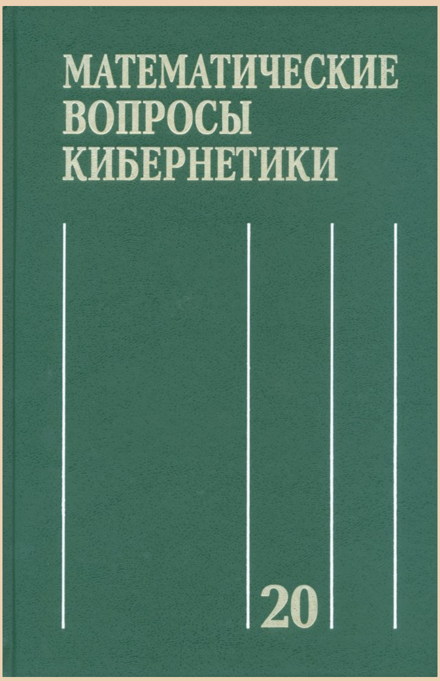

Ю. А. Комбаров

Нижняя оценка схемной сложности линейной функции в одном бесконечном базисе

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА СХЕМНОЙ СЛОЖНОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ В ОДНОМ БЕСКОНЕЧНОМ БАЗИСЕ*)

Ю. А. КОМБАРОВ

(МОСКВА)

Введение

Работа посвящена изучению схем из функциональных элементов [5], реализующих линейные булевы функции (однородную линейную функцию $l_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ и неоднородную линейную функцию $\overline{l_n}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1$). Базис (т. е. множество функциональных элементов, из которых разрешается строить схемы), схемы в котором мы рассматриваем, определяется следующим образом:

$$U_\infty = \{x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n} \mid n \in \mathbb{N},\ \sigma_1, \ldots \sigma_n \in \{0, 1\}\}.$$

Другими словами, базис U_∞ состоит из конъюнкторов с произвольным количеством входов, любой вход которых может быть инвертирован.

В работе [14] были получены первые оценки на сложность реализации линейных функций схемами в базисе U_∞:

$$2n + \Theta(1) \leqslant L_{U_\infty}(l_n) = L_{U_\infty}(\overline{l_n}) \leqslant 2.5n + \Theta(1)$$

(через $L_B(f)$ обозначается сложность реализации булевой функции f в базисе B, определяемая как минимальное количество функциональных элементов, достаточное для реализации функции f схемой в базисе B). В [4] была улучшена верхняя оценка: $L_{U_\infty}(l_n) = L_{U_\infty}(\overline{l_n}) \leqslant 2\frac{1}{3}n + \Theta(1)$. Настоящая работа посвящена улучшению нижней оценки. Основной результат работы — следующая теорема.

Т е о р е м а. $L_{U_\infty}(l_n) = L_{U_\infty}(\overline{l_n}) \geqslant 2\frac{1}{9}n + \Theta(1)$.

Доказательство теоремы использует метод забивающих констант. Опишем основную идею этого подхода.

Пусть задана схема, для которой нам требуется доказать, что ее сложность велика. Выберем в схеме один или несколько входов и подадим на них константы. После этого появится возможность удаления нескольких

*) Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2022-284.

DOI: 10.20948/mvk-2022-81

элементов (например, элементов, реализующих константы или функции одной переменной). Будем продолжать шаги подстановки констант и удаления элементов индуктивно до тех пор, пока константы не будут поданы на все или почти все входы схемы. Общее число элементов, которые были удалены во время этого процесса, и будет нижней оценкой на сложность схемы.

Метод забивающих констант используется практически всеми доказательствами нижних оценок сложности схем в полных конечных базисах (см., например, [1–3, 7, 8, 10, 11]). Характерной чертой доказательств, использующих метод, является значительный объем: как правило, приходится рассматривать множество вариантов строения схемы и для каждого варианта указывать подходящую подстановку констант.

В настоящей работе используется обобщение метода забивающих констант, предложенное в [10] и связанное с использованием вспомогательной меры сложности схем и выбором такой меры с помощью решения задачи линейного программирования. Кратко опишем эту идею.

При проведении доказательств методом забивающих констант часто оказывается, что не во всех случаях возможно удалить достаточное для желаемой нижней оценки число элементов. Это препятствие можно обойти, если показать, что шаги удаления, при которых сложность схемы уменьшается недостаточно, происходят не слишком часто. Для этого можно доказать, что такие шаги сильно уменьшают какие-то другие характеристики схемы (например, сумму степеней всех входов); если отслеживаемые характеристики изначальной схемы невелики, то и «плохих» шагов удаления не очень много. В [10] показано, как формализовать эту идею и как получить с ее помощью максимальную нижнюю оценку, решая небольшую задачу линейного программирования.

Перечислим результаты, посвященные исследованию сложности реализации линейных функций схемами в различных базисах.

В работе [7] найдена сложность реализации линейных функций в классическом базисе, состоящем из двухвходового конъюнктора, двухвходового дизъюнктора и инвертора. В [7] доказано, что $L_{\{x\&y, x\vee y, \overline{x}\}}(l_n) = L_{\{x\&y, x\vee y, \overline{x}\}}(\overline{l_n}) = 4n-4$. Также в [7] доказано, что $L_{\{x\&y, \overline{x}\}}(l_n) = L_{\{x\&y, \overline{x}\}}(\overline{l_n}) = 7n-7$.

В [8] доказано, что $L_{\{x|y\}}(l_n) = 4n-4$ и $4n-4 \leqslant L_{\{x|y\}}(\overline{l_n}) \leqslant 4n-3$ (здесь $x|y$ обозначает функцию штрих Шеффера, определяемую как $x|y = \overline{x\&y}$). В [3] сложность неоднородной линейной функции уточнена: $L_{\{x|y\}}(\overline{l_n}) = 4n-3$.

Сложность линейных функций известна для базиса U_2, состоящего из всех элементов, реализующих нелинейные функции, существенно зависящие от двух переменных. В работе [13] доказано, что $L_{U_2}(l_n) = L_{U_2}(\overline{l_n}) = 3n-3$.

