

**А. Л. Пережогин,
И. С. Быков**

**Обзор конструкций и
свойств кодов Грея**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки:

Пережогин А. Л., Быков И. С. Обзор конструкций и свойств кодов Грея // Математические вопросы кибернетики. Вып. 20. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2022. — С. 41–60.

URL: <http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2022-41> DOI: 10.20948/mvk-2022-41

ОБЗОР КОНСТРУКЦИЙ И СВОЙСТВ КОДОВ ГРЕЯ*)

А. Л. ПЕРЕЖОГИН, И. С. БЫКОВ

(НОВОСИБИРСК)

§ 1. Введение

Булевым n -кубом Q_n называется граф, вершинами которого являются двоичные слова длины n , и пара вершин соединены ребром, если соответствующие слова различаются ровно в одной позиции, номер этой позиции определяет направление соответствующего ребра. Через VQ_n и EQ_n обозначим множества вершин и ребер графа Q_n соответственно.

Будем обозначать декартово произведение графов как \square . Тогда граф n -куба можно определить рекурсивно [28]:

$$Q_1 = K_2$$
$$Q_n = K_2 \square Q_{n-1}.$$

Следовательно, для любого k , $1 \leq k \leq n-1$, верно

$$Q_n = Q_k \square Q_{n-k}.$$

Различные свойства n -куба приведены в обзоре [29].

Расстоянием Хэмминга $d(v, u)$ между двумя двоичными словами v и u длины n называется количество позиций, в которых отличаются эти два слова. Для графа Q_n оно совпадает с обычным расстоянием между вершинами.

Гамильтоновым циклом (цепью) в графе называется такой простой цикл (цепь), который содержит все вершины данного графа. Таким образом, гамильтонов цикл в Q_n является циклическим перечислением всех двоичных слов длины n так, что соседние в этом перечислении слова различаются в одной позиции. Такое перечисление называется кодом Грея.

Строго говоря, n -мерным кодом Грея называют последовательность

$$v_0, v_1, v_2, \dots, v_{2^n-1}$$

двоичных слов длины n , в которой:

*) Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0018).

- $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$;
- $v_0 = 00 \dots 0$;
- $d(v_i, v_{i+1}) = 1$, $0 \leq i \leq 2^n - 2$, и $d(v_0, v_{2^n-1}) = 1$.

Далее понятия код Грея и гамильтонов цикл в Q_n будут синонимичны и взаимозаменяемы. Хотя формально гамильтонову циклу соответствуют два кода Грея: обход вершин по циклу в одну сторону и в другую.

Коды Грея названы по имени Фрэнка Грея, который изобрел специального вида двоично-отраженный код для применения в кодово-импульсной модуляции, методе аналоговой передачи цифровых сигналов [26]. Однако сама идея двоично-отраженного кода Грея была известна намного раньше. Например, французский инженер Э. Бодо еще в 1878 году использовал такой код в телеграфной машине [30]. Также двоично-отраженный код Грея является решением таких известных головоломок, как Ханойские башни и китайские кольца [22, 32].

Коды Грея имеют многочисленные практические приложения. В силу того, что множество вершин гиперкуба можно интерпретировать как множество всех подмножеств конечного множества, коды Грея находят применение во всех областях математики, где есть потребность в быстром переборе всех подмножеств. Одной из важных проблем, связанных с областью комбинаторных алгоритмов, является эффективное перечисление элементов заданного класса комбинаторных объектов, при которой каждый элемент порождается ровно один раз. Однако, чтобы такое перечисление было возможно (даже для множеств умеренной мощности), методы генерации элементов должны быть предельно эффективными. Общий подход состоит в том, чтобы попытаться перечислить элементы комбинаторного класса так, дабы последовательные элементы отличались «малым» образом, так как это позволит тратить меньше времени на генерацию каждого следующего элемента. Как раз такое перечисление и порождают коды Грея для множества всех подмножеств. В связи с этим гамильтоновы циклы в Q_n применяются при разработке комбинаторных алгоритмов ([37]).

Другой естественной областью приложения кодов Грея является теория кодирования (например, [46]). Благодаря своей структуре коды Грея помогают исправлять ошибки и устранять шум при коммуникации через канал связи [24], используются в проектировании жестких дисков и баз данных [20, 24].

Ряд других приложений кодов Грея можно найти в работах [12, 24, 32, 39]. В настоящее время комбинаторными кодами Грея стали называть любые циклические перечисления в порядке минимального изменения всех объектов из некоторого комбинаторного множества (например, перестановки, сочетания и др.) [39].

Первыми работами, посвященными кодам Грея, были статьи Э. Гилберта 1958 года [23] и У. Милса 1963 года [34], в которых даны конструкции гамильтоновых циклов в Q_n для малых значений n . Достаточно быстро стало понятно, что решение задачи построения кода Грея для произвольного n не составляет труда и для одной размерности можно построить несколько кодов Грея, причем их число быстро увеличивается с ростом n . Возникла задача подсчета гамильтоновых циклов в Q_n : сначала в помеченном графе n -куба (число таких гамильтоновых циклов будем обозначать H_n), а потом

и в графе n -куба с точностью до автоморфизма относительно расстояния Хэмминга (h_n). По этой теме был опубликован ряд работ, последние из которых принадлежат А. Пережогину и В. Потапову [8], И. Дейтеру и А. Дельгадо [19], Ю. Чебирыку и Д. Кронингу [17], Т. Федеру и К. Суби [21], Х. Хяянпя и П. Острегарду [27].

Точные известные значения H_n^* и h_n^{**} для малых n приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1
Количество кодов Грея

n	H_n	h_n
2	2	1
3	12	1
4	2688	9
5	1813091520	237675
6	71676427445141767741440	777739016577752714

Порядок логарифма числа H_n был впервые получен в [8], а в [21] получена оценка

$$\left(\frac{n \log 2}{e \log \log n} (1 - o(1)) \right)^{2^n} \leq H_n \leq \frac{1}{2} (n!)^{\frac{2^n}{2n}} ((n-1)!)^{\frac{2^n}{2(n-1)}},$$

дающая асимптотику логарифма числа H_n .

Некоторые из рассмотренных далее конструкций можно применять не только для построения кодов Грея. Если отказаться от полноты (гамильтоновости), то можно строить произвольные цепи и циклы в Q_n . А если отказаться от связности, то можно порождать 2-факторы (набор попарно вершинно непересекающихся простых циклов, покрывающих все вершины графа).

В § 2 приведены основные конструкции кодов Грея и некоторые примеры их применения. В § 3 приведены классификации кодов по их свойствам, полученные результаты и нерешенные задачи.

