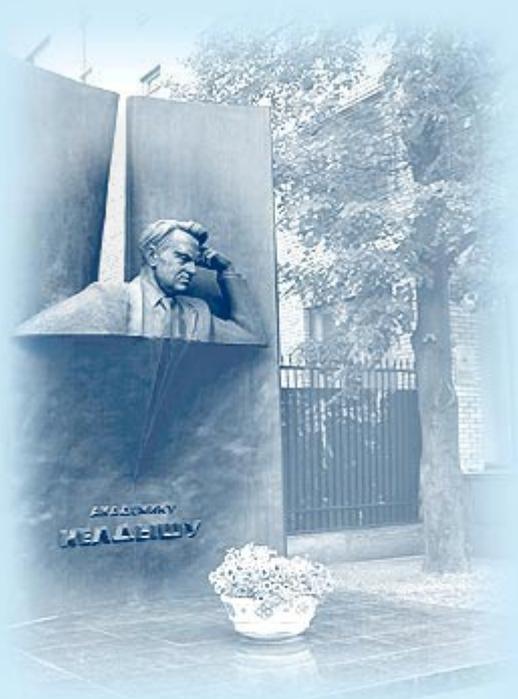




ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 95 за 2021 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Александров,
Л.В. Дородницын

Прямой тензорный метод
фильтрации для генерации
синтетических турбулентных
полей скорости

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Александров А.В., Дородницын Л.В. Прямой тензорный метод фильтрации для генерации синтетических турбулентных полей скорости // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 95. 15 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2021-95>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-95>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.В. Александров, Л.В. Дородницын

**ПРЯМОЙ ТЕНЗОРНЫЙ МЕТОД
ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ
СИНТЕТИЧЕСКИХ ТУРБУЛЕНТНЫХ
ПОЛЕЙ СКОРОСТИ**

Москва — 2021

Александров А.В., Дородницын Л.В.

Прямой тензорный метод фильтрации для генерации синтетических турбулентных полей скорости

В работе предложен прямой тензорный метод фильтрации трехмерного белого шума для генерации искусственных турбулентных полей скорости. Метод является обобщением прямого анизотропного метода фильтрации (Direct Anisotropic Filter Method). Полученные на основе данного метода турбулентные поля скорости обладают более полным набором свойств физической турбулентности в сравнении с полями, строящимися на основе DAF-метода.

Ключевые слова: синтетическая турбулентность, анизотропная турбулентность

Alexandrov Anatoly, Dorodnicyn Ludwig

Direct Tensor Filter Method for synthetic turbulent field generation

A Direct Tensor Filter Method for synthetic turbulent field generation is proposed in this paper. The method is a generalization of the Direct Anisotropic Filter Method. The turbulent velocity fields built on the base of this method provides more properties corresponding to real physical turbulent fields in comparison to ones obtained with the help of DAF method.

Key words: synthetic turbulence, anisotropic turbulence.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № № 19-51-80001 БРИКС_Т.

Оглавление

Введение	3
Общий алгоритм пространственной фильтрации белого шума	4
Изотропная турбулентность	6
Осесимметричная турбулентность	6
Дискретная модель рандомизированных частиц	9
Заключение.....	11
Приложение	11
Список литературы.....	14

Введение

Искусственно сгенерированные турбулентные поля широко используются в различных областях вычислительной газовой динамики. Такие поля часто позволяют существенно снизить вычислительную стоимость моделирования, а иногда являются средством, позволяющим его в принципе осуществить.

Методы генерации искусственных турбулентных полей развиваются начиная с семидесятых годов прошлого века, когда Крайчнан в работе [1] предложил первый вариант спектрального метода. В дальнейшем спектральные методы генерации получили широкое развитие в целом ряде работ [2-5]. Методы данного типа просты в реализации и позволяют корректно передать многие свойства реальных турбулентных течений. Так, один из наиболее часто используемых вариантов спектрального метода [5] позволяет получить базовые однородные изотропные реализации турбулентного поля скорости, обладающие бездивергентностью и корректно воспроизводящие заданные двухточечные моменты первого и второго порядков, а, следовательно, и спектральные характеристики. Дальнейшая адаптация к анизотропному случаю, выполняемая на основе факторизации Холецкого тензора рейнольдсовых напряжений, гарантирует совпадение этих напряжений у реализации поля с заранее заданными величинами. Полученные в результате анизотропные реализации имеют корректные одноточечные моменты первого и второго порядка. Однако, корректность двухточечных моментов не гарантируется. В то же время для задач аэроакустики, особенно для оценки шума в дальнем поле, ключевую роль играют именно двухточечные моменты второго порядка [6].

Другим классом методов генерации турбулентных полей, позволяющих получать реализации полей скорости с корректными двухточечными моментами второго порядка, является ряд методов [6-10], основанных на применении фильтрации случайных величин. Представляется, что первыми работами, в которых было предложено использовать специальные численные фильтры для генерации турбулентного поля с заданными характеристиками можно считать [7] и [8]. В работе [7] Карета предложил метод генерации двумерного изотропного турбулентного поля на основе стохастического уравнения. Независимо от него в работе [8] Клейн предложил использовать дискретные численные фильтры для генерации турбулентных полей с заданной корреляционной функцией.