Сложность реализации линейных функций известна и для некоторых базисов, содержащих многовходовые элементы. Один из первых результатов в этом направлении получен в работе [12]. В этой работе рассматриваются минимальные схемы, реализующие линейные функции в базисе NOR, состоящем из всех элементов, реализующих функции вида $\overline{x_1 \vee \ldots \vee x_k}$ ($k \in \{2, 3, \ldots\}$). Доказано, что $L_{NOR}(l_2) = 5$, $L_{NOR}(\overline{l_2}) = 4$, а при $n \geqslant 3$ верно, что $L_{NOR}(l_n) = L_{NOR}(\overline{l_n}) = 3n-2$.

В [6] установлено, что сложность однородной линейной функции в базисе из всех антицепных функций составляет $\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$.

В [9] доказано, что сложность реализации линейной функции от n переменных в любом функционально полном базисе меньше или равна $7n-7$.

§ 1. Определения и обозначения

Приведем определение схемы из функциональных элементов в базисе U_∞ (далее — просто схемы), которое мы будем использовать. Это определение отличается от определения, данного в [5], но эквивалентно ему.

Схемой будем называть ориентированный граф без ориентированных циклов, каждому ребру которого приписано число из $\{0,1\}$, а каждой вершине нулевой входной степени приписана переменная из алфавита переменных $\{x_1, x_2, \ldots\}$ или константа из $\{0,1\}$ (никаким двум вершинам нулевой входной степени не приписаны одинаковые метки). Одна из вершин схемы дополнительно выделена и называется *выходной* вершиной. Вершины схемы, которым приписаны переменные, называются *входами*, вершины, которым приписаны константы, называются *константными вершинами*, все остальные вершины называются *элементами*. Число, приписанное ребру, будем называть *знаком* ребра.

Каждой вершине схемы можно индуктивно сопоставить булеву функцию, *реализуемую* этой вершиной. Функция, реализуемая вершиной входной степени ноль, есть переменная или константа, приписанная этой вершине. Пусть E — элемент схемы, $e_1, \ldots, e_k$ — все ребра схемы, входящие в E, а $V_1, \ldots, V_k$ — вершины схемы, из которых выходят ребра $e_1, \ldots, e_k$. Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — булевы функции, реализуемые вершинами $V_1, \ldots, V_k$, а $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ — знаки ребер $e_1, \ldots, e_k$ соответственно, то элемент E реализует функцию*) $\varphi_1^{\sigma_1} \& \ldots \& \varphi_k^{\sigma_k}$. Говорят, что схема *реализует* булеву функцию f, если выходная вершина схемы реализует эту функцию.

Пусть e — ребро схемы со знаком σ, которое идет из вершины V в элемент E. Тогда будем говорить, что вершина V *подается* на элемент E. Если $\sigma = 1$, будем говорить, что V подается на *положительный* вход элемента E, в противном случае будем говорить, что V подается на *отрицательный* вход элемента E. Если вершина V подается на элемент E, будем говорить, что E является *потомком* вершины V. *Числом входов* элемента будем называть его входную степень. Далее для краткости мы будем называть исходящую степень вершины схемы просто степенью вершины. Степень вершины V будем обозначать через $\deg V$.

На рисунках элементы схемы изображаются треугольниками, а входы схемы — черными точками. Положительные ребра изображаются как стрелки, оканчивающиеся на верхней стороне соответствующего элемента, отрицательные ребра — как стрелки с небольшим кружком на конце. Если знак ребра не известен, оно изображается стрелкой, не доходящей до границы элемента, на который оно подается. Тонкая дуга, пересекающая все ребра, входящие (или исходящие) из вершины схемы, означает, что в данную вершину не входят (не исходят) никакие ребра, за исключением нарисованных.

---

*) Через φ^σ обозначается функция φ, если $\sigma = 1$, и функция $\overline{\varphi}$, если $\sigma = 0$.

Элемент схемы называется *верхним*, если на все его входы подаются вершины схемы нулевой входной степени (т. е. входы схемы или константные вершины).

Пусть S — схема. Введем обозначения для некоторых ее числовых характеристик: $L(S)$ — число элементов в S; $F(S)$ — сумма степеней всех входов S; $T(S)$ — число входов в S степени, большей или равной трем. Число $L(S)$ будем называть *сложностью* схемы S. *Мерой* схемы S будем называть величину

$$\mu(S) = L(S) + \alpha_F F(S) + \alpha_T T(S),$$

где α_F и α_T — положительные числовые параметры, значения которых будут выбраны позднее.

Схема S называется *приведенной*, если элементы S подаются лишь на отрицательные входы элементов. Следующее утверждение говорит о том, что любую схему можно преобразовать в приведенную, не увеличивая ее сложность.

Утверждение 1. *Пусть S — схема, реализующая функцию f. Тогда существует приведенная схема S', также реализующая f, такая, что $L(S) - L(S') \geqslant 0$.*

Доказательство. Если S не является приведенной, в ней найдется элемент E_1, который подается на положительный вход некоторого элемента E_2. Пусть $V_1, \ldots, V_k$ — все вершины, подающиеся на E_1, а $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ — знаки соответствующих ребер. Удалим из схемы ребро, ведущее из E_1 в E_2, а вершины $V_1, \ldots, V_k$ соединим ребрами знаков $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ с элементом E_2. Очевидно, после описанного преобразования функции, реализуемые элементами схемы, не изменятся, а положительное ребро, соединяющее E_1 и E_2, будет удалено.

Повторяя такое преобразование для всех положительных ребер, соединяющих элементы, получаем приведенную схему.

Следующее утверждение 2 очевидно.

Утверждение 2. *Пусть S — схема, E — ее элемент, V — ее вершина, реализующая функцию, тождественно равную нулю или единице, и V подается на E. Тогда выполнено одно из следующих утверждений.*
(1) *E реализует константу ноль.*
(2) *Вершину V можно отсоединить от элемента E, не изменив функцию, реализуемую этим элементом (и всей схемой).*

Ребро схемы будем называть *избыточным*, если функция, реализуемая схемой, не меняется при удалении этого ребра.

Булева функция $l(x_1, \ldots, x_n)$ называется *линейной*, если она представима в виде $l(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus c$ (здесь $c \in \{0, 1\}$).

Пусть S — схема с входами $x_1, \ldots, x_n$, которая реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Будем говорить, что в схеме S переменная x_i *забивается* переменными $x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}$, если найдутся такие константы $c_1, \ldots, c_s$, что при подстановке их в функцию f вместо переменных $x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}$ полученная подфункция не будет зависеть от переменной x_i. Переменную x_i будем называть *забиваемой*, если найдется подмножество множества переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$, не включающее x_i и забивающее x_i.

