ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 92 за 2021 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.А. Русское, Е.И. Капцов

Об инвариантных конечно-разностных схемах для уравнений одномерных течений политропного газа для задач с пространственными симметриями

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Русское А.А., Капцов Е.И. Об инвариантных конечно-разностных схемах для уравнений одномерных течений политропного газа для задач с пространственными симметриями // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 92. 34 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-92
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-92

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук

А. А. Русское, Е. И. Капцов

Об инвариантных конечно-разностных схемах для уравнений одномерных течений политропного газа для задач с пространственными симметриями

Москва — 2021

А.А. Русское, Е.И. Капцов

Об инвариантных конечно-разностных схемах для уравнений одномерных течений политропного газа для задач с пространственными симметриями

Рассматриваются одномерные уравнения газовой динамики в случае политропного газа для плоских течений, для течений с цилиндрической и сферической симметрией. Обсуждаются инвариантные свойства уравнений, выписаны их локальные законы сохранения. Среди законов сохранения имеются дополнительные, возникающие только при специальных значениях показателя адиабаты. Классическая схема Самарского–Попова для уравнений газовой динамики обладает разностными аналогами всех законов сохранения, за исключением дополнительных. В разностном случае дополнительные законы удается сохранить при специальном выборе аппроксимации для уравнения внутренней энергии политропного газа. Схема Самарского–Попова, снабженная таким уравнением, впервые была предложена В. А. Коробицыным и была названа термодинамически согласованной. Рассматриваются групповые свойства и законы сохранения таких схем, и осуществляется их численная реализация для плоских, цилиндрических и сферических течений.

Ключевые слова: группа преобразований, инвариантные разностные схемы, консервативные схемы, законы сохранения, газовая динамика, политропный газ, сферические течения, цилиндрические течения.

A.A. Russkov, E.I. Kaptsov

On invariant finite-difference schemes for equations of one-dimensional flows of a polytropic gas for problems with spatial symmetries

One-dimensional equations of gas dynamics are considered in the case of a polytropic gas for plane flows, flows with cylindrical and spherical symmetry. The invariant properties of the equations are discussed and their local conservation laws are given. Among the conservation laws there are additional ones that arise only for special values of the adiabatic exponent. The classical Samarskiy–Popov scheme for the equations of gas dynamics possesses finite-difference analogues of all conservation laws, with the exception of additional ones. The additional conservation laws can be preserved by means of a special choice of approximation for the internal energy equation for polytropic gas. Samarskiy–Popov's scheme equipped with such an equation was first proposed by V. A. Korobitsyn and was called thermodynamically consistent. The group properties and conservation laws of such schemes are considered and their numerical implementation is carried out for plane, cylindrical, and spherical flows.

Key words: transformation group, invariant scheme, conservative scheme, conservation law, gas dynamics, polytropic gas, spherical flows, cylindrical flows.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект 18-11-00238).

1. Введение

При конечно-разностном моделировании уравнений математической физики и, в частности, уравнений механики сплошной среды оказывается важным сохранять качественные особенности, присущие исходным дифференциальным моделям. При этом качественные свойства конечно-разностных аппроксимаций можно, в общем, разделить на два класса: динамические и геометрические [1]. К числу первых относятся чувствительность моделей к начальным данным и параметрам, асимптотическое поведение решений, устойчивость конечно-разностных схем, обусловленность задачи и т. п. Ко второму, геометрическому, классу относят такие свойства, как наличие у уравнений интегралов движения и законов сохранения, сохранение пространственных и временных симметрий, фазовых объёмов, симплектичность фазовых потоков и др.

Традиционно при построении конечно-разностных схем основное внимание уделялось их динамическим свойствам [2–4], но с конца 1980-х годов возникает также интерес к вопросам сохранения геометрических характеристик аппроксимируемых дифференциальных моделей. Совокупность методов дискретизации, направленных на сохранение основных геометрических качеств уравнений, получает общее название методов геометрического численного интегрирования [1, 5].

К числу важнейших качественных геометрических свойств конечно-разностных схем относится сохранение симметрий исходных уравнений, т. е. их инвариантности по отношению к действию некоторых непрерывных групп Ли преобразований [6, 7]. Уравнения, обладающие симметриями, как правило обладают также законами сохранения, для них могут быть получены редукции на подгруппах, точные (инвариантные) решения и т. д.

Систематическое исследование инвариантных конечно-разностных схем и условий наличия у них разностных законов сохранения начинается с цикла работ [8–11]. За прошедшие годы был осуществлен значительный прогресс в разработке методов интегрирования инвариантных конечно-разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем, обладающих функцией Лагранжа [9, 12–15] или Гамильтона [16, 17], а также для уравнений, не допускающих вариационной формулировки [18, 19]. Кроме того, с помощью разностного аналога «прямого метода» [20] недавно были построены инвариантные консервативные схемы для различных одномерных уравнений механики сплошной среды в координатах Лагранжа [21–25] и Эйлера [23] на равномерных ортогональных разностных сетках.

Идеи построения конечно-разностных схем, сохраняющих качественные свойства исходных моделей, высказывались ещё в 1960-х годах академиком А. А. Самарским, его коллегами и последователями. Эти идеи, в частности, привели к концепции полностью консервативных разностных схем, т. е. консервативных схем, удовлетворяющих дополнительным условиям, выражающим баланс различных компонентов полной энергии системы. Полностью консервативные разностные схемы были построены для одномерных уравнений газовой динамики в массовых лагранжевых координатах [26] (схемы Самарского–Попова) и в координатах Эйлера [27, 28], для гиперболических уравнений мелкой воды [29] и уравнений магнитной гидродинамики [30]. Полностью консервативные схемы для одномерных уравнений газовой динамики в лагранжевых массовых переменных, сконструированные в [26] для случая плоской пространственной симметрии, были расширены в [31] на случаи цилиндрической и сферической пространственных симметрий.[1]

Хотя полностью консервативные схемы Самарского–Попова считаются уже классическими, с групповой точки зрения они были впервые исследованы лишь недавно: в [32] они рассмотрены для случая плоских течений и в [33, 34] — для цилиндрических и сферических течений.

В [35] была предложена модификация схемы Самарского–Попова, названная термодинамически согласованной схемой. Модификация заключается в специальном выборе разностного уравнения внутренней энергии политропного газа. Рассматривая схему совместно с таким уравнением внутренней энергии, можно добиться выполнения на её решениях дополнительных законов сохранения, соответствующих специальному значению показателя адиабаты γ. Этот подход был успешно распространен на случаи цилиндрического и сферического течений в [33, 34].

Настоящая работа посвящена численной реализации инвариантных конечно-разностных схем, обладающих расширенным по сравнению с классическими схемами Самарского–Попова набором законов сохранения, для плоских, цилиндрических и сферических течений политропного газа, представленных в [33, 34].

Ниже мы напомним необходимые основные результаты, изложенные в [32–34].

[1]Заметим, что, хотя в русскоязычной литературе обычно используются термины «плоская/цилиндрическая/сферическая (пространственная) симметрия», в дальнейшем мы будем предпочитать им термины «плоское/цилиндрическое/сферическое течение», чтобы избежать путаницы с симметриями в смысле группового анализа.

2. Уравнения одномерных течений политропного газа, их симметрии и законы сохранения

Прежде всего рассмотрим дифференциальные уравнения одномерных течений политропного газа в массовых координатах Лагранжа для плоских, цилиндрических и сферических течений, их групповые свойства и законы сохранения.

2.1. Уравнения одномерных течений политропного газа в лагранжевых массовых координатах

Напомним, что газ называется идеальным, если он удовлетворяет уравнению состояния [36–38]

$$p = \rho R T, \tag{1}$$

где ρ — плотность частицы газа, p — давление в частице, T — температура, R — универсальная газовая постоянная. Уравнение состояние (1) называют термическим. Одно только термическое уравнение состояния не дает полной характеристики термодинамической модели среды. Для замыкания системы уравнений газовой динамики необходимо ещё одно соотношение, устанавливающее связь внутренней энергии ε с другими параметрами среды (обычно это температура T и удельный объём $\upsilon = 1/\rho$). Такое соотношение вида $\varepsilon = \varepsilon(T, \upsilon)$ называют калорическим уравнением состояния.

В случае, когда внутренняя энергия пропорциональна температуре, газ называется *политропным*. Уравнение состояния политропного газа записывают в виде

$$\varepsilon(T) = C_V T = \frac{RT}{\gamma - 1}, \tag{2}$$

где γ — показатель адиабаты, постоянная безразмерная величина, которая определяется как отношение удельных теплоемкостей газа при постоянном давлении (C_P) и объеме (C_V):

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}.$$

Из уравнений (1) и (2) получается следующее удобное соотношение для внутренней энергии:

$$\varepsilon = \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{p}{\rho}. \tag{3}$$

Последнее уравнение, наравне с (2), может выполнять роль калорического уравнения состояния для политропного газа.

Численную реализацию конечно-разностных схем одномерных уравнений газовой динамики, которой посвящена настоящая работа, обычно проще производить в лагранжевых массовых координатах [31]. Поэтому далее ограничимся рассмотрением уравнений одномерных течений политропного газа в массовых координатах Лагранжа. Заметим, что в координатах Эйлера соответствующие уравнения и их законы сохранения подробно рассмотрены в [33].

Массовая координата Лагранжа s для задач с пространственными симметриями вводится с помощью соотношения

$$s = \int_{r_0}^{r} y^n \rho(t, y) dy, \tag{4}$$

где r_0 и r — начальная и текущая Эйлеровы координаты частицы газа. К рассматриваемым далее одномерным течениям относятся плоские течения ($n = 0$), цилиндрические ($n = 1$) и сферические ($n = 2$) течения ($n = d - 1$, где d – размерность задачи).

Одномерные уравнения газовой динамики в массовых координатах записывают в следующем виде [4, 31]

$$\begin{gathered} \rho_t + \rho^2 (r^n u)_s = 0, \\ u_t + r^n p_s = 0, \\ \varepsilon_t + p (r^n u)_s = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

где $u = u(t, s)$ — скорость течения среды. При этом эйлерова пространственная координата r определяется соотношениями

$$r_t = u, \qquad r_s = \frac{1}{r^n \rho}. \tag{6}$$

Последнее уравнение (5) в случае политропного газа можно заменить на следующее

$$p_t + \gamma \rho p (r^n u)_s = 0. \tag{7}$$

Энтропия для политропного газа определяется как [36–38]

$$S = \frac{R}{\gamma - 1} \ln \frac{p}{\rho^\gamma}. \tag{8}$$

В случае, когда энтропия сохраняется вдоль траекторий частиц, т.е. когда $S = S(s)$, справедливо следующее соотношение, получаемое путём дифференцирования (8) по t:

$$\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)_t = 0. \tag{9}$$

Заметим, что сохранение энтропии вдоль траекторий имеет место только в бездиссипативных процессах и, вообще говоря, не характерно для разрывных решений уравнений газовой динамики типа ударных волн.