В дальнейшем Эверт в работе [6] получил аналитическое выражение для фильтра в случае простейшего Гауссова спектра. Развитие этого подхода [9-11] получило название – метод *случайных частиц-сеток* (Random Particle-Mesh Method или RPM). Согласно RPM методу генерируемое турбулентное поле скорости строится на основе ротора функции тока, определяемой сверткой ядра пространственного фильтра с членом белого шума. Таким образом, генерируемое поле обладает свойством бездивергентности.

В работе [12] в рамках RPM была предложена процедура, позволяющая избежать явной фильтрации белого шума, путем введения специальных

инжектируемых вихрей. Согласно этому методу турбулентное поле в данной точке получается как сумма воздействий инжектируемых вихрей из некоторой ее окрестности. При этом для воспроизведения полем произвольного, отличного от Гауссова энергетического спектра использовалась суперпозиция полученных на основе нескольких гауссовых спектров вихрей.

В последующей статье одного из авторов [13] была получена явная форма фильтров, позволяющая в однородном изотропном случае помимо Гауссова воспроизводить спектры Липмана и Кармана. А для практически важного частного случая осесимметричной турбулентности, на основе модели Кершена (Kerschen) и Глибе (Gliebe) [14], был получен фильтр, позволяющий строить инжектируемые вихри, суперпозиция которых приводит к полю с наперед заданными интегральными масштабами турбулентности, отличающимися по различным направлениям. Данный подход получил название – метод Прямых анизотропных фильтров (Direct Anisotropic Filters или DAF).

В настоящей работе предложен метод, являющийся обобщением RPM и DAF методов. В целом он следует описанной выше логике построения турбулентного поля, используемой в RPM и DAF методах. Однако, в отличие от DAF и RPM методов, используется не скалярный, а тензорный пространственный фильтр, однозначно определяемый тензором ковариаций функции тока. По сравнению с полями, получаемыми на основе DAF метода, предлагаемый тензорный метод фильтрации позволяет строить поля, отвечающие заданным физическим характеристикам турбулентности: рейнольдсовым напряжениям и интегральным масштабам в осесимметричной модели.

Общий алгоритм пространственной фильтрации белого шума

Будем рассматривать метод построения синтетического анизотропного однородного турбулентного поля. Как говорилось во Введении, метод состоит из генерации пространственного трехмерного поля белого шума и последующей его фильтрации, т.е. свёртки с выбранным ядром фильтра. Получаемые поля должны, прежде всего, удовлетворять заданному тензору ковариаций скоростей

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{x}, t) \rangle. \quad (1)$$

Еще одним важным свойством турбулентности является бездивергентность поля скоростей. Поэтому, следуя авторам [6, 13], будем строить поле функции тока – трехмерного вектора $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)$, а затем получать поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ как результат дифференцирования функции тока

$$\mathbf{u} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}.$$

Ключевую роль при этом будет играть тензор ковариаций функции тока

$$C_{ij}(\mathbf{r}) = \langle \psi_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \psi_j(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad (2)$$

который, в свою очередь, связан с тензором ковариаций скоростей $R_{ij}(\mathbf{r})$.

Согласно этому методу, векторное поле функции тока $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)$ представимо в форме

$$\psi_k(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} G_{kl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathcal{U}_l(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}', \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ – матрица ядра фильтра, $\mathcal{U}(\mathbf{x}, t)$ – поле белого шума, которое по определению имеет ковариацию

$$\mathcal{R}_{ij}(\mathbf{r}) = \langle \mathcal{U}_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \mathcal{U}_j(\mathbf{x}, t) \rangle = \delta(\mathbf{r}) \delta_{ij}. \quad (4)$$

Определяемый указанным способом оператор будем называть *тензорным фильтром*.

Частный случай фильтра (3) был ранее предложен в [13], где применяется формула

$$\psi_k(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathcal{U}_k(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}', \quad (5)$$

где $G(\mathbf{r})$ – скалярное ядро фильтра, являющееся четной функцией. Представление (5) соответствует (3) при

$$G_{kl}(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}) \delta_{kl}.$$

Далее поговорим о связи между фильтрами и ковариациями в физическом и фурье-пространстве. В алгоритме будут использоваться ковариации функции тока (2). Функцию $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)$, задаваемую формулой (3), подставим в определение ковариаций функции тока (2) и воспользуемся свойством (4). В результате получим соотношение

$$C_{ij}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G_{il}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) G_{jl}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = (G_{il} * G_{jl})(\mathbf{r}). \quad (6)$$

Доказательство равенства (6) проводится по той же схеме, как и в скалярном случае, выписанном в работе [13] в Приложении.

Таким образом, ковариация поля функции тока выражается через свертку ядра фильтра.

Для построения синтетического турбулентного поля требуется по заданной матрице ковариаций $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ найти ядро фильтра $\mathbf{G}(\mathbf{r})$. Задача решается через пространственное преобразование Фурье, дающее образ $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ – матрицу $\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{k})$, которая является симметричной и положительно определенной в силу теоремы Крамера о тензоре ковариаций. Выражение (6) переходит в формулу

$$\hat{C}_{ij}(\mathbf{k}) = \hat{G}_{il}(\mathbf{k}) \hat{G}_{jl}(\mathbf{k}),$$

или, в матричном виде,

$$\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{k})^T. \quad (7)$$

Аналогичная скалярная задача решалась в [6, 11, 13].