Если в линейную функцию подставить константы вместо некоторых переменных, то в результате получится линейная функция, зависящая от всех незафиксированных переменных. Поэтому верно следующее утверждение.

Утверждение 3. *В схеме, реализующей линейную функцию, никакая переменная не является забиваемой.*

Далее утверждение 3 часто будет использоваться без ссылки.

Любую схему, реализующую линейную функцию, можно незначительно изменить так, чтобы все входы выбранного верхнего элемента стали положительны. Это следует из следующего утверждения 4.

Утверждение 4. *Пусть S — схема, реализующая линейную функцию от n переменных, E — элемент схемы S. Пусть $\{x_1, \ldots, x_k\}$ — все входы схемы, подающиеся на отрицательные входы E. Пусть S' — схема, получаемая из S после замены знаков всех ребер, исходящих из входов $\{x_1, \ldots, x_k\}$, на противоположные. Тогда S' также реализует линейную функцию от n переменных.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что замена всех знаков ребер, исходящих из входа x_i равносильна подстановке в схему функции $x_i \oplus 1$ вместо переменной x_i.

§ 2. Преобразования схем

Определим несколько простых преобразований схем.

Удаление константных вершин. Пусть S — схема, реализующая функцию f, отличную от константы. Пусть $V_1, \ldots, V_k$ — все ее вершины, реализующие функции, тождественно равные нулю или единице (в том числе — константные вершины). Согласно утверждению 2 мы можем удалить все ребра, идущие из вершин $V_1, \ldots, V_k$ в элементы, реализующие неконстантные булевы функции. После этого в схеме не останется путей, соединяющих какую-либо из вершин $V_1, \ldots, V_k$ с выходной вершиной, поэтому мы сможем удалить все вершины $V_1, \ldots, V_k$, не изменив функцию, реализуемую схемой. Так как в результате описанного преобразования в схему не добавляются новые вершины или ребра, результатом применения преобразования к приведенной схеме является приведенная схема. По той же причине удаление константных вершин не увеличивает значения $L(S)$, $F(S)$ и $T(S)$.

Подача константы на вход схемы. Пусть S — схема, реализующая функцию f, пусть x — вход схемы, а c — константа из $\{0, 1\}$. Заменим вход x на константную вершину, реализующую константу c. После этого функции, реализуемые элементами схемы изменятся, в частности некоторые элементы станут реализовывать константы. Удалим эти элементы и добавленную константную вершину, как описано выше. Ясно, что схема, полученная после применения данной операции к приведенной схеме, будет приведенной.

Удаление элемента, реализующего функцию одной переменной. Пусть S — схема, E — ее элемент, реализующий функцию x^σ ($\sigma \in \{0, 1\}$). Пусть $E_1, \ldots, E_k$ — все элементы схемы S, на которые подается элемент E, а $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ — знаки ребер, ведущих из E в $E_1, \ldots, E_k$ соответственно. Для каждого i от 1 до k произведем следующие действия: удалим ребро, ведущее из E в E_i и добавим ребро со знаком $\sigma \oplus \sigma_i \oplus 1$, ведущее из входа схемы x в E_i. Затем удалим элемент E. Очевидно, преобразование не меняет функций, реализуемых оставшимися элементами схемы.

При проведении преобразования в схему не добавляются ребра, идущие из элементов в элементы. Поэтому из приведенной схемы в результате описанного удаления элемента получается также приведенная схема. Преобразование увеличит значение $F(S)$ на величину $\deg E$ или $\deg E-1$ (в зависимости от того, подавался ли вход x на E) и может увеличить на единицу значение $T(S)$ (в случае, если степень входа x изменится и станет больше или равна трех).

Удаление кратных ребер. Пусть E — элемент схемы S, в который входят два ребра из вершины V. Мы можем упростить схему, учитывая тождества $\varphi\&\varphi=\varphi$ и $\varphi\&\overline{\varphi}=0$. А именно, если знаки ребер из E в V совпадают, удалим одно из них. Иначе заменим E на константную вершину, реализующую ноль, после чего удалим константные вершины из схемы. Очевидно, что при этом преобразовании схема не может утратить свойство приведенности, а также что преобразование не увеличивает значения $L(S)$, $F(S)$ и $T(S)$.

§ 3. Особые элементы и подходящие входы

Пара элементов называется *особой*, если каждый из этих элементов является верхним, двухвходовым, на входы обоих элементов подаются два одних и тех же входа схемы и степень каждого из этих элементов равна двум (см. рис. 1). Каждый из элементов, входящий в особую пару, называется *особым* элементом.

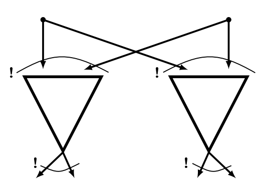

Рис. 1

Особая пара элементов E_1, E_2 называется *открытой*, если выполнено следующее условие: для любого элемента E, на который подается элемент E_1 (или элемент E_2), найдется неособый элемент E', который также подается на E. Каждый из элементов открытой пары называется открытым.

Вход схемы называется *подходящим*, если он подается на вход верхнего элемента, не входящего в открытую пару.

Лемма 1. *В любой схеме без константных вершин, реализующей линейную функцию, найдется подходящий вход.*

Доказательство. Будем обходить вершины схемы, начиная с выходного элемента, согласно следующему алгоритму.

(1) Если текущая вершина — неверхний элемент, на который не подаются открытые элементы, перейдем в любой элемент из тех, которые подаются на этот элемент.

(2) Если текущая вершина — неверхний элемент, на который подаются открытые элементы, перейдем в любой неособый элемент из тех, которые подаются на этот элемент.

(3) Если текущая вершина — верхний элемент, перейдем в любой вход схемы из тех, которые подаются на этот элемент и закончим обход схемы.

Возможность выполнения шага (2) гарантируется определением открытой пары.

Так как схемы не содержат ориентированных циклов, никакая вершина не будет посещена дважды. Следовательно, процесс должен остановиться в некотором входе схемы.

Никакой элемент из открытой пары не будет посещен. Действительно, начальный элемент обхода (т. е. выходной элемент) не может быть открытым, так как открытые элементы реализуют нелинейную функцию двух переменных. Переход из неоткрытого элемента в открытый невозможен по построению алгоритма (шаги (1) и (3) не могут привести в открытый элемент, так как при их совершении такого элемента нет среди вершин, подающихся на текущий элемент; шаг (2) всегда приводит в неособый, а следовательно, в неоткрытый элемент).