С помощью (8) и (9) первое начало термодинамики

$$d\varepsilon = T dS - p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{10}$$

приводится к виду

$$\varepsilon_t = -p\left(\frac{1}{\rho}\right)_t = -p u_s. \tag{11}$$

Последнее уравнение выражает тот физический факт, что внутренняя энергия газа изменяется за счёт работы сил давления [31]. Оно имеет особое значение при построении полностью консервативных схем для уравнений (5).

2.2. Симметрии и законы сохранения одномерных уравнений газовой динамики в массовых координатах

Система уравнений

$$\mathbf{F}(t, s, \rho, u, p, \rho_t, \rho_s, u_t, u_s, p_t, p_s) = \mathbf{0} \tag{12}$$

допускает линейный дифференциальный оператор

$$X = \xi^t(t, s, \rho, u, p)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^s(t, s, \rho, u, p)\frac{\partial}{\partial s} \\ + \eta^u(t, s, \rho, u, p)\frac{\partial}{\partial u} + \eta^\rho(t, s, \rho, u, p)\frac{\partial}{\partial \rho} + \eta^p(t, s, \rho, u, p)\frac{\partial}{\partial p}, \tag{13}$$

или, другими словами, обладает симметрией X, если выполняется инфинитезимальный критерий [6, 7]

$$\tilde{X}(\mathbf{F})|_{[\mathbf{F}]} = \mathbf{0}, \tag{14}$$

где $[\mathbf{F}]$ означает, что выражение рассматривается на множестве решений (12), $\tilde{X}$ — оператор X, продолженный на пространство $(t, s, \rho, u, p, \rho_t, \rho_s, u_t, u_s, p_t, p_s)$

с помощью стандартных формул продолжения [6, 7], и ξ^t, ξ^s, η^u, η^ρ и η^p — гладкие функции своих аргументов.

Множество операторов (13), допускаемых системой (12), образует алгебру Ли, соответствующую группе Ли допускаемых системой непрерывных точечных преобразований.

Функция $I(t, s, \rho, u, \rho_t, \rho_s, u_t, u_s)$ называется *инвариантом* оператора X, если выполняется условие

$$\tilde{X}(I) \equiv 0, \tag{15}$$

а система называется *инвариантной* к действию алгебры Ли, если она может быть представлена как функция инвариантов этой алгебры Ли.

Групповая классификация (т. е. классификация по допустимым алгебрам Ли) по функции энтропии $S = S(s)$ систем уравнений одномерной газовой динамики для случая политропного газа в координатах Лагранжа была произведена в [34]. Согласно [34], система (5) с уравнением (3) допускает 5-параметрическую алгебру Ли, которая в лагранжевых массовых координатах имеет вид

$$\begin{gathered}
X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = t\frac{\partial}{\partial t} + (n+1)s\frac{\partial}{\partial s} + r\frac{\partial}{\partial r}, \\
X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + (n+3)s\frac{\partial}{\partial s} - u\frac{\partial}{\partial u} + 2\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + r\frac{\partial}{\partial r}, \\
X_4 = s\frac{\partial}{\partial s} + \rho\frac{\partial}{\partial \rho} + p\frac{\partial}{\partial p}, \qquad X_5 = \frac{\partial}{\partial s}.
\end{gathered} \tag{16}$$

При $n = 0$ система допускает еще два оператора:

$$X_6 = t\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_7 = \frac{\partial}{\partial r}. \tag{17}$$

Также дополнительный (проективный) оператор возникает для частных значений $\gamma = 1 + 2/d$:

$$X_8 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tr\frac{\partial}{\partial r} + (r - tu)\frac{\partial}{\partial u} - (n+1)t\rho\frac{\partial}{\partial \rho} - (n+3)tp\frac{\partial}{\partial p}. \tag{18}$$

Законы сохранения уравнений газовой динамики в координатах Лагранжа для течений политропного газа при известной допустимой алгебре Ли могут быть найдены с помощью теоремы Нётер [39, 40], после чего переведены в массовые координаты с помощью известных соотношений [4]. При этом набор законов сохранения уравнений (5) существенно зависит от типа пространственной симметрии и от показателя политропы γ.

1. В общем случае у системы (5) имеются законы сохранения массы

$$(r^n\rho)_t + (r^n\rho u)_r = 0, \tag{19}$$

и энергии

$$\left[r^n\left(\rho\varepsilon+\frac{\rho u^2}{2}\right)\right]_t+\left[r^n\left(\rho\varepsilon+\frac{\rho u^2}{2}+p\right)\right]_r=0. \tag{20}$$

2. В случае $n=0$ имеются также законы сохранения импульса

$$(\rho u)_t+(\rho u^2+p)_r=0 \tag{21}$$

и движения центра масс

$$[\rho(r-tu)]_t+[\rho u(r-tu)-tp]_r=0. \tag{22}$$

Для цилиндрических и сферических течений эти законы сохранения встроены в исходные дифференциальные модели высших размерностей и при переходе к одномерному случаю «теряются» в результате редуцирования этих моделей на подгруппах.

3. В случае $\gamma=1+2/d$, т. е. для $\gamma=3,2$ и $5/3$ в случае измерений $d=1,2$ и 3, возникают дополнительные законы сохранения:

$$\left[r^n\left(2t\left(\rho\varepsilon+\frac{\rho u^2}{2}\right)-r\rho u\right)\right]_t+ \\ +\left[r^n\left(2t\left(\rho\varepsilon+\frac{\rho u^2}{2}+p\right)u-r\left(\rho u^2+p\right)\right)\right]_r=0 \tag{23}$$

и

$$\left[r^n\left(t^2\left(\rho\varepsilon+\frac{\rho u^2}{2}\right)-tr\rho u+\frac{r^2}{2}\rho\right)\right]_t+ \\ +\left[r^n\left(t^2\left(\rho\varepsilon+\frac{\rho u^2}{2}+p\right)u-tr\left(\rho u^2+p\right)+\frac{r^2}{2}\rho u\right)\right]_r=0. \tag{24}$$

Двум последним законам сохранения, в отличие от предыдущих, ясной физической интерпретации на данный момент не дано.

3. Консервативные конечно-разностные схемы для одномерных течений политропного газа

Для массовой лагранжевой переменной s введём разбиение, в общем случае неравномерное, s_i, $i=0,1,\ldots,N$. Обозначим шаги этого разбиения через

$$h_i=s_{i+1}-s_i.$$

В рассматриваемую далее конечно-разностную схему входят только значения переменных на двух последовательных временных слоях t_j и $t_{j+1} = t_j + \tau_j$. В общем случае τ_j может меняться от слоя к слою. Динамические переменные r и u рассматриваются в узлах (t_j, s_i) двумерной пространственно-временной сетки. Обозначим их следующим образом:

$$u_- = u_{i-1}^j, \quad u = u_i^j, \quad u_+ = u_{i+1}^j, \quad \hat{u}_- = u_{i-1}^{j+1}, \quad \hat{u}_+ = u_{i+1}^{j+1}.$$

Левая и правая разностные пространственные производные на j-ом временном слое записываются стандартным образом:

$$u_s = \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{s_{i+1} - s_i} = \frac{u_+ - u}{h_i}, \qquad u_{\bar{s}} = \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{s_i - s_{i-1}} = \frac{u - u_-}{h_{i-1}}.$$

Для удобства введём следующее обозначение для среднего двух значений функций в соседних пространственных узлах сетки на одном временном слое:

$$\langle f(u,r) \rangle = \frac{f(u,r) + f(u_+, r_+)}{2}.$$

Термодинамические переменные относятся к центрам массовых ячеек на одном временном слое $(t_j, s_{i+1/2})$, $s_{i+1/2} = (s_i + s_{i+1})/2$. В частности, для плотности ρ

$$\rho_- = \rho_{i-1/2}^j, \quad \rho = \rho_{i+1/2}^j, \quad \rho_+ = \rho_{i+3/2}^j,$$
$$\hat{\rho}_- = \rho_{i-1/2}^{j+1}, \quad \hat{\rho} = \rho_{i+1/2}^{j+1}, \quad \hat{\rho}_+ = \rho_{i+3/2}^{j+1}.$$

Левая и правая пространственная производные определяются в общем случае для неравномерного разбиения:

$$p_{\bar{s}} = \frac{p_{i+1/2}^j - p_{i-1/2}^j}{\frac{1}{2}(h_i + h_{i-1})}, \qquad p_s = \frac{p_{i+3/2}^j - p_{i+1/2}^j}{\frac{1}{2}(h_{i+1} + h_i)}.$$

Значения в узлах сетки вычисляются с помощью линейной интерполяции:

$$p_* = (p_*)_i^j = \frac{h_i p_{i-1/2}^j + h_{i-1} p_{i+1/2}^j}{h_i + h_{i-1}}.$$

Для всех переменных введём обозначение для интерполированного значения с весом $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ в пределах временного слоя:

$$y^{(\alpha)} = \alpha \hat{y} + (1 - \alpha) y.$$

Классическая схема Самарского–Попова [31] записывается следующим образом:

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_t = \left(Ru^{(0.5)}\right)_s, \tag{25a}$$

$$u_t = -Rp^{(\alpha)}_{\bar{s}}, \tag{25b}$$

$$\varepsilon_t = -p^{(\alpha)}\left(Ru^{(0.5)}\right)_s, \tag{25c}$$

$$r_t = u^{(0.5)}. \tag{25d}$$

Здесь R — весовой множитель, получаемый в результате дискретизации степеней r^n:

$$R(r) = \frac{\hat{r}^{n+1} - r^{n+1}}{(n+1)(\hat{r} - r)} = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ \dfrac{\hat{r} + r}{2}, & n = 1; \\ \dfrac{\hat{r}^2 + \hat{r}r + r^2}{3}, & n = 2. \end{cases}$$

Заметим, что закон сохранения массы выполняется автоматически [31] и имеет вид

$$\frac{h}{\rho^j_{i+1/2}} = \begin{cases} r^j_{i+1} - r^j_i, & n = 0; \\ [(r^j_{i+1})^2 - (r^j_i)^2]/2, & n = 1; \\ [(r^j_{i+1})^3 - (r^j_i)^3]/3, & n = 2. \end{cases} \tag{26}$$

Групповые свойства разностных схем для уравнений газовой динамики были исследованы в работах [32–34]. Ограничимся случаем постоянной энтропии $S = \text{const}$. В этом случае схема Самарского–Попова допускает алгебру Ли (16) при $n = 0, 1, 2$ и два дополнительных оператора (17) при $n = 0$. Основным отличием от дифференциального случая оказывается то, что схема не допускает оператор (18), который возникает для дифференциальной системы в случае специальных значений γ. В [34] построены отдельные инвариантные схемы, допускающие оператор (18), но теряющие ряд свойств схемы Самарского–Попова. В настоящей работе эти схемы мы не рассматриваем.