Зная матрицу $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ либо сразу ее образ Фурье $\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{k})$, выполняем декомпозицию (7). Можно применить разложение Холецкого или же какое-либо другое представление. Затем из матрицы $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{k})$ обратным преобразованием Фурье получаем $\mathbf{G}(\mathbf{r})$.

Связь между ковариационными тензорами функции тока $\hat{C}_{ij}(\mathbf{k})$ и скорости $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ устанавливается по аналогии с процедурой, проделанной в [15, р.38]. Подробный вывод содержится в Приложении. Окончательная формула выглядит следующим образом:

$$\Phi_{ij} = k^2 \delta_{ij} \hat{C}_{mm} + k_i k_l \hat{C}_{jl} + k_j k_m \hat{C}_{mi} - \delta_{ij} k_l k_m \hat{C}_{ml} - k_i k_j \hat{C}_{mm} - k^2 \hat{C}_{ji}. \quad (8)$$

Изотропная турбулентность и скалярно-анизотропная модель

В изотропном случае [15] тензор ковариаций функции тока (2) представим в виде:

$$\hat{C}_{ij}(\mathbf{k}) = \hat{C}_{ij}(k) = \hat{C}(k) \delta_{ij} + \hat{A}(k) k_i k_j, \quad k^2 = k_i k_i.$$

Подставляя $\hat{C}_{ij}(k)$ в (8), легко убедиться, что второе слагаемое не оказывает влияния на спектральный тензор ковариаций скоростей.

Авторы [13] фактически рассматривают более общий случай тензора ковариаций функции тока, который можно назвать скалярным:

$$\hat{C}_{ij}(\mathbf{k}) = \hat{C}(\mathbf{k}) \delta_{ij}. \quad (9)$$

Отличие от изотропного случая состоит в зависимости функции $\hat{C}(\mathbf{k})$ от волнового вектора вместо его модуля k . Выражение (9) приводит к фильтру вида (5) со скалярным ядром $G(\mathbf{r})$. Получаемое поле является анизотропным, поскольку функция $G(\mathbf{r})$ зависит от векторного аргумента, а не от радиуса r .

Из формулы (7) вытекает простое выражение

$$\hat{G}(\mathbf{k}) = \left(\hat{C}(\mathbf{k}) \right)^{1/2}, \quad (10)$$

откуда обратным преобразованием Фурье получается искомая функция $G(\mathbf{r})$. Связь между спектральными тензорами ковариаций скорости и функции тока (8) приобретает вид

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \hat{C}(\mathbf{k}) (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j). \quad (11)$$

Аналогичное выражение справедливо и для изотропного случая: достаточно заменить вектор \mathbf{k} на его модуль k .

Осесимметричная турбулентность

Рассмотрим более общий случай турбулентной среды, когда существует выделенное направление, определяемое постоянным единичным вектором $\boldsymbol{\lambda}$.

Не ограничивая общности, можно представить тензор ковариаций функции тока в виде

$$\hat{C}_{ij}(\mathbf{k}) = \hat{C}(\mathbf{k})\delta_{ij} + \hat{\vartheta}(\mathbf{k})\lambda_i\lambda_j, \quad (12)$$

с тем чтобы получить требуемый тензор ковариаций скоростей $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$. (Общее выражение осесимметричного тензора [15] после преобразования (8) дает тот же результат, что и формула (12), о чём рассказывается в Приложении.) Окончательный вид искомого спектрального тензора таков:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\mathbf{k}) = & \hat{C}(\mathbf{k}) (k^2\delta_{ij} - k_ik_j) \\ & + \hat{\vartheta}(\mathbf{k}) [(k^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\lambda})^2)\delta_{ij} - k_ik_j - k^2\lambda_i\lambda_j \\ & + (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\lambda})(k_i\lambda_j + k_j\lambda_i)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Формула (13) совпадает с аналогичным выражением из [16].

Фильтр $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{k})$, отвечающий тензору (12), вычисляется по общей формуле (7), после чего обратным преобразованием Фурье получается матрица фильтра $\mathbf{G}(\mathbf{r})$.

Процедура упрощается, если принять предположение [14] о связи двух функций

$$\hat{\vartheta}(\mathbf{k}) = \alpha \hat{C}(\mathbf{k}), \quad \alpha = 2 \frac{u_t^2}{u_a^2} - \frac{l_t^2}{l_a^2} - 1. \quad (14)$$

Здесь u_a, u_t – среднеквадратичные скорости пульсаций в осевом и поперечном направлениях, l_a, l_t – соответствующие интегральные масштабы. Тогда формула (12) принимает вид

$$\hat{C}_{ij}(\mathbf{k}) = \hat{C}(\mathbf{k}) M_{ij}, \quad M_{ij} = \delta_{ij} + \alpha \lambda_i \lambda_j. \quad (15)$$

