больших значениях глобального числа Рейнольдса $Re_{glob} = Lu_0 / \nu$, соответствующего круп-

номасштабным движениям газозвеси (здесь u_0, v – типичная скорость среды и эффективная кинематическая вязкости газозвеси на расстояниях порядка макромасштаба турбулентности L) можно пренебречь осредненным тензором вязкости $\bar{\mathcal{P}}$ по сравнению тензором Рейнольдса \mathcal{R} , за исключением тонкого вязкого подслоя пыли, примыкающего к центральной плоскости диска). Это справедливо для экзопланетного дифференциально вращающегося кеплеровского диска с характерным значением числа Рейнольдса $Re_{glob} \geq 10^{10}$, поскольку турбулентная вязкость его вещества на 8 и более порядков выше молекулярной, что следует из наблюдаемого распределения углового момента и массы в Солнечной системе и в многочисленных системах молодых звезд с дисками (см., например, [66]). Однако сказанное не относится к осредненному тензору «напряжений относительного движения фаз» $\bar{\mathcal{P}}_{rel}$, влияние которого на двухфазное течение дисковой среды может быть сопоставимым по порядку величины с тензором Рейнольдса \mathcal{R} . В частности, в окрестности субдиска, где значительна концентрация пылевых частиц достаточно крупных размеров (и, следовательно, $\bar{\mathbf{w}} \gg 0$), эти «сдвиговые» напряжения действуют особенно эффективно, приводя к дополнительной турбулизации потока, правда, в объеме, сопоставимом с объемом пылевого слоя, т.е. малом по сравнению со всем объемом диска [4].

Можно показать, используя консервативность лагранжевых пульсаций $(\mathbf{u}'')_L \cong 0$ среднемассовой скорости газопылевого потока, что тензор Рейнольдса \mathcal{R} (в случае изотропного турбулентного поля) связан с градиентами $\nabla \langle \mathbf{u} \rangle$ осредненной по Фавру скорости течения следующим определяющим соотношением [24].

$$\mathcal{R} = -\frac{2}{3} \bar{\rho} b \mathbf{I} + 2\bar{\rho} v^{turb} \overset{\circ}{\mathcal{D}}, \quad \overset{\circ}{\mathcal{D}} \equiv \mathcal{D} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle, \quad (20)$$

где $\mathcal{D} := \frac{1}{2} [\nabla \langle \mathbf{u} \rangle + (\nabla \langle \mathbf{u} \rangle)^{tr}]$ – тензор осредненных деформаций; $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ – тензор осредненных скоростей деформаций, v^{turb} – кинематический коэффициент турбулентной вязкости газопылевой смеси. Возможная в дифференциально вращающемся газопылевом облаке анизотропия коэффициентов турбулентной вязкости v^{turb} проанализирована в работе [67].

В соотношении (20) входит ключевая в теории турбулентности величина $b := \overline{\rho |\mathbf{u}''|^2} / 2\bar{\rho}$ – турбулентная энергия (осредненное значение кинетической энергии турбулентных пульсаций среднемассовой скорости газопылевого континуума), для нахождения которой необходимо иметь, в общем случае, соответствующее балансовое уравнение [см. уравнение (40)].

Осредненный тензор «относительных» напряжений $\bar{\mathcal{P}}_{rel}$ в уравнении (19) с учетом принятых выше предположений можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}}_{rel} &\equiv -\overline{\rho C_d C_g \mathbf{w} \mathbf{w}} = -\overline{\rho C_d C_g (\bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}} + \mathbf{w}' \mathbf{w}')} - \overline{\mathbf{w} \mathbf{w} (\rho C_d C_g)'} \equiv \\ &\equiv -\bar{s} \rho_d \langle C_g \rangle (\bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}} + \overline{\mathbf{w}' \mathbf{w}'}) - 2\bar{\mathbf{w}} \left(\rho_d \overline{\mathbf{w}' s'} \langle C_g \rangle + \overline{\rho C_g'' \mathbf{w}' \langle C_d \rangle} + \overline{\rho C_d'' C_g'' \mathbf{w}'} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что в соотношениях подобного типа обычно пренебрегают всеми корреляционными членами и учитывают только первое слагаемое (см., например, [68, 69]); тогда

$$\overline{\mathcal{P}_{rel}} \cong -\bar{s}\rho_d \langle C_g \rangle \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}}, \quad (21)$$

что, разумеется, справедливо лишь в том случае, когда скорость осредненного относительного движения фаз $\bar{\mathbf{w}}$ намного больше скорости пульсаций \mathbf{w}' , т.е. для достаточно крупных пылевых частиц. Для малоинерционных мелко- и среднедисперсных частиц выражение (21) несколько видоизменяется $\overline{\mathcal{P}_{rel}} = -\bar{\rho} \zeta \overline{\mathbf{w} \mathbf{w}} \mathcal{R}$, где $\mathcal{R}_{rel} \equiv -\bar{\rho}_g \langle C_d \rangle \overline{\mathbf{w}' \mathbf{w}'}$ – дополнительный тензор рейнольдсовых напряжений, обусловленный пульсациями поля относительных скоростей фаз. В рамках градиентных моделей возможны два подхода к определению подобного рода парных корреляций. Согласно первому из них корреляционные моменты \mathcal{R}_{rel} для относительно мелких частиц выражаются непосредственно через рейнольдсовы напряжения \mathcal{R} газопылевого континуума в целом, т.е. $\mathcal{R}_{rel} = \beta \mathcal{R}$, где β – коэффициент вовлечения дисперсных частиц в пульсационное движение газа [70]. Вторым способом определения дополнительных турбулентных напряжений \mathcal{R}_{rel} является использование градиентных соотношений типа (20), с заменой скоростей $\langle \mathbf{u} \rangle$ на $\bar{\mathbf{w}}$ и определением соответствующего коэффициента «турбулентной вязкости» [71].

4. Осредненное уравнение для внутренней энергии

Энергетическое уравнение масштаба среднего движения для газопылевой дисковой системы в целом получим, осредняя по ансамблю возможных реализаций уравнение ((45), часть I) для суммарной энтальпии H_{sum} истинного мгновенного движения; в результате будем иметь

$$\bar{\rho} \frac{D \langle H_{sum} \rangle}{Dt} = \overline{\frac{dp_{sum}}{dt}} - \nabla \cdot (\mathbf{q}^{turb} + \mathbf{q}^{rad} + \bar{\mathbf{q}}_{sum}) + \overline{\Phi_u} + R_{gd} \overline{|\mathbf{w}|^2} - s \sigma \mathbf{w} \cdot \nabla p, \quad (22)$$

где $\mathbf{q}^{turb} := \overline{\rho H'' \mathbf{u}''} \cong \langle c_p \rangle \overline{\rho T'' \mathbf{u}''} + \sum_{\alpha} \langle h_{\alpha} \rangle \mathcal{J}_{\alpha}^{turb}$ – турбулентный поток тепла, возникающий благодаря корреляции между пульсациями энтальпии H'' вещества и гидродинамической скорости \mathbf{u}'' ; $\mathbf{q}^{rad} := \overline{\rho H''_{rad} \mathbf{u}''} \cong \langle c_{p,rad} \rangle \overline{\rho T'' \mathbf{u}''}$, – турбулентный радиационный поток тепла; $\langle c_{p,rad} \rangle \equiv 16a \langle T \rangle^3 / 3\bar{\rho}$, a – постоянная плотности излучения. Приближенные соотношения для потоков тепла \mathbf{q}^{turb} и \mathbf{q}^{rad} записаны с точностью до членов, содержащих тройные корреляции. Формулу для потока \mathbf{q}^{turb} легко получить, используя известные свойства осреднения Фавра [35,60] и выражение $H'' = \langle c_p \rangle T'' + \sum_{\alpha} C_{\alpha}'' \langle h_{\alpha} \rangle + (c_p'' T'')$ для пульсации удельной энтальпии

вещества диска (здесь $\langle c_p \rangle = \sum_{\alpha} c_{p\alpha} \langle C_{\alpha} \rangle$, $c_p'' = \sum_{\alpha} c_{p\alpha} C_{\alpha}''$ – соответственно, осредненная и пульсационная составляющие удельной теплоемкости смеси при постоянном давлении; $c_{p\alpha} \cong const$).

Осредненные энтальпии излучения и вещества определяются выражениями $\langle H \rangle \cong \langle c_p \rangle \langle T \rangle + \sum_{\alpha} h_{\alpha}^0 \langle C_{\alpha} \rangle$, и $\langle H_{rad} \rangle \cong \frac{4}{3} a \langle T \rangle^4 / \bar{\rho}$, которые следуют из соотношений ((43) и (44), часть I). Субстанциональную производную от суммарного давления в уравнении (22) можно записать, при учете формулы (17), в виде

$$\overline{dp_{sum}/dt} = D\bar{p}_{sum}/Dt + \mathcal{J}_v^{turb} \cdot \nabla \bar{p}_{sum} + \nabla \cdot \overline{p'_{sum} \mathbf{u}''} - \overline{p'_{sum} \nabla \cdot \mathbf{u}''}. \quad (23)$$

Осредненную диссипативную функцию $\Phi_u \cong \mathcal{P}_{sum} : \nabla \mathbf{u}$ можно представить в виде $\overline{\Phi_u} = (\overline{\mathcal{P}_{sum}} : \mathcal{D}) + \bar{\rho} \langle \varepsilon_e \rangle$, где $\bar{\rho} \langle \varepsilon_e \rangle := \overline{\mathcal{P}_{sum} : \nabla \mathbf{u}''}$ – скорость диссипации турбулентной кинетической энергии газопылевой смеси в тепло под действием «молекулярной» вязкости (вторая ключевая характеристика в теории гетерогенной турбулентности). В случае развитой турбулентности диссипативное слагаемое $\bar{\rho} \langle \varepsilon_e \rangle$ принимает вид [35],

$$\bar{\rho} \langle \varepsilon_e \rangle \cong \left(\overline{\mathcal{P}_{sum} : \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathcal{J}_v^{turb}} \right) + \overline{(\mathcal{P}' : \nabla \mathbf{u}') \approx (\mathcal{P}' : \nabla \mathbf{u}')} := \bar{\rho} \varepsilon \geq 0. \quad (24)$$

Следует отметить, что величина ε (так называемая «истинная» диссипация турбулентной энергии) всегда положительна. Подставляя (23) и (24) в уравнение (22), получим следующий вид энергетического уравнения газопылевой смеси

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D\langle H_{sum} \rangle}{Dt} &= \frac{D\bar{p}_{sum}}{Dt} - \nabla \cdot \left\{ \mathbf{q}_{sum}^{turb} - \overline{p'_{sum} \mathbf{u}''} + \bar{\mathbf{q}}_{sum} \right\} + (\overline{\mathcal{P}_{sum}} : \mathcal{D}) + \\ &+ \overline{R_{gd} |\mathbf{w}|^2 - \sigma \mathbf{w} \cdot \nabla p} + \mathcal{J}_v^{turb} \cdot \nabla \bar{p}_{sum} - \overline{p'_{sum} \nabla \cdot \mathbf{u}''} + \bar{\rho} \varepsilon. \end{aligned} \quad (25)$$

Для замыкания этого уравнения необходимы определяющие соотношения для турбулентных потоков тепла; эти соотношения, полученные в монографии [35], имеют вид

$$\mathbf{q}^{turb} = \overline{p' \mathbf{u}''} - \chi^{turb} \left\{ \nabla \langle T \rangle - \frac{1}{\bar{\rho} \langle c_p \rangle} \nabla \bar{p} \right\} + \sum_{\alpha} \langle h_{\alpha} \rangle \mathcal{J}_{\alpha}^{turb}, \quad (26)$$

$$\mathbf{q}_{rad}^{turb} = \overline{p'_{rad} \mathbf{u}''} - \chi_{rad} \left\{ \nabla \langle T \rangle - \frac{1}{\bar{\rho} \langle c_{P,rad} \rangle} \nabla \bar{p}_{rad} \right\}. \quad (27)$$

Здесь $\chi^{turb} = \bar{\rho} \langle c_p \rangle \frac{\nu^{turb}}{Sc^{turb}}$, $\chi_{rad} = \frac{4ac \langle T \rangle^3}{3k\bar{\rho}}$ – соответственно коэффициент турбулентной теплопроводности газопылевой среды и коэффициент турбулентной лучистой теплопроводности; $\langle c_p \rangle = \left[\bar{\rho}_g (1 - \bar{s}) + \rho_d \bar{s} c_{Pd} \right] / \bar{\rho}$ – осредненная удельная теп-

лоемкость для суммарного континуума. Далее будем предполагать, что поскольку в турбулизованной смеси, как правило, имеет место равенство турбулентных коэффициентов диффузии и теплопроводности ($\chi^{turb} / \bar{\rho} \langle c_p \rangle = \mathcal{D}^{turb}$), то справедливо также и равенство $Sc^{turb} = Pr^{turb}$, что равносильно равенству путей смешения для вещества и тепла.