Следовательно, найденный алгоритмом вход подается на неоткрытый элемент, т. е. является подходящим.

§ 4. Вспомогательные утверждения

Лемма 2. *Пусть S — схема, реализующая линейную функцию от переменных $x_1, \ldots, x_n$, E — ее элемент, вход x_1 подается на E, вход x_1 не подается на входы элементов, реализующих неконстантные функции и отличных от E. Тогда все вершины схемы, подающиеся на E и отличные от x_1, реализуют константу, а элемент E реализует функцию x_1 или функцию $\overline{x_1}$.*

Доказательство. Пусть V — вершина схемы, подающаяся на E и отличная от x_1 и пусть φ — булева функция, реализуемая этой вершиной (см. рис 2).

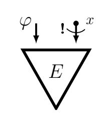

Рис. 2

Пусть функция φ не равна константе. Функция φ не зависит от переменной x (от переменной x могут зависеть лишь элементы, в которые можно попасть из E по ориентированному пути). Пусть σ — знак входа, на который подается функция φ. Подадим на входы $x_2, \ldots, x_n$ такие константы, что функция φ обратится в константу $\overline{\sigma}$. Тогда элемент E будет реализовывать константу ноль. После этого вход x_1 будет подаваться лишь на элементы, реализующие константы, и, следовательно, выходная функция схемы не будет зависеть от x_1. Значит, переменная x_1 забиваема, что противоречит утверждению 3.

Мы доказали, что на вход E не подаются вершины, реализующие функции, отличные от констант (кроме входа x_1). Следовательно, функция, которую реализует E, может зависеть лишь от переменной x_1. Осталось отметить, что эта функция не может быть константой, так как в этом случае выходная функция схемы не зависела бы от x_1.

Лемма 3. *Пусть S — приведенная схема, реализующая линейную функцию от n переменных. Пусть x — вход схемы S, E — ее элемент, x подается на E и E реализует функцию x^σ ($\sigma \in \{0,1\}$). Пусть $\delta = 1$, если $\deg x = 2$, и $\delta = 0$ в противном случае. Тогда выполнено одно из следующих утверждений.*

(1) Существует приведенная схема S', реализующая линейную функцию от n переменных, такая, что $\mu(S) - \mu(S') = 1 - \alpha_F - \delta\alpha_T$.

(2) Существует приведенная схема S', реализующая линейную функцию от $n-1$ переменной, такая, что $\mu(S) - \mu(S') \geqslant 4 + \alpha_F$.

Доказательство. Удалим элемент E, реализующий функцию одной переменной в соответствии с описанным выше преобразованием. При этом сложность схемы уменьшится на 1, а степень входа x увеличится на $\deg E - 1$ (учитываем, что одно ребро, ведущее из x в E, будет удалено при удалении элемента E). Если $\deg E \leqslant 2$, выполнено утверждение (1). Пусть $\deg E \geqslant 3$. Пусть E_1, E_2, E_3 — элементы, на которые в схеме S подавался элемент E. Схема S приведенная, поэтому E подавался на отрицательные входы элементов E_1, E_2 и E_3. Следовательно, после удаления E вход x соединен со входами E_1, E_2 и E_3 одного знака (без ограничения общности, положительными). Подадим константу ноль на вход x. После этого схема будет реализовывать линейную функцию от $n-1$ переменной, а элементы E_1, E_2 и E_3 будут удалены как реализующие константу. Всего из схемы было удалено четыре элемента и один вход степени, большей или равной одному, значит, выполнено утверждение (2).

Лемма 4. *Пусть S — приведенная схема, реализующая линейную функцию от n переменных ($n \geqslant 2$). Пусть S содержит вход x, из которого исходят не менее трех ребер одного знака. Тогда существует приведенная схема S', реализующая линейную функцию от $n-1$ переменной, такая, что $L(S)-L(S') \geqslant 3, F(S)-F(S') \geqslant 3, T(S)-T(S') \geqslant 1$.*

Доказательство. Пусть E_1, E_2 и E_3 — элементы, в которые ведут три ребра одного знака, исходящие из x. Без ограничения общности считаем, что x подается на положительные входы этих элементов.

Подадим на вход x константу ноль. После этого схема будет реализовывать линейную функцию от $n-1$ переменной. Элементы E_1, E_2, E_3 будут удалены как реализующие константу ноль, поэтому сложность схемы уменьшится хотя бы на 3. Значение $F(S)$ уменьшится хотя бы на три (удалено не менее трех ребер, исходящих из x), а значение $T(S)$ — на единицу (удален вход x степени, большей или равной трем).

Лемма 5. *Пусть S — приведенная схема, реализующая линейную функцию от n переменных ($n \geqslant 2$). Тогда существует приведенная схема S', реализующая линейную функцию от $n-k$ переменных ($k \geqslant 1$), такая, что величина $\frac{1}{k}(\mu(S)-\mu(S'))$ больше или равна одной из следующих величин:*

$$3+\alpha_F-\alpha_T; \quad 2\frac{2}{3}+1\frac{2}{3}\alpha_F-\frac{1}{3}\alpha_T; \quad 2.5+2\alpha_F; \quad 2\frac{1}{3}+2\frac{2}{3}\alpha_F+\frac{2}{3}\alpha_T;$$

$$2.25+3\alpha_F+\alpha_T; \quad 2+6\alpha_F+\alpha_T; \quad 2+3.5\alpha_F+1.5\alpha_T; \quad 1+7\alpha_F+5\alpha_T.$$

Доказательство. Доказательство леммы проводится следующим образом. Рассматривается множество случаев в зависимости от взаимного расположения нескольких элементов «в верхней части» схемы S. Для каждого случая (если случай возможен) выбирается один или несколько входов, на которые подаются константы. После подачи констант и удаления элементов, реализующих константы, в некоторых случаях удаляются элементы, реализующие функции одной переменной. В каждом случае изменение меры схемы (на один удаленный вход) оказывается не меньше указанных в формулировке леммы значений.

Если степень удаляемого элемента, реализующего функцию одной переменной, известна, то такой элемент удаляется в соответствии с процедурой, описанной в §2. Если степень такого элемента неизвестна, для его удаления используется лемма 3.