§ 2. Конструкции кодов Грея

В статье [23] впервые вводится понятие переходной последовательности пути в Q_n . Каждому пути $P = v_0, v_1, v_2, \dots, v_l$ в Q_n длины l можно сопоставить его *переходную последовательность* $T(P)$:

$$T(P) = t_0, t_1, \dots, t_{l-1},$$

*) <https://oeis.org/A003042>

**) <https://oeis.org/A00169344>

где t_i — направление ребра (v_i, v_{i+1}) . Если v_0 и v_l смежны, то, добавив к $T(P)$ направление t_l ребра (v_l, v_0) , получим переходную последовательность $T(C)$ соответствующего цикла. Путь или цикл однозначно определяются переходной последовательностью, если задать начальную вершину v_0 .

Для каждого пути P (цикла C) с переходной последовательностью T определим набор четности $Z(T) = z_1 z_2 \dots z_n$, где

$$z_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \text{ встречается в } T \text{ четное число раз;} \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В [23] доказано, что последовательность

$$T = t_0, t_1, \dots, t_{2^n-1}$$

над алфавитом $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ является переходной последовательностью кода Грея в Q_n тогда и только тогда, когда:

- $Z(T) = 00 \dots 0$;
- для любого собственного подслова t_i, t_{i+1}, \dots, t_j , $0 \leq i < j \leq 2^n - 2$ последовательности T выполнено $Z(t_i, t_{i+1}, \dots, t_j) \neq 00 \dots 0$.

Это позволяет многие конструкции кодов Грея и задачи о них формулировать и решать на языке символьных последовательностей.

Коды Грея, обладающие специальными свойствами, очевидно, имеют разное строение, и в общем случае не могут быть построены одними и теми же способами. Поэтому при решении тех или иных задач, связанных с кодами Грея, необходимо применять различные схемы (или алгоритмы) построения кодов Грея. Такие схемы построения далее будем называть *конструкциями*.

Все конструкции можно классифицировать следующим образом.

1. Конструкции, позволяющие по n -мерному коду Грея построить $(n+1)$ -мерный код Грея. К конструкциям такого типа относятся двоично-отраженный код Грея, ее обобщения и конструкция Рамраса.
2. Торические конструкции. В этих конструкциях код Грея строится в основном подграфе графа Q_{n+k} , а именно торе, получаемом в результате декартова произведения гамильтоновых циклов в Q_n и Q_k . К таким конструкциям можно отнести конструкции Бакоша, Робинсона — Кона, Евдокимова и др.
3. Конструкции, также использующие разложение куба Q_{n+k} в декартово произведение кубов Q_n и Q_k , только в Q_n берется гамильтонов цикл, а в каждой копии Q_k некоторые специальные структуры. К таким конструкциям относятся конструкции Потапова, потоковая и их обобщения.

2.1. Рекурсивные конструкции с шагом один. Пусть задана $T = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{2^n-1}$ — переходная последовательность некоторого n -мерного кода Грея, где $t_i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда нетрудно видеть, что последовательности

$$\varphi(T) = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{2^n-3}, t_{2^n-2}, n+1, t_{2^n-2}, t_{2^n-3}, \dots, t_1, t_0, n+1$$

и

$$\psi(T) = t_0, n + 1, t_1, n + 1, t_2, \dots, t_{2^n - 2}, n + 1, t_{2^n - 1}, n + 1$$

являются переходными последовательностями $(n+1)$ -мерного кода Грея.

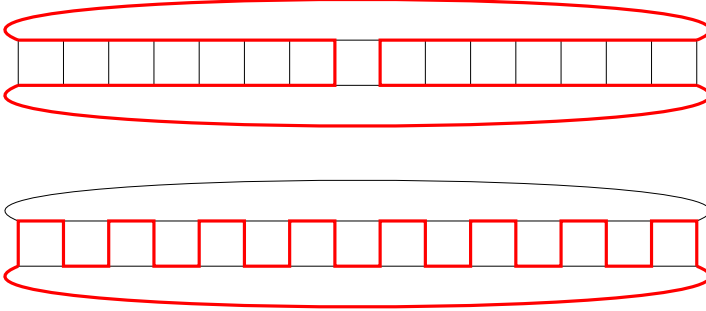


Рис. 1. Иллюстрация отображений φ и ψ

Эти две конструкции являются частным случаем конструкции гамильтонова цикла в декартовом произведении цикла на ребро. Иллюстрация этих обходов приведена на рис. 1.

При последовательном применении отображения φ к переходной последовательности $1, 2, 1, 2$ двумерного кода Грея получается *двоично-отраженный (бинарно-рефлексивный) код Грея (BRCG)*. Так, трехмерный и четырехмерный коды BRCG будут иметь переходные последовательности:

$$\begin{aligned} \varphi(T) &= 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, \\ \varphi(\varphi(T)) &= 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4. \end{aligned}$$

Те же самые переходные последовательности (с точностью до переименования символов) получаются при последовательном применении ψ к переходной последовательности 2-мерного кода Грея.

Код BRCG имеет эффективные алгоритмы кодирования и декодирования и множество приложений [14, 32, 37]. Несмотря на простоту конструкции, доказано, что в некоторых приложениях BRCG является оптимальным кодом Грея [12].

Отображение φ можно следующим образом обобщить.

Теорема 1. Пусть $T = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{2^n - 2}$ и $T' = t'_0, t'_1, t'_2, \dots, t'_{2^n - 2}$ — переходные последовательности некоторых нециклических n -мерных кодов Грея (гамильтоновых цепей в n -кубе). Если $Z(T) = Z(T')$, то последовательность

$$\varphi(T, T') = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{2^n - 3}, t_{2^n - 2}, n + 1, t'_0, t'_1, t'_2, \dots, t'_{2^n - 2}, n + 1$$

является переходной последовательностью $(n+1)$ -мерного кода Грея.

Код Грея размерности n называется 2^k -композиционным, $1 \leq k \leq n - 1$, если он образован соединением 2^k гамильтоновых цепей в непересекающихся подкубах размерности $n - k$. Теорема 1 дает конструкции 2-композиционных кодов Грея. Также заметим, что BRCG является 2^k -композиционным для любого k .

Код Грея называется *некомпозиционным*, если он не порождает гамильтонову цепь ни в каком подкубе, т. е. для любого $k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ любые 2^k подряд идущих слов не являются гамильтоновой цепью в некотором k -мерном подкубе куба Q_n .

Следующая конструкция является обобщением отображений φ и ψ используемых при построении двоично-отраженного кода Грея. Она была приведена Рамрасом в [36] в качестве простого решения задачи о некомпозиционном коде Грея.