В соответствии с выражением (26) существует два механизма передачи тепловой энергии в осредненном газопылевом потоке:

1) в результате наличия градиента температуры (точнее потенциальной температуры $\theta := const \cdot \langle T \rangle / \bar{p}^{(R)/(c_p)}$), поскольку

$$\partial \ln \langle T \rangle / \partial z + G_a / \langle T \rangle \approx \nabla \ln \langle T \rangle - \nabla \bar{p} / (\bar{\rho} \langle c_p \rangle \langle T \rangle) = \nabla \ln \theta, \quad (28)$$

где $G_a \equiv g_z / \langle c_p \rangle$ – адиабатический градиент температуры;

2) потоками турбулентной диффузии $\mathcal{J}_\alpha^{turb} = -\bar{\rho} \mathcal{D}^{turb} \nabla \langle C_\alpha \rangle$ [см. (10)], причем каждая частица вещества фазы α переносит с собой в среднем $\langle h_\alpha \rangle$ тепловой энергии (заметим, что поскольку $\sum_\alpha \mathcal{J}_\alpha^{turb} = 0$, то и $\mathcal{D}_d^{turb} = \mathcal{D}_g^{turb} = \mathcal{D}^{turb}$). Следует также отметить, что первые члены в (26) и (27) не играют роли потока энергии, поскольку величина $\overline{p'_{sum} \mathbf{u}''}$ выпадает из полного энергетического уравнения (25), и оставлены в формулах (26) и (27) только из соображений удобства.

Получим теперь полезную при моделировании турбулизованной газозвеси форму записи соотношения (26). Используя (10) для преобразования (26), в результате будем иметь

$$\mathbf{q}^{turb} = \overline{p' \mathbf{u}''} - \chi^{turb} \left\{ \nabla \langle T \rangle - \frac{1}{\bar{\rho} \langle c_p \rangle} \nabla \bar{p} \right\} - \mathcal{D}^{turb} \bar{\rho} \sum_\alpha \langle h_\alpha \rangle \nabla \langle C_\alpha \rangle. \quad (29)$$

Здесь сделано обычное для теории турбулентности предположение о равенстве единице турбулентного числа Льюиса, $Le^{turb} := \chi^{turb} / \bar{\rho} \langle c_p \rangle \mathcal{D}^{turb} = 1$ [72].

Энергетическое уравнение (25) удобно записать через суммарную энергию $\langle E_{sum} \rangle$ вещества и излучения. Используя для этого преобразование

$$\bar{\rho} D \langle E_{sum} \rangle / Dt + \bar{p}_{sum} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = \bar{\rho} D \langle H_{sum} \rangle / Dt - D \bar{p}_{sum} / Dt$$

(являющееся следствием соотношения $\langle H_{sum} \rangle = \langle E_{sum} \rangle + \bar{p}_{sum} / \bar{\rho}$ и осредненного уравнения неразрывности (1)), для развитого турбулентного течения в диске получим

$$\begin{aligned} \bar{\rho} D \langle E_{sum} \rangle / Dt + \nabla \cdot \left(\mathbf{q}_{sum}^{turb} - \overline{p'_{sum} \mathbf{u}''} + \bar{\mathbf{q}}_{sum} \right) = -\bar{p}_{sum} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \left(\bar{\mathcal{P}}_{sum} : \mathbf{D} \right) + \\ + R_{gd} \overline{|\mathbf{w}|^2} - s \sigma \mathbf{w} \cdot \nabla p + \mathcal{J}_v^{turb} \cdot \nabla \bar{p}_{sum} - \overline{p'_{sum} \nabla \cdot \mathbf{u}''} + \bar{\rho} \varepsilon. \end{aligned} \quad (30)$$

Турбулентный поток удельного объема. Получим теперь определяющее соотношение для турбулентного потока \mathcal{J}_v^{turb} в газопылевой среде. Для его вывода найдем сначала выражение для пульсаций плотности ρ'_g газовой составляющей смеси. Используем для этой цели уравнение состояния совершенного многокомпонентного газа

$$p = p_g = kT \sum_k n_{g(k)} = \rho_g \mathfrak{R}_g T. \quad (31)$$

Здесь $\mathfrak{R}_g = k \sum_k n_{g(k)} / \rho_g = k \sum_k Z_k$ – так называемая «газовая постоянная» для смеси газов; $Z_k = n_{g(k)} / \rho_g$ – удельная (на единицу массы газового континуума) числовая плотность k -ой компоненты. Представляя актуальные значения величин \mathfrak{R}_g и T в виде сумм осредненных и пульсационных величин ($\mathfrak{R}_g = \langle \mathfrak{R}_g \rangle + \mathfrak{R}_g''$, $T = \langle T \rangle + T''$), перепишем (31) в виде

$$p = \langle \mathfrak{R}_g \rangle \rho_g \langle T \rangle + k \rho_g \langle T \rangle \sum_{k=1}^n Z_k'' + \langle \mathfrak{R}_g \rangle \rho_g T'' + k \rho_g \sum_{k=1}^n (Z_k'' T''). \quad (32)$$

Если осреднить по Рейнольдсу выражение (32), то получим осредненное уравнение состояния для давления газозвеси

$$\bar{p} = \langle \mathfrak{R}_g \rangle \bar{\rho}_g \langle T \rangle + k \bar{\rho}_g \sum_{k=1}^n \langle Z_k'' T'' \rangle \cong \langle \mathfrak{R}_g \rangle \bar{\rho}_g \langle T \rangle. \quad (33)$$

Используя теперь (32) и (33), легко получить следующее выражение для пульсации плотности газа ρ'_g [35]

$$\frac{\rho'_g}{\bar{\rho}_g} = \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{\rho_g T''}{\bar{\rho}_g \langle T \rangle} - \frac{k \langle T \rangle \rho_g}{\bar{p}} \sum_{k=1}^n Z_k''. \quad (34)$$

Заметим теперь, что при малых числах Маха Ma почти всегда можно пренебречь относительными пульсациями давления газозвеси по сравнению с относительными пульсациями температуры [73]. Этот результат справедлив, по-видимому, вплоть до $Ma = 5$ и для турбулентных движений в тонких аккреционных дисках: движение вдоль r - и z - направлений происходят с дозвуковыми скоростями, а скорость вращения u_ϕ превосходит скорость звука c_{gs} (условие тонкости диска $h_{disk} \ll r$ вместе с выражением $h_{disk} \approx c_{gs} / \Omega_{K,mid}$ для толщины диска приводит к оценке $h_{disk} / r \approx c_{gs} / u_\phi \ll 1$). В предположении, что средняя масса газовой фазы

смеси не флуктуирует, получим $\sum_{k=1}^n Z_k'' = (n_g / \rho_g)'' = 0$. Тогда, с учетом формулы (34)

корреляционный член $\overline{\rho'_g u''} / \bar{\rho}$ в соотношении (10) можно записать в виде

$$-\overline{\rho'_g \mathbf{u}''} / \bar{\rho}_g = \overline{\rho C_g T'' \mathbf{u}''} / \bar{\rho}_g \langle T \rangle \cong \langle C_g \rangle \overline{\rho T'' \mathbf{u}''} / \bar{\rho}_g \langle T \rangle = \langle T'' \mathbf{u}'' \rangle / \langle T \rangle.$$

(здесь, как и всюду далее, члены с тройными корреляциями отброшены). Для окончательного преобразования этого выражения воспользуемся определяющим соотношением (26) для турбулентного потока тепла \mathbf{q}^{turb} :

$$-\frac{\overline{\rho'_g \mathbf{u}''}}{\bar{\rho}_g} \cong \frac{1}{\langle T \rangle} \overline{\rho T'' \mathbf{u}''} \cong \frac{1}{\langle T \rangle \langle c_p \rangle} \left(\mathbf{q}^{turb} - \sum_{\alpha} \langle h_{\alpha} \rangle \mathcal{J}_{\alpha}^{turb} \right). \quad (35)$$

Наконец, подставляя (10) и (35) в (8) и учитывая (26), в результате получим следующее определяющее соотношение для турбулентного потока удельного объема гетерогенной смеси

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_v^{turb} &= -\langle \sigma \rangle \frac{\bar{p}}{\rho_d \bar{\rho}_g} \mathcal{J}_d^{turb} + \frac{1}{\langle T \rangle \langle c_p \rangle} \left(\mathbf{q}^{turb} - \sum_{\alpha} \langle h_{\alpha} \rangle \mathcal{J}_{\alpha}^{turb} \right) \cong \\ &\cong \bar{\rho} \frac{\mathbf{v}^{turb}}{Sc^{turb}} \left\{ \frac{\rho_d}{\bar{\rho}_g} \nabla (\bar{s} / \bar{\rho}) - \nabla \ln \langle T \rangle + \frac{\nabla \bar{p}}{\bar{\rho} \langle c_p \rangle \langle T \rangle} \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

5. Осредненные энергетические уравнения

В турбулентном течении дискового вещества, по сравнению с его ламинарным аналогом, существует большое разнообразие всевозможных механизмов обмена (скоростей перехода) между различными видами энергий движения пылевых частиц и газа, вносящих свой вклад в сохраняющуюся осредненную суммарную энергию. Для наиболее точного истолкования отдельных слагаемых энергетического баланса рассмотрим полную систему уравнений энергии для осредненных полей пульсирующих термогидродинамических параметров газопылевого облака, включая уравнение баланса кинетической энергии турбулентных пульсаций.

Уравнение баланса осредненной кинетической энергии газопылевого потока. Умножая скалярно уравнение движения (19) на скорость $\langle \mathbf{u} \rangle$ и учитывая формулу ((38) часть I) для гравитационной силы, после простых преобразований получим следующую субстанциональную форму уравнения живых сил для осредненного движения дискового вещества (теорема количества движения)

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D}{Dt} \left(\left| \langle \mathbf{u} \rangle \right|^2 / 2 \right) + \nabla \cdot \left\{ \left(\bar{p}_{sum} \mathbf{I} - \mathcal{R} - \overline{\mathcal{P}_{sum}^*} \right) \langle \mathbf{u} \rangle \right\} = \\ = \bar{p}_{sum} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle - \left(\mathcal{R} + \overline{\mathcal{P}_{sum}^*} \right) : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle - \bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \langle \Psi \rangle. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь $-\nabla \langle \Psi \rangle = \mathbf{g} = G \mathcal{M}_{\odot} \hat{\mathbf{r}} / |\hat{\mathbf{r}}|^3$; $|\langle \mathbf{u} \rangle|^2 / 2$ – удельная кинетическая энергия осредненного движения вещества диска. Хотя уравнение (37) имеет энергетическую природу, оно не является законом сохранения энергии в турбулентном континууме: это

уравнение описывает закон превращения кинетической энергии осредненного движения газозвеси в работу внешних массовых и поверхностных сил и в работу внутренних сил (и обратно) без учета необратимого перехода механической энергии диска в тепловую или другие виды энергии.

Поясним физический смысл отдельных членов уравнения (37): величина $\nabla \cdot (\bar{p}_{sum} \langle \mathbf{u} \rangle)$ связана с оттоком механической энергии из единицы объема дисковой среды за единичный интервал времени; дивергенция $\nabla \cdot \left[\left(\mathcal{R} + \overline{\mathcal{P}_{sum}^*} \right) \langle \mathbf{u} \rangle \right]$ представляет собой скорость, с которой полное поверхностное напряжение $\mathcal{R} + \overline{\mathcal{P}_{sum}^*}$ в осредненной движущейся системе «газозвесь плюс излучение» совершает работу в единичном объеме; величина $\bar{p}_{sum} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle$ (> 0 , или < 0) связана со скоростью обратного адиабатического превращения внутренней энергии (тепла) $\langle E_{sum} \rangle$ в механическую энергию системы [см. (30)] и представляет собой работу, совершаемую за единицу времени в единичном объеме против суммарного давления \bar{p}_{sum} потоком движущейся газозвеси; знак величины $\bar{p}_{sum} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle$ зависит от того, будет ли поток смеси расширяться ($\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle > 0$) или сжиматься ($\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle < 0$); величина $\left(\mathcal{R} + \overline{\mathcal{P}_{sum}^*} \right) : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle$ представляет собой полную скорость необратимого превращения кинетической энергии среднего движения в другие формы энергии [см. (30), (40) и (43)], причем диссипация энергии происходит как под влиянием «молекулярной» вязкости со скоростями $\overline{\mathcal{P}_{sum}} : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle$ и $\overline{\mathcal{P}_{rel}} : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle$, так и под влиянием турбулентной вязкости со скоростью $\mathcal{R} : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle$.