В дополнение к уравнениям разностной схемы (25a) должно быть записано дискретное уравнение для внутренней энергии, которое в наиболее простом случае имеет вид

$$\varepsilon^j_{i+1/2} = \varepsilon(\rho^j_{i+1/2}, p^j_{i+1/2}). \tag{27}$$

Модификация дискретного уравнения внутренней энергии позволяет получить дополнительные законы сохранения. В работе [35] была получена модификация полностью консервативной схемы Самарского–Попова для плоских течений, обладающая двумя дополнительными законами сохранения. Этот результат был обобщён в [33] для цилиндрических и сферических течений.

Рассмотрим разностные аналоги законов сохранения исходной системы (5), которыми обладает схема (25) в случае цилиндрических течений. Закон сохранения массы выполняется согласно уравнению (25а). Значительный интерес представляет закон сохранения энергии для произвольного уравнения (27). Для разностной схемы он записывается в виде

$$\left[\varepsilon + \frac{\left\langle u^2 \right\rangle}{2}\right]_t + \left[R p_*^{(\alpha)} u^{(0.5)}\right]_s = 0. \tag{28}$$

В частном случае $\gamma = 1 + 2/d$ существуют ещё два закона сохранения как следствия (23) и (24). В дискретном случае для их выполнения требуется использовать оставшуюся степень свободы для модификации уравнения (3):

$$\varepsilon^{(0.5)} = \frac{p^{(\alpha)}}{\gamma - 1}\left(\frac{1}{\rho}\right)^{(0.5)} - \frac{\tau^2}{8}\left\langle (u_t)^2 \right\rangle + \frac{p^{(\alpha)}}{2}\left[r^{(0.5)} R - \left(r^{n+1}\right)^{(0.5)}\right]_s. \tag{29}$$

Тогда «дополнительные» законы сохранения записываются следующим образом [33]:

$$\left[2t\left(\varepsilon + \frac{\left\langle u^2 \right\rangle}{2}\right) - \langle r u \rangle\right]_t + \left[R p_*^{(\alpha)}\left(2t^{(0.5)} u^{(0.5)} - r^{(0.5)}\right)\right]_s = 0, \tag{30}$$

$$\left[t^2\left(\varepsilon + \frac{\left\langle u^2 \right\rangle}{2}\right) - t\,\langle r u \rangle + \frac{\left\langle r^2 \right\rangle}{2} + \frac{\tau^2}{8}\left\langle u^2 \right\rangle\right]_t + \\ + \left[R p_*^{(\alpha)}\left(\left(t^2\right)^{(0.5)} u^{(0.5)} - t^{(0.5)} r^{(0.5)}\right)\right]_s = 0. \tag{31}$$

Законы сохранения (30) и (31) представляют для нас наибольший интерес, поскольку контроль выполнения их разностных аналогов на решениях термодинамически согласованной схемы [35], по-видимому, ранее нигде не производился. Мы вернемся к этому вопросу в следующем разделе, посвященном численной реализации разностных схем.

Известно [32], что законом сохранения энтропии (9) для политропного газа схема (25) не обладает. В то же время на решениях схемы справедливо соотношение

$$\frac{\hat{p} - p}{p^{(\alpha)}} = \gamma\,\frac{\hat{\rho} - \rho}{\rho^{(\alpha)}}, \tag{32}$$

которое аппроксимирует дифференциальное соотношение

$$\frac{dp}{p} = \gamma \, \frac{d\rho}{\rho}, \tag{33}$$

выполняющееся на траекториях частиц, с порядком $O(\tau)$ при $\alpha \neq 0.5$, или $O(\tau^2)$ при $\alpha = 0.5$. Таким образом, уравнение (32) позволяет судить об эволюции энтропии и оценить соответствующую ошибку.

Заметим, что в случае плоских течений ($n = 0$) схема также допускает разностные аналоги законов сохранения импульса и движения центра масс [33]. Закон сохранения движения центра масс, который будет рассмотрен в части, посвященной численной реализации разностных схем, имеет вид

$$(r - tu)_t - (t^{(0.5)} p^{(\alpha)})_s = 0. \tag{34}$$

4. Численная реализация инвариантных конечно-разностных схем

В современной вычислительной газовой динамике большую популярность приобрели методы конечного объёма, основанные на решении задачи о распаде разрыва и сохраняющие монотонность решения за счет нелинейной коррекции потоков через границы расчетных ячеек. У истоков этого подхода стоит широко известная работа С. К. Годунова [41]. Дальнейшее развитие методов конечного объёма привело к появлению схем повышенного порядка аппроксимации, таких как TVD-схемы [42], WENO-схемы [43], схемы CABARET [44] и др. Более подробное обсуждение схем повышенного порядка аппроксимации см., например, в [45].

В настоящей работе используется классический подход, связанный с использованием искусственной вязкости, впервые предложенный в [46] и заключающийся во введении в исходные уравнения дополнительных диссипативных членов, сглаживающих решения на разрывах. Несмотря на то, что вблизи разрывов метод не даёт такой высокой точности, как метод контрольных объёмов, его алгоритмическая реализация оказывается значительно проще, а качественная картина, даваемая решениями, обычно мало отличается от результатов, получаемых более точными методами. Традиционно такой подход применяется при численной реализации полностью консервативных разностных схем Самарского–Попова и их модификаций [21, 23, 26, 35], одна из которых рассматривается в настоящей публикации.

Заметим, что метод счета с помощью искусственной вязкости получил дальнейшее развитие в виде алгоритмически более сложного метода адаптивной искусственной вязкости, точность расчетов по которому сопоставима с точностью других современных методов [47].

С целью тестирования схемы (25) рассмотрим стандартные задачи о поршне и распаде произвольного разрыва [31]:

1. Из среды, имеющей плотность ρ_0, с постоянной скоростью u_0 извлекают поршень, что приводит к образованию простой волны разрежения, которая по краям стыкуется с двумя тривиальными постоянными решениями. В случае плоских течений волна разрежения записывается аналитически через автомодельное решение, и все параметры газа меняются непрерывно. В случае цилиндрических и сферических течений физический смыл несколько иной: жесткое ядро, находящееся в центре сферы ($n = 2$), или же цилиндрический стержень ($n = 1$) медленно сжимаются с постоянной скоростью u_0. Обратим внимание, что в случае цилиндрических и сферических течений, в отличие от плоских течений, возможно расширение внешней оболочки (цилиндрической или сферической) с постоянной радиальной скоростью. Напомним, что в случае $n = 0$ известно точное решение [31], определяющее параметры течения в области волны разрежения:

$$\rho(\xi) = \rho_0(\xi/\xi_0)^{\frac{2}{\gamma+1}}, \qquad u(\xi) = \frac{2c_0}{\gamma-1}\left((\xi/\xi_0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} - 1\right), \tag{35}$$

где $\xi = s/t$ — автомодельная координата, $\xi_0 = c_0\rho_0$, $c_0^2 = \gamma\rho_0^{-1}p_0$, и $p = \rho_0^{-1}\rho^\gamma p_0$.

2. При смене знака постоянной скорости стержня в задаче, рассмотренной в предыдущем пункте, возникает задача о поршне, вдвигаемом в газ. В этом случае решение представляет собой ударную волну, распространяющуюся в сторону движения поршня, при этом в решении возникают скачкообразные изменения параметров.

3. Классической задачей изучения разрывных решений в газе является задача о распаде произвольного разрыва. В начальный момент времени газ состоит из двух однородных частей, разделённых перегородкой. В частном случае задачи об ударной трубе в исходном состоянии газ по обе стороны перегородки неподвижен, а значения термодинамических переменных (а в более общем случае — и скорости частиц газа) претерпевают разрыв. Движение газа начинается после моментального исчезновения перегородки. В случае плоского течения перегородка разделяет два неограниченных полупространства. При $n = 1, 2$ она разделяет внешнюю и внутреннюю части цилиндра или сферы, соответственно.

В этих случаях внутренние части, естественно, ограничены. Структура решения при $n = 0$ соответствует комбинации волн разрежения и ударных волн сжатия [31].

4. Также мы рассмотрим «дополнительные» законы сохранения, возникающие при специальных значениях параметра γ, на примере указанных выше задач.

При численном моделировании для проверки законов сохранения требуется однородное разбиение расчётной области по массовой переменной. В связи с этим в задачах о движущемся поршне область, ограниченная значениями массовой переменной r_{min} и r_{max}, разбивается на одинаковое число интервалов. При этом разбиение остаётся однородным по пространственной переменной только в случае $n = 0$. В задаче о распаде разрыва фиксируются левая граница r_l и координата разрыва r_g, при этом задаётся число шагов разбиения N_l по массовой переменной в фиксированном промежутке. Правая граница вычисляется путём равномерного продолжения разбиения по массовой переменной с необходимым числом интервалов $N_r = N - N_l$. Разумеется, левые (r_l) и правые (r_r) границы расчётной области могут не совпадать для задач плоского, цилиндрического и сферического случаев.

Дискретизация непрерывных переменных порождает пилообразные колебания вблизи областей с большими градиентами решения. Для сглаживания колебаний используется искусственная вязкость. Для плоских течений использование вязкости рассмотрено в [31]. Для цилиндрического и сферического течений квадратичную вязкость возможно использовать аналогично, при этом размерность коэффициента изменяется соответственно размерности массовой переменной. Уточним, что линейная вязкость используется для сглаживания пилообразных колебаний, в то время как квадратичная — для «размазывания» фронта на фиксированное число интервалов, не зависящее от скачка амплитуды. Квадратичная вязкость не использовалась для волны разрежения.

