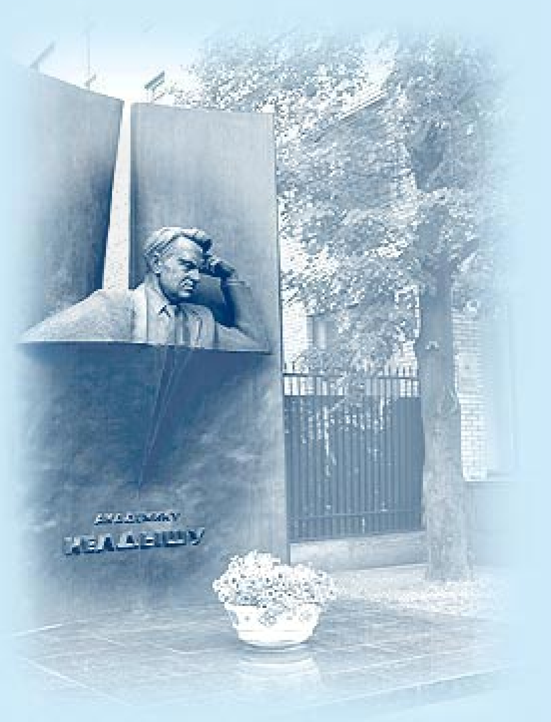
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 93 за 2021 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Д.А. Зенюк, Г.Г. Малинецкий

Формализм амплитудных уравнений для систем реакции—субдиффузии

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Зенюк Д.А., Малинецкий Г.Г. Формализм амплитудных уравнений для систем реакции—субдиффузии // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 93. 15 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-93
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-93

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Д. А. Зенюк, Г. Г. Малинецкий

Формализм амплитудных уравнений для систем реакции—субдиффузии

Москва — 2021

УДК 517.968.7

Зенюк Д. А., Малинецкий Г. Г.
Формализм амплитудных уравнений для систем реакции—субдиффузии

В работе рассматривается применение стандартной процедуры вывода амплитудных уравнений к двухкомпонентной системе с нелинейной химической кинетикой и субдиффузией в случае бифуркации Хопфа. Аномальный характер диффузионного транспорта описан с помощью производных Капуто по временному переменному. Показано, что из-за особенностей поведения решений линейных систем с производными нецелого порядка амплитудное уравнение имеет гораздо более сложный вид по сравнению со случаем нормальной диффузии.

Ключевые слова: дробное исчисление, асимптотические методы, субдиффузия.

Dmitry Alexeyevich Zenyuk, Georgiy Gennadiyevich Malinetskiy
Amplitude equation formalism for reaction—subdiffusion systems

The paper presents derivation of the amplitude equation for the Hopf bifurcation in the two-component system with nonlinear chemical kinetics and subdiffusion. Anomalous diffusion transport is described via Caputo fractional derivatives. The obtained amplitude equation is much more complex compared to the case of normal diffusion because solutions of fractional order linear differential equations have inconvenient behavior.

Key words: fractional calculus, asymptotic methods, subdiffusion.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 19-01-00602А.

Оглавление

Введение 3
Дробное исчисление и функции Миттаг-Леффлера 5
Вывод амплитудного уравнения 8
Заключение 13

Введение

Формирование нетривиальной пространственно-временно́й упорядоченности является одним из наиболее интересных процессов, который мы можем наблюдать. Структуры и паттерны той или иной степени сложности можно встретить в самых разных контекстах. Это могут быть почти идеальные шестиугольники пчелиных сот, причудливые формы колоний слизевиков или сложные узоры на шкуре животных, которые, как уже известно, играют важную роль в регуляции поведения. Это могут быть необычные элементы ландшафта, образованные остывающим базальтом, наподобие Мостовой великанов в Северной Ирландии, или «тигровые буши», которые состоят из чередующихся полос почвы, лишенной всякой растительности, и густого леса. Некоторые структуры имеют колоссальные размеры, как, например, атмосферные вихри, которые наблюдаются на газовых гигантах Солнечной системы — самым известным их них является Большое красное пятно на Юпитере. Множество других примеров с красочными иллюстрациями и подробной библиографией заинтересованный читатель сможет найти в [1].

Разумеется, возникновение упорядоченности в разных системах управляется совершенно разными механизмами, и не все из них до конца понятны на сегодняшний день. Тем не менее, иногда удается выделить относительно большие классы процессов, в которых формирование паттернов подчиняется одним и тем же универсальным законам. Характерным примером здесь являются системы, допускающие т. н. диссипативные структуры. Возникновение упорядоченности в них на первый взгляд может показаться контррациональным, поскольку в равновесных системах диссипация всегда разрушает любую нетривиальную структуру, стремясь привести систему к термодинамическому равновесию. В нелинейном случае диссипация выступает в совершенно ином качестве: именно конкуренция диссипации и нелинейных процессов переноса энергии и вещества приводит к формированию сложных паттернов.