Если сложить уравнение (37) и уравнение баланса потенциальной энергии вещества диска

$$\bar{\rho} D \langle \Psi \rangle / D t = \partial (\bar{\rho} \langle \Psi \rangle) / \partial t + \nabla \cdot (\bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle \langle \Psi \rangle) = \bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \langle \Psi \rangle, \quad (38)$$

то в результате получим следующее уравнение переноса для осредненной механической энергии турбулизованного газопылевого потока

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D}{D t} \left(\left| \langle \mathbf{u} \rangle \right|^2 / 2 + \langle \Psi \rangle \right) + \nabla \cdot \left\{ \left[\bar{p}_{sum} \mathbf{I} - \mathcal{R} - \overline{\mathcal{P}_{sum}} - \overline{\mathcal{P}_{rel}} \right] \langle \mathbf{u} \rangle \right\} = \\ = \bar{p}_{sum} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle - \left(\mathcal{R} + \overline{\mathcal{P}_{sum}} + \overline{\mathcal{P}_{rel}} \right) : \nabla \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (39)$$

Уравнение баланса осредненной кинетической энергии относительного движения фаз. Осредняя уравнение ((43), часть I) и пренебрегая корреляционными членами третьего порядка (и тем самым турбулентной кинетической энергией межфазной диффузии, а также произведениями термогидродинамических потоков (например, членами типа $\overline{\mathcal{P}_{rel}} : \nabla \mathcal{J}_v^{turb}$) в газопылевом континууме, как величинами второго порядка малости, в результате получим

$$\bar{\rho} \frac{D}{D t} \left(\langle C_d \rangle \langle C_g \rangle \left| \bar{\mathbf{w}} \right|^2 / 2 \right) \approx \bar{\rho} \langle C_d \rangle \langle C_g \rangle \frac{D}{D t} \left(\left| \bar{\mathbf{w}} \right|^2 / 2 \right) \equiv$$

$$\cong -R_{gd} |\mathbf{w}|^2 + s\sigma(\mathbf{w} \cdot \nabla p) + (\bar{\mathcal{P}}_{rel} : \mathcal{D}) - \bar{\rho}\sigma_{rel}, \quad (40)$$

где $\sigma_r \dot{e} \bar{l} = \overline{\mathcal{P}_{re} \dot{W} T}$ – дополнительный источник генерирования турбулентной энергии b , связанный с присутствием средних и крупных инерционных частиц в потоке [см. (44)].

Заметим, что турбулентной кинетической энергией межфазной диффузии, как величиной третьего порядка малости, мы пренебрегаем и тем самым не рассматриваем конкретный вид связанного с наличием мелкодисперсных частиц дополнительного диссипативного члена [74] в уравнении переноса турбулентной энергии газопылевой среды (43), рассматриваемой как единое целое. Важно отметить, что в случае течения со средними и крупными частицами, время релаксации которых значительно, величина дополнительной диссипации энергии турбулентности будет пренебрежимо мала по сравнению с другими членами уравнения (43) (см., например, [75]). Здесь диссипация тепла $(\bar{\mathcal{P}}_{rel} : \mathcal{D})$ (представляющая собой среднее значение работы, совершаемой тензором относительных напряжений над градиентом скорости $\nabla \langle \mathbf{u} \rangle \neq 0$ вследствие относительного сдвига скоростей фаз при орбитальном движении дискового вещества) связана со скоростью перехода кинетической энергии диффузии в кинетическую энергию осредненного движения газопылевой смеси в целом [ср. с (37)]. Следует иметь в виду, что согласно [76] только за крупными частицами (при числах Рейнольдса обтекания частиц $Re_d > 400$) возникают турбулентные вихревые следы, дестабилизирующие течение газовой составляющей и трансформирующие энергию осредненного относительного движения в высокочастотные компоненты энергетического спектра турбулентности. Мелкие же частицы ($Re_d < 110$) преимущественно подавляют энергию турбулентности, расходуя ее на собственное ускорение (т.е. на вовлечение в пульсационное движение полидисперсного потока), причем с уменьшением инерционности частиц (до известной степени) ламинаризирующее воздействие дисперсной фазы на поток возрастает. Что касается частиц средних размеров ($110 < Re_d < 400$), то они оказывают смешанное влияние на дисковую турбулентность.

Баланс турбулентной энергии. Рассмотрим теперь уравнение переноса турбулентной энергии $b := |\mathbf{u}''|^2 / 2$ газопылевого вещества аккреционного диска. Это фундаментальное в теории турбулентности уравнение, или некоторые его модификации, лежит в основе многих современных полуэмпирических теорий турбулентности (см. [72, 77]). С помощью уравнения для величины b в случае гетерогенной среды можно, в частности, проанализировать динамическое воздействие дисперсной фазы на интенсивность турбулентности в газопылевой дисковой среде, а также разработать феноменологический способ моделирования коэффициента турбулентной вязкости среды с учетом влияния обратных эффектов переноса пыли и «потенциальной» температуры на затухание (поддержание) сдвиговой турбулентности в протопланетном облаке. Балансовое уравнение для b может быть получено различными способами (см. [35]), одним из которых мы воспользуемся и в рассматриваемом здесь случае двухфазной среды.

Пусть $\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)$ – актуальное значение какой-либо скалярной величины (в частности, это могут быть компоненты вектора), субстанциональный баланс которой имеет вид $\rho d\mathcal{A}/dt = -\nabla \cdot \mathcal{J}_{\mathcal{A}} + \sigma_{\mathcal{A}}$, где $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$ и $\sigma_{\mathcal{A}}$ – соответственно вектор субстанциональной плотности потока и объемная плотность источника признака \mathcal{A} . Например, для уравнения движения:

$$\mathcal{A} := \mathbf{u}, \quad \mathcal{J}_{\mathcal{A}} := -\mathcal{P}_{sum}^*, \quad \sigma_{\mathcal{A}} \equiv -p_{sum} \mathbf{I} + \rho \mathbf{g}. \quad (41)$$

Если теперь умножить тождество $d\mathcal{A}''/dt = d\mathcal{A}/dt - D\langle \mathcal{A} \rangle / Dt - \mathbf{u}'' \cdot \nabla \langle \mathcal{A} \rangle$ на $\rho \mathcal{A}''$ и результат осреднить по Рейнольдсу, то получим общий вид балансового уравнения для среднеквадратичной пульсации $\langle \mathcal{A}''^2 \rangle$ [78]

$$\bar{\rho} \frac{D\langle \mathcal{A}''^2/2 \rangle}{Dt} + \nabla \cdot \left\{ \overline{\rho \mathcal{A}''^2 \mathbf{u}''/2} + \overline{\mathcal{A}'' \mathcal{J}_{(\mathcal{A})j}} \right\} = -\mathcal{J}_{\mathcal{A}}^{turb} \cdot \nabla \langle \mathcal{A} \rangle + \overline{\mathcal{A}'' \sigma_{\mathcal{A}}} - \bar{\rho} \langle \varepsilon_{\mathcal{A}} \rangle, \quad (42)$$

Здесь $\bar{\rho} \langle \varepsilon_{\mathcal{A}} \rangle \equiv -\overline{\mathcal{J}_{\mathcal{A}} \cdot \nabla \mathcal{A}''}$ – так называемая скорость скалярной диссипации дисперсии $\langle \mathcal{A}''^2 \rangle$. Уравнение переноса (42) содержит члены, отражающие влияние на пространственно-временное распределение дисперсии $\langle \mathcal{A}''^2 \rangle$ следующих процессов: конвективного переноса, диффузии, образования за счет обмена энергии между осредненным и пульсационным движением, перераспределения (между пульсационными движениями в различных направлениях) и диссипации турбулентной характеристики $\langle \mathcal{A}''^2 \rangle$ вследствие «молекулярных» процессов переноса.

Подставляя величины (41) в (42), получим уравнение переноса турбулентной энергии

$$\bar{\rho} \frac{Db}{Dt} + \nabla \cdot \mathcal{J}_b^{turb} = \mathcal{R} : \mathcal{D} - \mathcal{J}_v^{turb} \cdot \nabla \bar{p}_{sum} + \overline{p'_{sum} \nabla \cdot \mathbf{u}''} - \bar{\rho} \langle \varepsilon_b \rangle, \quad (43)$$

где

$$\begin{cases} \mathcal{J}_b^{turb} := \overline{\rho \left(|\mathbf{u}''|^2/2 + p'_{sum}/\rho \right) \mathbf{u}''} - \overline{(\mathcal{P}_{sum} + \mathcal{P}_{rel}) \cdot \mathbf{u}''}, \\ \bar{\rho} \langle \varepsilon_b \rangle := \overline{(\mathcal{P}_{sum} + \mathcal{P}_{rel}) : \nabla \mathbf{u}''}. \end{cases}$$

Оценки отдельных членов уравнения (43), выполненные в монографии [35] для случая развитой турбулентности, позволяют записать его в виде:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{Db}{Dt} + \nabla \cdot \left\{ \overline{\rho \left(|\mathbf{u}''|^2/2 + p'_{sum}/\rho \right) \mathbf{u}''} - \overline{(\mathcal{P}_{sum}^*) \cdot \mathbf{u}''} \right\} = \\ = \mathcal{R} : \mathcal{D} + \overline{p'_{sum} \nabla \cdot \mathbf{u}'} - \mathcal{J}_v^{turb} \cdot \nabla \bar{p}_{sum} - \bar{\rho} \langle \varepsilon_b \rangle, \end{aligned} \quad (44)$$

где $\bar{\rho} \langle \varepsilon_b \rangle = \overline{(\bar{\mathcal{P}}_{sum} + \bar{\mathcal{P}}_{rel}) : \nabla \mathcal{J}_v^{turb}} + \overline{\mathcal{P}'_{sum} : \nabla \mathbf{u}'} + \overline{\mathcal{P}'_{rel} : \nabla \mathbf{u}'} \cong \bar{\rho} \varepsilon - \bar{\rho} \sigma_{rel}$ – скорость диссипации турбулентной энергии. Первый член в левой части уравнения (44) характеризует изменение во времени (а также конвективный перенос осредненным движением) турбулентной энергии диска b , а второй член – отражает перенос энергии турбулент-

ных пульсаций за счет процессов турбулентной «диффузии». Величина (диссипация энергии) $\mathcal{R}:\mathcal{D} = -\frac{2}{3}\bar{\rho}b\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle + 2\bar{\rho}v^{turb}\overset{\circ}{\mathcal{D}}:\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ в правых частях уравнений (37) и (44) фигурирует с разными знаками, и потому ее можно интерпретировать как скорость перехода кинетической энергии осредненного движения в энергию турбулентности газопылевой среды, рассматриваемой как целое. Этот гидродинамический механизм генерации турбулентности в дифференциально вращающемся кеплеровском диске рассматривается в данной работе как основной (следует подчеркнуть, что этот переход энергии является исключительно кинематическим процессом, зависящим только от выбора пространственно-временного масштаба осреднения турбулентного движения. В случае мелкомасштабной турбулентности величина $\mathcal{R}:\mathcal{D}$ всегда положительна, так что мелкомасштабная турбулентность всегда преобразует кинетическую энергию осредненного движения в кинетическую энергию турбулентных пульсаций (это так называемый диссипативный эффект мелкомасштабной турбулентности). Вместе с тем крупномасштабными турбулентными вихрями энергия турбулентности может передаваться энергии осредненного движения (см., например, [79]). Величина $\overline{p'_{sum}\mathbf{u}''}$ связана со скоростью преобразования внутренней энергии газозвеси в кинетическую энергию турбулентных вихрей и представляет собой работу, совершаемую за единицу времени в единице объема пульсирующей средой над вихрями, как следствие существования пульсаций суммарного давления p'_{sum} дисковой системы и расширения или сжатия турбулентных вихрей ($\nabla\cdot\mathbf{u}' > 0$ или $\nabla\cdot\mathbf{u}' < 0$). Величина $\mathcal{J}_v^{turb}\cdot\nabla\bar{p}_{sum}$ представляет собой скорость перехода (в единице объема среды) между турбулентной и осредненной внутренней энергиями диска, причем мелкомасштабные вихри превращают энергию турбулентности в тепло, поскольку для них величина $\mathcal{J}_v^{turb}\cdot\nabla\bar{p}_{sum} > 0$, а крупные вихревые образования, связанные с тепловой конвекцией (для которых $\mathcal{J}_v^{turb}\cdot\nabla\bar{p}_{sum} < 0$ [77]), напротив, преобразовывают тепловую энергию газопылевого потока в осредненную кинетическую энергию пульсаций скорости. Следует отметить, что этот механизм генерации турбулентности в диске, предложенный в работе [80] как основной, не может рассматриваться в таком качестве, поскольку он не всеобъемлющий и носит временный характер (см. [81,82]. Парная корреляция $\bar{\rho}\varepsilon := \overline{\mathcal{P}'_{sum}:\nabla\mathbf{u}'} > 0$ в развитом турбулентном потоке, представляющая собой среднее значение работы, совершаемой пульсациями тензора вязких напряжений над турбулентными вихрями с градиентом пульсационной скорости, $\nabla\cdot\mathbf{u}' \neq 0$), является скоростью диссипации турбулентной энергии в тепло под влиянием молекулярной вязкости [см. (30)]. Напомним, что величина пульсаций \mathcal{P}' тензора вязких напряжений определяется эффективным (с учетом дисперсной добавки) коэффициентом кинематической вязкости газопылевой среды, рассматриваемой как целое. Таким образом, чем больше степень вовлечения мелкодисперсных частиц в пульсационное движение, тем большее влияние они оказывают на величину пульсационной составляющей тензора \mathcal{P} , вызывая дополнительную диссипацию турбулентной энергии газозвеси. Наконец, величину $\bar{\rho}\sigma_{rel} := -\overline{\mathcal{P}'_{rel}:\nabla\mathbf{u}'} > 0$, представляющую собой работу в турбулентном потоке (отнесенную к единице времени и едини-

це объема), совершаемую пульсациями тензора относительных напряжений над турбулентными вихрями [см. (40)], можно интерпретировать как дополнительную генерацию турбулентности в газопылевом диске, возникающую из-за инерционных эффектов относительного движения дисперсной и газовой фаз и связанную с образованием вихревого следа за крупными частицами с размерами > 1 см (см., например, [83]). Важно иметь в виду, что именно с этим механизмом турбулизации течения фракцией крупномасштабных частиц сантиметрового размера и более (рождающихся благодаря процессам коагуляции и оседания в окрестности центральной плоскости протопланетного облака) можно связать часть того дополнительного источника турбулизации газо-пылевой смеси в окрестности тонкого пылевого слоя (субдиска), которая, по мнению многих исследователей, в значительной степени предотвращает дальнейшее оседание мелких пылевых частиц (микронных размеров) в субдиск и тем самым отодвигает во времени момент наступления прямой гравитационной неустойчивости этого слоя (см., например, [3, 4, 22, 29]). Для достижения критической плотности в пылевом слое необходима очень высокая степень его успокоения и уплощения [3].