Перечислим параметры, общие для всех расчётных задач. Все расчёты велись в безразмерных переменных: $r_0 = 1m$, $u_0 = 10m/s$, $\rho_0 = 0.1kg/m^3$, $p_0 = 38.3\text{Pa}$, $e_0 = p_0/(\rho_0(\gamma - 1))$. В задачах с поршнем начальные условия для термодинамических переменных были единичными. В задаче распада разрыва единичными были начальные условия слева от разрыва, на разрыве термодинамические переменные давления и плотности претерпевали уменьшение в 10 раз. Граничные условия записывались через кинематические переменные r, u. Безразмерная скорость поршня равнялась единице. Число шагов по массовой переменной $N_s = 200$. Число шагов по времени $N_t = 1000$ для временного шага $\tau = 1.0e - 5$, соответственно $N_t = 100$ для временного шага $\tau = 1.0e-4$. Коэффициент линейной вязкости $\nu = 4.0$, коэффициент квадратичной вязкости $\mu = (\gamma+1)4^2/(2\pi^2)$. Вязкость для безразмерного давления вычислялась как $\omega = \nu\Delta u\rho/p_0 + \mu(\Delta u)^2\rho/p_0$. Все весовые множители разностной схемы были выбраны равными 0.5. Для всех тестовых заданий момент времени, на который приводятся результаты расчета, $t_* = 1.0e-2$.

Параметры расчета, различающиеся для тестовых задач, приведены в Таблице 1. В столбце «Рис.» приводятся номера соответствующих рисунков.

Для тестовой задачи №4 для специальных значений $\gamma = 1 + 2/d$ были выбраны различные расчетные параметры, которые приведены в отдельных строках таблицы. В остальных тестовых задачах для специальных значений γ использовался стандартный набор параметров.

№	Начальные условия	γ	τ	ν	Рис.
1	$r_l = 0.5,\ r_r = 1,\ N = 200$	1.4	$1.0e-5$	4.0	1, 4, 5,10
2	$r_l = 0.5,\ r_r = 1,\ N = 200$	1.4	$1.0e-5$	4.0	2, 6, 7,10
3	$r_l = 0.5,\ r_g = 0.8,\ N_l = 150$	1.4	$1.0e-5$	4.0	3, 10
4, $n = 0$	$r_l = 0.4,\ r_g = 0.8,\ N_l = 170$	3	$1.0e-4$	0.0	8, 9
4, $n = 1$	$r_l = 0.4,\ r_g = 0.8,\ N_l = 160$	2	$1.0e-4$	0.0	8, 9
4, $n = 2$	$r_l = 0.5,\ r_g = 0.8,\ N_l = 140$	5/3	$1.0e-4$	0.0	8, 9

Таблица 1: Расчетные параметры для тестовых задач

Начнем с рассмотрения графиков решений, контроля закона сохранения энергии и оценки сохранения энтропии, а затем более детально рассмотрим «дополнительные» законы сохранения. Напомним, что схема (25) не сохраняет энтропию, но для неё может быть произведена оценка эволюции энтропии с помощью соотношений (32).

На Рис. 1 для выбранных расчетных параметров приведены (сверху вниз): график решения первого тестового задания (плотность ρ), контроль закона сохранения энергии (обозначено $\delta\varepsilon$) и энтропии (δS) на решениях. На каждом из графиков приводятся результаты для трёх случаев: плоский (обозначено как $\dim = 1$), цилиндрический ($\dim = 2$) и сферический ($\dim = 3$).

Аналогично на Рис. 2 и 3 приведены результаты расчетов по второй и третьей тестовым задачам (ударная волна и распад разрыва).

Как видно, профили решений, графики контроля закона сохранения энергии и ошибки эволюции энтропии для всех трёх задач для $n = 0, 1, 2$ оказываются похожими. В областях, где решения задач достаточно гладкие, отклонения значений $\delta\varepsilon$ и δS от нуля практически отсутствуют (близки к погрешности вычислений). На разрывах происходят ожидаемые скачки графиков $\delta\varepsilon$ и δS.

Заметим, что при уменьшении коэффициентов искусственной вязкости эти скачки могут быть уменьшены на порядки, но ценой значительного снижения монотонности численных решений в соответствующих областях. В целом же схема, как и ожидалось, показывает хорошие результаты по сохранению энергии и по ошибке роста энтропии как в областях гладкости, так и вблизи разрывов решений.

Рассмотрим теперь дополнительные законы сохранения (30) и (31). Обозначим их символами CL_1 и CL_2 соответственно. Как было сказано ранее, эти законы сохранения имеют место только при использовании специально выбранной аппроксимации уравнения внутренней энергии (29). В «классической» схеме Самарского–Попова в качестве уравнения внутренней энергии политропного газа обычно берётся то же соотношение (3), что и для дифференциальной системы. С целью упрощения дальнейших выкладок рассмотрим схему Самарского–Попова совместно со следующим уравнением внутренней энергии, записанным на двух временных слоях,

$$\varepsilon^{(0.5)} = \frac{p^{(\alpha)}}{\gamma - 1}\left(\frac{1}{\rho}\right)^{(0.5)}. \tag{36}$$

Для схемы, дополненной уравнением (36), могут быть построены разностные аппроксимации законов сохранения (23) и (24), которые уже не будут представлять собой дивергентные разностные выражения. Обозначим их соответственно $\widetilde{CL}_1$ и $\widetilde{CL}_2$. Нас прежде всего интересует, как они будут соотноситься с законами сохранения CL_1 и CL_2, поэтому запишем их в следующем виде.

1. Для $n = 0$:

$$\widetilde{CL}_k = CL_k - \left(t + \frac{\tau}{2}\right)^{k-1} \frac{\tau^2}{8}((u_t^+)^2 + (u_t)^2) = CL_k - \Delta_k^0, \quad k = 1, 2. \tag{37}$$

2. Для $n = 1$:

$$\widetilde{CL}_k = CL_k - \left(t + \frac{\tau}{2}\right)^{k-1} \left\{\frac{\tau^2}{8}((u_t^+)^2 + (u_t)^2) + \frac{\tau^2}{16}p^{(\alpha)}(u_s + \hat{u}_s)(\hat{u}_+ + \hat{u} + u_+ + u)\right\} = CL_k - \Delta_k^1, \quad k = 1, 2. \tag{38}$$

3. Для $n = 2$:

$$\widetilde{CL}_k = CL_k - \left(t + \frac{\tau}{2}\right)^{k-1} \left\{ \frac{\tau^2}{8}((u_t^+)^2 + (u_t)^2) + \frac{\tau^2}{6} p^{(\alpha)} (r(u+\hat{u})^2)_s \right.$$
$$\left. + \frac{\tau^3}{24} p^{(\alpha)} (u_s + \hat{u}_s)((\hat{u}_+ + u_+)^2 + (\hat{u} + u)(\hat{u}_+ + \hat{u} + u_+ + u)) \right\}$$
$$= CL_k - \Delta_k^2, \quad k = 1, 2. \quad (39)$$

Можно проверить (например, с помощью разностного оператора Эйлера [11]), что величины Δ_k^n, $k = 1, 2$, $n = 0, 1, 2$ не сводятся к дивергентным разностным выражениям. Они составляют ошибки разностной аппроксимаций законов сохранения, имеющие порядок $O(\tau^2)$ [33] и пропорциональные градиентам давления или скорости.

Законы сохранения (30) и (31) оказываются чрезвычайно чувствительны к искусственной вязкости (по-видимому, это связано с явной зависимостью их плотностей и потоков от времени), поэтому мы приводим графики для невязких версий рассматриваемых схем. На Рис. 4 для первой тестовой задачи для плоских ($n = 0$), сферических ($n = 1$) и цилиндрических ($n = 2$) течений приведены (сверху вниз): профиль давления для схемы Самарского–Попова без вязкости, контроль закона сохранения (30) для схемы Самарского–Попова и контроль закона сохранения (30) для схемы с уравнением внутренней энергии специального вида. На Рис. 5 то же проделано для закона сохранения (31). Отклонения этих законов сохранения на решениях от нуля на графиках мы обозначили соответственно как $\delta\mathrm{CL}_1$ и $\delta\mathrm{CL}_2$. Аналогичным образом устроены Рис. 6—9 для тестовых задач №2 и №3.

Из приведённых графиков видно, что «дополнительные» законы сохранения выполняются для схемы с модифицированным уравнением внутренней энергии значительно более точно. Основные скачки значений законов сохранения на решениях происходят на разрывах, вблизи больших градиентов давления или скорости. Как было выяснено выше, эти скачки могу быть несколько уменьшены путём уменьшения величины шага τ разностной сетки по времени.

В качестве дополнения мы приводим также Рис. 10, на котором изображены результаты контроля закона сохранения движения центра масс (34) для схемы Самарского–Попова при значении параметра $\alpha = 0.5$. Как видно из приведенных графиков, закон сохранения выполняется с высокой точностью.

5. Заключение

В настоящей работе была рассмотрена полностью консервативная конечно-разностная схема Самарского–Попова (25) для одномерных течений политропного газа. Эта схема, ставшая уже классической, была изучена с групповой точки зрения в [32–34] относительно недавно. В указанных работах в случаях плоских, цилиндрических и сферических течений для схемы были впервые выписаны некоторые новые разностные законы сохранения, ранее известные только для исходной дифференциальной модели. К ним относятся закон движения центра масс[2], а также два дополнительных закона сохранения для цилиндрических и сферических течений, которые возникают только при специальных значениях показателя адиабаты γ и специальном виде уравнения внутренней энергии, которое должно быть задано на двух временных слоях. Важно заметить, что для плоских течений эти законы сохранения были получены значительно раньше в работе [35].

Как уже было сказано, исследование групповых свойств схем уравнений одномерной газовой динамики было произведено ранее в [32–34], поэтому в настоящей публикации эти результаты приводятся лишь выборочно и вскользь. Тем не менее, снова подчеркнем связь инвариантности конечно-разностных схем и наличия у них законов сохранения: наиболее ярко эту связь, пожалуй, выражает разностный аналог теоремы Нётер [9, 12].

Произведена численная реализация схемы (25) для трёх пространственных симметрий на примерах стандартных тестовых задач о поршне и распаде разрыва с применением искусственной вязкости. Осуществлен контроль закона сохранения энергии, а также исследована эволюция энтропии на полученных решениях. Поскольку схема (25) в явном виде энтропию не сохраняет, остаётся рассматривать только изменение энтропии во времени, выражаемое разностным соотношением, приведенным в [32].

Основным результатом настоящей работы является численное исследование двух дополнительных законов сохранения, возникающих при специальных значениях γ. Эти законы сохранения рассмотрены на примерах трёх тестовых задач для плоских, сферических и цилиндрических течений, и показано, что они выполняются с достаточно высокой точностью на решениях схемы Самарского–Попова с модифицированным уравнением внутренней энергии (т. е. термодинамически согласованной схемы в терминологии [35]).