При использовании леммы 3 всегда будем считать, что имеет место пункт (1) этой леммы. Действительно, если имеет место пункт (2), а не пункт (1), то это означает дополнительное удаление одного входа схемы и дополнительное уменьшение меры схемы на не менее чем $3 + 2\alpha_F$. Эта величина больше, чем $3+\alpha_F-\alpha_T$ (одно из значений изменения меры схемы из формулировки леммы 5). Таким образом, если уменьшение меры схемы достаточно, если выполнен пункт (1) леммы 3, оно будет достаточно и если выполнен пункт (2) леммы 3. Удаление элемента с использованием леммы 3 мы будем называть $*$-*удалением*.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — входы схемы S. Будем считать, что для схемы S выполнены следующие предположения.

(I) S не содержит кратных ребер и вершин, реализующих константы.

(II) В S нет одновходовых верхних элементов степени один.

(III) В S нет избыточных ребер.

Предположение (I) не ограничивает общности, так как операции удаления кратных ребер и вершин, реализующих константы, не увеличивают значения $L(S)$, $T(S)$ и $F(S)$, и мы можем удалить такие ребра и вершины, не изменив функцию, реализуемую схемой и не увеличив значение меры схемы.

Предположение (II) может быть принято, так как верхний одновходовой элемент степени один может быть удален (соединив вход схемы, который на него подается с единственным потомком этого элемента) без увеличения $T(S)$ и $F(S)$ и с уменьшением $L(S)$ на единицу. Такое преобразование оставляет схему приведенной.

Предположение (III) принимается, так как удаление избыточных ребер по определению не меняет функцию, реализуемую схемой. Очевидно, что удаление любого ребра оставляет схему приведенной.

Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. В S есть одновходовой верхний элемент E. Пусть x — вход схемы, который подается на E. Учитывая предположение (II), степень E не меньше двух. Пусть E_1 и E_2 — элементы, на которые подается E. Так как схема приведенная, элемент E подается на отрицательные входы элементов E_1 и E_2. Элемент E реализует одну из функций x или $\overline{x}$. Подадим на вход x такую константу, что элемент E будет реализовывать константу один. Тогда элементы E_1 и E_2 будут реализовывать константу ноль и все рассматриваемые элементы будут удалены. Также из схемы будет удален вход x степени один. Снижение меры схемы составит $3+\alpha_F$.

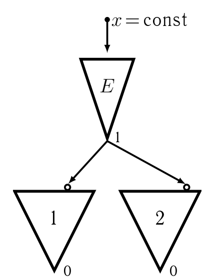

Рис. 3

При рассмотрении последующих случаев принимаем следующее предположение

(IV) В S нет одновходовых верхних элементов.

Случай 2. В S есть вход степени один. Пусть без ограничения общности этот вход — x_1. Пусть элемент E — единственный потомок x_1. Согласно предположению (IV), элемент E не является одновходовым. Пусть V — вершина схемы, подающаяся на E и отличная от x_1.

Согласно лемме 2 вершина V реализует константу. Но это противоречит предположению (I). Следовательно, случай 2 невозможен. Поэтому при рассмотрении последующих случаев принимаем предположение

(V) В S степень каждого входа больше или равна двум.

Случай 3. В S есть вход, из которого исходят 3 и более ребер одного знака. Согласно лемме 4 в этом случае из схемы можно получить схему для линейной функции от $n-1$ переменной, уменьшив значение меры схемы на $3+3\alpha_F+\alpha_T$.

Далее принимаем предположение

(VI) В S из каждого входа исходит не более двух ребер одного знака.

Согласно лемме 1 в схеме найдется хотя бы один подходящий вход. В зависимости от его степени рассмотрим следующие случаи 4–6.

Случай 4. В S есть подходящий вход x_1 степени 4. Учитывая предположение (VI), из x исходят два положительных и два отрицательных ребра. Пусть E_1 — верхний элемент, на который подается x_1. Не ограничивая общности, будем считать, что все входы элемента E_1 положительны (см. утверждение 4). Пусть, помимо элемента E_1, вход x_1 подается на положительный вход элемента E_2 и отрицательные входы элементов E_3 и E_4. Учитывая предположение (IV), элемент E_1 имеет два или более входа.

Случай 4.1. Элемент E_1 имеет три или более входа. Подадим константу 0 на вход x_1. Тогда элементы E_1 и E_2 будут реализовывать константу ноль и будут удалены. Также будет удален вход x_1 степени 4, а степень по крайней мере двух других входов, подающихся на E_1, уменьшится на единицу. Уменьшение меры схемы составит не менее $2+6\alpha_F+\alpha_T$.

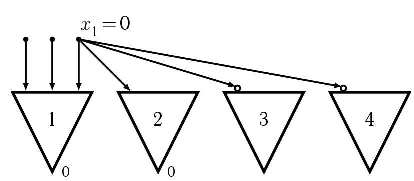

Рис. 4

Случай 4.2. Элемент E_1 — двухвходовой. Пусть x_2 — вход, который подается на элемент E_1. Подадим на вход x_1 константу 1. Тогда элементы E_3 и E_4 будут реализовывать константу ноль, а элемент E_1 — функцию x_2. После удаления элементов, реализующих константы (и входа x_1 степени 4), мера схемы уменьшится не менее чем на $2+4\alpha_F+\alpha_T$. После $*$-удаления элемента E_1 снижение меры схемы (на один забитый вход) составит не менее $3+3\alpha_F$.

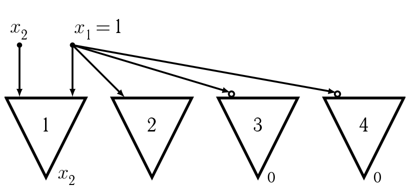

Рис. 5

Случай 5. В S есть подходящий вход x_1 степени 2. Пусть E_1 — верхний элемент, на который подается x_1. Считаем, что все входы E_1 положительны (см. утверждение 4). Пусть x_2 — отличный от x_1 вход схемы, подающийся на E_1. Такой вход существует по предположению (IV) и его степень больше или равна двух по предположению (V). Пусть E_2 — отличный от E_1 потомок входа x_1. Учитывая предложение (IV), на вход E_2 подается хотя бы одна вершина схемы, отличная от x_1. Рассмотрим случаи в зависимости от того, какие вершины подаются на E_2.