Величину $\bar{\rho}\sigma_{rel}$ с точностью до тройных корреляционных членов можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\sigma_{rel} &:= \overline{(sp_d C_g \mathbf{w}\mathbf{w})' : \nabla \mathbf{u}'} = \rho_d \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}} s C_g : \nabla \mathbf{u}' + 2\rho_d \bar{\mathbf{w}} s C_g \mathbf{w}' : \nabla \mathbf{u}' + \rho_d s C_g \mathbf{w}' \mathbf{w}' : \nabla \mathbf{u}' \cong \\ &\cong \rho_d \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}} : \left(\langle C_g \rangle s' \nabla \mathbf{u}' + \bar{s} C_g' \nabla \mathbf{u}' \right) + 2\rho_d \bar{s} \langle C_g \rangle \bar{\mathbf{w}} \mathbf{w}' : \nabla \mathbf{u}', \end{aligned} \quad (45)$$

из которого видно, что дополнительная генерация турбулентности в запыленном диске (в частности, в субдиске, в котором присутствуют относительно крупные пылевые частицы) может возникнуть вследствие осредненного динамического скольжения фаз, коррелированности пульсаций объемного содержания пылевых частиц и концентрации газовой составляющей смеси с пульсационной скоростью потока, а также вследствие пульсационного межфазового скольжения. Как уже отмечалось, для мелких частиц, для которых эффектами инерции можно пренебречь ($\mathcal{P}_{rel} \cong 0$), этот дополнительный источник турбулизации диска мал.

В заключении этого подраздела отметим, что, как правило, в астрофизической литературе энергетическое уравнения (25) для газопылевой дисковой системы записывают в предположении стационарно-неравновесного состояния турбулентного поля, когда в структуре турбулентности существует некоторое внутреннее равновесие, при котором производство турбулентной энтропии S^{turb} газопылевого вещества примерно равно ее диссипации. К сожалению, некоторые авторы при моделировании диска просто используют ламинарное энергетическое уравнение с заменой коэффициента молекулярной вязкости на коэффициент турбулентной вязкости, не принимая во внимание все тонкости вывода энергетического уравнения для турбулентной газовой взвеси. Если такое условие принять для баланса величины S^{turb} , то будем иметь [см. (60)]

$$2\bar{\rho} v^{turb} \overset{\circ}{\mathcal{D}} : \overset{\circ}{\mathcal{D}} + \overline{p'_{sum} \nabla \cdot \mathbf{u}'} - \mathcal{J}_v^{turb} \cdot \nabla \bar{p}_{sum} - \bar{\rho}\varepsilon + \bar{\rho}\sigma_{rel} \approx 0; \quad (46)$$

тогда уравнения (25) для развитого турбулентного потока принимает вид:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D\langle E_{sum} \rangle}{Dt} + \nabla \cdot \left(\mathbf{q}_{sum}^{turb} - \overline{p'_{sum} \mathbf{u}''} \right) \cong -\bar{p}_{sum} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \\ + 2 \left(\bar{\rho} v^{turb} + \mu_{rad} \right) \overset{\circ}{\mathcal{D}} : \overset{\circ}{\mathcal{D}} + \bar{\rho} \sigma_{rel} + \overline{R_{gd} |\mathbf{w}|^2} - s \sigma \mathbf{w} \cdot \nabla p, \end{aligned} \quad (47)$$

или,

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D}{Dt} \left(\langle E_{sum} \rangle + \langle C_d \rangle \langle C_g \rangle |\mathbf{w}|^2 / 2 \right) \cong -\nabla \cdot \left(\mathbf{q}^{turb} - \overline{p'_{sum} \mathbf{u}''} + \mathbf{q}_{rad}^{turb} \right) - \\ - \bar{p}_{sum} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + 2 \left(\bar{\rho} v^{turb} + \mu_{rad} \right) \overset{\circ}{\mathcal{D}} : \overset{\circ}{\mathcal{D}} + \bar{\mathcal{P}}_{rel} : \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (48)$$

Уравнение (47) удобно записать через абсолютную температуру

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \langle c_p \rangle \frac{D\langle T \rangle}{Dt} - \nabla \cdot \left\{ \chi^{turb} \left(\nabla \langle T \rangle - \nabla \bar{p} / \bar{\rho} \langle c_p \rangle \right) + \chi_{rad} \nabla \langle T \rangle \right\} = \\ = \frac{D\bar{p}_{sum}}{Dt} + 2 \left(\bar{\rho} v^{turb} + \mu_{rad} \right) \overset{\circ}{\mathcal{D}} : \overset{\circ}{\mathcal{D}} + \bar{\mathcal{P}}_{rel} : \mathcal{D} - \sum_{s=1}^r \langle q_s \rangle \bar{\xi}_s + \bar{\rho} \sigma_{rel} + \overline{R_{gd} |\bar{\mathbf{w}}|^2}. \end{aligned} \quad (49)$$

При написании этого уравнения мы пренебрегли кинетической энергией диффузии по сравнению с внутренней энергией газозвеси, а также энергией диссипации $\bar{\Phi}_u$ (в единичном объеме в единицу времени) за счет «молекулярной» вязкости газопылевой

смеси по сравнению с «фрикционным теплом» $2\bar{\rho} v^{turb} \overset{\circ}{\mathcal{D}} : \overset{\circ}{\mathcal{D}}$ за счет вязких рейнольдсовых напряжений, возникающих вследствие относительного сдвига элементов газо-пылевой смеси при орбитальном движении дискового вещества.

В заключение этого подраздела отметим, что наличие внутреннего источника нагрева экзопланетного диска, связанного с турбулентной вязкостью, удовлетворяет современным астрофизическим данным и всем космохимическим ограничениям. В стационарном состоянии это тепло, выделяющееся внутри диска из-за вязкости, не накапливается, а переносится к его поверхности (в основном излучением), а затем излучается с верхней и нижней поверхностей диска наружу. Кроме того, в уравнении (48) при сделанных предположениях появляется дополнительный источник нагрева газопылевой среды, связанный с диссипацией энергии под влиянием «молекулярной» диффузии $\bar{\mathcal{P}}_{rel} : \mathcal{D}$, играющий важную роль в субдиске, где относительные скорости фаз могут быть значительными.

Закон сохранения полной энергии для турбулизованной газо-пылевой смеси. Складывая уравнения балансов для внутренней энергии (25), механической энергии (31), кинетической энергии межфазной диффузии (40) и турбулентной энергии дисковой системы (43), в результате получим субстанциональную форму закона сохранения полной осредненной энергии двухфазной газопылевой смеси и излучения в диске (в этой главе для полной энергии системы «вещество плюс излучение» мы оставили обозначение U_{tot} [ср. с (42), часть I])

$$\bar{\rho} D\langle U_{tot} \rangle / Dt = \nabla \cdot \left(\bar{\mathcal{J}}_U + \mathcal{J}_U^{turb} \right), \quad (50)$$

где

$$\langle U_{tot} \rangle = \langle E_{sum} \rangle + \langle \Psi \rangle + \frac{1}{2} \overline{|\langle \mathbf{u} \rangle|^2} + \overline{|\mathbf{u}''|^2} / 2 + \langle C_d \rangle \langle C_g \rangle \overline{|\bar{\mathbf{w}}|^2} / 2 \quad (51)$$

– осредненная полная энергия газозвеси и излучения;

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{J}}_U &\equiv \overline{q_{sum} + (p_{sum} \mathbf{I} - \mathcal{P}_{sum} - \mathcal{P}_{rel}) \cdot \mathbf{u}} \cong \\ &\cong \bar{q}_{sum} + \left(\bar{p}_{sum} \mathbf{I} - \bar{\mathcal{P}}_{sum} - \bar{\mathcal{P}}_{rel} \right) \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \overline{p_{sum} \mathbf{u}''} - \overline{\mathcal{P}'_{sum} \cdot \mathbf{u}''} - \overline{\mathcal{P}'_{rel} \cdot \mathbf{u}''} \end{aligned} \quad (52)$$

– осредненный актуальный поток полной энергии а двухфазной газозвеси;

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_U^{turb} &:= \bar{\rho} \langle U_{tot}'' \mathbf{u}'' \rangle = \rho \overline{\left(H_{sum} - p_{sum} / \rho + \Psi + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + C_d C_g |\bar{\mathbf{w}}|^2 / 2 \right) \mathbf{u}''} = \\ &= q_{sum}^{turb} - \overline{p_{sum} \mathbf{u}''} + \rho \overline{|\mathbf{u}''|^2} / 2 - \overline{\mathcal{R} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle} + q_{sum}^{turb} \end{aligned} \quad (53)$$

– турбулентный поток полной энергии смеси.

Объединяя формулы (52) и (53), получим следующее выражение для суммарного потока полной энергии турбулизованного течения газопылевой смеси

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{J}}_U + \mathcal{J}_U^{turb} &= \rho \overline{|\mathbf{u}''|^2} / 2 - \overline{(\mathcal{P}'_{sum} + \mathcal{P}'_{rel}) \cdot \mathbf{u}''} + q_{sum}^{turb} + \bar{q}_{sum} + \\ &+ \left(\bar{p}_{sum} \mathbf{I} - \bar{\mathcal{P}}_{sum} - \bar{\mathcal{P}}_{rel} - \mathcal{R} \right) \cdot \langle \mathbf{u} \rangle. \end{aligned} \quad (54)$$

Здесь $\bar{q}_{sum} + q_{sum}^{turb}$ – суммарный поток тепла, обусловленный как осредненным молекулярным, так и турбулентным переносом; $\bar{p}_{sum} \langle \mathbf{u} \rangle$ – поток «механической» энергии; $\left(\bar{\mathcal{P}}_{sum} + \bar{\mathcal{P}}_{rel} + \mathcal{R} \right) \cdot \langle \mathbf{u} \rangle$ – суммарный поток энергии, обусловленный работой вяз-

ких, относительных и турбулентных напряжений; $\rho \overline{|\mathbf{u}''|^2} / 2 - \overline{(\mathcal{P}'_{sum} + \mathcal{P}'_{rel}) \cdot \mathbf{u}''}$ – «диффузионный» поток вихревой турбулентной энергии. Заметим, что член $\overline{p_{sum} \mathbf{u}''}$ в (52) и (53) не играет роли потока энергии, так как он выпадает из суммарного потока энергии (54).

6. Моделирование коэффициента турбулентной вязкости в газопылевом протопланетном диске

Рассмотрим теперь полуэмпирический метод определения коэффициента кинематической турбулентной вязкости ν^{turb} в двухфазной дисковой среде, учитывающий влияние инерционных эффектов средне- и крупнодисперсных частиц на дополнительную генерацию турбулентности в газопылевом облаке. Далее основным источником турбулентности в диске будем считать сдвиг скорости космического вещества (когда кинетическая энергия турбулентности извлекается из кинетической энергии

осредненного движения), связанный с дифференциальностью его углового вращения вокруг прото-Солнца (см., например, [13,16]). Каждый слой вещества с радиусом r дифференциально вращающегося тонкого диска ($h_{disk}(r) \ll r$), лежащего в окрестности плоскости $r\varphi$ (расположенной при $z=0$ в цилиндрических координатах), движется практически точно по третьему закону Кеплера, т.е. при приближении к центральному телу (с массой M_{\odot}) вращается все быстрее: кеплеровская орбитальная скорость $u_{\varphi}(r) = r\Omega_{K,mid}(r) = \sqrt{GM_{\odot}/r}$, а угловая скорость орбитального вращения $\Omega_{K,mid}(r)$ растет по закону $r^{-3/2}$. Следует отметить, что толщина диска, вообще говоря, не постоянна, а увеличивается с расстоянием от прото-Солнца (в первом приближении $h_{disk}(r) \propto r$). Подобное движение – типичный случай крупномасштабного сдвигового течения, исследование которого возможно в рамках инвариантного моделирования развитых турбулентных течений неоднородных сред, разработанного в монографии [24].