От волнового вектора зависит только скалярный коэффициент $\hat{C}(\mathbf{k})$. Для построения фильтра необходимо лишь выполнить разложение постоянной матрицы

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}\mathbf{N}^T \quad (16)$$

и воспользоваться формулой

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{k}) = \hat{G}(\mathbf{k}) \mathbf{N}, \quad \hat{G}(\mathbf{k}) = \left(\hat{C}(\mathbf{k}) \right)^{1/2}. \quad (17)$$

Все преобразования Фурье применяются к скалярным функциям, а не к матрицам. Ядро фильтра в выражении (3) имеет вид

$$G_{kl}(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}) N_{kl}. \quad (18)$$

Остановимся подробнее на ситуации, когда в осесимметричном поле выделенное направление $\boldsymbol{\lambda}$ совпадает с осью x . Для удобства будем использовать обозначения проекций волнового вектора

$$\mathbf{k} = (k_a, k_y, k_z), \quad k_t = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}.$$

В данном случае матрица (12) становится диагональной и, при условии (14), приобретает форму

$$\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{k}) = \hat{C}(\mathbf{k}) \text{diag}(1 + \alpha, 1, 1).$$

Матрица \mathbf{N} в (14) также диагональная. Формула (17) приводит к выражению для фильтра

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{k}) = \left(\hat{C}(\mathbf{k})\right)^{1/2} \text{diag}(\sqrt{1 + \alpha}, 1, 1).$$

Равенство (18) дает

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}) \text{diag}(\sqrt{1 + \alpha}, 1, 1). \quad (19)$$

Обсудим подробнее, как наиболее эффективно вычислять функцию $G(\mathbf{r})$.

Согласно подходу [14], образ Фурье $\hat{G}(\mathbf{k})$ скалярного ядра фильтра, как и соответствующая (17) спектральная функция ковариаций $\hat{C}(\mathbf{k})$, зависят от единственного скалярного параметра, который можно трактовать как безразмерное анизотропное волновое число:

$$\hat{G}(\mathbf{k}) = \hat{G}^{3D}(\xi), \quad \hat{C}(\mathbf{k}) = \hat{C}^{3D}(\xi) = l_a l_t^4 u_a^2 f(\xi), \quad \xi^2 = l_a^2 k_a^2 + l_t^2 k_t^2, \quad (20)$$

где функция $f(\xi)$ – положительная и четная. Конкретно, авторы [14] предлагают спектральную функцию $\hat{C}(\mathbf{k})$ и ядро фильтра $\hat{G}(\mathbf{k})$ в виде

$$\hat{C}(\mathbf{k}) = \frac{l_a l_t^4 u_a^2}{4\pi^5 [1 + \xi^2]^3}, \quad \hat{G}(\mathbf{k}) = \frac{l_a^{1/2} l_t^2 u_a}{2\pi^{5/2} [1 + \xi^2]^{3/2}}, \quad (21)$$

чем обобщают спектр Липмана на анизотропный случай. Забегая вперед, скажем, что итоговая функция фильтра $G(\mathbf{r})$ также будет зависеть от одного скалярного параметра ζ , который отвечает за всю анизотропию в осесимметричном случае:

$$G(\mathbf{r}) = G^{3D}(\zeta), \quad \zeta = \sqrt{\frac{x^2}{l_a^2} + \frac{y^2 + z^2}{l_t^2}}.$$

Обратное преобразование Фурье от $\hat{G}(\mathbf{k})$ есть

$$G(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{G}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{k}.$$

В нашем случае в интеграле удобно сделать замену переменных

$$\begin{aligned} \xi_x &= l_a k_a, \quad \xi_y = l_t k_y, \quad \xi_z = l_t k_z, \quad \xi_t = l_t k_t, \\ x &= l_a \zeta_x, \quad y = l_t \zeta_y, \quad z = l_t \zeta_z. \end{aligned} \quad (22)$$

Тогда выражение запишется:

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{l_a l_t^2} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{G}(\xi) e^{i(\xi \cdot \zeta)} d\xi.$$

Интеграл обладает сферической симметрией. Его легче всего вычислять в сферических координатах, совместив ось с направлением ζ :

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}) &= \frac{1}{l_a l_t^2} \int_0^\infty \hat{G}^{3D}(\xi) \xi^2 d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi_\xi \int_0^\pi e^{i\xi\zeta \cos\theta_\xi} \sin\theta_\xi d\theta_\xi \\
&= \frac{4\pi}{l_a l_t^2} \int_0^\infty \frac{1}{\xi\zeta} \hat{G}^{3D}(\xi) \sin(\xi\zeta) \xi^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Получаем общую формулу

$$G(\mathbf{r}) = G^{3D}(\zeta) = \frac{4\pi}{l_a l_t^2 \zeta} \int_0^\infty \hat{G}^{3D}(\xi) \sin(\xi\zeta) \xi d\xi = \frac{u_a}{l_a^{1/2}} g(\zeta). \quad (23)$$

Для спектральной функции фильтра (21) получаем выражение

$$G_L^{3D}(\zeta) = \frac{2u_a K_0(\zeta)}{\pi^{3/2} l_a^{1/2}},$$

где $K_n(\zeta)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода.