С формальной точки зрения основным объектом при изучении формирования паттернов является набор уравнений, описывающих динамику рассматриваемого процесса. Для систем, имеющих форму уравнений с частными производными, была построена общая классификация паттернов, основанная на линейно неустойчивых решениях, см. [2, 3]. Мощным теоретическим инструментом исследования таких систем являются амплитудные уравнения. Они описывают медленную пространственно-временну́ю модуляцию решения, возникающего при слабом нелинейном возмущении стационарного однородного состояния в окрестности точки бифуркации. Форма амплитудных уравнений универсальна для каждого типа неустойчивости, а детали исходной системы влияют лишь на коэффициенты этих уравнений. Такой подход к проблеме описания сложной упорядоченности впервые был применен

Дж. Уайтхедом и А. Ньюэллом к задачам гидродинамики [4] и Ю. Курамото и Т. Цузуки для диффузионных систем с нелинейными источниками [5]. Вывод амплитудных уравнений опирается на использование многомасштабных асимптотических разложений (*multiple scale expansion*) — техники, восходящей к работам А. Пуанкаре по проблемам небесной механики. Более подробное изложение истории этого метода, а также множество примеров его применения можно найти в [6].

В последние десятилетия все больший интерес привлекают системы с производными нецелого порядка*. Эти производные представляют собой интегро-дифференциальные операторы, причем интеграл в них имеет форму свертки со слабо сингулярным ядром. Было показано [7], что использование дифференциальных уравнений с дробными производными для построения моделей систем с сильной памятью более адекватно из физических соображений и позволяет более точно воспроизводить наблюдаемые данные. Одним из наиболее хорошо изученных на сегодняшний день объектов такого типа являются уравнения аномальной диффузии. Известно [8], что они могут быть получены с помощью предельного перехода в схеме немарковского случайного блуждания при условии, что распределения времен ожидания или величин скачков блуждающей частицы имеют степенную асимптотику. Было предложено обобщение этой схемы (см. [9] и цитированную там литературу), позволяющее учесть наличие источников, что приводит к уравнениям типа реакции—диффузии с дробными производными. Решения этих уравнений описывают транспортные процессы, для которых среднеквадратичное рассеяние растет со временем как t^γ. Процессы с $0 < \gamma < 1$ называются субдиффузионными, с $1 < \gamma < 2$ — супердиффузионными. На сегодняшний день накоплен достаточно обширный экспериментальный материал, подтверждающий, что такие процессы играют важную роль в реологии, биохимии и физике полимеров, см., например, [10, 11].

В работах [12–14] были рассмотрены формальные процедуры получения амплитудных уравнений для систем с дробной производной Рисса по пространственному переменному, которые соответствуют случаю супердиффузии, для всех основных типов неустойчивостей. Работы, в которых бы обсуждались способы получения амплитудных уравнений для систем с дробными производными по времени, пока не публиковались. Легко показать, что случай бифуркаций Тьюринга для них ничем не отличается от стандартных моделей с обычными производными. Заменив лишь определение «медленного» времени на $\theta = \epsilon^{2/\alpha} t$ и формально повторив построения [5], можно получить вещественное уравнение Гинзбурга—Ландау, в котором обычная производ-

*Обычно такие производные называют дробными (*fractional derivatives*), хотя такой термин не совсем верен, т. к. «показатель» этих операторов может быть любым комплексным числом. Тем не менее, обозначение стало общеупотребительным ная по временно́му переменному будет заменена оператором Капуто. Причина этого вполне прозрачна: решения в этом случае являются стационарными, и наличие дробной производной по времени никак не меняет их форму. Случай бифуркации Хопфа, приводящей к возникновению периодического во времени паттерна, оказался более сложным. Именно этому вопросу и будет посвящена настоящая работа.

Дробное исчисление и функции Миттаг-Леффлера

Подробное изложение интегро-дифференциального исчисления нецелого порядка можно найти в [15], а основные элементы теории уравнений с дробными производными — в [16, 17]. Здесь будет указан лишь минимальный набор сведений, необходимых для понимания последующих разделов. Дробные интегралы Римана—Лиувилля порядка $\alpha > 0$ на конечном сегменте $[a, b]$ определяются выражениями

$$\left(I^{\alpha}_{a+}\, f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad x > a, \tag{1a}$$

$$\left(I^{\alpha}_{b-}\, f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b f(\tau)(\tau-t)^{\alpha-1} d\tau, \quad x < b. \tag{1b}$$

Первый из них называется левосторонним, второй — соответственно, правосторонним. Функция f может быть комплекснозначной, важно лишь, чтобы ее аргумент при этом оставался вещественным. Обобщения на случай комплексного аргумента или комплексного показателя α см. в [15].

Для функций $f \in C^n[a, b]$ дробными производными Капуто порядка $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ называются выражения

$$\left(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\, f\right)(x) = \left(I^{n-\alpha}_{a+}\, f^{(n)}\right)(x)\,,\ \left(\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}\, f\right)(x) = (-1)^n\, \left(I^{n-\alpha}_{b-}\, f^{(n)}\right)(x)\,, \tag{2}$$

где $n = [\alpha] + 1$ и $[x]$ означает целую часть числа x. Эти производные как функции x являются непрерывными на $[a, b]$ (см. теорему 2.2 в [17]). Для неотрицательных целых α производные Капуто совпадают с обычными:

$$\left(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\, f\right)(x) = f^{(n)}(x), \quad \left(\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}\, f\right)(x) = (-1)^n f^{(n)}(x).$$

Если f принадлежит $C[a, b]$ или $L_\infty[a, b]$, производные Капуто являются левыми обратными для соответствующих интегралов Римана—Лиувилля (лемма 2.21 в [17]):

$$\left(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\, I^{\alpha}_{a+}\, f\right)(x) = f(x), \quad \left(\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}\, I^{\alpha}_{b-}\, f\right)(x) = f(x). \tag{3}$$

Преобразование Лапласа от производных нецелого порядка во многом похоже на обычное правило дифференцирования оригинала:

$$\left(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} f\right)(t) \risingdotseq s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0),$$

где F — изображение f. Это соотношение требует определенных ограничений на функцию f, см. лемму 2.24 в [17].