Альфа параметризация вязкости протопланетного диска. Впервые коэффициент турбулентной вязкости в астрофизическом газофазном диске был смоделирован в ставшей уже классической работе [84], в которой авторы, используя концепцию Колмогорова для кинематического коэффициента турбулентной вязкости $v_g^{turb} = u_g^{turb} l_g^{turb}$ (здесь u_g^{turb} – среднеквадратичная скорость турбулентных пульсаций, которая ограничена скоростью звука в газе, вычисленной в центральной плоскости диска, $u_g^{turb} \leq c_{sg}|_{z=0} \cong \sqrt{\bar{p}_g / \bar{\rho}_g}|_{z=0}$; l_g^{turb} – так называемая длина перемешивания Прандтля, ограниченная полутолщиной h_{disk} диска, $l_g^{turb} \leq h_{disk} \approx c_{sg}|_{z=0} / \Omega_{K,mid}$; $\bar{\rho}_g, \bar{p}_g$ – соответственно массовая плотность и давление в газофазном диске), получили соотношение

$$\mathcal{R}_{r\varphi} = \bar{\rho}_g v_g^{turb} r \partial(u_{\varphi}/r) / \partial r = -3/2 \bar{\rho}_g v_g^{turb} \Omega_{K,mid}(r) = -\alpha \bar{p}_g |_{z=0}, \quad (55)$$

между r, φ -компонентой тензора турбулентных напряжений Рейнольдса $\mathcal{R}_{r\varphi}$ и тепловым давлением p_g газа. Значение дискового параметра Шакуры–Сюняева $\alpha := 3\bar{\rho}_g \Omega_K v_g^{turb} / 2\bar{p}_g$ (безразмерного свободного параметра), характеризующего степень возбуждения турбулентных движений, может быть прокалибровано эмпирически при помощи зависящих от времени спектров, получаемых, в частности, при наблюдении вспышек в двойных системах с переносом массы, содержащих карликовые новые. Для этого случая найдены значения $0.01 \leq \alpha \leq 1$ (см., например, [85]). Модели турбулизованных аккреционных дисков, построенные с применением соотношения (55), относятся к так называемым вязким α -дискам. Определение параметра α на основе различных предположений о природе физических процессов, действующих в диске, было темой многочисленных исследований (см., например, обширную библиографию к статье Макалкина [20]). В частности, ряд авторов (см. [13,86]), которые использовали α -модель при рассмотрении таких физических механизмов турбулентности в протопланетном диске, как дифференциальное вращение, тепловая конвекция

и т.п., пришли к значению параметра $\alpha \approx 10^{-3}$, которое лучше других удовлетворяет астрофизическим ограничениям.

Главное достоинство подобного эвристического подхода к описанию дисковой турбулентности состоит в его относительной простоте: достаточно заменить в уравнениях звездной гидродинамики коэффициент молекулярной вязкости ν на коэффициент турбулентной вязкости $\nu^{turb}(r)$, чтобы как-то учесть процессы турбулизации космической среды в аккреционном диске (так, собственно, и поступает большинство астрофизиков, пренебрегая, по существу, почти всеми корреляционными членами в осредненных уравнениях движения). Вместе с тем важно иметь в виду, что подход Шакуры–Сюняева, разработанный авторами специально для моделирования тонких (однородных по вертикали, т.е. бесструктурных) астрофизических дисков и не учитывающий зависимости коэффициента турбулентной вязкости от высоты, целесообразно использовать только при глобальном (одномерном по r) моделировании эволюции экзопланетного диска с параметрами, осредненными по его толщине. Однако в последнее время этот подход стал некритично применяться в астрофизической литературе и в двумерных (r, z) моделях, так или иначе, связанных с моделированием деталей вертикального строения диска, в частности с расчетом распределения по высоте термогидродинамических параметров в пылевом субдиске, что, конечно, неправильно.

Кроме того, следует иметь в виду, что формула (55), выведенная для газофазных дисков, естественно, не учитывает обратные эффекты переноса пыли и тепла на развитие турбулентности в диске, что при моделировании многих существенных для космогонии явлений необходимо делать. Указанный эффект заключается в том, что благодаря различию концентраций пылевого вещества, смешанного со средой (при турбулентной диффузии), или различию температур (при переносе тепла) в отдельных точках дисковой среды возникают дополнительные архимедовы силы, способствующие или препятствующие развитию турбулентности в диске. Например, при адекватном моделировании эволюции экзопланетного облака, как вязкого газопылевого диска, окружавшего Солнце на ранней стадии его существования, важно учитывать динамические процессы взаимодействия газа и пыли и, в частности, принимать во внимание обратное влияние инерционных свойств пылевых частиц на интенсивность турбулентности и тепловой режимы субдиска. Аргументом в пользу подобного общего подхода является следующее: частицы пыли, составляющие лишь около 2% массы околозвездного облака, могут не приниматься в расчет лишь только на самой начальной стадии эволюции рассматриваемой космической системы, когда почти все первичные (межзвездные) пылевые частицы испарились. На более поздних стадиях ее эволюции, по мере охлаждения протопланетного облака, конденсации пылевых частиц и значительного увеличения их в размерах в результате процессов коагуляции, оседания дисперсной фазы к центральной плоскости диска, а также диссипации газа из дисковой системы в межзвездное пространство, динамическая, энергетическая и оптическая роль пылевой компоненты газовой смеси существенно возрастает (см., например, [63]). Причем, на первый взгляд, турбулентное перемешивание мешает диффузионному разделению пылевой и газовой составляющих в гравитационном поле прото-Солнца, препятствуя опусканию мелкодисперсных твердых частиц к его экваториальной плоскости (где они образуют уплощенный пылевой слой), и тем самым задерживает формирование критической массы субдиска, при которой возникает его

гравитационная неустойчивость [3]. Однако, с другой стороны, как уже нами неоднократно отмечалось выше, при турбулентном режиме течения действенным механизмом аккумуляции средне- и крупномасштабных пылевых частиц становится негравитационная аккреция, связанная, в частности, с ростом массы частиц в результате различных механизмов турбулентной коагуляции. Кроме того, турбулентность способствует формированию мезомасштабных относительно устойчивых газопылевых когерентных структур, обеспечивающих наиболее благоприятные условия слипания пылевых частиц между собой. В подобных вихревых образованиях число столкновений (в единицу времени) существенно увеличивается, а относительные скорости столкновений существенно уменьшаются по сравнению с ламинарными условиями (за счет совместного когерентного мезомасштабного движения частиц и мелкомасштабных турбулентных пульсаций их относительных скоростей внутри вихревых структур), что также способствует росту конденсированной составляющей субдиска (см. [87-90]). С ростом инерционности пылевых частиц они все в меньшей степени вовлекаются в пульсационное движение газового несущего потока. Таким образом, турбулентность, в конечном счете, способствует эффективности оседания пылевых частиц к центральной плоскости диска и тем самым формированию критической массы субдиска, гравитационная неустойчивость и распад которого приводит к образованию планетезималей.

Как известно, характер воздействия дисперсной фазы на динамику турбулентного течения газозвеси не является однозначным, а существенно зависит от инерционности и величины объемного содержания (концентрации) пылевых частиц, поскольку они могут оказывать на поток как ламинаризирующее, так и турбулизирующее воздействие (см. [91]). В работе [67] были исследованы порождаемые вращением течения дискового вещества, когда твердые частицы газозвеси начинают оказывать обратное влияние на ее характеристики. Предложено обобщение формулы (55) для коэффициента турбулентной вязкости на случай учета малоинерционной пылевой составляющей, когда можно было воспользоваться приближением пассивной примеси (при котором двухфазный газопылевой поток аппроксимируется течением однофазной «многокомпонентной» среды с известными эффективными теплофизическими свойствами). Полученные поправки к коэффициенту турбулентной вязкости, учитывающие обратный эффект переноса мелкодисперсной примеси и тепла на развитие турбулентности, рекомендовано учитывать при моделировании образования уплотненного пылевого слоя в диске.

Вместе с тем в астрофизической литературе все еще остается открытым вопрос о влиянии средне- и крупнодисперсных частиц на процессы турбулентного теплопереноса в газопылевом диске и их вкладе в поправочный множитель к коэффициенту турбулентной вязкости газозвеси. Определение такого рода поправки представляет собой весьма непростую задачу и требует более глубокого изучения структуры турбулентности газозвеси. В следующем разделе нами будет сделана попытка теоретического определения коэффициента турбулентной вязкости ν^{turb} в потоке газозвеси с крупными инерционными частицами пыли.

Моделирование коэффициента турбулентной вязкости. Прежде чем приступить к определению коэффициента ν^{turb} , напомним, что связь между коэффициентом турбулентной вязкости и энергией турбулентности газозвеси определяется

при помощи соотношения Колмогорова $v^{turb} = \gamma^* l \sqrt{b}$ [29], где $l = l(\mathbf{r})$ – масштаб турбулентности в данной точке потока (числовой множитель γ^* можно включить в l). Для турбулизованного сдвигового потока, обтекающего бесконечную плоскость (в рассматриваемом случае – экваториальную плоскость диска, $z = 0$), локальный масштаб турбулентности $l(\mathbf{r})$ можно принять пропорциональным толщине рассматриваемого тонкого слоя $l(z) = \gamma^* \kappa z$, или

$$l(z) = \gamma^* \kappa z \Upsilon(\text{Re}_{glob}, \text{Ri}, \text{K}), \quad (56)$$

где Υ – некоторая безразмерная функция; κ – постоянная Кармана, которую можно положить равной $\propto 0.4$.

Отметим, что вывод корректного дифференциального уравнения для масштаба $l(\mathbf{r})$ является одной из наиболее сложных задач полуэмпирической теории сдвиговой турбулентности. Дело в том, что параметр $l(\mathbf{r})$ не может, в общем случае, быть определен только через одноточечные моменты пульсирующей скорости. Являясь мерой расстояния между двумя точками \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 в турбулентном потоке, на котором двухточечные корреляторы $\langle u''(\mathbf{r}_1)u''(\mathbf{r}_2) \rangle$ еще заметно отличаются от нуля, масштаб $l(\mathbf{r})$ может быть найден из сложных дифференциальных уравнений для этих моментов путем их интегрирования по расстоянию между точками \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 (см., например, [92]). Вместе с тем даже в случае известного дифференциального уравнения для $l(\mathbf{r})$ возникает сложная проблема граничных условий на свободной границе области турбулентного течения, где масштаб $l(\mathbf{r})$ не стремится к нулю [32]. Именно по этим причинам для обеспечения эффективности практических расчетов локальный масштаб турбулентности $l(\mathbf{r})$ часто задается в виде чисто эмпирически найденных функций или находится с помощью алгебраической формулы, учитывающей только геометрию потока, расстояние до стенки и т.п., и не зависящей от особенностей течения жидкости. В некоторых случаях, по-видимому, можно использовать формулу Прандтля–Никурадзе для величины $l(z)$, которую применительно к рассматриваемому здесь плоскому случаю можно записать в виде

$$l(z) = \gamma 0.4z \left[1 - 1.1(z/h_{disk}) + 0.6(z/h_{disk})^2 - 0.15(z/h_{disk})^3 \right]. \quad (57)$$

Внутреннее равновесие в структуре дисковой турбулентности. Перейдем теперь к выводу искомой поправки к коэффициенту $v^{turb}(\mathbf{r})$. Ограничимся в нашем анализе некоторой упрощенной статистической схемой турбулентности в двухфазной среде на основе одного только уравнения переноса турбулентной энергии (44) (однопараметрическая модель турбулентности). Для двухфазных течений начало разработки двухпараметрической модели турбулентности $b - \varepsilon$ было положено в работах [93,94]. Если пренебречь в уравнении (44) малыми членами (все необходимые оценки можно найти, например, в монографии [35]), то, с учетом формулы (20) для тензора Рейнольдса и формулы (36) для турбулентного потока удельного объема \mathcal{J}_v^{turb} , его можно переписать в виде

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial b}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla b \right) + \nabla \cdot \mathcal{J}_b^{turb} \cong -\frac{2}{3} b \bar{\rho} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + 2 \bar{\rho} v^{turb} \overset{\circ}{\mathcal{D}} : \overset{\circ}{\mathcal{D}} +$$

$$-\langle \sigma \rangle \frac{\bar{\rho}}{\rho_d \bar{\rho}_g} \mathcal{J}_{dz}^{turb} \mathbf{g}_z + \frac{\mathbf{g}_z}{\langle T \rangle \langle c_p \rangle} \left(\mathbf{q}^{turb} - \sum_{\alpha} \langle h_{\alpha} \rangle \mathcal{J}_{\alpha}^{turb} \right)_z - \bar{\rho} \varepsilon + \bar{\rho} \sigma_{rel}, \quad (58)$$

где \mathbf{g}_z – вертикальная компонента тяготения прото-Солнца. Как уже упоминалось, вклад дополнительной диссипации в величину ε существенен только для относительно мелких пылевых частиц, вследствие чего в балансовом уравнении (44) для крупнодисперсной пыли он заметной роли не играет (этот вклад учтен в диссипативном члене $2 \bar{\rho} v^{turb} \overset{\circ}{\mathcal{D}} : \overset{\circ}{\mathcal{D}}$).