Далее рассмотрим спектральную функцию Кармана–Пао [13] в обобщении на осесимметричный случай:

$$\hat{C}(\mathbf{k}) = \frac{55 l_a l_t^4 u_a^2 \beta^4}{18\pi^3 [1 + \beta^2 \xi^2]^{17/6}}, \quad \beta = \frac{\Gamma(1/3)}{\sqrt{\pi} \Gamma(5/6)}.$$

Применение формул (17) и (23) приводит к результату

$$G_K^{3D}(\zeta) = A_K \frac{u_a}{l_a^{1/2}} \frac{K_{1/12}(\zeta/\beta)}{\zeta^{1/12}}, \quad A_K = \frac{2^{7/12} \sqrt{55} (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \Gamma(7/12)}{20\pi^2 \beta^{11/12}} = 0.254.$$

Таким образом, для моделирования осесимметричной турбулентности мы располагаем алгоритмом построения ядра фильтра по заданному тензору ковариаций функции тока и, соответственно, тензору ковариаций скоростей. Следует отметить, что при выполнении условий Кершена–Глибе (14) осесимметричная модель (12) обеспечивает как предписанные интегральные масштабы турбулентности l_a и l_t , так и тензор рейнольдсовых напряжений, определяемый средними квадратами скоростей u_a^2 и u_t^2 . В отличие от этого, скалярный фильтр [13], основанный на выражении (9), учитывает все перечисленные параметры, кроме квадрата поперечной скорости u_t^2 . Детальный вывод данного факта содержится в Приложении.

Дискретная модель рандомизированных частиц

В качестве основы численного алгоритма будем использовать стохастическую модель, названную авторами [13] методом рандомизированных частиц. Последний можно применить и к предложенному нами тензорному методу фильтрации.

Вначале требуется построить поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Способ его получения следует из формулы (3):

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_{ijk} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} G_{kl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') u_l(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'.$$

Выпишем это выражение для осесимметричного случая (19) в покомпонентной записи:

$$\begin{aligned} u'(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\partial y} u_z(\mathbf{x}') - \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\partial z} u_y(\mathbf{x}') \right) d\mathbf{x}', \\ v'(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\partial z} \sqrt{1 + \alpha} u_x(\mathbf{x}') - \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\partial x} u_z(\mathbf{x}') \right) d\mathbf{x}', \\ w'(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\partial x} u_y(\mathbf{x}') - \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\partial y} \sqrt{1 + \alpha} u_x(\mathbf{x}') \right) d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (24)$$

Следуя лагранжевой постановке из [12], разобьем область задания поля на N элементов, дающих вклад в трехмерное искусственное турбулентное поле скорости:

$$\mathbb{R}_s = \sum_{n=1}^N \mathbb{R}_{s,n}$$

В соответствии с [13], турбулентное поле скорости будем строить следующим образом.

Подобласти $\mathbb{R}_{s,n}$ являются прямоугольными параллелепипедами, образующими регулярную решетку. Вводится $\mathcal{U}_{n,i}$ – взвешенное среднее поля белого шума по n -му элементу с дисперсией

$$\langle \mathcal{U}_{n,k}^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}_{s,n}} \langle \mathcal{U}_k(\mathbf{x}', t) \mathcal{U}_k(\mathbf{x}', t) \rangle d\mathbf{x}' = \prod_{k=1}^3 \Delta_k,$$

где Δ_k обозначает расстояние между центрами \mathbf{x}_n элементов по каждому из направлений. Используя далее упрощение [12], элемент $\mathcal{U}_{n,k}$ можно заменить на $\Omega_{n,k} \prod_{k=1}^3 \sqrt{\Delta_k}$, где $\Omega_{n,k}$ принимает значения ± 1 стохастически, с равной вероятностью, определяя направление вращения n -го вихря.

Окончательно искусственное турбулентное поле скорости (24) будет иметь дискретный вид:

$$\begin{aligned} u'(\mathbf{x}, t) &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)}{\partial y} \Omega_{z,n} - \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)}{\partial z} \Omega_{y,n} \right) \sqrt{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}, \\ v'(\mathbf{x}, t) &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)}{\partial z} \sqrt{1 + \alpha} \Omega_{x,n} - \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)}{\partial x} \Omega_{z,n} \right) \sqrt{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}, \\ w'(\mathbf{x}, t) &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)}{\partial x} \Omega_{y,n} - \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)}{\partial y} \sqrt{1 + \alpha} \Omega_{x,n} \right) \sqrt{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}. \end{aligned} \quad (25)$$

Заключение

В работе предложен тензорный метод генерации турбулентных полей скорости на основе фильтрации, являющийся обобщением DAF метода. Для случая изотропной турбулентности на основе энергетических спектров Кармана и Липмана получен явный вид тензорных пространственных фильтров. Для важной с точки зрения приложений осесимметричной турбулентности явный вид фильтра получен с использованием модели Кершена–Глибе [14]. Аналитически показано, что генерируемые поля должны обладать, являющимися следствием двухточечных моментов второго порядка, заданными интегральными масштабами турбулентности по каждому направлению. Помимо этого показано, что строящиеся поля корректно воспроизводят заданный тензор рейнольдсовых напряжений. Тем самым полученные на основе предлагаемого тензорного метода фильтрации поля обладают дополнительными физическими свойствами в сравнении с полями, полученными на основе DAF метода.