Рассмотрим теперь задачу Коши для уравнения с производной Капуто:

$$\left(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+} u\right)(t) = f(t, u(t)), \quad u^{(k)}(0) = b_k \in \mathbb{R},\ k = 0, 1, \ldots n-1. \tag{4}$$

Решение будем искать на конечном отрезке $[0, T]$. Известно [16, 17], что в пространстве $C^{n-1}[0, T]$ эта задача эквивалентна нелинейному интегральному уравнению Вольтерра. Более строго, пусть f такова, что при любом y из некоторого открытого подмножества $G \subset \mathbb{C}$ выполняется $t^{\gamma} f(t, y) \in C[0, T]$, где $0 \leqslant \gamma < 1$ и $\gamma \leqslant \alpha$. Тогда если $u \in C^{n-1}[0, T]$, то u удовлетворяет (4), если и только если она удовлетворяет уравнению

$$u(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau, u(\tau)) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}. \tag{5}$$

Нас в дальнейшем будут интересовать только линейные уравнения, для которых правая часть может быть представлена в весьма простой форме $f(t, u) = \lambda u(t) + h(t)$. В этом случае (5) может быть переписано в виде

$$u(t) - \lambda \int_0^T K(t, \tau) u(\tau) d\tau = \phi(t), \quad K(t, \tau) = \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathbf{I}(\tau \leqslant t). \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{I}(A)$ — характеристическая функция множества A. Будем рассматривать случай $0 < \alpha < 1$, поскольку именно он соответствует субдиффузионному транспорту. Тогда норма интегрального оператора в (6) равна

$$\max_{t \in [0, T]} \int_0^T |K(t, \tau)| d\tau = \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)},$$

и можно показать, что он является компактным, а значит, к (6) применима теорема Фредгольма (см., например, гл. 13 в [18]), дающая необходимое и достаточное условие его разрешимости. Чтобы использовать этот результат, нам понадобится указать однородное сопряженное к (6) уравнение. Используя стандартное определение скалярного произведения для функций, мы приходим к тому, что искомое соотношение должно иметь вид

$$v(\tau) - \overline{\lambda} \int_0^T \overline{K(\tau, t)} v(t) dt = v(\tau) - \frac{\overline{\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (\tau - t)^{\alpha-1} \mathbf{I}(t \leqslant \tau) v(t) dt = \\ = v(\tau) - \overline{\lambda} \left(I_{0+}^{\alpha} v \right)(\tau) = 0. \quad (7)$$

Здесь $\overline{x}$ означает комплексно сопряженную к x величину. Теперь используем (3) и возьмем от обеих частей (7) производную Капуто, чтобы получить окончательно $\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} v\right)(\tau) = \overline{\lambda} v(\tau)$. Основываясь на этом, можно предположить, что для уравнения $\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} \mathbf{u}\right)(t) - M\mathbf{u} = \phi(t)$ однородным сопряженным будет $\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} \mathbf{v}\right)(\tau) - M^* \mathbf{v} = 0$, где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$— векторные комплекснозначные функции вещественного аргумента, M — некоторая квадратная матрица, а M^* — эрмитово сопряженная к ней.

Для дальнейшего изложения нам также понадобятся двухпараметрические функции Миттаг-Леффлера. Они представляют собой степенные ряды

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{C}, \quad (8)$$

которые сходятся на всей комплексной плоскости. Для удобства будем также использовать обозначение $E_{\alpha}(z) = E_{\alpha,1}(z)$. Обстоятельное изложение свойств этих функций и их приложений с обширной библиографией можно найти в [8].

Функции $E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, играют ту же роль для оператора Капуто $\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}$, что и функции $e^{\lambda t}$ для обычного оператора дифференцирования. В этом можно убедиться, например, либо выполняя почленное дробное дифференцирование в определении (8), либо используя тот факт, что преобразование Лапласа от $E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})$ имеет вид [8, 17]

$$\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - 1}, \quad \operatorname{Re} s > 0,\ |\lambda s^{-\alpha}| < 1. \quad (9)$$

Важным отличием от обычной экспоненты является отсутствие полугруппового свойства. Действительно, из (8) немедленно следует, что

$$E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha}) E_{\alpha}(\sigma t^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{\alpha k}, \quad a_k = \sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda^m \sigma^{k-m}}{\Gamma(\alpha m + 1)\Gamma(\alpha(k-m) + 1)}.$$

Правая часть здесь будет совпадать с $E_{\alpha}((\lambda + \sigma)t^{\alpha})$, только если $\alpha = 1$ либо если хотя бы одно из чисел λ и σ равно нулю.