Для придания уравнению (58) необходимого для дальнейших целей вида используем развитую в работе [35] базисную концепцию двухуровневого макроскопического описания турбулизованной среды в виде двух взаимосвязанных континуумов (открытых подсистем), которые заполняют одновременно один и тот же объем координатного пространства диска непрерывно — подсистемы осредненного движения и подсистемы турбулентного хаоса. Использование концепции двухуровневого макроскопического описания турбулизованной жидкости явилось той отправной точкой, которая позволила феноменологически развить гидродинамическую модель структурированной турбулентности, как процесса самоорганизации в открытых неравновесных системах, связанных с флуктуирующими средами (см. [95]). Для дискового вещества континуум осредненного движения, получающийся в результате теоретико-вероятностного осреднения мгновенных уравнений движения гетерогенной среды, предназначен для исследования эволюции осредненных полей термогидродинамических характеристик газозвеси (включая также возможные крупные вихревые образования). Подсистема турбулентного хаоса для диска (вихревой континуум с внутренней структурой) состоит в общем случае из двух составляющих: собственно турбулентного хаоса (так называемой некогерентной турбулентности), связанного со стохастическим мелкомасштабным пульсационным движением завихренной жидкости, и внедренной в такое почти однородное пульсирующее поле когерентной составляющей — ансамбля мезомасштабных упорядоченных вихревых структур («многомолекулярных» образований). В соответствии с имеющимися на сегодня экспериментальными данными когерентная турбулентная структура может быть определена как связанная жидкая масса с завихренностью, скоррелированной по фазе (т.е. когерентной) во всей области координатного пространства, занимаемой структурой. Образование гранул в солнечной фотосфере служит наглядным примером существования обширного семейства когерентных структур в турбулентном потоке, которые появляются на фоне мелкомасштабного турбулентного движения.

Для подсистемы гетерогенного турбулентного хаоса постулируем, как и в случае многокомпонентного ламинарного континуума, фундаментальное тождество Гиббса [35, 96]

$$\delta E^{turb} = T^{turb} \delta S^{turb} - p^{turb} \delta (1/\bar{\rho}), \quad (59)$$

с помощью которого можно известным образом (см., например, [97]) определить всю термодинамическую структуру вихревого континуума, т.е. ввести в рассмотрение

удельную внутреннюю энергию $E^{turb}(\mathbf{r}, t)$, обобщенную удельную энтропию $S^{turb}(\mathbf{r}, t)$, обобщенное давление $p^{turb}(\mathbf{r}, t) \equiv 2/3 \bar{\rho} E^{turb}$ и обобщенную температуру $T^{turb}(\mathbf{r}, t)$ турбулизации. Различные соотношения между параметрами E^{turb} , S^{turb} , T^{turb} и p^{turb} , которые могут быть получены традиционным способом, могут интерпретироваться тогда, как «уравнения состояния» рассматриваемой подсистемы. Далее будем считать, что внутренняя энергия подсистемы турбулентного хаоса газозвеси $E^{turb}(\mathbf{r}, t)$ тождественна энергии турбулентности $E^{turb}(\mathbf{r}, t) := \overline{\rho |\mathbf{u}''|^2} / 2\bar{\rho} := b(\mathbf{r}, t)$ и что подсистема «турбулентного хаоса» газозвеси в термодинамическом смысле является «идеальным газом», $\bar{\rho} b = 3/2 p^{turb} = 3/2 \Re_{gd} \bar{\rho} T^{turb}$, где $\Re_{gd} = k / M_{gd}$, M_{gd} — средняя молекулярная масса частиц газозвеси (кардинальные предположения модели). При использовании уравнения (58) соотношение Гиббса (59) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{\rho} T^{turb} DS^{turb} / Dt + \nabla \cdot \mathcal{J}_b^{turb} &\cong 2\bar{\rho} v^{turb} \overset{\circ}{\mathcal{D}} : \overset{\circ}{\mathcal{D}} - (\mathbf{g}_z \bar{\rho}_g) \mathcal{J}_{dz}^{turb} + \\ &+ (\mathbf{g}_z / \langle T \rangle \langle c_p \rangle) \left(\mathbf{q}^{turb} - \sum_{\alpha} \langle h_{\alpha} \rangle \mathcal{J}_{\alpha}^{turb} \right)_z - \bar{\rho} \varepsilon + \bar{\rho} \sigma_{rel}, \end{aligned} \quad (60)$$

которому, по аналогии с уравнением ((51), часть I), можно придать следующую форму баланса

$$\partial(\bar{\rho} S^{turb}) / \partial t + \nabla \cdot (\bar{\rho} S^{turb} \langle \mathbf{u} \rangle + \mathcal{J}_b^{turb} / T^{turb}) = \sigma_{S^{turb}}^e := \sigma_{S^{turb}}^e + \sigma_{S^{turb}}^i.$$

Воспользуемся теперь уравнением (60) для анализа стационарно-неравновесного режима развитой ($Re_{glob} \gg 1$) турбулентности газопылевой смеси в дисковой системе. Для его реализации должен, естественно, существовать какой-то постоянно действующий механизм турбулизации среды (каким является, например, крупномасштабный сдвиг скорости потока космического вещества, связанный с его дифференциальным вращением вокруг прото-Солнца, или термоконвективная крупномасштабная неустойчивость), передающий кинетическую энергию осредненного течения вихревому движению на больших масштабах и не позволяющий подсистеме турбулентного хаоса достигнуть в течение длительного времени полного термодинамического равновесия. Мощность подобного источника энергии должна быть такой, чтобы скомпенсировать, в частности, расход турбулентной энергии, рассеиваемой в тепло за счет «молекулярной» вязкости. Известно, что для подобного стационарно-неравновесного режима практически вся расходуемая энергия турбулентности без заметных потерь передается (вниз по цепочке разномасштабных вихрей в процессе их дробления) через инерционный интервал к диссипативному интервалу. Тогда в структуре подсистемы турбулентного хаоса устанавливается такое внутреннее равновесие (фактически во всех существующих полуэмпирических теориях турбулентности предполагается (явно или неявно) существование некоторого внутреннего равновесия в структуре турбулентности, когда производство энергии турбулентности равно ее диссипации в каждой точке, при котором $DS^{turb} / Dt \cong 0$ (энтропия хаоса не меняется вдоль пути элемента массы газозвеси) и поток энтропии турбулизации постоянен,

$\mathcal{J}_{(S^{turb})} := \mathcal{J}_b^{turb} / T^{turb} \cong const$ [27]. Это означает, что производство $\sigma_{S^{turb}}^i$ энтропии турбулизации (из-за внутренних диссипативных процессов) компенсируется ее оттоком $\sigma_{S^{turb}}^e$, т.е. суммарное возникновение энтропии S^{turb} отсутствует, $\sigma_{S^{turb}} = \sigma_{S^{turb}}^e + \sigma_{S^{turb}}^i \cong 0$. Таким образом, подсистема турбулентного хаоса экспортирует свою энтропию во «внешнюю среду», т.е. отдает ее подсистеме осредненного движения. Важно иметь в виду, что как раз такого рода условия являются достаточными для возникновения диссипативных когерентных структур в «открытом» вихревом континууме (см. [98]).

Вывод поправочной функции к коэффициенту турбулентной вязкости.

В случае локально-стационарного состояния развитого турбулентного течения в диске уравнение (60) может быть записано в виде

$$v^{turb}(1 - R_f - Ko_f) \left(\overset{\circ}{\mathcal{D}} : \overset{\circ}{\mathcal{D}} \right) + \sigma_{rel} - \varepsilon \approx 0, \quad (61)$$

где введено безразмерное динамическое число Ричардсона

$$R_f := - \frac{\mathbf{g}_z \left(\mathbf{q}^{turb} - \sum_{\alpha} \langle h_{\alpha} \rangle \mathcal{J}_{\alpha}^{turb} \right)_z}{2 \bar{\rho} v^{turb} \langle c_p \rangle \langle T \rangle \overset{\circ}{\mathcal{D}} : \overset{\circ}{\mathcal{D}}} = \frac{1}{Sc^{turb}} \frac{\mathbf{g}_z \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} + \langle c_p \rangle \right)}{2 \overset{\circ}{\mathcal{D}} : \overset{\circ}{\mathcal{D}}} := \frac{Ri}{Sc^{turb}}, \quad (62)$$

учитывающее эффект влияния термической конвекции вещества на порождение турбулентности в диске по сравнению с динамическими факторами (здесь Ri – градиентное число Ричардсона), и введено безразмерное динамическое число Колмогорова

$$Ko_f := \frac{(\mathbf{g}_z / \bar{\rho}_g) (\mathcal{J}_d^{turb})_z}{2 \bar{\rho} v^{turb} \overset{\circ}{\mathcal{D}} : \overset{\circ}{\mathcal{D}}} = - \frac{1}{Sc^{turb}} \frac{\langle \sigma \rangle \mathbf{g}_z \left[\frac{\partial \bar{s}}{\partial z} - \bar{s} \frac{\partial \ln \bar{\rho}_g}{\partial z} \right]}{2 \overset{\circ}{\mathcal{D}} : \overset{\circ}{\mathcal{D}}} := \frac{Ko}{Sc^{turb}} \quad (63)$$

являющееся критерием динамической активности пылевых частиц в турбулентном сдвиговом потоке дискового вещества [35]. На самом деле числом Колмогорова является только первое слагаемое в выражении (63) (при $\bar{\rho}_g = const$ число Ko выражает собой относительную затрату турбулентной энергии на взвешивание частиц несущим потоком); второе слагаемое, характеризующее влияние неоднородности газовой среды на турбулентность, называется критерием Прандтля. Введенные безразмерные параметры являются критериями динамической активности бароклинного вещества диска. Из выражения (62) следует, что $Ri < 0$ при $-\partial \langle T \rangle / \partial z > \mathbf{g}_z / \langle c_p \rangle$ (т.е. при неустойчивой термической стратификации вещества диска) и $Ri > 0$ при $-\partial \langle T \rangle / \partial z < \mathbf{g}_z / \langle c_p \rangle$ (при устойчивой стратификации); при безразличной же стратификации $Ri = 0$. Однако наличие в потоке взвешенных мелкодисперсных частиц всегда приводит к уменьшению турбулентной энергии, поскольку градиентное число Колмогорова всегда положительно, $Ko > 0$. Таким образом, безразмерное число

Колмогорова Ко учитывает обратное влияние стратификации (по толщине диска) объемной концентрации мелких пылевых частиц на развитие турбулентности в диске.

Принимая далее, согласно гипотезам Колмогорова [99], что кинематический коэффициент турбулентной вязкости $\nu^{turb}(\mathbf{r}, t)$ и скорость диссипации турбулентной энергии в тепло $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ зависят только от двух параметров течения – энергии турбулентности b и локального масштаба турбулентности $l(\mathbf{r})$, получим [см. (12)]:

$$\nu^{turb} = l\sqrt{b}, \quad \varepsilon = b^{3/2} / \alpha^2 l. \quad (64)$$

Здесь в силу неопределенности масштаба $l(\mathbf{r})$ константа в выражении для ν^{turb} принята равной единице, а числовой множитель $1 / \alpha^2$ в первом приближении считается постоянным. Выражение [см. (45)]

$$\bar{\rho}\sigma_{rel} := -\overline{\mathcal{P}'_{rel} : \nabla \mathbf{u}'} = \overline{sp_d C_g (\mathbf{w}\mathbf{w})' : \nabla \mathbf{u}'} \cong \rho_d \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}} : \left(\bar{s} \overline{C'_g \nabla \mathbf{u}'} + \langle C_g \rangle s' \nabla \mathbf{u}' \right),$$

отвечающее за дополнительное порождение энергии турбулентности при больших числах Рейнольдса (в следах за движущимися крупными частицами), запишем в виде

$$\sigma_{rel} = \beta \bar{s} |\bar{\mathbf{w}}|^2 \sqrt{b} / l, \quad (65)$$

где β – эмпирическая константа. Следует отметить, что формула (65) достаточно близка по форме к выражению, полученному в работе [75] при использовании авторемодельного решения для дальнего осесимметричного турбулентного следа [100] и к выражению, полученному на основе полуэмпирического подхода [101] и справедливому только при очень малой объемной концентрации \bar{s} дисперсной фазы, когда отсутствует интерференция следов за отдельными частицами. Формула (65) полностью совпадает с выражением $\sigma_{rel} = \beta^* \bar{s} |\bar{\mathbf{w}}|^3 / d_p$, приведенным в монографии [75] при $|\bar{\mathbf{w}}| / \sqrt{b} = d_d / l$. Здесь $\beta^* = a(C_D \delta / \xi_d)^{4/3}$; ξ_d – длина смешения концентрации пылевых частиц; δ – полуширина следа; $C_D(\text{Re}_d)$ – коэффициент сопротивления частицы ($a = 0.0027$, $\delta / \xi_d = 5$).