Теорема 2. *Рассмотрим произвольный n -мерный код Грея с переходной последовательностью T . Пусть последовательность T' получается из T заменой нечетного числа вхождений некоторого символа i на символ $(n+1)$. Тогда последовательность (T', T') является переходной последовательностью $(n+1)$ -мерного кода Грея.*

Важным свойством данной конструкции является тот факт, что если в последовательность T' символы i и $(n+1)$ входят не менее чем по три раза, то конструкция сохраняет свойство некомпозиционности [36]. Этот результат представляется весьма любопытным: чтобы построить код Грея максимально далекий от двоично-отраженного кода Грея (можно считать его «максимально композиционным»), нужно лишь немного обобщить простейшую конструкцию.

2.2. Конструкция Потапова и ее обобщение. Следующая конструкция строит композитивные коды Грея. Вариация этой конструкции использовалась в [23] для получения первой нижней оценки на число кодов Грея. В приведенном ниже варианте она была предложена Потаповым в [10]. Рассмотрим произвольный код Грея в Q_k с переходной последовательностью

$$r_0, t_0, r_1, t_1, \dots, r_{2^{k-1}-1}, t_{2^{k-1}-1}.$$

Ребра этого цикла очевидным образом разбиваются на два непересекающихся совершенных паросочетания M_1 (с направлениями r_i) и M_2 (с направлениями t_i). Поскольку каждой вершине Q_k в декартовом произведении $Q_n \square Q_k$ соответствует n -мерный куб, каждому ребру e_i из M_2 можно сопоставить пару параллельных n -мерных кубов, т. е. один $(n+1)$ -куб. Рассмотрим в этом кубе гамильтонов цикл проходящий через это ребро, с переходной последовательностью $t_i T_i$, где t_i — направление ребра e_i . Тогда последовательность

$$r_0, T_0, r_1, T_1, \dots, r_{2^{k-1}-1}, T_{2^{k-1}-1} \quad (1)$$

является переходной последовательностью $(n+k)$ -мерного кода Грея. По определению данная конструкция строит 2^{k-1} -композитивные коды Грея.

В [5] приведено следующее обобщение конструкции Потапова. Пусть два последовательных по коду ребра e_i и e_{i+1} паросочетания M_2 имеют одно направление (т. е. $t_i = t_{i+1}$). Пусть в коде ребро e_i задает переход из вершины x , а ребро e_{i+1} в вершину y . Тогда $e = (x, y) \in VQ_{n+k}$. Кубы на ребрах e_i и e_{i+1} параллельны и вместе образуют $(n+2)$ -мерный куб. Рассмотрим в этом кубе гамильтонов цикл проходящий через ребро e , с переходной последовательностью tT , где t — направление ребра e . Тогда замена T_i, r_{i+1}, T_{i+1} в последовательности (1) на T оставляет ее переходной последовательностью некоторого кода Грея (рис. 2).

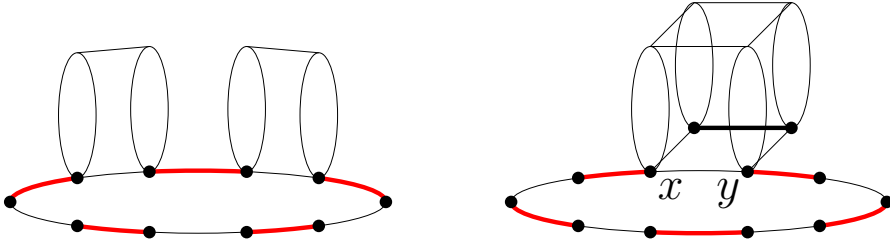


Рис. 2. Конструкция Потапова и ее обобщение

2.3. Торическая конструкция. Рассмотрим гамильтоновы циклы C_1 и C_2 в кубах Q_n и Q_k соответственно. Тогда торическая решетка $C_1 \square C_2$ является остовным подграфом графа Q_{n+k} . Следовательно, гамильтонов цикл в этой решетке является $(n+k)$ -мерным кодом Грея. Такую конструкцию назовем торической.

Описанные в п. 3.1 способы построения гамильтонова цикла в декартовом произведении цикла на ребро, являются частным случаем торической конструкции при $k = 1$.

Случай $k = 2$ был впервые использован Т. Бакошем в [11, с. 28–37] для построения сбалансированных кодов Грея.

Теорема 3 (Бакоша). Пусть $T = t_0, U_0, t_1, U_1, t_2, \dots, U_{l-1}, t_l, U_l, t_{l+1}, t_{l+2}$ — переходная последовательность n -мерного кода Грея, где каждое U_i — это некоторая последовательность (возможно, пустая), а l — четное число. Тогда последовательность

$$\begin{aligned}
 & n + 2, n + 1, n + 2, t_0, \\
 & U_0, n + 2, U_0^R, n + 1, U_0, t_1, \\
 & U_1, n + 1, U_1^R, n + 2, U_1, t_2, \\
 & \vdots \\
 & U_{2i}, n + 2, U_{2i}^R, n + 1, U_{2i}, t_{2i+1}, \\
 & U_{2i+1}, n + 1, U_{2i+1}^R, n + 2, U_{2i+1}, t_{2i+2}, \\
 & \vdots \\
 & U_{l-1}, n + 1, U_{l-1}^R, n + 2, U_{l-1}, t_l, \\
 & U_l, n + 2, U_l^R, n + 1, U_l, t_{l+1}, \\
 & n + 2, n + 1, n + 2, t_{l+1} \\
 & U_l^R, t_l, U_{l-1}^R, \dots, t_1, U_0^R, t_0
 \end{aligned}$$

является переходной последовательностью $(n+2)$ -мерного кода Грея.

Здесь через U^R обозначена инверсия $U^R = u_k, u_{k-1}, \dots, u_1, u_0$ последовательности $U = u_0, u_1, \dots, u_k$.

На рис. 3 приведена развертка торической решетки и показан принцип обхода этой решетки, описанный в теореме Бакоша.

В [38] Робинсон и Кон предложили похожую конструкцию.