В дополнение к перечисленному для схемы Самарского–Попова осуществлен контроль закона сохранения движения центра масс в случае плоских течений. Насколько известно авторам, этот закон сохранения численно ранее нигде рассматривался.

[2] О существовании которого А. А. Самарскому и Ю. П. Попову, по-видимому, было известно.

Полученные численные расчеты и некоторые новые оценки погрешностей иллюстрируют и дополняют теоретические результаты работ [32–34].

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ №18-11-00238. Авторы благодарят В. А. Дородницына за помощь в постановке задач и ценные замечания.

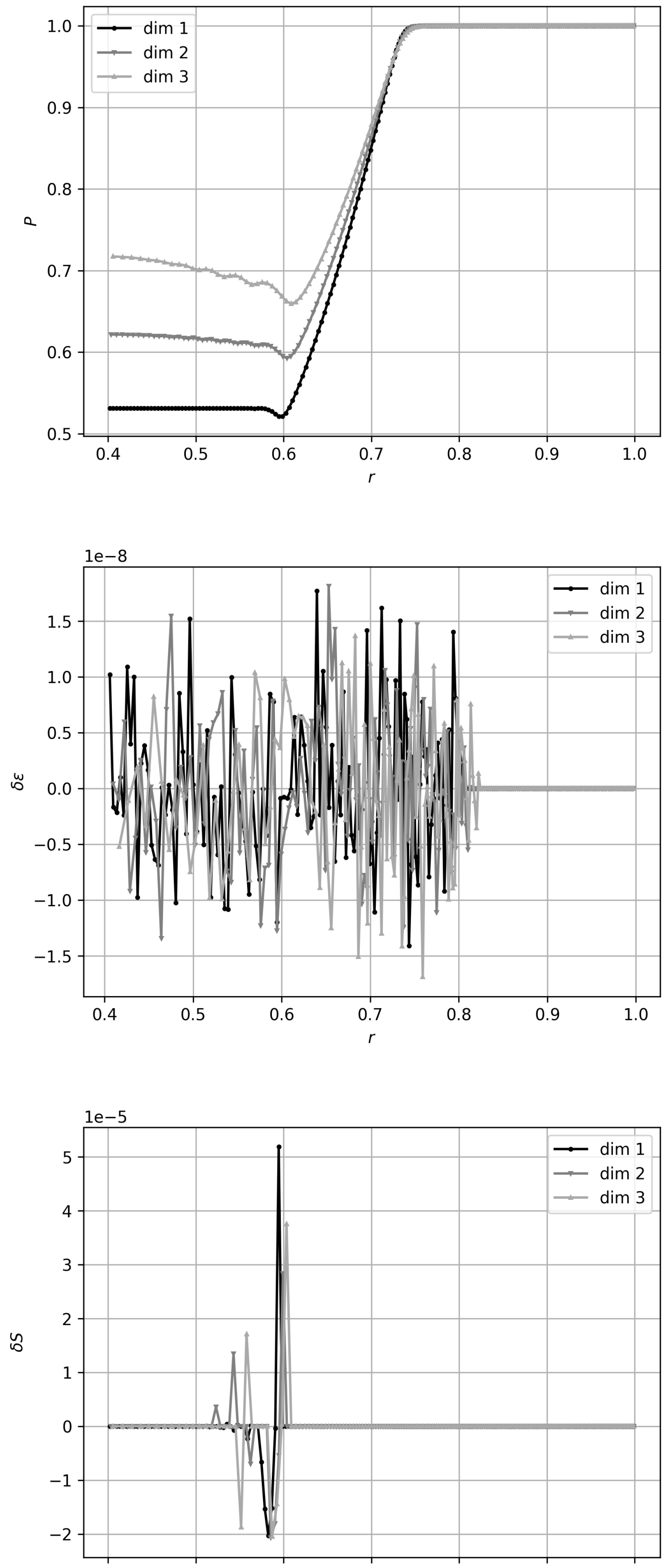

Рис. 1: Задача №1: графики плотности (ρ), сохранения энергии ($\delta\varepsilon$) и энтропии (δS) для выбранных параметров для случаев $n = 0, 1, 2$.

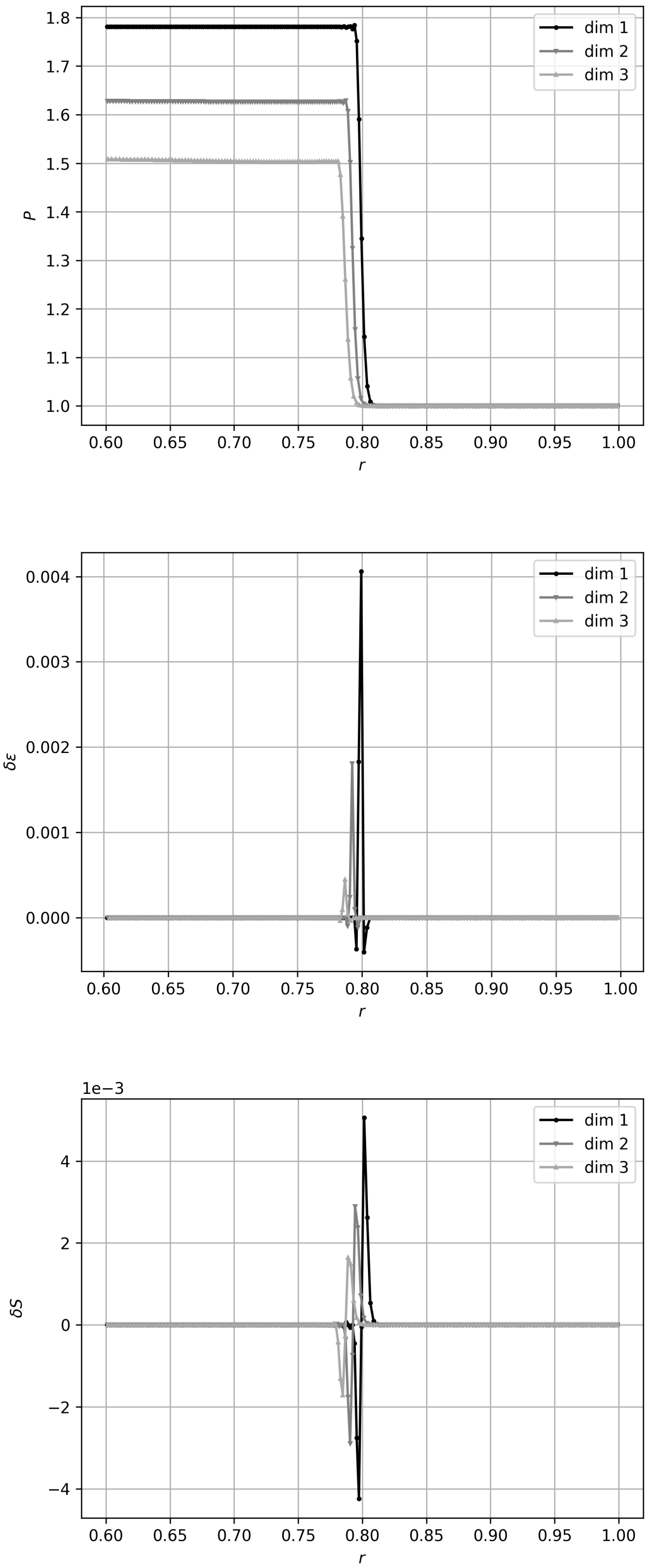

Рис. 2: Задача №2: графики плотности (ρ), сохранения энергии ($\delta\varepsilon$) и энтропии (δS) для выбранных параметров для случаев $n = 0, 1, 2$.

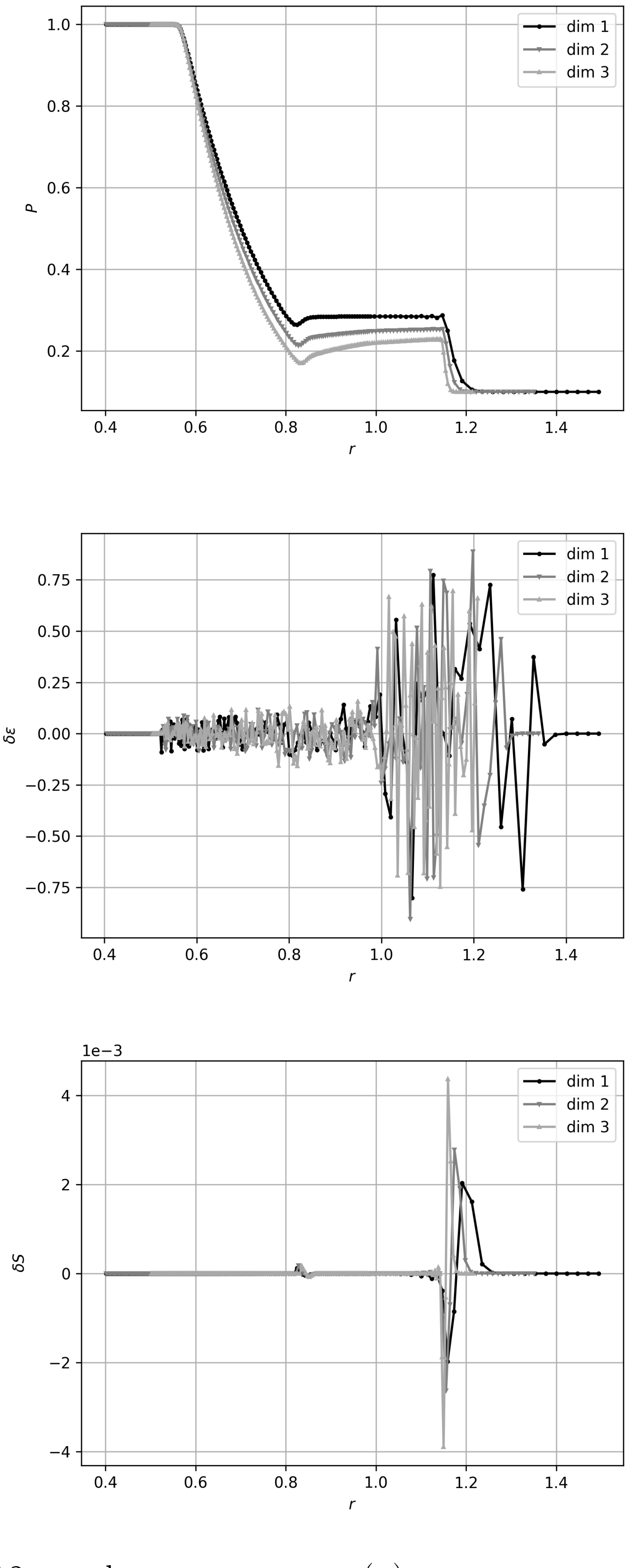

Рис. 3: Задача №3: графики плотности (ρ), сохранения энергии ($\delta\varepsilon$) и энтропии (δS) для выбранных параметров для случаев $n = 0, 1, 2$.