Для удобства введем также обозначение*

$$\mathcal{E}_{\alpha,\lambda}^{p,q}(t) = E_{\alpha}^{p}\left(\lambda t^{\alpha}\right) E_{\alpha}^{q}\left(\overline{\lambda} t^{\alpha}\right).$$

*Здесь E_{α}^{p} означает p-ю степень значения функции E_{α}. В [8, 17] похожее обозначение с $p \in \mathbb{C}$ используется для трехпараметрической функций Миттаг-Леффлера

Через функции Миттаг-Леффлера выражаются многие другие функции, естественным образом возникающие при исследовании уравнений с дробными производными. Одной из них является

$$g_{\alpha,\lambda}(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha}), \quad t \neq 0,\ \operatorname{Re}\alpha > 0.$$

Известно [17], что

$$g_{\alpha,\lambda}(t) \risingdotseq \frac{1}{s^{\alpha}-\lambda}, \quad \operatorname{Re}s > 0,\ |\lambda s^{-\alpha}| < 1. \tag{10}$$

Вывод амплитудного уравнения

В данном разделе мы подробно рассмотрим вывод амплитудного уравнения для следующей двухкомпонентной системы реакции—субдиффузии:

$$\begin{gathered}
\left({}_t\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}\, X\right)(t,z) = \frac{D_1}{L^2}\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + A - (B+1)X + X^2 Y, \\
\left({}_t\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}\, Y\right)(t,z) = \frac{D_2}{L^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} + BX - X^2 Y.
\end{gathered}$$

Здесь L — размер расчетной области, $z \in [0,1]$ — безразмерные пространственные координаты, A, B, D_1 и D_2 — неотрицательные коэффициенты, $0 < \alpha \leqslant 1$. Функции X и Y задают концентрации двух основных продуктов реакции, коэффициенты A и B — концентрации вспомогательных веществ, которые поддерживаются постоянными. Оператор дробного дифференцирования действует только по аргументу t. Легко показать, что единственным положением равновесия системы является решение $X_0 = A$, $Y_0 = B/A$. Отклонения от этого пространственно однородного и стационарного решения, $\xi(t,z) = X(t,z) - X_0$, $\eta(t,z) = Y(t,z) - Y_0$, подчиняются уравнениям

$$\left({}_t\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}\, \mathbf{u}\right)(z,t) = M_0\frac{\partial^2}{\partial z^2}\mathbf{u} + M_1\mathbf{u} + \mathbf{u}^{\mathsf{T}} M_2 \mathbf{u}\, \mathbf{e} + \mathbf{u}^{\mathsf{T}} M_3 \operatorname{diag}(\mathbf{u})\mathbf{u}\, \mathbf{e}. \tag{11}$$

Здесь были введены следующие матричные и векторные величины:

$$\begin{gathered}
\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad M_0 = \begin{pmatrix} D_1/L^2 & 0 \\ 0 & D_2/L^2 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} B-1 & A^2 \\ -B & -A^2 \end{pmatrix}, \\
M_2 = \begin{pmatrix} B/A & A \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{gathered}$$

Оператор diag преобразует произвольный вектор в диагональную матрицу соответствующего размера.

Следуя стандартной практике, будем считать основным бифуркационным параметром B. В [19] было показано, что критическое значение параметра, B_H, при котором в линейном приближении устойчивость однородного стационарного решения нарушается в результате рождения предельного цикла, является решением квадратичного уравнения

$$-\left[B^2 - 2B(A^2+1) + (A^2-1)^2\right] = \gamma^2 \left[B - (A^2+1)\right]^2,$$

где $\gamma = \mathrm{tg}(\alpha\pi/2)$. Из двух корней следует выбирать тот, который превосходит $1 + A^2$. В линейном приближении при $B = B_H$ решением системы (11) будет линейная комбинация $\mathbf{a}E_\alpha(\sigma t^\alpha)$ и комплексно сопряженной с ней функции, где $\sigma = \rho e^{i\pi\alpha/2}$, $\rho \in \mathbb{R}$, а $\mathbf{a}$ является правым собственным вектором матрицы M_1, соответствующим σ: $M_1\mathbf{a} = \sigma\mathbf{a}$.

Пусть теперь $B = B_H + \epsilon^2\beta$, где ϵ — малый вещественный параметр. Будем для определенности рассматривать суперкритическую бифуркацию с $\beta > 0$. Тогда

$$\begin{pmatrix} B_H - 1 & A^2 \\ -B_H & -A^2 \end{pmatrix} + \epsilon^2 \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} = M_1 + \epsilon^2 M_1^\epsilon,$$
$$\begin{pmatrix} B_H/A & A \\ A & 0 \end{pmatrix} + \epsilon^2 \begin{pmatrix} \beta/A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M_2 + \epsilon^2 M_2^\epsilon.$$

Введем также «медленное» время $\theta = \epsilon^{2/\alpha}t$ и координату $Z = \epsilon z$. Дробная производная Капуто сложной функции $f = f(t,\theta)$ преобразуется следующим образом:

$$\left(\mathcal{D}^\alpha_{0+} f\right)(t) = \left({}_t\mathcal{D}^\alpha_{0+} f\right)(t,\theta) + \epsilon^2 \left({}_\theta\mathcal{D}^\alpha_{0+} f\right)(t,\theta).$$

Поскольку мы рассматриваем бифуркацию Хопфа, решение линейной задачи не будет зависеть от z, поэтому вторую производную по z следует заменить на $\epsilon^2\partial_Z^2$. Далее будем формально считать t и θ независимыми переменными. Решение исходной системы (11) будем искать в виде разложения $\mathbf{u} = \epsilon\mathbf{u}_1 + \epsilon^2\mathbf{u}_2 + \epsilon^3\mathbf{u}_3 + \ldots$

Рассмотрим соотношения, возникающие при степенях ϵ после подстановки всех указанных выше выражений в (11). При ϵ должно выполняться $\Lambda\mathbf{u}_1 = 0$, где мы ввели обозначение $\Lambda = {}_t\mathcal{D}^\alpha_{0+} - M_1$. Этому однородному линейному уравнению удовлетворяет векторная функция

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}w(\theta,Z)E_\alpha(\sigma t^\alpha) + \overline{\mathbf{a}}\,\overline{w}(\theta,Z)E_\alpha(\overline{\sigma}t^\alpha).$$

Здесь w — некоторая пока неизвестная скалярная комплекснозначная функция, описывающая медленную пространственно-временную модуляцию решения. Искомое амплитудное уравнение должно быть записано именно в терминах этой функции.