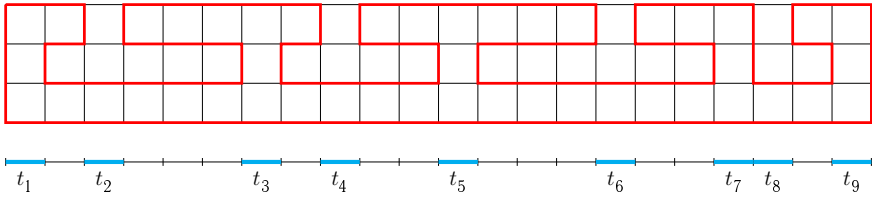


Рис. 3. Конструкция Бакоша в Q_{n+2}

Теорема 4 (Робинсона, Кона). Пусть $T = U_1, t_1, t_2, U_2, t_3, U_3, \dots, t_{l-2}, U_{l-2}, t_{l-1}, t_l, U_l$ — переходная последовательность n -мерного кода Грея, где каждое U_i — это некоторая последовательность (возможно, пустая), а l — четное число. Тогда последовательность

$$\begin{aligned}
 &U_2, n + 1, U_2^R, n + 2, U_2, t_3, \\
 &U_3, n + 2, U_3^R, n + 1, U_3, t_4, \\
 &\quad \vdots \\
 &U_{2i}, n + 1, U_{2i}^R, n + 2, U_{2i}, t_{2i+1}, \\
 &U_{2i+1}, n + 2, U_{2i+1}^R, n + 1, U_{2i+1}, t_{2i+2}, \\
 &\quad \vdots \\
 &U_{l-2}, n + 1, U_{l-2}^R, n + 2, U_{l-2}, t_{l-1}, \\
 &\quad n + 2, n + 1, t_l, U_l, \\
 &\quad U_1, n + 2, U_1^R, U_l^R, \\
 &t_l, t_{l-1}, t_{l-2}, U_{l-2}^R, t_{l-3}, \dots, U_2^R, t_2, n + 1, \\
 &\quad t_1, U_1^R, U_l^R, n + 2, \\
 &\quad U_l, U_1, t_1, n + 1, t_2
 \end{aligned}$$

является переходной последовательностью $(n+2)$ -мерного кода Грея.

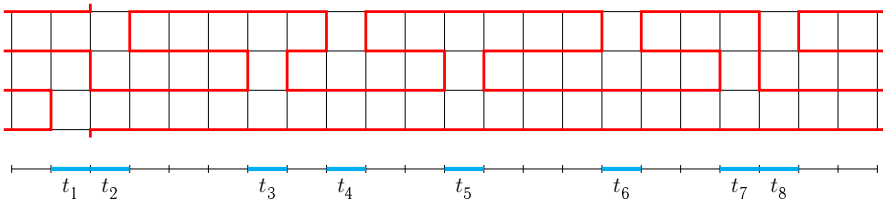


Рис. 4. Конструкция Робинсона — Кона в Q_{n+2}

На рис. 4 показан принцип обхода развертки торической решетки, описанный в теореме Робинсона — Кона.

Код Грея называется *бестрендовым*, если в списке слов этого кода в каждой позиции центр тяжести всех единиц находится ровно посередине

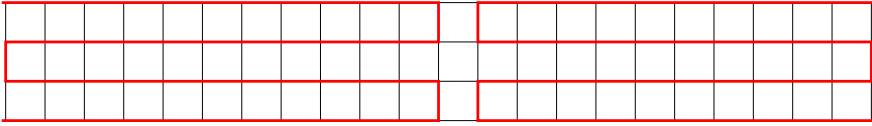


Рис. 5. Конструкция бестрендового кода в Q_{n+2}

столбца. Еще один вариант обхода развертки торической решетки, показанный на рис. 5, был использован для построения бестрендовых кодов Грея [32].

В [4] рассматривался общий случай торической конструкции при $n \geq 2$ и $k \geq 2$. В данной работе описаны все циклы на торе, которые можно построить двигаясь только в фиксированном направлении по каждому из двух циклов.

Пусть переходные последовательности R и T кодов Грея над алфавитами мощности n и k не имеют общих букв. Пусть последовательности $P = \{p_i\}_{i=1}^m$ и $Q = \{q_i\}_{i=1}^m$ положительных целых чисел таковы, что $\sum_{i=1}^m (p_i + q_i) = 2^{n+k}$. Начальный отрезок длины $\sum_{i=1}^m p_i$ последовательности R, R, R, \dots разобьем на блоки длины p_1, p_2, \dots, p_m , а начальный отрезок длины $\sum_{i=1}^m q_i$ последовательности T, T, T, \dots разобьем на блоки длины q_1, q_2, \dots, q_m , изображая это схематически так:

$$[r_0], [r_1], \dots, [r_i], \dots, [r_i],$$

$$[t_0], [t_1], \dots, [t_i], \dots, [t_i],$$

где $[r_i]$ и $[t_i]$ — блоки длины p_i и q_i соответственно.

Образует последовательность X чередованием $[r_i]$ и $[t_i]$ блоков

$$X = [r_0], [t_0], [r_1], [t_1], \dots, [r_i], [t_i], \dots, [r_m], [t_m].$$

По построению длина X равна 2^{n+k} .

Теорема 5 [4]. *Последовательность X является переходной последовательностью кода Грея размерности $n+k$ тогда и только тогда, когда последовательности P и Q периодические, и числа $\sum_{i=1}^M p_i$ и $\sum_{i=1}^M q_i$ являются нечетными, сумма которых равна $2^{\min\{n,k\}}$, где M — наименьшее общее кратное периодов последовательностей P и Q .*

Данное утверждение полностью описывает все длины шагов, с которыми необходимо двигаться по тору для получения гамильтонова цикла.

Рассматривались обобщения торической конструкции на произведения трех и более циклов [21, 24].

2.4. Потокковая конструкция. Теорема 5 показывает, что нельзя получить гамильтонов цикл в торической решетке, двигаясь с шагом один по обоим циклам. В следующей конструкции, предложенной в [25], умножается не цикл на цикл, а цикл на поток, что позволяет двигаться с шагом один.

Смежной перестановкой в Q_n называется такая перестановка π на множестве VQ_n , что $(v, \pi(v)) \in EQ_n$ для любой вершины v гиперкуба Q_n .

Последовательность смежных перестановок $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{2^n-1}$ называется потоком длины 2^n . Орбитами данного потока будем называть орбиты перестановки

$$\pi = \pi_0 \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{2^n-1}$$

на множестве слов четного веса из Q_k . Схему потоковой конструкции можно изобразить в виде табл. 2.