Приложение

Связь между спектральными тензорами ковариаций функции тока и скорости

Пусть имеется симметричный тензор ковариаций функции тока в физическом пространстве

$$C_{ij}(\mathbf{r}) = \langle \psi_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \psi_j(\mathbf{x}, t) \rangle.$$

Его образ Фурье есть тензор $\hat{C}_{ij}(\mathbf{k})$. Нас интересует тензор ковариаций скоростей

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{x}, t) \rangle$$

с образом Фурье $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$. Покажем, что при наличии связи между векторными полями $\mathbf{u} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}$, или

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t),$$

существует алгебраическое соотношение между соответствующими спектральными тензорами $\hat{C}(\mathbf{k})$ и $\Phi(\mathbf{k})$.

Очевидным является соотношение

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) u_j(\mathbf{x}) \rangle = \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{jpr} \left\langle \frac{\partial \psi_m}{\partial x_l}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_q}{\partial x_p}(\mathbf{x}) \right\rangle.$$

Из тензорной алгебры известна формула, выражающая прямое произведение $\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jprq}$ через символы Кронекера. Величину в угловых скобках можно заменить согласно правилам турбулентного осреднения и с учетом инвариантности статистики однородного поля с изменением \mathbf{x} :

$$\left\langle \frac{\partial \psi_m}{\partial x_l}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_q}{\partial x_p}(\mathbf{x}) \right\rangle = - \frac{\partial^2}{\partial r_l \partial r_p} \langle \psi_m(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \psi_q(\mathbf{x}) \rangle = - \frac{\partial^2 C_{mq}(\mathbf{r})}{\partial r_l \partial r_p}.$$

После проделанных трансформаций к полученному выражению можно применить преобразование Фурье. Имеем:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = (\delta_{ij}\delta_{lp}\delta_{mq} + \delta_{ip}\delta_{lq}\delta_{mj} + \delta_{iq}\delta_{lj}\delta_{mp} - \delta_{ij}\delta_{lq}\delta_{mp} - \delta_{ip}\delta_{lj}\delta_{mq} - \delta_{iq}\delta_{lp}\delta_{mj}) k_l k_p \hat{C}_{mq}(\mathbf{k}).$$

Сворачивая индексы, приходим к итоговой формуле

$$\Phi_{ij} = k^2 \delta_{ij} \hat{C}_{mm} + k_i k_l \hat{C}_{jl} + k_j k_m \hat{C}_{mi} - \delta_{ij} k_l k_m \hat{C}_{ml} - k_i k_j \hat{C}_{mm} - k^2 \hat{C}_{ji}. \quad (A1)$$

Осесимметричный случай

Рассмотрим общий вид осесимметричного тензора [15]:

$$\hat{C}_{ij}(\mathbf{k}) = \hat{C}(\mathbf{k})\delta_{ij} + \hat{\vartheta}(\mathbf{k})\lambda_i\lambda_j + A(\mathbf{k})k_i k_j + D(\mathbf{k})(k_i\lambda_j + k_j\lambda_i), \quad (A2)$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ – единичный вектор. Из слагаемых (A2) будем в порядке очередности получать слагаемые тензора $\Phi(\mathbf{k})$, пользуясь формулой (A1).

Первое слагаемое (A2), содержащее матрицу δ_{ij} , при подстановке в (A1) вносит вклад, пропорциональный величине

$$\Phi_{ij}^I = 3k^2\delta_{ij} + k_i k_j + k_j k_i - k^2\delta_{ij} - 3k_i k_j - k^2\delta_{ij} = k^2\delta_{ij} - k_i k_j.$$

Второе слагаемое (A2) дает:

$$\Phi_{ij}^A = k^2\delta_{ij}\lambda_m^2 + k_i k_l \lambda_l \lambda_j + k_j k_m \lambda_m \lambda_i - \delta_{ij} k_l \lambda_l k_m \lambda_m - k_i k_j \lambda_m^2 - k^2 \lambda_i \lambda_j.$$

Третье слагаемое, содержащее $k_i k_j$, приводит к

$$\Phi_{ij}^{(3)} = k^4\delta_{ij} + k^2 k_i k_j + k^2 k_i k_j - k^4\delta_{ij} - k^2 k_i k_j - k^2 k_j k_i = 0.$$

В последнем слагаемом выберем в качестве примера член с $k_i \lambda_j$:

$$\Phi_{ij}^{(4)} = k^2\delta_{ij} k_m \lambda_m + k_i k_j k_l \lambda_l + k^2 k_j \lambda_i - k^2\delta_{ij} k_l \lambda_l - k_i k_j k_m \lambda_m - k^2 k_j \lambda_i = 0.$$