Приравняв слагаемые с ϵ^2, получим линейное неоднородное уравнение

$$\Lambda \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1^{\mathsf{T}} M_2 \mathbf{u}_1 \mathbf{e}. \tag{12}$$

Его правая часть может быть переписана в виде

$$\left[b_{2,0} w^2 \mathcal{E}_{\alpha,\sigma}^{2,0}(t) + 2b_{1,1}|w|^2 \mathcal{E}_{\alpha,\sigma}^{1,1}(t) + b_{0,2}\overline{w}^2 \mathcal{E}_{\alpha,\sigma}^{0,2}(t)\right] \mathbf{e},$$
$$b_{2,0} = \mathbf{a}^{\mathsf{T}} M_2 \mathbf{a},\ b_{1,1} = \mathbf{a}^{\mathsf{T}} M_2 \overline{\mathbf{a}},\ b_{0,2} = \overline{b}_{2,0}.$$

Чтобы найти решение этой системы, сделаем вначале замену переменных $\mathbf{u}_2 = P\mathbf{v}_2$, где P — матрица, столбцы которой совпадают с собственными векторами M_1. Тогда система (12) распадается на два независимых уравнения

$$\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}\, \mathbf{v}_2\right)(t) - \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \overline{\sigma} \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{c}_{2,0} w^2 \mathcal{E}_{\alpha,\sigma}^{2,0}(t) + \mathbf{c}_{1,1}|w|^2 \mathcal{E}_{\alpha,\sigma}^{1,1}(t) + \overline{w}^2 \mathbf{c}_{0,2} w^2 \mathcal{E}_{\alpha,\sigma}^{0,2}(t),$$

где $\mathbf{c}_{p,q} = b_{p,q} P^{-1}\mathbf{e}$. Применим теперь к каждому из полученных уравнений преобразование Лапласа, положив $v_2^{(i)} \fallingdotseq V_i$ и $\mathcal{E}_{\alpha,\sigma}^{p,q}(t) \fallingdotseq F_{p,q}(s)$. Здесь $v_2^{(i)}$ обозначает i-ю компоненту вектора $\mathbf{v}_2$. Первому уравнению соответствует

$$V_1 = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - \sigma} v_2^{(1)}\Big|_{t=0} + \frac{1}{s^{\alpha} - \sigma}\left[c_{2,0}^{(1)} w^2 F_{2,0}(s) + 2c_{1,1}^{(1)}|w|^2 F_{1,1}(s) + c_{0,2}^{(1)} F_{0,2}(s)\right].$$

Из соотношений (9) и (10), пользуясь также теоремой об изображении свертки, получим

$$v_2^{(1)} = v_2^{(1)}\Big|_{t=0} E_{\alpha}(\sigma t^{\alpha}) + c_{2,0}^{(1)} w^2 H_{\alpha,\sigma}^{2,0}(t) + 2c_{1,1}^{(1)}|w|^2 H_{\alpha,\sigma}^{1,1}(t) + c_{0,2}^{(1)} H_{\alpha,\sigma}^{0,2}(t).$$

Здесь были введены функции

$$H_{\alpha,\sigma}^{p,q}(t) = \int_0^t g_{\alpha,\sigma}(\tau) \mathcal{E}_{\alpha,\sigma}^{p,q}(t-\tau)\, d\tau.$$

Поскольку $g_{\alpha,\sigma}(\tau)$ имеет особенность в нуле, эти интегралы являются несобственными. Их абсолютную сходимость можно установить с помощью предельного признака сравнения: функции $\mathcal{E}_{\alpha,\sigma}^{p,q}(t)$ ограничены по модулю при любом $t > 0$ и выбранном σ, а $g_{\alpha,\sigma}(\tau) \sim \tau^{\alpha-1}$ при τ, достаточно близких к 0, причем $\alpha - 1 > -1$.

Аналогично для второго уравнения:

$$v_2^{(2)} = v_2^{(2)}\Big|_{t=0} E_{\alpha}(\overline{\sigma} t^{\alpha}) + c_{2,0}^{(2)} w^2 \overline{H}_{\alpha,\sigma}^{0,2}(t) + 2c_{1,1}^{(2)}|w|^2 \overline{H}_{\alpha,\sigma}^{1,1}(t) + c_{0,2}^{(2)} \overline{w}^2 \overline{H}_{\alpha,\sigma}^{2,0}(t).$$

Наконец, возвращаясь к исходным переменным, получим, что системе (12) удовлетворяет векторная функция

$$\mathbf{u}_2 = C\mathbf{u}_1(t) + w^2\mathbf{h}_{2,0}(t) + 2|w|^2\mathbf{h}_{1,1}(t) + \overline{w}^2\mathbf{h}_{0,2}(t), \tag{13}$$
$$\mathbf{h}_{p,q}(t) = P \cdot \left[\mathbf{c}_{p,q} \circ \begin{pmatrix} H^{p,q}_{\alpha,\sigma}(t) \\ \overline{H}^{q,p}_{\alpha,\sigma}(t) \end{pmatrix}\right].$$

Здесь $\circ$ означает покомпонентное умножение векторов одинаковой формы. Поскольку начальные условия можно задавать произвольно, мы положили их равными постоянной C для обеих компонент.