Подставляя (64) и (65) в (61), будем иметь:

$$2l\sqrt{b}(1 - \text{R}_f - \text{Ko}_f) \overset{\circ}{\mathcal{D}} : \overset{\circ}{\mathcal{D}} + \beta \bar{s} \frac{|\bar{\mathbf{w}}|^2 \sqrt{b}}{l} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{b^{3/2}}{l} = 0. \quad (66)$$

Это уравнение распадается на два уравнения: $b = 0$, соответствующее ламинарному режиму течения в дисковой системе, и уравнение

$$b = 2\alpha^2 l^2 \left(1 - \alpha^2 \beta \bar{s} \frac{|\bar{\mathbf{w}}|^2}{b} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\text{Ri} + \text{Ko}}{\text{Sc}^{turb}} \right) \overset{\circ}{\mathcal{D}} : \overset{\circ}{\mathcal{D}}, \quad (67)$$

описывающее установившийся турбулентный режим движения газозвеси. Уравнение (67) имеет вещественные решения, только когда $Ri+K < (Ri+K)_{cr} = Sc^{turb}$ (при $Ri+Ko \geq Sc^{turb}$ существует единственное вещественное решение $b=0$, относящееся к ламинарному режиму течения). В случае турбулентного режима течения будем иметь

$$\sqrt{b} = \alpha l \frac{\sqrt{1 - (Ri+K) / Sc^{turb}}}{\sqrt{1 - \alpha^2 \beta^* (d_d^2 / l^2) \bar{s}}} \sqrt{2 \overset{\circ}{\mathcal{D}} : \overset{\circ}{\mathcal{D}}} . \quad (68)$$

Из формулы (67) видно, что наличие в потоке крупных пылевых частиц всегда приводит к увеличению турбулентной энергии, поскольку осредненная кинетическая энергия относительного движения фаз ($\propto |\bar{\mathbf{w}}|^2$) для них сопоставима с энергией турбулентности b .

Таким образом, для локального коэффициента турбулентной вязкости в газопылевом диске получим

$$v^{turb}(\mathbf{r}) = \alpha l^2(\mathbf{r}) \phi \phi_1 \sqrt{2 \overset{\circ}{\mathcal{D}} : \overset{\circ}{\mathcal{D}}} , \quad (69)$$

где

$$\phi = \phi(Ri, Ko) := \sqrt{1 - (Ri+Ko) / Sc^{turb}} , \quad (70)$$

$$\phi_1 = \phi_1(\bar{s}, C_D, \delta / \xi_d, d_d / l) := \sqrt{1 - \alpha^2 a (C_D \delta / \xi_d)^{4/3} (d_d / l)^2 \bar{s}} \quad (71)$$

– поправочные безразмерные функции, учитывающие соответственно обратный эффект переноса пыли и тепла на развитие турбулентности в протопланетном диске (ϕ), а также эффект влияния на процессы турбулентного теплопереноса в потоке средне- и крупнодисперсных частиц и их вклад в коэффициент турбулентной вязкости газозвеси (ϕ_1).

Заключение

Изучение проблемы происхождения и эволюции Солнечной системы, возникновения разнообразных природных условий на Земле и других планетах представляет одно из важнейших направлений современного естествознания. Ее решение связано с проведением комплекса исследований по самым актуальным вопросам астрофизики, геофизики и космохимии на основе развития теории, обобщения и анализа экспериментальных данных и разработки математических моделей. За последние годы, благодаря впечатляющим успехам астрофизики, открытиям протопланетных дисков и внесолнечных планетных систем и бурному развитию вычислительной математики, расширились возможности комплексных исследований физической структуры и эволюции газопылевого диска вокруг молодых звезд солнечного типа, из которых, по современным представлениям, формируются планеты.

Создание адекватных космогонических моделей связано с изучением динамической и тепловой эволюции гетерогенного газопылевого вещества дифференциально вращающегося диска при учете магнитогидродинамических, турбулентных и радиа-

ционных эффектов, а также с участием фазовых переходов, химических реакций и коагуляционных процессов. От пространственно-временного распределения термодинамических параметров дисковой среды зависит агрегатное состояние основных компонентов космического вещества, расположение их фронтов конденсации-сублимации и, следовательно, химический состав планет, их спутников, астероидов и комет. Важным ограничением в определении уровня приближения подобного рода моделей к реальности служат космохимические данные, получаемые в результате прямого изучения внеземного вещества.

К сожалению, большое число проблем, связанных с данным направлением исследований, пока остается нерешенным. К ним, в первую очередь, относятся вопросы о ранних этапах эволюции Солнечной системы и причинах ее уникальности по сравнению с известными планетными системами у других звезд. Первостепенный интерес представляет разработка численных моделей такой динамической системы, в которой эволюция изначального экзопланетного облака последовательно приводит к формированию аккреционного газопылевого диска вокруг молодого Солнца и уплотненного пылегазового субдиска. Таким образом, в связи с проблемой реконструирования эволюции экзопланетного газопылевого облака, окружавшего прото-Солнце, на первый план выступает:

- построение численной модели формирования пылевого слоя (субдиска) в окрестности центральной плоскости прото-Солнца, изучение механизмов его уплотнения в спокойном газе и при наличии турбулентности;
- моделирование механизмов развития гравитационной неустойчивости во вращающемся субдиске (когда плотность его вещества за счет вертикального и радиального сжатия становится выше критического значения), образования и эволюции допланетных пылевых сгущений для зоны внутренних планет и для периферии диска;
- моделирование процессов аккумуляции Земли и планет;
- оценка следствий для химического состава Земли, планет, астероидов и комет.

В качестве первого этапа изучения комплексной проблемы планетной космогонии в данной работе предпринята попытка конструирования модели космической среды, предназначенной для численного моделирования ранней стадии образования планетной системы – стадии протопланетного турбулизованного газопылевого облака. Очевидно, что численное моделирование подобного облака связано, прежде всего, с построением базовой модели сплошной среды с усложненными физико-химическими свойствами, учитывающей, в частности, совместное протекание гидродинамических процессов и процессов тепломассопереноса в турбулентном аккреционном диске, с учетом инерционных эффектов твердых частиц космического вещества, процессов излучения, испарения, конденсации и коагуляции, а также разнообразных химических превращений. Предпринятое здесь исследование открывает, по нашему мнению, перспективы существенно более полного моделирования разнообразных процессов эволюции газопылевого турбулизованного диска, чем это имеет место в ряде цитируемых в статье работах. При этом надо иметь в виду, что для получения достоверных результатов и их понимания особенно необходимы последующие рациональные схематизации, приводящие к обозримым и решаемым уравнениям.

Список Литературы

- [1] **Колесниченко А.В.** Применение гетерогенной механики для моделирования газопылевого экзопланетного диска. I. Ламинарная стадия образования субдиска //Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша РАН.2020. №39. 44 с.
- [2] **Шмидт О.Ю.** Четыре лекции о происхождении Земли. Изд. 3, доп. М.: Изд-во АН СССР. 1957. 140 с.
- [3] **Сафронов В.С.** Современное состояние теории происхождения Земли // Физика Земли. 1982. № 6. С. 5-24. **Сафронов В.С.** Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука. 1969. 244 с.
- [4] **Goldrich P., Ward W.R.** The formation of planetesimals // *Astrophys. J.* 1973. V.183. № 3. P. 1051-1061.
- [5] **Makalkin A.B.** Radial compaction of the dust subdisk in a protoplanetary disk as possible way to gravitational instability // *Lunar Planet. Sci.* 1994. V.25. P. 827-828.
- [6] **Nakagawa Y., Sekiya M., Hayashi C.** Settling and growth of dust particles in a laminar phase of a low-mass Solar nebula// *Icarus.* 1986. V.67. P. 375-390.
- [7] **Toomre A.** On the gravitational stability of a disk of stars // *Astrophys. J.* 1964. V.139. P. 1217-1238.
- [8] **Youdin A.N., Shu F.** Planetesimal formation by gravitational instability // *Astrophys. J.* 2002. V. 580. P. 494-505.
- [9] **Сафронов В.С.** Эволюция пылевой компоненты околосолнечного допланетного диска //Астрон. вестн. 1987. Т.21. № 3. С. 216-220.
- [10] **Фридман Ф.М.** К динамике вязкой дифференциально вращающейся гравитирующей среды // Письма в Астрон. журн. 1989. Т. 15. № 12. С.1122-1130.
- [11] **Balbus S. A., Hawley J. F.** Instability, Turbulence, and Enhanced Transport in Accretion Disks // *Rev. Mod. Phys.* 1998. V. 70, P.1-53.
- [12] **Marov M. Ya., Kolesnichenko A. V.** Turbulence and Self-Organization. Modeling Astrophysical Objects. Springer Science+Business Media New York. 2013.657 с.
- [13] **Dubrulle B.** Differential rotation as a source of angular momentum transfer in the solar nebula // *Icarus.* 1993. V. 106. P. 59-76.
- [14] **Richard D., Zahn J.P.** Turbulence in differentially rotating flow. What can be learned from the Couette-Taylor experiment// *Astron. Astrophys.* 1999. V. 347. P. 734-738.
- [15] **Zel'dovich Ya. B.** On the friction of fluids between rotating cylinders // *Proc. Roy. Soc. Lond.* 1981. V. A374. P. 299-312.
- [16] **Горькавый Н.Н., Фридман А.М.** Физика планетных колец. М.: Наука. 1994. 348 с.
- [17] **Fridman A.M., Boyarchuck F.F., Bisikalo D.V., Kuznetsov O.A., Khoruzhii O.V., Torgashin Yu. M., Kilpio A.A.** The collective mode and turbulent viscosity in accretion disks // *Physics Letters A.* 2003. V. 317. P. 181-198.
- [18] **Armitage P.J., Livio M., Pringle J. E.** Episodic accretion in magnetically layered protoplanetary disks // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*2001. V.324. P. 705-711.
- [19] **Bryden G, Chen X, Lin D, Nelson R., Papaloizou J .** Tidally induced gap formation in protostellar disks: gap clearing and suppression of protoplanetary growth // *Astrophys. J.* 1999. V. 514 P. 344.

- [20] **Макалкин А.Б.** Особенности эволюции вязкого протопланетного околосолнечного диска // *Астрон. вестник*. 2004. Т.38. № 6. С. 559-576.
- [21] **Dubrulle B., Morfill G., Sterzic M.** The dust subdisk in the protoplanetary nebula // *Icarus*. 1995. V. 114. P. 237-246.
- [22] **Goodmann J., Pindor B.** Secular instability and planetesimal formation in the dust layer // *Icarus*. 2000. V.148. P. 537-549.
- [23] **Sekiya M., Nakagawa Y.** Settling of Dust Particles and Formation of Planetesimals // *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 1988. V. 96, P. 141-150.
- [24] **Stepinski T.F., Valageas P.** Global evolution of solid matter in turbulent protoplanetary disks. I. Aerodynamics of solid particles // *Astron. Astrophys.* 1996. V. 309. P. 301-312.
- [25] **Stepinski T.F., Valageas P.** Global evolution of solid matter in turbulent protoplanetary disks. II. Development of icy planetesimals // *Astron. Astrophys.* 1997. V. 319. P. 1007-1019.
- [26] **Takeuchi T., Lin D.N.C.** Radial flow of dust particles in accretion disks // *Astrophys. J.* 2002. V. 581. № 2. P. 1344-1355.
- [27] **Takeuchi T., Lin D.N.C.** Surface out in optically thick dust disks by the radiation pressure // *Astrophys. J.* 2003. V. 593. P. 524-538.
- [28] **Weidenschilling S. J.** Dust to Planetesimals: Settling and Coagulation in the Solar Nebula // *Icarus*. 1980. V. 44, P.172-189.
- [29] **Weidenschilling S. J.** Evolution of grains in a turbulent solar nebula // *Icarus*. 1984. V.60. P. 553-567.
- [30] **Youdin A.N., Goodman J.** Streaming instabilities in protoplanetary disks // *arXiv: Astro-ph/0409263*. 2004. V. 1 P. 1-26.
- [31] **Шрайбер А.А., Гавин Л.Б., Наумов В.А., Яценко В.П.** Гидромеханика двухкомпонентных потоков с твердым полидисперсным веществом. Киев: Наук. думка. 1980. 250 с.
- [32] **Волощук В.М, Седунов Ю.С.** Процессы коагуляции в дисперсных системах. Л.: Гидрометеиздат. 1975. 320 с. .
- [33] **Волощук В.М.** Кинетическая теория коагуляции. М.: Гидрометиздат. 1984. 283 с.
- [34] **Dominik C., Blum J., Cuzzi J., Wurm G.** Growth of dust as the initial step toward planet formation // In: *Protostars and Planets V*, Arizona Press, AZ, 2007.
- [35] **Маров М.Я., Kolesnichenko A.V.** Mechanics of turbulence of multicomponent gases. Dordrecht, Boston, London.: Kluwer Academic Publishers. 2002. 375 p.
- [36] **Макалкин А.Б.** Проблемы эволюции протопланетных дисков // В сб. «Современные проблемы механики и физики космоса. К юбилею М.Я. Марова». М.: Физматлит. 2003. с. 402-446
- [37] **Natta A., Testi L., Calvet N. Henning T., Waters R., Wilner D.** Dust in protoplanetary discs: Properties and evolution // In: *Protostars and Planets V*, Arizona Press, AZ, 2007.
- [38] **Cuzzi J. N., Davis S. S., Dobrovolskis A. R.** Blowing in the wind. II. Creation and redistribution of refractory inclusions in a turbulent protoplanetary nebula // *Icarus*. 2003. V. 166. P. 385-402.
- [39] **Cuzzi J. N.** Blowing in the wind: III. Accretion of dust rims by chondrule-sized particles in a turbulent protoplanetary nebula // *Icarus*, 2004. V. 168, P. 484-497.