Т а б л и ц а 2
Схема потоковой конструкции

Q_n	Q_k		
v_0	u_0^0	...	$u_{2^{k-1}}$
	$\pi_0(u_0^0)$...	$\pi_0(u_{2^{k-1}})$
v_1	u_0^1	...	$u_{2^{k-1}}^1$
	$\pi_1(u_0^1)$...	$\pi_1(u_{2^{k-1}}^1)$
...			
v_{2^n-2}	$u_0^{2^n-2}$...	$u_{2^{k-1}}^{2^n-2}$
	$\pi_{2^n-2}(u_0^{2^n-2})$...	$\pi_{2^n-2}(u_{2^{k-1}}^{2^n-2})$
v_{2^n-1}	$u_0^{2^n-1}$...	$u_{2^{k-1}}^{2^n-1}$
	$\pi_{2^n-1}(u_0^{2^n-1})$...	$\pi_{2^n-1}(u_{2^{k-1}}^{2^n-1})$

Поскольку смежная перестановка в Q_k действует на всем множестве вершин Q_k , то без ограничения общности можно считать, что $\pi_i(u_j^i) = u_j^{i+1}$. При этом условии можно заметить, что путь, составленный из первого столбца (Q_n) и первого столбца в подтаблице Q_k следующим образом:

$$v_0 u_0^0, v_0 \pi_0(u_0^0), v_1 u_0^1, v_0 \pi_1(u_0^1),$$

$$\dots,$$

$$v_{2^n-2} u_0^{2^n-2}, v_{2^n-2} \pi_{2^n-2}(u_0^{2^n-2}), v_{2^n-1} u_0^{2^n-1}, v_{2^n-1} \pi_{2^n-1}(u_0^{2^n-1}),$$

образует простую цепь, начинающуюся в $v_0 u_0$ и заканчивающуюся в $v_{2^n-1} \pi(u_0)$. Множество таких цепей, начинающихся во всех вершинах $v_0 u_0$,

где в качестве вершины u_0 рассматриваются все вершины Q_k четного веса, является разбиением всех вершин Q_{n+k} на простые цепи. Теперь, соединяя каждую концевую вершину с соответствующей начальной вершиной в этом разбиении по правилу

$$v_{2^n-1}u \longrightarrow v_0u,$$

мы получаем 2-фактор в Q_{n+k} . Для того чтобы получившийся 2-фактор являлся гамильтоновым циклом, необходимо и достаточно, чтобы рассматриваемый поток в Q_k имел единственную орбиту. Для примера рассмотрим табл. 3 для построения гамильтонова цикла

$$C_1 = 00000, 00001, 01001, 01011, 11011, 11001, 10001, 10101, \\ 00101, 00111, 01111, 01110, 11110, 11111, 10111, 10110, \\ 00110, 00100, 01100, 01101, 11101, 11010, 10010, 10011, \\ 00011, 00010, 01010, 01000, 11000, 11100, 10100, 10000$$

в Q_5 . В данном примере в подтаблице Q_3 рассматриваем только слова с весом необходимой четности.

Таблица 3
**Построение гамильтонова цикла
 с помощью потоковой
 конструкции в Q_5**

Q_2	Q_3			
00	000	101	110	011
	001	111	100	010
01	001	111	100	010
	011	110	101	000
11	011	110	101	000
	001	010	111	100
10	001	010	111	100
	101	110	011	000

Можно считать, что в представленной конструкции мы каждой вершине четного веса из Q_n сопоставляем не смежную перестановку, а ребро

ориентированного паросочетания. В качестве обобщения ориентированного паросочетания в [3] было предложено рассматривать разбиение VQ_n на ориентированные цепи, ведущие из множества вершин S_i в множество вершин F_i для всех $i=0, \dots, 2^n-1$. Для того, чтобы построение, аналогичное стандартной потоковой конструкции, удалось выполнить, необходимо лишь потребовать, чтобы $F_i = S_{i+1}$ для всех $i \in \{0, \dots, 2^n-2\}$ и $F_{2^n-1} = S_0$. Условие построения гамильтонова цикла аналогично условию в классической потоковой конструкции: необходимо, чтобы результирующая перестановка на множестве S_0 имела единственную орбиту. Для примера рассмотрим построение гамильтонова цикла

$$C = 00000, 00001, 00111, 00010, 01010, 01011, 01001, 01000, \\ 11000, 11001, 11011, 11010, 10010, 10011, 10001, 10101, \\ 00101, 00100, 00110, 00111, 01111, 01110, 01100, 01101, \\ 11101, 11100, 11110, 11111, 10111, 10110, 10100, 10000$$

в Q_5 с использованием указанного обобщения (табл. 4).

§ 3. Классы кодов Грея

3.1. Спектры кодов Грея. Для каждого пути P (цикла C) с переходной последовательностью T определим *спектр* $sp(T) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, где a_i — количество вхождений символа i в T . В [32] приведены необходимые условия того, что кортеж $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ является спектром переходной последовательности n -мерного кода Грея:

- a_i — неотрицательное четное число для любого $i = 1, \dots, n$;
- $\sum_{i=1}^n a_i = 2^n$;
- $\sum_{i=1}^k a_{j_i} \geq 2^k$ для любого $k = 1, \dots, n-1$ и любых $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$.

Первые два тривиальны, а последнее следует из того факта, что если разложить Q_n по направлениям j_1, j_2, \dots, j_k , то ребра этих направлений должны соединить 2^k копий Q_{n-k} . Назовем кортеж $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ допустимым, если он удовлетворяет этим трем условиям.

Код Грея со спектром $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ называется *абсолютно сбалансированным*, если $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$. Очевидно, что такие коды могут существовать, только если $n = 2^k$ для некоторого k . В [44] показано, что абсолютно сбалансированные коды Грея существуют для любого n , являющегося степенью двойки.

Код Грея со спектром $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ называется *сбалансированным*, если $|a_i - a_j| \leq 2$ для любых $i \neq j$. В этом случае спектр содержит только значения $2 \left\lfloor \frac{2^{n-1}}{n} \right\rfloor$ и $2 \left\lfloor \frac{2^{n-1}}{n} \right\rfloor + 2$. Исследование таких кодов Грея для малых значений n проводилось, например, в [33, 43]. Впервые сбалансированные коды Грея для любого n были построены с помощью конструкции Бакоша [11, с. 28–37]. Независимо аналогичный результат был получен в [13] с помощью конструкции Робинсона — Кона.

Т а б л и ц а 4
Построение гамильтонова цикла
с помощью обобщенной потоковой конструкции в Q_5

Q_2	Q_3	
00	000	101
	001	100
	011	110
	010	111
01	010	111
	011	110
	001	100
	000	101
11	000	101
	001	100
	011	110
	010	111
10	010	111
	011	110
	001	100
	101	000

Код Грея со спектром $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ называется *экспоненциально сбалансированным*, если все a_i являются не более чем двумя различными степенями двойки. Заметим, что абсолютно сбалансированные коды Грея

являются как сбалансированными, так и экспоненциально сбалансированными. С использованием конструкции Бакоша в [40, 47] доказано существование экспоненциально сбалансированных кодов для любого n .

В [32] в качестве нерешенной исследовательской задачи предложен следующий вопрос: верно ли, что любой допустимый кортеж является спектром некоторого кода Грея?

При перечислении кодов Грея с точностью до автоморфизма куба при $n = 4$ [6] и $n = 5$ [19] для всех допустимых кортежей были найдены коды с таким спектром. В [17] с помощью SAT-решателей были перебраны все 6-мерные коды Грея и получено 550 различных спектров, что совпало с количеством допустимых. В [5] с использованием конструкции Бакоша и Потапова, а также обобщения конструкции Потапова, с помощью компьютерного перебора было показано, что для любого допустимого кортежа длины 7 и 8 существует код Грея с таким спектром.