Согласно альтернативе Фредгольма, абстрактное уравнение $\Lambda\mathbf{u}_2 = \mathbf{f}$ с компактным оператором Λ имеет решение при заданном $\mathbf{f}$ если и только если $\mathbf{f}$ ортогонален каждому из линейной независимых решений сопряженного однородного уравнения $\Lambda^*\mathbf{v} = 0$. Поскольку решение (13) нами уже получено и оно существует для любой функции w, это означает выполнение

$$\langle w^2 b_{2,0}\mathcal{E}^{2,0}_{\alpha,\sigma}(t)\mathbf{e} + 2|w|^2 b_{1,1}\mathcal{E}^{1,1}_{\alpha,\sigma}(t)\mathbf{e} + \overline{w}^2 b_{0,2}\mathcal{E}^{0,2}_{\alpha,\sigma}(t)\mathbf{e}, \mathbf{d}E_\alpha\left(\overline{\sigma}t^\alpha\right)\rangle = 0 \tag{14}$$

и еще одного тождества, которое является комплексно сопряженным с (14). Здесь $\mathbf{d}$ — левый собственный вектор эрмитово сопряженной с M_1 матрицы, соответствующий собственному значению $\overline{\sigma}$: $\mathbf{d}M_1^\intercal = \overline{\sigma}\mathbf{d}$. Скалярное произведение $\langle u, v\rangle$ функций u и v понимается в обычном смысле, и интегрирование в нем выполняется по t в пределах от 0 до T. Найти такое T, при котором условие разрешимости (14) удовлетворяется тождественно, не удается. Поэтому (14) следует рассматривать как некоторое нетривиальное ограничение на амплитудную функцию w, которого, очевидно, недостаточно, чтобы определить ее.

Слагаемые порядка ϵ^3 должны удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned}\Lambda\mathbf{u}_3 = -\left({}_T\mathcal{D}^\alpha_{0+}\,\mathbf{u}_1\right)(Z,T) + M_0\frac{\partial^2}{\partial Z^2}\mathbf{u}_1 +& \\ + M_1^\epsilon\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_1^\intercal M_2\mathbf{u}_2\mathbf{e} + \mathbf{u}_1^\intercal M_3\mathrm{diag}(\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1\mathbf{e}.&\end{aligned} \tag{15}$$

С учетом полученного решения $\mathbf{u}_2$ член $\mathbf{u}_1^\intercal M_2\mathbf{u}_2$ может быть записан в виде

$$\begin{aligned}&C\mathbf{u}_1^\intercal M_2\mathbf{u}_1 + w^3\mathbf{a}^\intercal\mathbf{h}_{2,0}(t)E_\alpha(\sigma t^\alpha) + \overline{w}^3\overline{\mathbf{a}}^\intercal\mathbf{h}_{0,2}(t)E_\alpha(\overline{\sigma}t^\alpha) + \\ &\quad + |w|^2 w\big(2\mathbf{a}^\intercal\mathbf{h}_{1,1}(t)E_\alpha(\sigma t^\alpha) + \overline{\mathbf{a}}^\intercal\mathbf{h}_{2,0}(t)E_\alpha(\overline{\sigma}t^\alpha)\big) + \\ &\quad\quad + |w|^2\overline{w}\big(2\overline{\mathbf{a}}^\intercal\mathbf{h}_{1,1}(t)E_\alpha(\overline{\sigma}t^\alpha) + \mathbf{a}^\intercal\mathbf{h}_{0,2}(t)E_\alpha(\sigma t^\alpha)\big).\end{aligned} \tag{16}$$

Рассматривая условия разрешимости уравнения (15), по-прежнему будем выполнять скалярное умножение на $E_\alpha\left(\overline{\sigma}t^\alpha\right)$. Второе уравнение будет комплексно сопряженной версией полученного. Скалярное произведение с первым членом в (16) будет равно нулю, поскольку он с точностью до постоянного множителя совпадает с правой частью (12). В результате условие разрешимости будет содержать только линейные и кубические по w члены:

$$-\left({}_T\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}\,w\right)(Z,T)\,\langle \mathbf{x}_1,\mathbf{k}\rangle-\left({}_T\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}\,\overline{w}\right)(Z,T)\,\langle \overline{\mathbf{x}}_1,\mathbf{k}\rangle+\frac{\partial^2 w}{\partial Z^2}\langle \mathbf{x}_2,\mathbf{k}\rangle+
+\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial Z^2}\langle \overline{\mathbf{x}}_2,\mathbf{k}\rangle+w\langle \mathbf{x}_3,\mathbf{k}\rangle+\overline{w}\langle \overline{\mathbf{x}}_3,\mathbf{k}\rangle+w|w|^2\langle \mathbf{x}_4,\mathbf{k}\rangle+\overline{w}|w|^2\langle \overline{\mathbf{x}}_4,\mathbf{k}\rangle+
+w^3\langle \mathbf{x}_5,\mathbf{k}\rangle+\overline{w}^3\langle \overline{\mathbf{x}}_5,\mathbf{k}\rangle=0. \quad (17)$$