Случай 5.1. Существует элемент E_3, отличный от E_1, который подается на E_2. Подадим на вход x_2 константу ноль. Тогда элемент E_1 будет реализовывать константу. Согласно лемме 2, элемент E_3 будут реализовывать константу, а элемент E_2 — функцию, зависящую лишь от x_1. После удаления двух элементов, реализующих константу, будет также удален вход x_2 степени, не меньшей двух, а степень входа x_1 уменьшится на один, т. е. мера схемы уменьшится не менее чем на $2 + 3\alpha_F$. После $*$-удаления элемента E_2 снижение меры схемы составит не менее $3 + 2\alpha_F$.

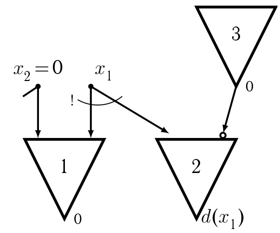

Рис. 6

Случай 5.2. Элемент E_1 подается на вход элемента E_2.

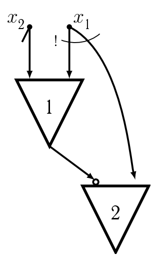

Рис. 7

Случай 5.2.1. Элемент E_2 имеет более, чем два входа. В этом случае в схеме должны существовать вершины, отличные от E_1 и x_1, которые подаются на E_2. Если среди таких вершин есть элементы, то выполнено предположение случая 5.1 (и, как показано выше, утверждение леммы выполнено). Поэтому считаем, что на E_2 помимо E_1 и x_1 подаются какие-то входы схемы.

Случай 5.2.1.1. В схеме найдется вход x_3, отличный от x_2, который подается на E_2. Пусть σ — знак ребра, идущего из x_3 в E_2. Подадим на вход x_2 константу ноль, а на вход x_3 — константу $\overline{\sigma}$. После этого элементы E_1 и E_2 будут реализовывать константу ноль. Учитывая, что вход x_1 подается лишь на E_1 и E_2, получаем, что переменная x_1 забивается переменными x_2 и x_3, что противоречит утверждению 3.

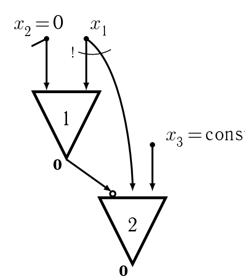

Рис. 8

Случай 5.2.1.2. На элемент E_2 подаются лишь входы x_1, x_2 и элемент E_1. Если элемент E_1 имеет более чем два входа, то на него подается некоторый вход схемы x_3 и, аналогично предыдущему случаю, переменные x_2 и x_3 забивают переменную x_1, что невозможно. Поэтому считаем, что на входы E_1 подаются лишь входы x_1 и x_2.

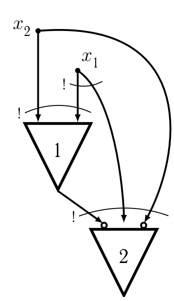

Рис. 9

Вход x_2 подается на отрицательный вход E_2 (в противном случае мы могли бы, подав константу ноль на вход x_2, удалить оба элемента, на которые подается x_1, что означает забиваемость x_1). Пусть σ — знак ребра, идущего из x_1 в E_2. Элемент E_1 реализует функцию $x_1 \& x_2$, а элемент E_2 — функцию $\overline{x_1 x_2} x_1^{\sigma} \overline{x_2} = x_1^{\sigma} \overline{x_2}$. Легко видеть, что при удалении ребра, ведущего из E_1 в E_2, функция, реализуемая элементом E_2, не меняется. Следовательно, это ребро является избыточным, что противоречит предположению (III). Рассматриваемый случай невозможен.

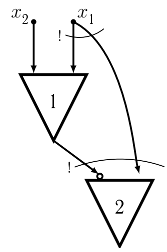

Рис. 10

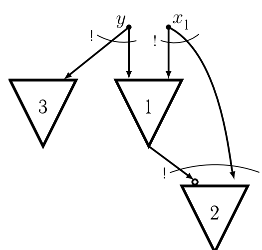

Рис. 11

С л у ч а й 5.2.2. Элемент E_2 имеет ровно два входа. Считаем, что степень каждого входа, подаваемого на E_1, равна двум или трем (если среди входов, подающихся на E_1, есть вход степени четыре или более, для схемы выполнено предположение случая 4 и утверждение леммы выполнено).

С л у ч а й 5.2.2.1. Среди входов, подаваемых на E_1, найдется вход y степени ровно два, отличный от x_1. Пусть E_3 — отличный от E_1 потомок y. Согласно предположению (IV), на вход элемента E_3 должна подаваться какая-то отличная от y вершина схемы. Это может быть вход схемы, элемент E_1 или элемент, отличный от E_1.

С л у ч а й 5.2.2.1.1. На вход E_3 подается элемент, отличный от E_1. Этот случай рассматривается аналогично случаю 5.1.

С л у ч а й 5.2.2.1.2. На вход E_3 подается вход схемы z. Вход z отличен от x_1, так как степень x_1 равна двум. Подавая константы на входы x_1 и z, мы можем удалить элементы E_1 и E_3. Это означает забиваемость переменной y и противоречит утверждению 3.

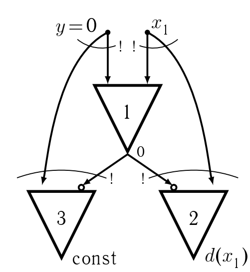

Рис. 12

С л у ч а й 5.2.2.1.3. На вход E_3 подаются лишь элемент E_1 и вход y. Подадим константу ноль на вход y. После этого элементы E_1 и E_3 будут реализовывать константы. Элемент E_2 будет реализовывать функцию x_1 или $\overline{x_1}$ (см. лемму 2). После удаления двух элементов, реализующих константы, будет удален вход y степени 2, а степень входа x_1 уменьшится на 1. Снижение меры схемы составит не менее $2+3\alpha_F$. После $*$-удаления элемента E_2 снижение меры схемы составит не менее $3+2\alpha_F$.

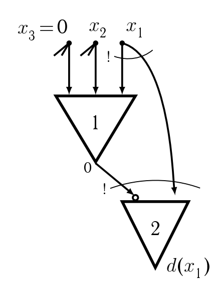

Рис. 13

С л у ч а й 5.2.2.2. Все входы, подаваемые на элемент E_1, кроме входа x_1, имеют степень три.

С л у ч а й 5.2.2.2.1. Элемент E_1 имеет три или более входа. Пусть x_3 — вход схемы, отличный от x_1 и x_2 и подающийся на E_1.