Итак, в выражении (A2) важны только первые два слагаемых. После некоторой перегруппировки членов получаем окончательный вид тензора:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\mathbf{k}) &= \hat{C}(\mathbf{k}) \Phi_{ij}^I + \hat{\vartheta}(\mathbf{k}) \Phi_{ij}^A \\ &= \hat{C}(\mathbf{k}) (k^2\delta_{ij} - k_i k_j) \\ &\quad + \hat{\vartheta}(\mathbf{k}) [(k^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\lambda})^2)\delta_{ij} - k_i k_j - k^2 \lambda_i \lambda_j + (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\lambda})(k_i \lambda_j + k_j \lambda_i)]. \end{aligned}$$

Вычисление рейнольдсовых напряжений и масштабов турбулентности

Для рассматриваемых в данной работе моделей тензора ковариаций функции тока – скалярной (9), (14) и осесимметричной (12), (14) – найдем в собственной системе декартовых координат компоненты тензора пространственных ковариаций скоростей

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d\mathbf{k}.$$

Затем на этой основе выразим компоненты тензора рейнольдсовых напряжений и интегральные масштабы турбулентности.

Спектральный тензор ковариаций скоростей (13) имеет следующие интересующие нас компоненты:

$$\begin{aligned} \Phi_{xx}(\mathbf{k}) &= \hat{C}(\mathbf{k}) k_t^2 + \hat{\vartheta}(\mathbf{k}) (k_t^2 - k_a^2 - k^2 + 2k_a^2) = \hat{C}(\mathbf{k}) k_t^2. \\ \Phi_{yy}(\mathbf{k}) &= \hat{C}(\mathbf{k}) (k^2 - k_y^2) + \hat{\vartheta}(\mathbf{k}) (k_t^2 - k_y^2) = \hat{C}(\mathbf{k}) (k_a^2 + k_z^2) + \hat{\vartheta}(\mathbf{k}) k_z^2. \end{aligned}$$

Отсюда получим выражения для компонент тензора $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ в определенных случаях радиус-вектора \mathbf{r} . Начнем с рассмотрения

$$R_{xx}(x, 0, 0) = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_{xx}(\mathbf{k}) e^{ik_a x} d\mathbf{k} = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{C}(\mathbf{k}) k_t^2 e^{ik_a x} d\mathbf{k}.$$

Очевидно, результат будет одинаковым в скалярной и осесимметричной моделях. Подставив формулу (20) для $\hat{C}(\mathbf{k})$ и выполнив замену (22) переменных

$$\begin{aligned} \xi_x &= l_a k_a, \quad \xi_y = l_t k_y, \quad \xi_z = l_t k_z, \quad \xi_t = l_t k_t, \\ x &= l_a \zeta_x, \quad y = l_t \zeta_y, \quad z = l_t \zeta_z, \end{aligned}$$

получим:

$$R_{xx}(x, 0, 0) = u_a^2 \int_{\mathbb{R}^3} \xi_t^2 f(\xi) e^{i\xi_x \zeta_x} d\xi = 2u_a^2 I_{xx}(\zeta_x),$$

где вводится обозначение

$$I_{xx}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^3} \xi_y^2 f(\xi) e^{i\xi_x \zeta} d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} \xi_z^2 f(\xi) e^{i\xi_x \zeta} d\xi.$$

Два интеграла равны между собой в силу свойств симметрии.

Теперь найдем компоненту

$$R_{yy}(0, y, 0) = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_{yy}(\mathbf{k}) e^{ik_y y} d\mathbf{k}.$$

В скалярном случае имеем:

$$\begin{aligned} R_{yy}^I(0, y, 0) &= \frac{l_t^2}{l_a^2} u_a^2 \int_{\mathbb{R}^3} \xi_a^2 f(\xi) e^{i\xi_y \zeta_y} d\xi + u_a^2 \int_{\mathbb{R}^3} \xi_z^2 f(\xi) e^{i\xi_y \zeta_y} d\xi \\ &= \left(\frac{l_t^2}{l_a^2} + 1 \right) u_a^2 I_{yy}(\zeta_y), \end{aligned}$$

$$I_{yy}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^3} \xi_a^2 f(\xi) e^{i\xi_y \zeta} d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} \xi_z^2 f(\xi) e^{i\xi_y \zeta} d\xi = I_{xx}(\zeta).$$

В осесимметричном случае

$$\begin{aligned}
R_{yy}^{Ax}(0, y, 0) &= R_{yy}^I(0, y, 0) + \left(2 \frac{u_t^2}{u_a^2} - \frac{l_t^2}{l_a^2} - 1 \right) u_a^2 \int_{\mathbb{R}^3} \xi_z^2 f(\xi) e^{i\xi_y \zeta_y} d\xi \\
&= \left(\frac{l_t^2}{l_a^2} + 1 + 2 \frac{u_t^2}{u_a^2} - \frac{l_t^2}{l_a^2} - 1 \right) u_a^2 I_{yy}(\zeta_y) = 2u_t^2 I_{yy}(\zeta_y).
\end{aligned}$$

Из предыдущего следуют выражения для компонент тензора рейнольдсовых напряжений в качестве частного случая: $R_{ij} = R_{ij}(0,0,0)$:

$$R_{xx} = 2u_a^2 I_{xx}(0), \quad R_{yy}^{Ax} = 2u_t^2 I_{xx}(0), \quad R_{yy}^I = \left(\frac{l_t^2}{l_a^2} + 1 \right) u_a^2 I_{xx}(0).$$

Необходимые равенства рейнольдсовых напряжений $R_{xx} = u_a^2$, $R_{yy}^{Ax} = u_t^2$ имеют место при любых параметрах осесимметричной анизотропии тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$I_{xx}(0) = \int_{\mathbb{R}^3} \xi_x^2 f(\xi) d\xi = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^3} \xi^2 f(\xi) d\xi = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \xi^4 f(\xi) d\xi = \frac{1}{2}.$$

Последнее равенство означает требование корректности *изотропной* спектральной функции. Рассматриваемые в настоящей работе функции $f(\xi)$ таким свойством обладают.