В [10] с помощью конструкции Потапова было дано условно асимптотическое решение задачи.

Теорема 6 [10]. *Существует такое натуральное N , что если любой допустимый кортеж длины не превосходящей N является спектром некоторого кода Грея, то и для любого $n > N$ любой допустимый кортеж длины n является спектром некоторого кода Грея.*

В [35] с помощью конструкции Потапова и ее обобщения удалось реализовать почти все допустимые кортежи. Оставшееся конечное множество допустимых кортежей было покрыто конструкцией Бакоша. Таким образом, доказана следующая теорема, дающая окончательное решение задачи о спектрах.

Теорема 7 [35]. *Любой допустимый кортеж является спектром некоторого кода Грея.*

3.2. Локальная равномерность. Помимо глобальных свойств кодов Грея, для многих приложений требуется локальная равномерность использования направлений (букв в переходной последовательности) [25]. Для произвольного n -мерного кода Грея C известны два параметра локальной равномерности.

Первый параметр был введен в [4]. Через $l_1(C)$ обозначим наибольшее такое k , что любые k подряд ребер цикла C имеют разные направления. Пусть

$$l_1(n) = \max l_1(C),$$

где максимум берется по всем n -мерным кодам Грея C .

В [4] с помощью торической конструкции была получена нижняя оценка $l_1(n) \geq n/2$. В [24] использовалась трехмерная торическая решетка (произведение трех гамильтоновых циклов). Доказана оценка $l_1(n) \geq 2n/3$ и показано, что с помощью торической конструкции эта оценка асимптотически не улучшаема.

В [25] впервые приводится потоковая конструкция, используя которую получена наилучшая известная на данный момент нижняя оценка $l_1(n) \geq n - \lceil 2.001 \log n \rceil$. В этой же работе дана конструкция 10-мерного кода Грея C на пятимерной торической решетке, у которого $l_1(C) = 8$. Таким образом, доказана оценка $l_1(10) \geq 8$.

В [32] после раздела, посвященного кодам Грея, были приведены несколько нерешенных исследовательских задач. Почти все из них к настоящему моменту решены. Про решение задачи о спектрах мы говорили выше. Осталась одна нерешенная задача.

Задача 1. Доказать, что $l_1(8) = 6$.

В [9] при переборе кодов Грея с большой группой автоморфизмов был получен 8-мерный код Грея с параметром равномерности 6. Таким образом, осталось доказать только верхнюю оценку $l_1(8) < 7$. В [7] представлена оценка на максимальную длину цикла в Q_n , у которого параметр l_1 равен $n-1$.

Второй параметр равномерности был введен в [1]. Через $l_2(C)$ обозначим наименьшее такое k , что среди любых k подряд ребер цикла C есть ребра всех направлений. Пусть

$$l_2(n) = \min l_2(C),$$

где минимум берется по всем n -мерным кодам Грея C . Используя потоковую конструкцию была получена верхняя оценка

$$l_2(n) \leq n + 3 \lfloor \log n \rfloor.$$

Заметим, что верхняя оценка для первого параметра и нижняя оценка для второго до сих пор остаются тривиальными.

3.3. Свойства, связывающие слова с фиксированным расстоянием по коду. Для заданного кода Грея C

$$v_0, v_1, v_2, \dots, v_{2^n-1}$$

расстоянием по коду между словами u и w назовем расстояние между вершинами u и w в цикле C . Иными словами, если $u = v_i$, $w = v_j$, то расстояние по коду между u и w равно

$$\min\{|i - j|, 2^n - |i - j|\}.$$

Код Грея назовем v -добавочным, если для любых двух слов u_1 и u_2 , находящихся на расстоянии 2^{n-1} по коду, выполнено

$$u_1 \oplus v = u_2.$$

По построению BRCG является v -добавочным для $v = 00 \dots 011$.

Если в конструкции Теоремы 1 взять одинаковые гамильтоновы циклы, т.е. $T = T'$, то полученный с помощью этой конструкции код Грея является v -добавочным, где $v = Z(T)$ 1. Поскольку для любых двух вершин куба разной четности существует гамильтонова цепь с концами в этих вершинах [18], то получаем, что v -добавочный код Грея существует для любого v четного веса [1].

Код Грея размерности n называется (n, t) -антиподальным, если расстояние по коду между любой парой противоположных вершин равно t . Из двудольности графа Q_n следует, что для существования (n, t) -антиподального кода Грея необходимо, чтобы числа n и t были одной четности.

В [31] исследовались (n, n) -антиподальные коды Грея. Доказано, что для всех $n = 2^k$ существует (n, n) -антиподальный код Грея. Показано, что для $n = 6$ и нечетных $n > 3$ не существует (n, n) -антиподальных кодов Грея. Интересно, что единственный с точностью до изоморфизма 3-мерный код Грея является $(3, 3)$ -антиподальным.

В этой же работе приведена следующая задача, до сих пор остающаяся нерешенной.

Задача 2. Доказать, что для любого $n > 3$, не являющегося степенью двойки, не существует (n, n) -антиподальных кодов Грея.

Исследование антиподальных кодов было продолжено в [16]. Комбинируя гамильтоновы цепи, построенные с помощью торической конструкции с конструкцией из теоремы 1, доказано существование (n, t) -антиподальных кодов Грея для четных n и нескольких серий значений параметра t . Также доказано, что для нечетных $n \geq 3$ существует (n, t) -антиподальный код Грея тогда и только тогда, когда $t = 2^{n-1} - 1$.

Назовем n -мерный код Грея $\langle d, k \rangle_n$ -дистанционным, если расстояние Хэмминга между словами, находящимися в коде на расстоянии k , равно d . Из двудольности графа Q_n следует, что для существования $\langle d, k \rangle_n$ -дистанционного кода Грея необходимо, чтобы числа k и d были одной четности. Впервые такие коды рассматривались в [2]. Связь между дистанционными и равномерными кодами Грея устанавливает следующее утверждение.

Теорема 8 [2]. Код Грея C является $\langle d, d \rangle_n$ -дистанционным кодом тогда и только тогда, когда $l_1(C) \geq d$. В частности, код C является $\langle n-1, n-1 \rangle_n$ -дистанционным кодом тогда и только тогда, когда $l_1(C) = n-1$. Если для кода Грея C выполнено $l_2(C) = n+1$, то код C является $\langle n-1, n+1 \rangle_n$ -дистанционным кодом.

С помощью конструкции из теоремы 1 были построены дистанционные коды Грея для нескольких серий значений параметров. Также были найдены следующие достаточные условия на параметры, чтобы дистанционных кодов с этими параметрами не существовало.