- [40] **Cuzzi J. N., Ciesla F. J., Petaev M. I., Krot A. N., Scott E. R. D., Weidenschilling S.** Nebula Evolution of Thermally Processed Solids: Reconciling Models and Meteorites Chondrites and the Protoplanetary Disk // ASP Conference Series, Vol. 341. Edited by Alexander N. Krot, Edward R. D. Scott, and Bo Reipurth. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific. 2005. P. 732-773.
- [41] **Cuzzi J. N., Weidenschilling S. J.** Particle-Gas Dynamics and Primary Accretion // In: Meteorites and the Early Solar System II (D. Lauretta, L. A. Leshin, and H. McSween, eds.), Univ of Arizona Press; Tucson, 2006. 943 pp., P.353-381.
- [42] **Dullemond C. P., Dominik C.** Dust coagulation in protoplanetary disks: A rapid depletion of small grains // Astron. Astrophys. 2005. V. 434, P.971-986.
- [43] **Russell S. S., Hartmann L. A., Cuzzi J. N., Krot A. N., Weidenschilling S.J.** Timescales of the Solar Protoplanetary Disk // In: Meteorites and the Early Solar System, II (D. Lauretta, L. A. Leshin, and H. McSween, eds.), 2006. University of Arizona Press, Tucson, 943 pp., P.233-251.
- [44] **Wadhwa M., Amelin Y. Davis A. M., Lugmair G. W., Meyer B., Gounelle, M., Desch S. J.** From Dust to Planetesimals: Implications for the Solar Protoplanetary Disk from Short-lived Radionuclides // In: Protostars and Planets V, Arizona Press, AZ, 2007.
- [45] **Фортов В.Е., Храпак А.Г., Якубов И.Т.** Физика неидеальной плазмы. М.: Физматлит. 2004. 528 с.
- [46] **Альвен Х., Аррениус Г.** Эволюция солнечной системы. М.: Мир. 1979. 511 с.
- [47] **Бусройд Р.** Течение газа со взвешенными частицами. М.: Мир. 1975. 378 с.
- [48] **Верещагин И.П., Левитов В.И., Мирзобекий Г.З., Пашин М.М.** Основы электрогазодинамики дисперсных систем. М.: Энергия. 1974. 480 с.
- [49] **Колесниченко А.В.** О синергетическом механизме возникновения когерентных структур в континуальной теории развитой турбулентности // Астрон. вестн. 2004. Т. 38. № 5. С. 405-427.
- [50] **Barge P., Sommeria J.** Did planet formation begin inside persistent gaseous vortices? // Astron Astrophys. 1995. V. 295. P. L1-L4.
- [51] **Chavanis P.-H.** Trapping of Dust by Coherent Vortices in the Solar Nebula // arXiv:astro-ph/9912087. 1999. V.16 P. 1-54.
- [52] **Tanga P., Babiano A., Dubrulle B.** Forming planetesimals in vortices // Icarus. 1996. V.121. P.158-170.
- [53] **Колесниченко А.В.** Континуальные модели природных и космических сред: Проблемы термодинамического моделирования. М.: ЛЕНАНД, 2017. 400 с (Синергетика: от прошлого к будущему. № 79).
- [54] **Hayashi C., Nakazawa K., Nakagawa Y.** Formation of the Solar System // In Protostars and Planets II, (D. C. Black & M. S. Matthews, eds.), University of Arizona Press, Tucson, 1985. P. 1100-1153.
- [55] **Nakagawa Y., Nakagawa K. Hayashi C.** Growth and sedimentation of dust grains in the primordial solar nebula // Icarus. 1981. V. 45. P. 517-528.
- [56] **Schmitt W., Henning T., Mucha R.** Dust evolution in protoplanetary accretion disks // Astron. Astrophys. 1997. V. 325 .P. 569-584.
- [57] **Маров М.Я., Колесниченко А.В.** Введение в планетную аэрономию. М.: Наука. 1987.456 с.
- [58] **Чепмен С., Каулинг Т.К.** Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ. 1960. 510 с.

- [59] **Колесниченко А.В., Максимов В.М.** Обобщенный закон фильтрации Дарси, как следствие соотношений Стефана-Максвелла для гетерогенной среды // Математическое моделирование. 2001. том 13. №1. С.3-25.
- [60] **Favre A.** Equations statistiques des gaz turbulents//Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М.: Наука. 1969. С. 483-511.
- [61] **Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya.** Modeling of Aggregation of Fractal Dust Clusters in a Laminar Protoplanetary Disk // Solar System Research. 2013. V. 47. № 2.P. 80-98.
- [62] **Нигматулин Р.И.** О основы механики гетерогенных сред. М.: Наука. 1978. 336 с.
- [63] **Cuzzi J. N., Dobrovolskis A. R., Champney J. M.** Particle-gas dynamics in the mid-plane of a protoplanetary nebula//Icarus. 1993. V.106 P. 102-134.
- [64] **Woods J. D., Drake J.C., Goldsmith P.** Coalescence in a turbulent cloud// Guart. J. Roy. Met. Soc. 1972. V. 98. P. 135-149.
- [65] **Schmitt W., Henning T., Mucha R.** Dust evolution in protoplanetary accretion disks// Astron. astrophys. 1997. V. 325 .P. 569-584
- [66] **Richard D., Zahn J.-P.** Turbulence in differentially rotating flow. What can be learned from the Couette-Taylor experiment // Astron. Astrophys. 1999. V. 347. P. 734-738.
- [67] **Колесниченко А.В.** Моделирование коэффициентов турбулентного переноса в газопылевом аккреционном диске // Астрон. вестн. 2000. Т.34. № 6. С. 516-528
- [68] **Зуев Ю.В., Лепешинский И.Ф.** Математическая модель двухфазной турбулентной струи//Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. 1981. № 6. С. 69-77
- [69] **Картушинский А.И.** Перенос инерционной примеси в двухфазной турбулентной струе//Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. 1984. №1. С. 36-41.
- [70] **Гавин Л.Б., Наумов В.А., Шор В.В.** Численное исследование газовой струи с тяжелыми частицами на основе двухпараметрической модели турбулентности//ПМТФ. 1984. № 1.С. 62-67.
- [71] **Melville W.K., Bray K.N.C.** A model of the two-phase turbulent jet // Int. J. Heat and Mass Transfer.1979. V.22. P. 647-656.
- [72] **Монин А.С., Яглом А.М.** Статистическая гидродинамика. СПб: Гидрометеоздат. Т.1. 1992. 640 с.
- [73] **Morkovin M.V.** Effects of compressibility on turbulent flow// Mechanics of Turbulence, N.Y. Gordon and Breach. 1961. 367 p.
- [74] **Danon H., Wolfshtein M., Hetsroni G.** Numerical calculation of two- phase turbulent round jet// Int. Multiphase Flow. 1977. V. 3. № 3. P. 223-234.
- [75] **Вараксин А.Ю.** Турбулентные течения газа с твердыми частицами. М.: Физматлит. 2003. 186 с.
- [76] **Gore R. A., Crowe C.T.** Effect of particle size on modulating turbulent intensity//Int. J. Multiphase Flow. 1989. V. 15. № 2. P. 279-285
- [77] **Колесниченко А.В. Маров М.Я.** Турбулентность многокомпонентных сред. М.: "МАИК-Наука". 1999. 336 с.
- [78] **Колесниченко А.В.** К теории турбулентности в планетных атмосферах. Численное моделирование структурных параметров //Астрон. вестн. 1995. Т.29. №2. С.133-155.

- [79] **Ван Мигем Ж.** Энергетика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат. 1977. 327 с.
- [80] **Lin D.N.C., Papaloizou J.** On the structure and evolution of the primordial solar nebula // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1980. V. 191. 31. P. 37-48.
- [81] **Nomura H.** Structure and instabilities of an irradiated viscous protoplanetary disks // Astrophys. J. 2002. V. 567. P. 587-595
- [82] **Ruden S.P., Pollack J.B.** The dynamical evolution of the protosolar nebula // Astrophys. J. 1991. V. 375. P. 740-760.
- [83] **Зайчик Л.И., Вараксин А.Ю.** Влияние следа за крупными частицами на интенсивность турбулентности несущего потока // ТБТ. 1999. Т. 37. № 4. С. 1004-1007.
- [84] **Shakura N.I., Sunyaev R.A.** Black holes in binary systems. Observational appearance // Astron. Astrophys. 1973. V. 24. p. 337-355.
- [85] **Eardley D.M., Lightman A.P., Payne D.G., Shapiro S.L.** Accretion discs around massive Black Holes; Persistent Emission Spectra // Astrophys. J. 1978. V. 234. P. 53.
- [86] **Cabot W., Canuto V.M., Hubickyj O., Pollack J.B.** The role of turbulent convection in the primitive solar nebula // Icarus. 1987. V. 69. P. 387-423.
- [87] **Колесниченко А.В.** О синергетическом механизме возникновения когерентных структур в континуальной теории развитой турбулентности // Астрон. вестн. 2004. Т. 38. № 5. С. 405-427.
- [88] **Barge P., Sommeria J.** Did planet formation begin inside persistent gaseous vortices? // Astron Astrophys. 1995. V. 295. P. L1-L4.
- [89] **Chavanis P.-H.** Trapping of Dust by Coherent Vortices in the Solar Nebula // arXiv:astro-ph/9912087. 1999. V. 16 P. 1-54.
- [90] **Tanga P., Babianno A., Dubrulle B.** Forming planetosimals in vortices // Icarus. 1996. V. 121. P. 158-170.
- [91] **Шрайбер А.А., Милютин В.Н., Яценко В.П.** Турбулентные течения газозвеси. Киев: Наук. думка. 1987. 239 с.
- [92] **Иевлев В.М.** Приближенные уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 1. С. 91-103.
- [93] **Elghobashi S.E., Abou-Arab T.W.** A second-order turbulence model for two-phase flows // Heat Transfer. 1982. V. 5. P. 219-224.
- [94] **Elghobashi S.E., Abou-Arab T.W.** A two-equation turbulence model for two-phase flows // Phys. Fluids. 1983. V. 26. № 4. P. 931-938.
- [95] **Колесниченко А.В.** О синергетическом механизме возникновения когерентных структур в континуальной теории развитой турбулентности // Астрон. вестн. 2004. Т. 38. № 5. С. 405-427.
- [96] **Колесниченко А.В.** Соотношения Стефана-Максвелла и поток тепла для турбулентных многокомпонентных сплошных сред // Проблемы современной механики. К юбилею Л.И. Седова. М.: Изд-во МГУ. 1998. С. 52-76.
- [97] **де Гроот С., Мазур П.** Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
- [98] **Пригожин И., Стенгерс И.** Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. М.: Издательская группа "Прогресс", 1994. 240 с.
- [99] **Колмогоров А.Н.** Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1942. Т. 6. № 1/2. С. 56-58.

- [100] **Yarin L.P., Hetsroni G.** Turbulence intensity in dilute two-phase flow -3. The particles-turbulence interaction in dilute two-phase flow// Int. J. Multiphase Flow. 1994. V.20. № 1. P. 27-44.
- [101] **Деревич И.В.** Влияние примеси крупных частиц на турбулентные характеристики газозвеси в каналах//ПМТФ. 1994. № 2. С. 70-78.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Осредненные уравнения баланса масс. Коэффициенты турбулентного переноса.....	7
2. Осредненное уравнение Смолуховского	13
3. Осредненное уравнение движения гетерогенной среды.....	14
4. Осредненное уравнение для внутренней энергии.....	16
5. Осредненные энергетические уравнения.....	20
6. Моделирование коэффициента турбулентной вязкости в газопылевом протопланетном диске	28
Заключение	36
Список литературы	38