Здесь были введены следующие обозначения:

$$\mathbf{x}_1=\mathbf{a}E_\alpha(\sigma t^\alpha),\quad \mathbf{x}_2=M_0\mathbf{a}E_\alpha(\sigma t^\alpha),\quad \mathbf{x}_3=M_1^\epsilon\mathbf{a}E_\alpha(\sigma t^\alpha),$$
$$\mathbf{x}_4=\Big[4\mathbf{a}^\mathsf{T}M_2\mathbf{h}_{1,1}(t)E_\alpha(\sigma t^\alpha)+2\overline{\mathbf{a}}^\mathsf{T}M_2\mathbf{h}_{2,0}(t)E_\alpha(\overline{\sigma}t^\alpha)+
+[\mathbf{a}^\mathsf{T}M_3(M_a\overline{\mathbf{a}}+\overline{M_a}\mathbf{a})+\overline{\mathbf{a}}^\mathsf{T}M_3M_a\mathbf{a}]\mathcal{E}^{2,1}_{\alpha,\sigma}(t)\Big]\mathbf{e},$$
$$\mathbf{x}_5=\Big[2\mathbf{a}^\mathsf{T}M_2\mathbf{h}_{2,0}(t)E_\alpha(\sigma t^\alpha)+\mathbf{a}^\mathsf{T}M_3M_a\mathbf{a}\mathcal{E}^{3,0}_{\alpha,\sigma}(t)\Big]\mathbf{e},$$
$$\mathbf{k}=\mathbf{d}E_\alpha\left(\overline{\sigma}t^\alpha\right),\quad M_a=\operatorname{diag}\left(\mathbf{a}\right).$$

Условие (14) может быть включено в (17). Действительно, из (14) следует

$$|w|^2=-\frac{w^2b_{2,0}\langle\mathcal{E}^{2,0}_{\alpha,\sigma}(t)\mathbf{e},\mathbf{k}\rangle+\overline{w}^2\langle\mathcal{E}^{0,2}_{\alpha,\sigma}(t)\mathbf{e},\mathbf{k}\rangle}{2b_{1,1}\langle\mathcal{E}^{1,1}_{\alpha,\sigma}(t)\mathbf{e},\mathbf{k}\rangle},$$

и после подстановки в (17) мы получим те же самые нелинейные по w члены, но уже с измененными комплексными коэффициентами.

Лишь одно из участвующих в (17) скалярных произведений может быть вычислено в общем виде: $\langle\overline{\mathbf{x}}_1,\mathbf{k}\rangle=0$. В силу определения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{d}$

$$\mathbf{d}\sigma\mathbf{a}=\mathbf{d}M_1\mathbf{a}=(\mathbf{a}^\mathsf{T}M_1\mathbf{d}^\mathsf{T})^\mathsf{T}=(\mathbf{a}^\mathsf{T}\overline{\sigma}\mathbf{d}^\mathsf{T})^\mathsf{T}=\mathbf{d}\overline{\sigma}\mathbf{a}.$$

Т. к. $\operatorname{Im}\sigma\neq 0$, из этого равенства следует $\mathbf{d}\mathbf{a}=0^*$.

Покажем теперь, что (17) сводится к известному амплитудным уравнением при $\alpha=1$. В этом случае оператор Капуто становится обычной производной ∂_t, а $\sigma=i\omega$, $\omega>0$. Сопряженный с Λ оператор будет иметь вид $-\partial_t-M_1^\mathsf{T}$, его собственными функциями являются $\mathbf{d}e^{i\omega t}$ и $\overline{\mathbf{d}}e^{-i\omega t}$. В качестве T естественно взять $2\pi m/\omega$ с натуральным m, поскольку это позволит использовать ортогональность функций $e^{\pm ni\omega t}$. Решение $\mathbf{u}_2$ в этом случае будет иметь вид (ср. с [20])

$$\mathbf{u}_2(t)=C\mathbf{u}_1(t)+w^2\mathbf{V}_{2,0}e^{2i\omega t}+2|w|^2\mathbf{V}_{1,1}+\overline{w}^2\mathbf{V}_{0,2}e^{-2i\omega t},$$
$$\mathbf{V}_{2,0}=-\left(M_1-2i\omega E\right)^{-1}b_{2,0}\mathbf{e},\quad \mathbf{V}_{1,1}=-M_1^{-1}b_{1,1}\mathbf{e},\quad \mathbf{V}_{0,2}=\overline{\mathbf{V}}_{2,0}.$$

*Здесь нужно помнить, что $\mathbf{a}$ — «столбец», а $\mathbf{d}$ — «строка»

Здесь E — единичная матрица. Следует подчеркнуть, что свертки $H^{p,q}_{1,i\omega}$ в решении (13) также будут содержать слагаемые с $e^{\pm i\omega t}$, давая вклад в $\mathbf{u}_1$: для всех p и q, таких что $p-q\neq 1$, справедливо

$$H^{p,q}_{1,i\omega}(t)=\int_0^t e^{i\omega(t-\tau)}e^{i(p-q)\omega\tau}d\tau=\frac{e^{i(p-q)\omega t}-e^{i\omega t}}{i(p-q-1)\omega}.$$

Таким образом, следует использовать $\mathbf{V}_{p,q}e^{i\omega(p-q)t}$ вместо векторных функций $\mathbf{h}_{p,q}(t)$. Условие (14) превращается в тождество в силу ортогональности комплексных экспонент. В уравнении (17) скалярные произведения с $\overline{\mathbf{x}}_k$, $k=1,\ldots 5$ и $\mathbf{x}_5$ тождественно обратятся в ноль, поскольку ни один из этих векторов не будет содержать членов, пропорциональных $e^{i\omega t}$. После некоторых дополнительных упрощений и подбора масштабирующих множителей можно получить привычное комплексное уравнение Гинзбурга—Ландау

$$\frac{\partial w}{\partial T}=(1+i\gamma_1)\frac{\partial^2 w}{\partial Z^2}+w-(1+i\gamma_2)w|w|^2,$$

где γ_k — некоторые вещественные постоянные.