Теорема 9 [2]. В следующих случаях не существует $\langle d, k \rangle_n$ -дистанционного кода Грея:

- 1) если $d = 1$ и $1 < k < 2^n - 1$;
- 2) если n четно, $n \geq 6$, $d = n - 1$ и k является обратным к $(2i + 1)$ элементом в мультипликативной группе кольца вычетов по модулю 2^n для некоторого $1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}$;
- 3) если $k = 2^p(2t + 1)$ и обратный к $(2t + 1)$ элемент k' в мультипликативной группе кольца вычетов по модулю 2^{n-p} удовлетворяет неравенству $k' < \frac{n-2^p}{d}$.

3.4. Графы 2-подслов. Рассмотрим гамильтонов путь P в Q_n с переходной последовательностью

$$T(P) = t_0, t_1, \dots, t_{2^n-2}.$$

Графом 2-подслов $\tilde{G}(P)$ называется обыкновенный граф с множеством вершин $\{1, 2, \dots, n\}$ и множеством ребер

$$\{(i, j) \mid i = t_s, j = t_{s+1} \text{ для некоторого } 0 \leq s \leq 2^n - 3\}.$$

В случае цикла C с переходной последовательностью

$$T(P) = t_0, t_1, \dots, t_{2^n-1}$$

граф 2-подслов $\tilde{G}(C)$ вводится аналогично, только добавляются, если их нет, ребра (t_{2^n-2}, t_{2^n-1}) и (t_{2^n-1}, t_0) . Понятно, что если рассматривать упорядоченные пары символов, то получим ориентированный аналог графа 2-подслов кода Грея. На рис. 6 представлены ориентированный и неориентированный графы 2-подслов BRCG.

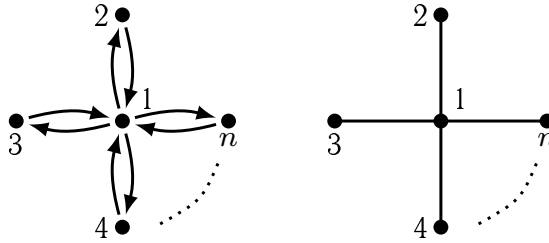


Рис. 6. Ориентированный и неориентированный графы 2-подслов BRCG

Впервые графы 2-подслов были введены и изучены в [15]. Доказано, что любой код Грея не может иметь в качестве графа 2-подслов дерево диаметра 3. С другой стороны, используя торическую конструкцию и конструкцию композитных кодов, доказано, что любое дерево диаметра 4 является графом 2-подслов некоторого кода Грея.

В [45] рассмотрен класс кодов Грея, получаемых многократным применением операции циклического сдвига переходной последовательности и отображения φ . В рамках этого класса доказано, что если в дереве есть внутренняя вершина на расстоянии не менее трех от любого листа и все ее соседи имеют степень 2, то не существует кода Грея с таким графом 2-подслов. Построены коды Грея, у которых граф 2-подслов является деревом произвольного большого диаметра. Также доказано, что существуют коды Грея, у которых ориентированный граф 2-подслов является односторонним (т.е. для любой пары вершин либо нет дуги, либо есть только дуга в одном направлении).

В дальнейшем с помощью конструкции Бакоша были построены коды Грея с полным графом 2-подслов [41] и коды Грея с некоторыми классами двудольных графов 2-подслов [42]. Выделим здесь одну задачу, предложенную в [41], поскольку, видимо, приведенные в данной работе конструкции не позволяют ее решить.

Задача 3. Существуют ли коды Грея, у которых ориентированный граф 2-подслов является полным односторонним графом?

3.5. Коды Грея без близких ребер. Для двух ребер $e_1 = (v_1, v_2)$ и $e_2 = (u_1, u_2)$ одного направления i в Q_n определим расстояние между ребрами d' :

$$d'(e_1, e_2) = d(v, u),$$

где $v \in \{v_1, v_2\}$, $u \in \{u_1, u_2\}$ и при этом v и u имеют 0 в i -й позиции. Пару ребер e_1 и e_2 одного направления будем называть *близкими*, если $d'(e_1, e_2) = 1$.

Легко видеть, что два ребра являются близкими тогда и только тогда, когда концевые вершины этих двух ребер образуют подкуб размерности 2.

В [3] с использованием обобщенной потоковой конструкции доказано, что в булевых кубах размерностей $n \geq 10$ существуют 2-факторы без близких ребер с длинами циклов не меньше $2^{n/4}$.

Перебор показал, что для $n \leq 6$ не существует n -мерных кодов Грея без близких ребер. Остается нерешенной следующая задача.

Задача 4. Для каких $n \geq 7$ существуют n -мерные коды Грея без близких ребер?

Заключение

Для многих практических приложений требуется построить коды Грея со специальными свойствами. Для этого можно использовать конструкции, описанные в данной работе.

Отметим отдельно, что пока известно мало методов и подходов к доказательству, что кодов Грея с определенными свойствами не существует. В этом направлении можно выделить всего три нетривиальных результата, которые были упомянуты в данном обзоре:

- показано, что не существует (n, n) -антиподальных кодов Грея для нечетных n [31];
- доказано, что в некотором естественном классе кодов Грея нет таких кодов, у которых граф 2-подслов может иметь вид дерева определенного типа [45];
- представлены нетривиальные серии наборов параметров d и k , при которых дистанционные $\langle d, k \rangle_n$ -коды Грея не существуют [2].

Поэтому представляют большой интерес новые подходы и результаты в этом направлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быков И. С. О локально равномерных кодах Грея // Дискретный анализ и исследование операций. — 2016. — Т. 23, № 1. — С. 51–64.
2. Быков И. С., Пережогин А. Л. О дистанционных кодах Грея // Дискретный анализ и исследование операций. — 2017. — Т. 24, № 3. — С. 5–17.
3. Быков И. С. 2-факторы без близких ребер в гиперкубе // Дискретный анализ и исследование операций. — 2019. — Т. 26, № 3. — С. 15–25.
4. Евдокимов А. А. О нумерации подмножеств конечного множества // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач. — 1980. — Т. 34. — С. 8–26.
5. Малых А. Е., Пережогин А. Л. Конструктивный подход к перечислению спектров кодов Грея в булевых кубах малых размерностей // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. — 2017. — Т. 15, № 4.
6. Пархоменко П. П. Классификация гамильтоновых циклов в двоичных гиперкубах // Автомат. и телемех. — 2001. — Вып. 6. — С. 136–150.
7. Пережогин А. Л. О локально изометрическом кодировании натуральных чисел // Дискретный анализ и исследование операций. — 1996. — Т. 3, № 4. — С. 69–76.
8. Пережогин А. Л., Потапов В. Н. О числе гамильтоновых циклов в булевом кубе // Дискретный анализ и исследование операций. — 2001. — Т. 8, № 2. — С. 52–62.
9. Пережогин А. Л. Об автоморфизмах циклов в n -мерном булевом кубе // Дискретный анализ и исследование операций. — 2007. — Т. 14, № 3. — С. 67–79.