Для скалярной модели $R_{yy}^I \neq u_t^2$ в общем случае.

Интегральные масштабы турбулентности вычисляются по формулам:

$$l_{xx} = \frac{L_{xx}}{R_{xx}}, \quad L_{xx} = \int_0^\infty R_{xx}(x, 0, 0) dx, \quad l_{yy} = \frac{L_{yy}}{R_{yy}}, \quad L_{yy} = \int_0^\infty R_{yy}(0, y, 0) dy.$$

Замена переменных приводит к выражениям:

$$\begin{aligned}
L_{xx} &= 2l_a u_a^2 \int_0^\infty I_{xx}(\zeta_x) d\zeta_x, & L_{yy}^{Ax} &= 2l_t u_t^2 \int_0^\infty I_{yy}(\zeta_y) d\zeta_y, \\
L_{yy}^I &= l_t \left(\frac{l_t^2}{l_a^2} + 1 \right) u_a^2 \int_0^\infty I_{yy}(\zeta_y) d\zeta_y.
\end{aligned}$$

Все участвующие здесь интегралы равны друг другу.

$$\int_0^\infty I_{xx}(\zeta) d\zeta = \int_0^\infty d\zeta \int_{\mathbb{R}^3} \xi_z^2 f(\xi) e^{i\xi_y \zeta} d\xi = \frac{1}{2}.$$

Подставляя найденные значения R_{xx} , R_{yy}^{Ax} и R_{yy}^I , находим

$$l_{xx} = l_a, \quad l_{yy}^{Ax} = l_t, \quad l_{yy}^I = l_t.$$

Список литературы

1. Kraichnan R. Diffusion by a random velocity field // The Physics of Fluids 13(1), (1970).
2. Smirnov A., Shi S., Celik I. Random Flow Generation Technique for Large Eddy Simulations and Particle-Dynamics Modeling // J. Fluids Eng 123(2), 359-371 (Feb 16, 2001).
3. Адамьян Д.Ю., Стрелец М.Х., Травин А.К. Эффективный метод генерации синтетической турбулентности на входных границах LES области в рамках

комбинированных RANS–LES подходов к расчету турбулентных течений // Матем. моделирование, 2011, т. 23, № 7, С. 3–19.

4. Saad T., Cline D., Stoll R., Sutherland J.C., Scalable Tools for Generating Synthetic Isotropic Turbulence with Arbitrary Spectra // Article in AIAA Journal/Technical Notes, August 2016, DOI: 10.2514/1.J055230.
5. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., Travin A.K. Synthetic turbulence generators for RANS-LES interfaces in zonal simulations of aerodynamic and aeroacoustic problems // Flow Turbulence Combust., 2014, v.93, No.1, pp.63–92.
6. Ewert R., Emunds R., CAA Slat Noise Studies Applying Stochastic Sound Sources Based on Solenoidal Digital Filters, AIAA 2005-2862
7. A. Careta, F. Sagues, Stochastic generation of homogeneous isotropic turbulence with well-defined spectra // Physical review, 1993, v.48, No.3, pp. 2279–2287.
8. M. Klein, A. Sadiki, J. Janicka, A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulations // J. Comput. Phys. 186 (2003) 652–665.
9. Ewert R. Broadband slat noise prediction based on CAA and stochastic sound sources from a fast random particle-mesh (RPM) method // Computers & Fluids 37 (2008) 369–387.
10. Siefert M., Ewert R., Sweeping Sound Generation in Jets Realized with a Random Particle-Mesh Method, AIAA 2009-3369.
11. Dieste M., Gabard G., Random particle methods applied to broadband fan interaction noise, Journal of Computational Physics 231 (2012) 8133–8151.
12. Gea-Aguilera F., Gill J., Zhang X., Synthetic turbulence methods for computational aeroacoustic simulations of leading edge noise // Computers and Fluids 157 (2017) 240–252. doi:10.1016/j.compfluid.2017.08.039.
13. Shen Z., Zhang X., Direct anisotropic filter method of generating synthetic turbulence applied to turbulence-airfoil interaction noise prediction, Journal of Sound and Vibration 458 (2019) 544–564
14. Kerschen E.J., Glike P.R. Noise caused by the interaction of a rotor with anisotropic turbulence // AIAA Journal 19 (1981), 717–723
15. Batchelor G.K. The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge University Press, 1959.
16. Chandrasekhar S. The theory of axisymmetric turbulence // Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A. Mathematical and Physical Sciences No. 855 Vol 242 pp. 557-577, 1950. <https://doi.org/10.1098/rsta.1950.0010>