Заключение

Проведенные построения показывают, что формальное применение техники многомасштабных разложений позволяет получить амплитудное уравнение для двухкомпонентной нелинейной системы с субдиффузией в случае бифуркации Хопфа. Однако само это уравнение оказывается весьма сложным, если сравнить его с известным комплексным уравнением Гинзбурга—Ландау. Это ставит под вопрос возможность полноценного исследования такого объекта. Основным преимуществом амплитудных уравнений для систем с обычными производными является возможность универсального описания бифуркаций, при котором все характеристики исходных систем сведены лишь к двум вещественным параметрам. Подробная классификация режимов для уравнения, содержащего сразу 9 комплексных параметров, едва ли возможна. Еще одним существенным препятствием являются неизвестные свойства функций $H^{p,q}_{\alpha,\sigma}(t)$. Остается неясным, можно ли в общем случае выделить из $H^{p,q}_{\alpha,\sigma}(t)$ слагаемое, пропорциональное $E_\alpha(\sigma t^\alpha)$, подобно тому, как это происходит при $\alpha=1$. Если это действительно возможно, то соответствующие члены должны быть в явном виде включены в первое слагаемое (13), иначе условие разрешимости будет приводить к неверному результату.

Разумеется, приведенные соображения не могут служить строгим доказательством того, что для систем вида (11) вообще нельзя построить приемлемое амплитудное описание, которое было бы универсальным. Методы асимптотического анализа всегда опираются на некоторые эвристические приемы, и нет способа заранее узнать, какие из них окажутся наиболее удачными при решении конкретной задачи. Возможно, в рассматриваемом здесь случае необходимо использовать другие «медленные» переменные. Возможно также, что финальное уравнение удалось бы упростить, если модифицировать скалярное произведение с помощью некоторой тщательно подобранной весовой функции (при этом, однако, изменится и вид сопряженного уравнения).

В заключение заметим, что сам вопрос о том, как должны выглядеть динамические уравнения химической кинетики с субдиффузионным транспортом, является пока открытым — см. обсуждение в [21] и цитированную там литературу. В [22], например, была исследована другая система уравнений, описывающая процессы такого рода. Она не содержала производных Капуто, и для нее удалось получить амплитудные уравнения, по форме ничем не отличающиеся от случая нормальной диффузии — разница заключалась лишь в коэффициентах.

Список литературы

[1] Ball P. Nature's patterns: A tapestry in three parts. NY: Oxford University Press. 2009.

[2] Cross M. C., Hohenberg P. C. Pattern formation outside of equilibrium // Reviews of modern physics. 1993. Vol. 65. No. 3. P. 851.

[3] Hoyle R. Pattern formation. NY: Cambridge University Press. 2006.

[4] Newell A. C., Whitehead J. A. Finite bandwidth, finite amplitude convection // Journal of Fluid Mechanics. 1969. Vol. 38, No. 2. P. 279–303.

[5] Kuramoto Y., Tsuzuki T. On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems: Reductive perturbation approach // Progress of Theoretical Physics. 1975. Vol. 54, No. 3. P. 687–699.

[6] Holmes M. H. Introduction to perturbation methods. NY: Springer. 2013.

[7] Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. London: Imperial College Press, 2010. 347 p.

[8] Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V. Mittag-Leffler functions, related topics and applications. Berlin: Springer, 2014. 441 p.

[9] Langlands T. A. M., Henry B. I., Wearne S. L. Turing pattern formation with fractional diffusion and fractional reactions // Journal of Physics: Condensed Matter. 2007. Vol. 19. No. 6. P. 065115.

[10] Metzler R., Klafter J. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics // Journal of Physics A. 2004. Vol. 37, No. 31. P. R161.

[11] Anomalous transport / Ed. by R. Klages, G. Radons and I. M. Sokolov. Weinheim: Wiley-VCH, 2008. 594 p.

[12] Nec Y., Nepomnyashchy A. A., Golovin A. A. Oscillatory instability in super-diffusive reaction-diffusion systems: Fractional amplitude and phase diffusion equations // EPL. 2008. Vol. 82, No. 5. P. 58003.

[13] Golovin A. A., Matkowsky B. J., Volpert V. A. Turing pattern formation in the Brusselator model with superdiffusion // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2008. Vol. 69, No. 1. P. 251–272.

[14] Tzou J. C., Matkowsky B. J., Volpert V. A. Interaction of Turing and Hopf modes in the superdiffusive Brusselator model // Applied Mathematics Letters. 2009. Vol. 22, No. 9. P. 1432–1437.

[15] Самко С. Г., Килбас А. А, Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

[16] Diethelm K. The analysis of fractional differential eqiations. Berlin: Springer, 2004. 247 p.

[17] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 541 p.

[18] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.

[19] Зенюк Д. А., Малинецкий Г. Г. Одномерный брюсселятор с дробными производными по времени // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2019. No. 98. 32 с.

[20] Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer, 1984. 156 p.

[21] Yuste S. B., Abad E., Lindenberg K. Reactions in subdiffusive media and associated fractional equations // Fractional dynamics, ed. by J. Klafter, S. C. Lim and R. Metzler. Singapore: World Scientific, 2012. P. 78–103.

[22] Nec Y., Nepomnyashchy A. A. Amplitude equations for a sub-diffusive reaction-diffusion system // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2008. Vol. 41. No. 38. P. 385101.