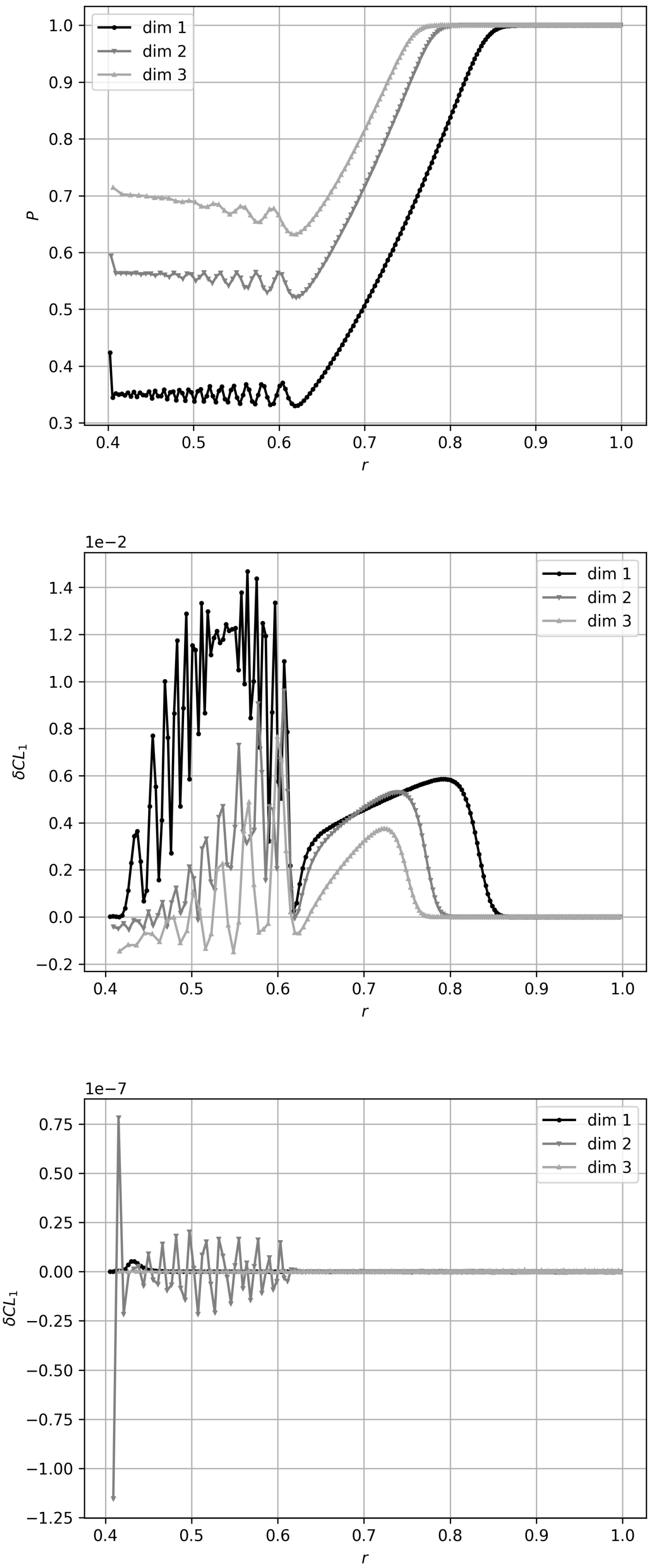

Рис. 4: Задача №1: профиль решения (без вязкости) и графики контроля закона сохранения (30) для выбранных параметров для случаев $n = 0, 1, 2$.

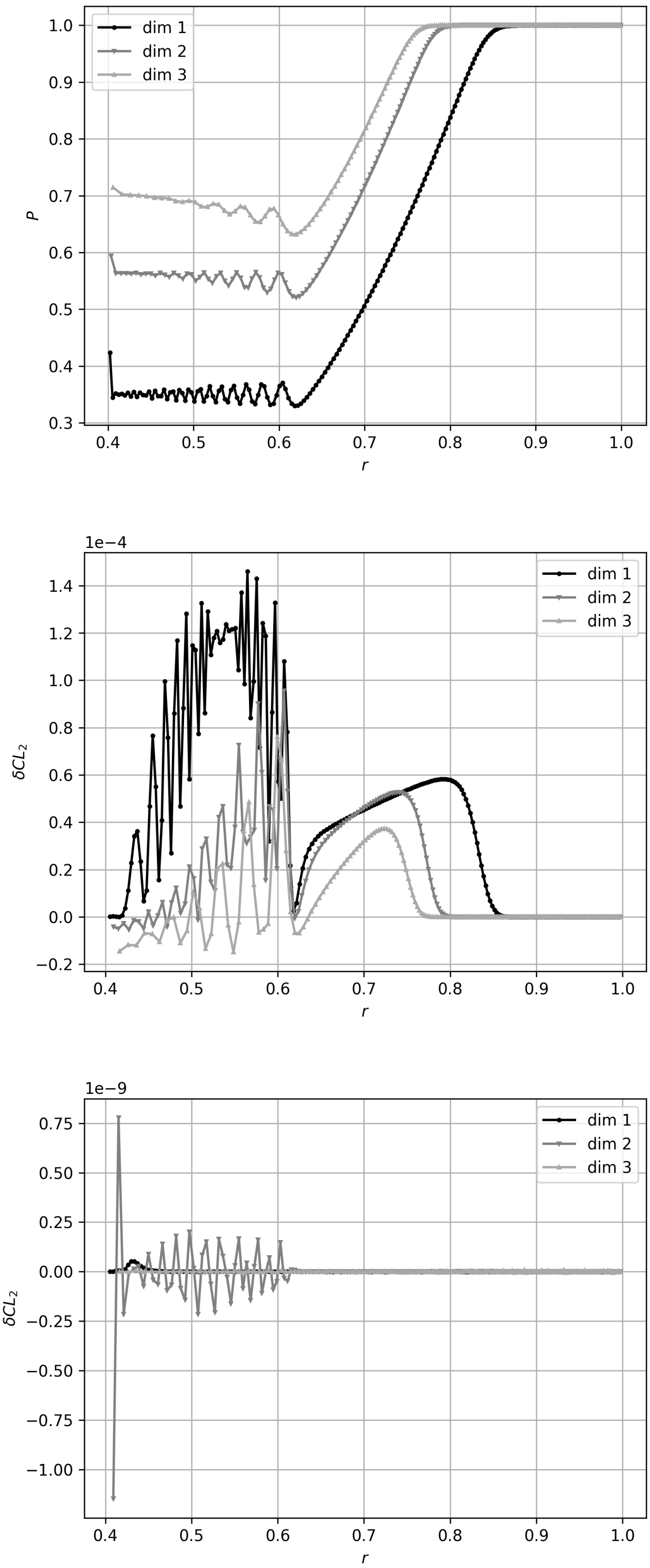

Рис. 5: Задача №1: профиль решения (без вязкости) и графики контроля закона сохранения (31) для выбранных параметров для случаев $n = 0, 1, 2$.

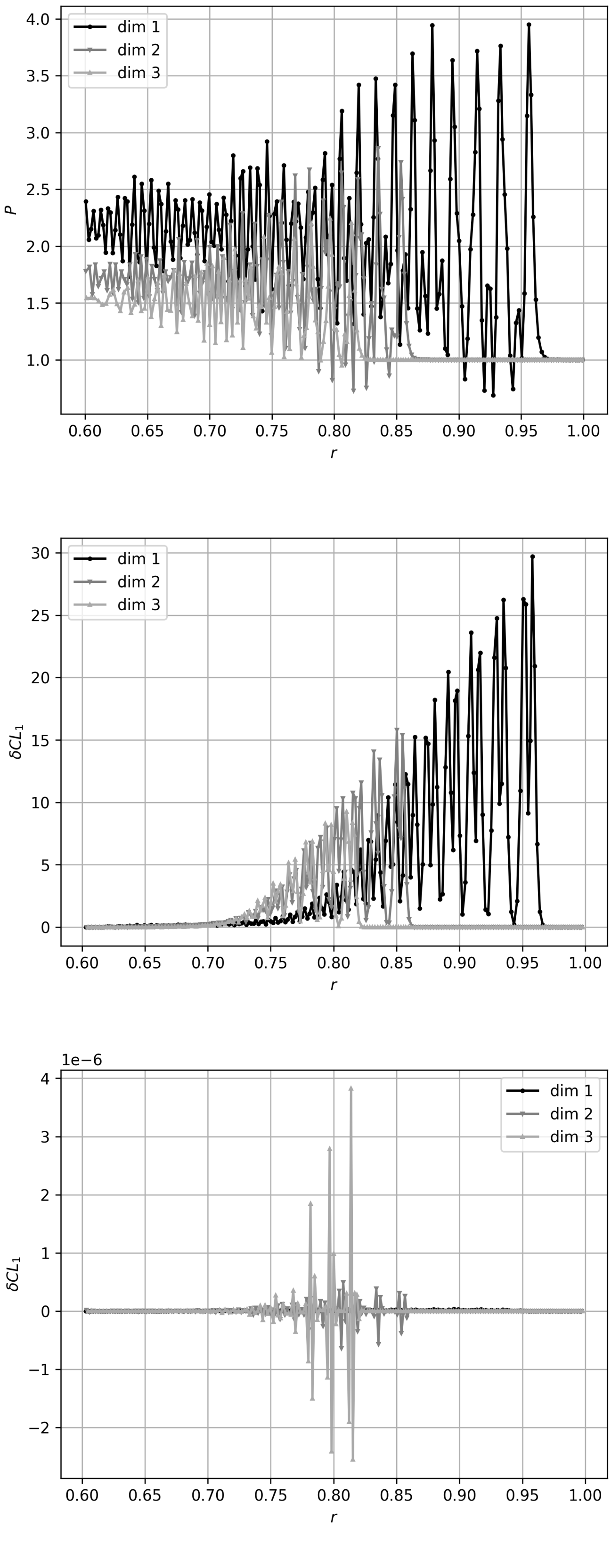

Рис. 6: Задача №2: профиль решения (без вязкости) и графики контроля закона сохранения (30) для выбранных параметров для случаев $n = 0, 1, 2$.