10. Потапов В. Н. Построение гамильтоновых циклов с заданным спектром направленных ребер в булевом n -мерном кубе // Дискретный анализ и исследование операций. — 2012. — Т. 19, № 2. — С. 75–83.
11. Adam A. Truth Functions and the Problem of their Realization by Two-Terminal Graphs // Akadémiai Kiadó. — 1968.
12. Agrell E., Lassing J., Strom E. G., Ottoson. T. On the optimality of the binary reflected Gray codes // IEEE Trans. Inform. Theory. — 2004. — V. 50. — P. 3170–3182.
13. Bhat G. S., Savage C. Balanced Gray Codes // Electronic Journal of Combinatorics. — 1996. — V. 3. — P. 2–5.
14. Bitner J. R., Ehrlich G. S., Reingold E. M. Efficient generation of the binary reflected Gray code and its applications // Comm. Assoc. Comput. Mach. — 1976. — V. 19, No 9. — P. 517–521.
15. Bultena. B., Ruskey F. Transition restricted Gray codes // The Electron. J. Comb. — 1996. — V. 3. — R. 11.
16. Chang G. J., Eu S.-P., Yu C.-H. On the (n, t) -antipodal Gray codes // Theoretical Computer Science. — 2007. — V. 374, No 1–3. — P. 82–90.
17. Chebiryak Y., Kroening D. Towards a Classification of Hamiltonian Cycles in 6-Cube // Journal of Satisfiability, Boolean Modelling and Computation. — 2008. — V. 4, No 1. — P. 57–74.
18. Chen C. C., Quimpo N. F. On strongly hamiltonian abelian group graphs // Combinatorial Mathematics VIII. — 1981. — P. 23–34.
19. Dejter I., Delgado A. A. Classes of Hamiltonian Circuits in the 5-cube // Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing. — 2007. — V. 61. — P. 87–95.
20. Faloustos C. Gray codes for partial match and range queries // IEEE Transactions on Software Engineering. — 1988. — V. 14, No 10. — P. 1381–1393.
21. Feder T., Subi C. Nearly Tight Bounds on the Number of Hamiltonian Circuits of the Hypercube and Generalizations // Inform. Process. Lett. — 2009. — V. 109, No 5. — P. 267–272.
22. Gardner M. The curious properties of the Gray code and how it can be used to solve puzzles // Sci. Amer. — 1972. — V. 227, No 2. — P. 106–109.
23. Gilbert E. N. Gray codes and paths on the n -cube // The bell system technical journal. — 1958. — V. 37, No 3. — P. 815–826.
24. Goddyn L., Lawrence G. M., Nemeth E. Gray codes with optimized run lengths // Utilitas Mathematica. — 1988. — V. 34. — P. 179–192.
25. Goddyn. L., Gvozdjak P. Binary Gray codes with long bit runs // The Electron. J. Comb. — 2003. — V. 10. — R27.
26. Gray F. Pulse code communications. — Patent no. 2632058 US., 1953.
27. Haanpää H., Ostergaard P. R. J. Counting Hamiltonian cycles in bipartite graphs // Math. Comp. — 2014. — V. 23. — P. 979–995.
28. Harary F. Graph theory. — Addison-Wesley Pub. Co., 1969.
29. Harary F., Hayes J. P., Wu H.-J. A survey of the theory of hypercube graphs // Computers & Mathematics with Applications. — 1988. — V. 15. — P. 277–289.
30. He M. X., Petoukhov S. V., Ricci P. E. Genetic code, hamming distance and stochastic matrices // Bulletin of Mathematical Biology. — 2004. — V. 66, No 5. — P. 1405–1421.
31. Killian C., Savage C. Antipodal Gray Code // Discrete Mathematics. — 2002. — V. 281. — P. 221–236.
32. Knuth D. E. The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 1: Bitwise Tricks & Techniques; Binary Decision Diagrams. — Addison-Wesley Professional, 2009.
33. Ludman J. Gray Code Generation for MPSK Signals // IEEE Transactions on Communications. — 1981. — V. 29. — P. 1519–1522.
34. Mills W. H. Some Complete Cycles on the n -Cube // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1963. — V. 14, No 4. — P. 640–643.
35. Perezhugin A. L. On the spectrum of Hamiltonian cycles in the n -cube // Journal of Combinatorial Theory, Series B. — 2021. — V. 151. — P. 435–464.
36. Ramras M. A new method of generating Hamiltonian cycle on the n -cube // Discrete Mathematics. — 1990. — V. 85. — P. 329–331.
37. Reingold E. M., Nievergelt J., Deo N. Combinatorial Algorithms: Theory and Practice. — Prentice Hall College Div., 1977.

38. Robinson J. P., Cohn M. Counting sequences // IEEE Trans. Computers. — 1981. — V. 30. — P. 17–23.
39. Savage C. A survey of combinatorial Gray codes // SIAM Rev.— 1997. — V. 39, No 4. — P. 605–629.
40. Suparta I. N. A simple proof for the existence of exponentially balanced Gray codes // Electron. J. Comb. — 2005. — V. 12. — No 19.
41. Suparta I. N., Zanten A. van. A construction of Gray codes inducing complete graphs // Discrete Mathematics. — 2008. — V. 308. — P. 4124–4132.
42. Suparta I. N. Some classes of bipartite graphs induced by Gray codes // Electronic Journal of Graph Theory and Applications. — 2017. — V. 5, No 25— P. 312–324.
43. Vickers V. E., Silverman J. A Technique for Generating Specialized Gray Codes // IEEE Trans. Comput. — 1980. — V. 29, No 4.— P. 329–331.
44. Wagner D. J., West J. Constructions of uniform Gray codes // Congressus Numerantium. — 1991. — V. 80. — P. 217–223.
45. Wilmer E. L., Ernst M. D. Graphs induced by Gray codes // Discrete Math. — 2002. — V. 257. — P. 585–598.
46. Zanten A. van. Minimal-Change Order and Separability in Linear Codes // IEEE Transactions on Information Theory. — 1993. — V. 39. — P. 1988–1989.
47. Zanten A. van., Suparta I. N. Totally balanced and exponentially balanced Gray codes // Дискретный анализ и исследование операций. — 2004. — Т. 11, № 4. — С. 81–98.

Поступило в редакцию 31 I 2022