Подадим константу ноль на вход x_3. После этого элемент E_1 будет реализовывать константу, а элемент E_2 — функцию, зависящую лишь от переменной x_1. После удаления элемента E_1 будет также удален вход x_3 степени 3, степень входа x_2 уменьшится с 3 до 2, а степень входа x_1 уменьшится с 2 до 1; общее снижение меры схемы составит не менее $1+5\alpha_F+2\alpha_T$. После $*$-удаления элемента E_1 снижение меры схемы составит не менее $2+4\alpha_F+2\alpha_T$.

С л у ч а й 5.2.2.2.2. Элемент E_1 имеет ровно два входа. Подающийся на него вход x_2 имеет степень три по предположению случая 5.2.2.2. Согласно предположению (VI) из x_2 исходит по крайней мере одно отрицательное ребро.

С л у ч а й 5.2.2.2.2.1. Из x_2 исходит ровно одно отрицательное ребро. Пусть E_3, E_4 — отличные от E_1, E_2 элементы, на которые подается x_2. Пусть x_2 подается на положительный вход E_3 и на отрицательный вход E_4.

Подадим константу ноль на вход x_2. Тогда элементы E_1 и E_3 будут реализовывать константу ноль, а элемент E_2 — функцию, зависящую лишь от переменной x_1. После удаления двух элементов, реализующих константы, будет также удален вход x_2 степени три, а степень входа x_1 уменьшится на один; общее снижение меры схемы составит не менее $2 + 4\alpha_F + \alpha_T$. После $*$-удаления элемента E_2 снижение меры схемы составит не менее $3 + 3\alpha_F + \alpha_T$.

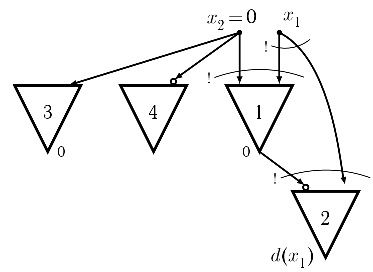

Рис. 14

С л у ч а й 5.2.2.2.2.2. Из x_2 исходят ровно два отрицательных ребра. Пусть E_3, E_4 — элементы, на отрицательные входы которых подается вход x_2.

Подадим константу один на вход x_2. После этого элементы E_2, E_3 будут реализовывать константу ноль, а элемент E_1 — функцию x_1. После удаления элементов E_2, E_3 будет также удален вход x_2 степени три; снижение меры схемы составит $2 + 3\alpha_F + \alpha_T$. После $*$-удаления элемента E_1 получаем снижение меры схемы не менее $3 + 2\alpha_F$.

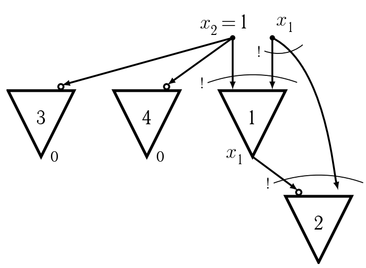

Рис. 15

С л у ч а й 5.3. На входы элемента E_2 подаются лишь входы схемы. Учитывая предположение (IV), получаем, что на вход E_2 должен подаваться хотя бы один вход схемы, отличный от x_1. Это может быть вход x_2 или вход, отличный от x_2.

С л у ч а й 5.3.1. В схеме найдется вход x_3, отличный от x_1 и x_2, который подается на вход E_2.

Подав константу ноль на вход x_2 и подходящую константу на вход x_3, мы можем сделать функции, реализуемые элементами E_1 и E_2 константами. Функция, реализуемая схемой после этого, не будет зависеть от x_1, т. е. переменная x_1 забиваема, что противоречит утверждению 3.

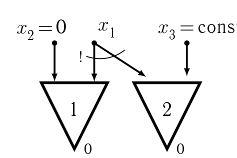

Рис. 16

С л у ч а й 5.3.2. На элемент E_2 подаются лишь входы x_1 и x_2. Вход x_2 подается на отрицательный вход элемента E_2 (в противном случае подача константы ноль на вход x_2 забивала бы элементы E_1 и E_2, из чего следовала бы забиваемость переменной x_1). На входы E_1 подаются лишь входы схемы x_1 и x_2 (в противном случае приходим к противоречию аналогично случаю 5.3.1).

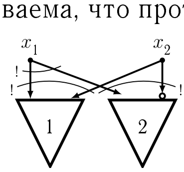

Рис. 17

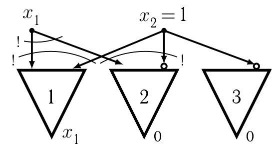

Рис. 18

Случай 5.3.2.1. Степень x_2 больше двух. Пусть E_3 — отличный от E_1 и E_2 потомок x_2. Не ограничивая общности дальнейших рассуждений, считаем, что x_2 подается на отрицательный вход E_3. Подадим константу один на вход x_2. Тогда элементы E_2 и E_3 будут реализовывать константы, а элемент E_1 — функцию, зависящую лишь от x_1. После удаления элементов E_2 и E_3 будет удален вход x_2 степени 3, а степень входа x_1 уменьшится на 1; общее снижение меры схемы составит не менее $2+4\alpha_F+\alpha_T$. После $*$-удаления элемента E_1 снижение меры схемы составит не менее $3+3\alpha_F+\alpha_T$.

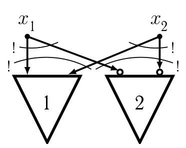

Рис. 19

Случай 5.3.2.2. Степень x_2 равна двум. Тогда вход x_1 подается на отрицательный вход элемента E_2 (в противном случае подача константы ноль на вход x_1 забивала бы элементы E_1 и E_2, из чего следовала бы забиваемость переменной x_2).

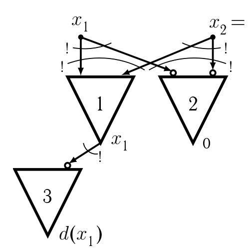

Рис. 20

Случай 5.3.2.2.1. Степень хотя бы одного из элементов E_1, E_2 равна одному. Без ограничения общности считаем, что $\deg E_1 = 1$. Пусть E_3 — единственный потомок E_1. Подадим константу один на вход x_2. После этого E_2 будет реализовывать константу ноль, а E_1 — функцию x_2. Удалим эти два элемента (для удаления E_1 соединяем вход x_1 со входом E_3). Всего было удалено два элемента, вход x_2 степени два, и степень x_1 уменьшилась с двух до одного; снижение меры схемы составило $2+3\alpha_F$.