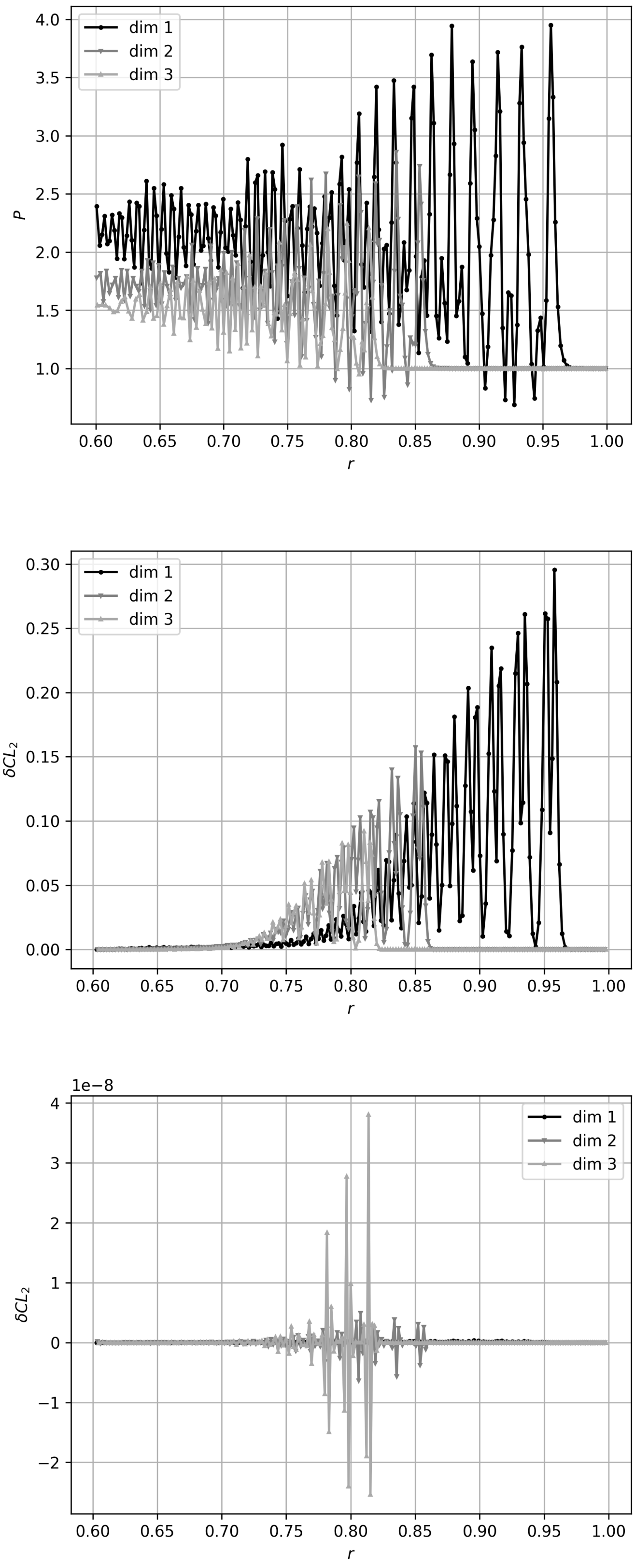

Рис. 7: Задача №2: профиль решения (без вязкости) и графики контроля закона сохранения (31) для выбранных параметров для случаев $n = 0, 1, 2$.

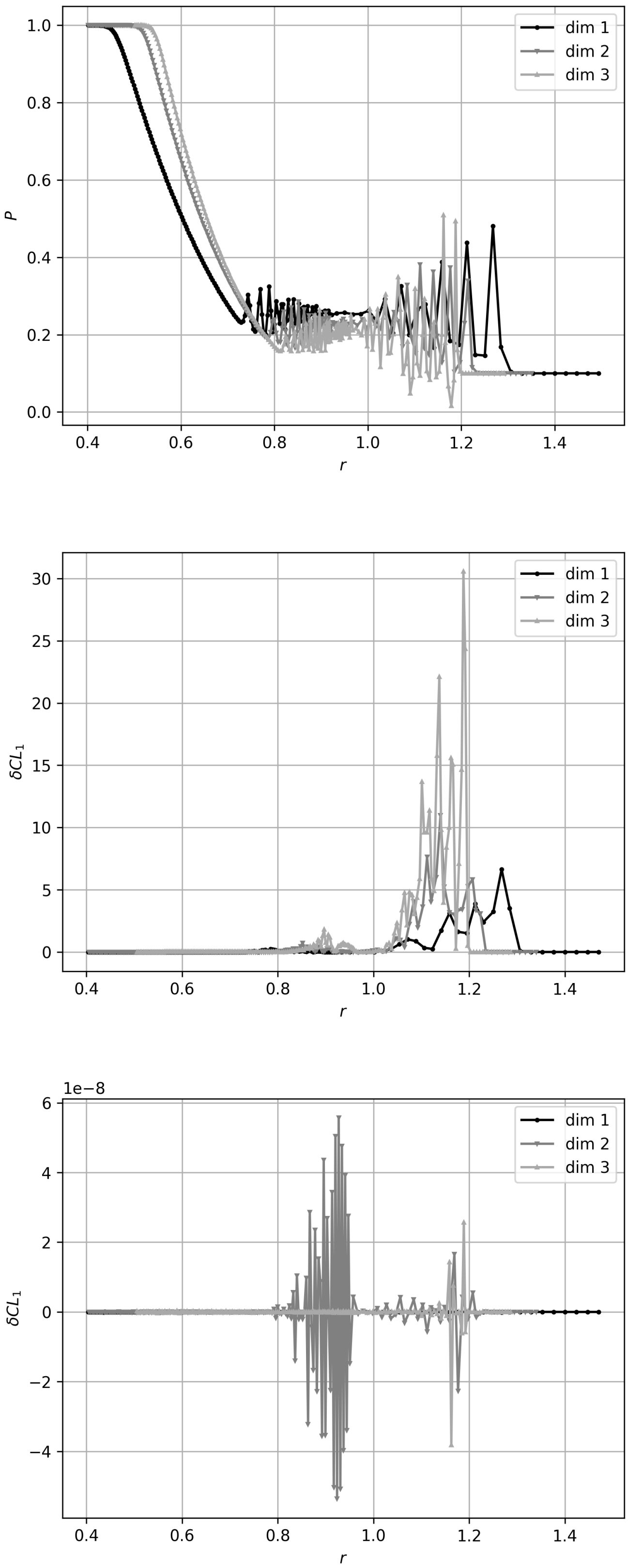

Рис. 8: Задача №3: профиль решения (без вязкости) и графики контроля закона сохранения (30) для выбранных параметров для случаев $n = 0, 1, 2$.

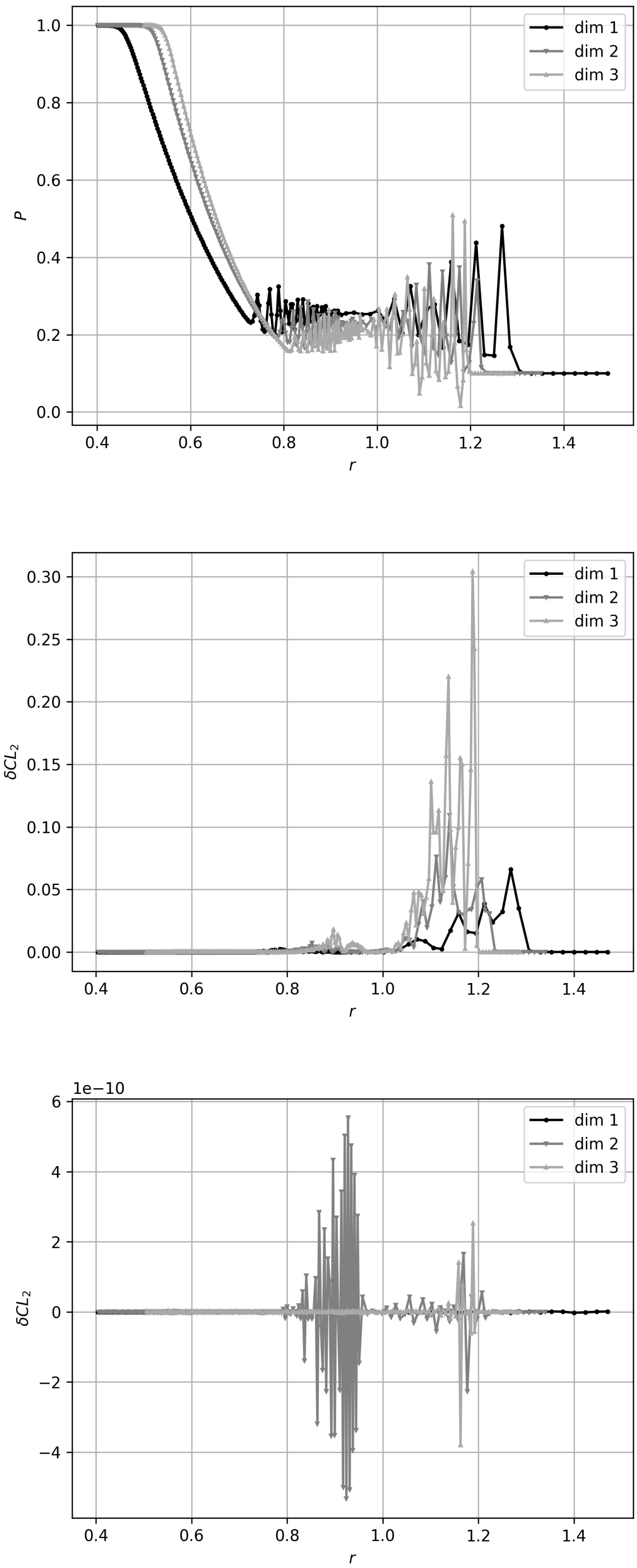

Рис. 9: Задача №3: профиль решения (без вязкости) и графики контроля закона сохранения (31) для выбранных параметров для случаев $n = 0, 1, 2$.

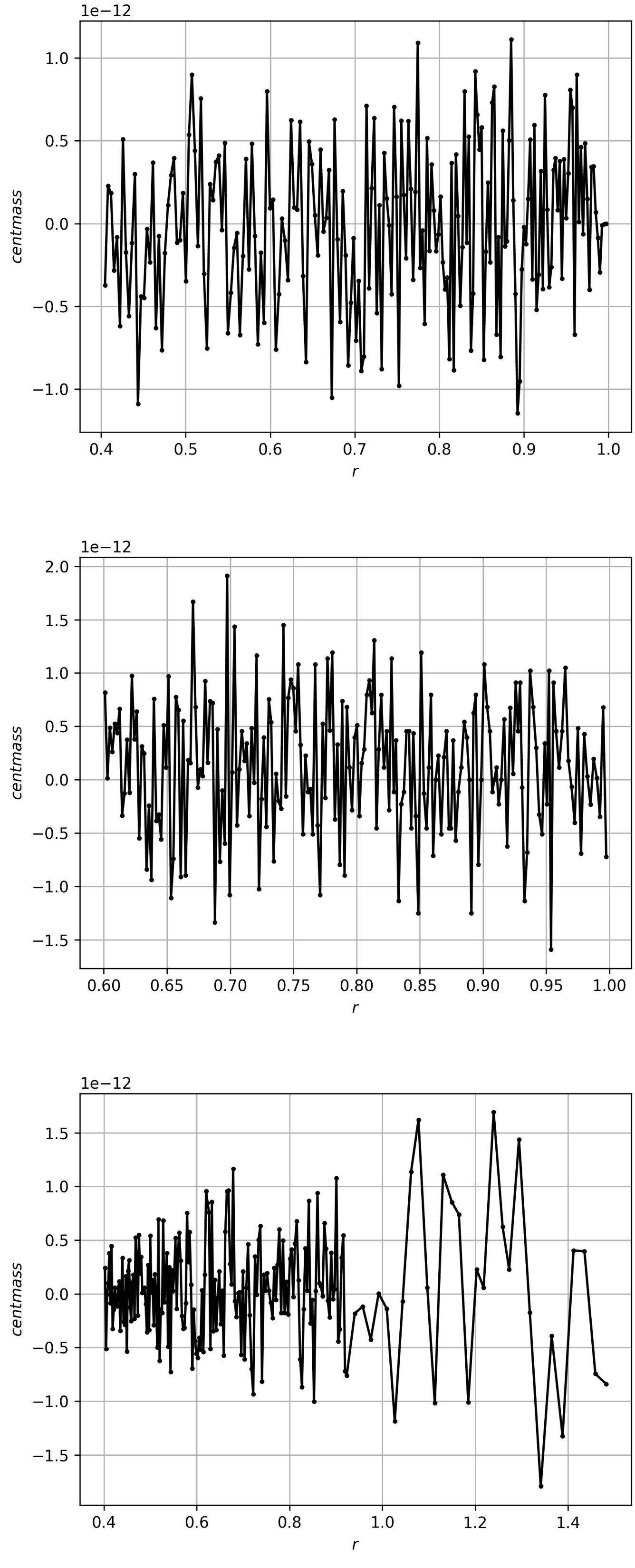

Рис. 10: Контроль закона сохранения движения центра масс для тестовых задач 1, 2 и 3 (сверху вниз) при $n = 0$.

Список литературы

[1] Iserles A., Quispel G. R. W. Why Geometric Numerical Integration? // Discrete Mechanics, Geometric Integration and Lie–Butcher Series / Ed. by K. Ebrahimi-Fard, M. Barbero Liñán. — Springer, Cham, 2018. — Vol. 267 of Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — P. 1–28.

[2] Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы (введение в теорию). — М. : Наука, 1973.

[3] Самарский А. А. Теория разностных схем. — Москва : Наука, 1977.

[4] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М. : Наука, 1968.

[5] Hairer Ernst, Lubich Christian, Wanner Gerhard. Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. — 2 edition. — Dordrecht : Springer, 2006.

[6] Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. — Новосибирск : Сиб. отд. АН СССР, 1962.

[7] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М. : Мир, 1989.

[8] Дородницын В. А. Группы преобразований в сеточных пространствах // Современные проблемы матем. Новейшие достижения. — 1989. — Т. 34.

[9] Дородницын В. А. Конечно-разностный аналог теоремы Нетер // Докл. Академии Наук. — 1993. — Т. 328, № 6. — С. 678.

[10] Бакирова М. И., Дородницын В. А., Козлов Р. В. Инвариантные разностные модели уравнения теплопроводности с источником // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 1996.

[11] Дородницын В. А. Групповые свойства разностных уравнений. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001.

[12] Dorodnitsyn V. A. Noether-type theorems for difference equations // Applied Numerical Mathematics. — 2001. — Vol. 39, no. 3. — P. 307 – 321. — Themes in Geometric Integration.

[13] Dorodnitsyn V. A. Kozlov R. V. Winternitz P. Continuous symmetries of Lagrangians and exact solutions of discrete equations // Journal of Mathematical Physics. — 2004. — Vol. 45, no. 1. — P. 336–359.

[14] Дородницын В. А., Капцов Е. И. Дискретизация обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, обладающих симметриями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2013. — Vol. 53. — P. 1329–1355.

[15] Дородницын В. А., Капцов Е. И. Инвариантные Разностные Схемы для Системы Ермакова // Дифференциальные уравнения. — 2016. — 01. — Т. 52. — С. 965–980.

[16] Dorodnitsyn V. A., Kozlov R. V. First integrals of difference Hamiltonian equations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2009. — 10. — Vol. 42. — P. 454007.

[17] Dorodnitsyn V. A., Kozlov R. V. Lagrangian and Hamiltonian Formalism for Discrete Equations: Symmetries and First Integrals // Symmetries and Integrability of Difference Equations / Ed. by D. Levi, P. Olver, Z. Thomova, P. Winternitz. — London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2011. — P. 7–49.

[18] First integrals of difference equations which do not possess a variational formulation / P. Winternitz, V. A. Dorodnitsyn, E. I. Kaptsov, R. V. Kozlov // Doklady Mathematics. — 2014. — 01. — Vol. 89, no. 1. — P. 106–109.

[19] The adjoint equation method for constructing first integrals of difference equations / V. A. Dorodnitsyn, E. I. Kaptsov, R. V. Kozlov, P. Winternitz // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2015. — 01. — Vol. 48, no. 5. — P. 055202.

[20] Anco S. C., Bluman G. W. Direct Construction of Conservation Laws from Field Equations // Physical Review Letters. — 1997. — 04. — Vol. 78. — P. 2869–2873.

[21] Dorodnitsyn V. A., Kaptsov E. I. Shallow water equations in Lagrangian coordinates: Symmetries, conservation laws and its preservation in difference models // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2020. — Vol. 89. — P. 105343.

[22] Капцов Е. И. Численная реализация инвариантной схемы для одномерных уравнений мелкой воды в лагранжевых координатах // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2019.

[23] Dorodnitsyn V. A., Kaptsov E. I. Discrete Shallow Water Equations Preserving Symmetries and Conservation Laws // Journal of Mathematical Physics. — 2020. — Submitted.

[24] Cheviakov A. F., Dorodnitsyn V. A., Kaptsov E. I. Invariant conservation law-preserving discretizations of linear and nonlinear wave equations // Journal of Mathematical Physics. — 2020. — Vol. 61, no. 8. — P. 081504.

[25] Dorodnitsyn V. A., Kaptsov E. I., Meleshko S. V. Symmetries, conservation laws, invariant solutions and difference schemes of the one-dimensional Green-Naghdi equations. Journal of Nonlinear Mathematical Physics. — 2021. — Vol. 28. no. 1.— P. 90–107.

[26] Попов Ю. П., Самарский А. А. Полностью консервативные разностные схемы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1969. — Т. 9, № 4. — С. 953–958.

[27] Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П. Двухслойные полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1987. — Т. 27. — С. 779–784.

[28] Об одной двухслойной полностью консервативной разностной схеме газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризацией решения / Ю. А. Повещенко, М. Е. Ладонкина, В. О. Подрыга и др. // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2019.

[29] Еленин Г. Г., Крылов В. В. Полностью консервативная разностная схема для уравнений двухслойной «мелкой воды» в лагранжевых координатах // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18, № 7. — С. 1190–1196.

[30] Попов Ю. П., Самарский А. А. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений магнитной гидродинамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1970. — Т. 10, № 4. — С. 990–998.

[31] Попов Ю. П., Самарский А. А. Разностные методы решения задач газовой динамики. — М. : Наука, 1992.

[32] Dorodnitsyn V. A., Kozlov R., Meleshko S. V. One-dimensional gas dynamics equations of a polytropic gas in Lagrangian coordinates: Symmetry classification, conservation laws, difference schemes // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2019. — Vol. 74. — P. 201 – 218.

[33] Kozlov R. Conservative difference schemes for one-dimensional flows of polytropic gas // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2019. — Vol. 78. — P. 104864.

[34] Dorodnitsyn V. A., Kozlov R., Meleshko S. V. One-dimensional flows of a polytropic gas: Lie group classification, conservation laws, invariant and conservative difference schemes // Symmetries and Applications of Differential Equations / Ed. by Gazizov R. K. Luo, A. C. J. — Springer, 2021. — (In Memory of Nail H. Ibragimov , 1939–2018).

[35] Коробицын В. А. Термодинамически согласованные разностные схемы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1989. — Т. 29. — С. 309–312.

[36] Черный Г. Г. Газовая динамика. — М. : Наука, 1988.

[37] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М. : Наука, 1988.

[38] Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. — М.–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003.

[39] Noether E. Invariante Variations problem // Konigliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen, Nachrichten, Mathematisch-Physikalische Klasse Heft 2. — 1918. — P. 235–257. — English translation: Transport Theory and Statist. Phys., 1(3), 1971, 183-207.

[40] Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. — М. : Наука, 1983.

[41] Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. — 1959. — Т. 47(89), № 3. — С. 271–306.

[42] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. — 1983. — Vol. 49, no. 3. — P. 357–393.

[43] Jiang Guang-Shan, Shu Chi-Wang. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes // Journal of Computational Physics. — 1996. — Vol. 126, no. 1. — P. 202–228.

[44] Головизнин В. М., Самарский А. А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Матем. моделирование. — 1998. — Т. 10. — С. 86–100.

[45] Зюзина Н. А., Ковыркина О. А, Остапенко В. В. Монотонная разностная схема, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Доклады Академии наук. — 2018. — Т. 482. — С. 639–643.

[46] Neumann J. von, Richtmyer R. D. A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks // Journal of Applied Physics. — 1950. — Vol. 21, no. 3. — P. 232–237.

[47] Попов И. В. Фрязинов И. В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений гидродинамики. — М. : КРАСАНД, 2015.

Содержание