Так как в новой схеме степень x_1 равна одному, согласно лемме 2 элемент E_3 реализует функцию, зависящую лишь от x_1. После $*$-удаления элемента E_3 снижение меры схемы составит не менее $3+2\alpha_F$.

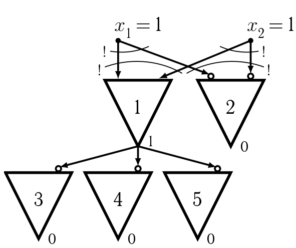

Рис. 21

Случай 5.3.2.2.2. Степень хотя бы одного из элементов E_1, E_2 больше или равна трем. Без ограничения общности считаем, что $\deg E_1 \geqslant 3$. Пусть E_3, E_4, E_5 — элементы-потомки E_1. Так как схема приведенная, E_1 подается на отрицательные входы E_3, E_4 и E_5. Подадим константы на входы схемы: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Тогда элемент E_1 будет реализовывать константу один, а элементы E_2, E_3, E_4 и E_5 — константу ноль. После удаления этих элементов (и двух входов степени два) снижение меры схемы (на один забитый вход) составит не менее $2.5+2\alpha_F$.

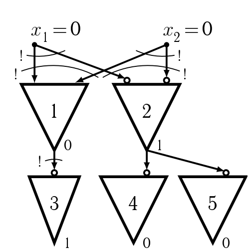

Рис. 22

Случай 5.3.2.2.3. Степень каждого из элементов E_1, E_2 равна двум. Отметим, что в этом случае элементы E_1, E_2 образуют особую пару.

Случай 5.3.2.2.3.1. Среди потомков элементов E_1, E_2 есть одновходовые элементы. Пусть, без ограничения общности, E_1 подается на вход одновходового элемента E_3. Пусть потомки E_2 есть элементы E_4 и E_5. Так как схема приведенная, E_2 подается на отрицательные входы E_4, E_5. Подадим константы на входы схемы: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. После этого элементы E_1, E_2, E_3, E_4 и E_5 будут удалены как реализующие константы. Снижение меры схемы (на один забитый вход) составит не менее $2.5 + 2\alpha_F$.

Случай 5.3.2.2.3.2. Элементы E_1, E_2 не подаются на одновходовые элементы. Рассмотрение этого случая достаточно сложно технически. Полный разбор случая 5.3.2.2.3.2 приводится в отдельном параграфе после доказательства теоремы.

Случай 6. Все подходящие входы имеют степень 3. Пусть x_1 — подходящий вход, E_1 — верхний элемент. Из предположения (IV) следует, что на элемент E_1 подается не менее двух входов схемы. Пусть X — множество входов схемы, подающихся на E_1. Все они являются подходящими (элемент E_1 не является особым, так как на него подается вход степени 3). Следовательно, степень всех входов в X равна 3. Считаем, что все входы в X подаются на положительные входы E_1 (см. утверждение 4). Учитывая предположение (VI), из каждого входа из X исходят либо одно положительное и два отрицательных ребра либо одно отрицательное и два положительных ребра.

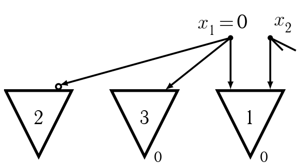

Рис. 23

Случай 6.1. Хотя бы из одного входа из X исходит одно отрицательное и два положительных ребра. Пусть, без ограничения общности, этот вход — x_1. Пусть E_2, E_3 — потомки x_1, причем x_1 подается на отрицательный вход E_2 и положительный вход E_3. Пусть x_2 — отличный от x_1 вход из X.

Подадим на вход x_1 константу ноль. Элементы E_1 и E_3 будут реализовывать константу, после их удаления будет удален вход x_1 степени 3, а степень входа x_2 уменьшится с 3 до 2; снижение меры схемы составит не менее $2 + 4\alpha_F + 2\alpha_T$.

Случай 6.2 Из каждого входа из X исходят одно положительное и два отрицательных ребра.

Случай 6.2.1. Некоторые два входа из X подаются на входы одного и того же элемента, отличного от E_1. Пусть x_1 и x_2 — такие входы. Пусть E_2, E_3 — элементы, на отрицательные входы которых подается x_1 и пусть x_2 также подается на E_2. Подадим константу один на вход x_1. После удаления элементов E_2, E_3, реализующих константу, будет удален вход x_1 степени 3, а степень входа x_2 уменьшится с 3 до 2; снижение меры схемы составит не менее $2+4\alpha_F+2\alpha_T$.

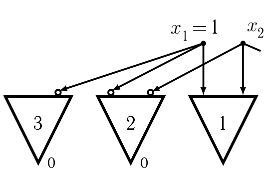

Рис. 24

Случай 6.2.2. Никакие два элемента из X не имеют общих потомков, отличных от E_1.

Случай 6.2.2.1. Число входов в X равно двум, трем или четырем. Подадим константу один на все входы в X. Для каждого входа из X в схеме найдутся два его уникальных потомка, которые соединены с ним отрицательным ребром и будут удалены, также мы удалим элемент E_1, реализующий

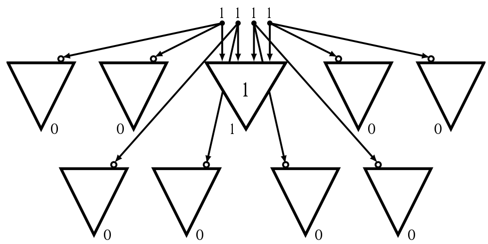

Рис. 25

константу один и все входы из X, каждый из которых имеет степень 3. Общее снижение меры схемы (на один удаленный вход) составит не менее $2{,}25+3\alpha_F+\alpha_T$.

Случай 6.2.2.2. Число входов в X больше или равно пяти. Подадим константу ноль на вход x_1. Элемент E_1 будет реализовывать константу ноль, после его удаления будет удален вход x_1 степени 3, а степень не менее чем четырех других входов из X уменьшится с 3 до 2. Общее снижение меры схемы составит не менее $1+7\alpha_F+5\alpha_T$.

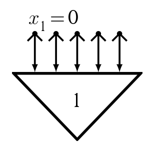

Рис. 26

Рассмотрение этого случая завершает доказательство леммы 5.

§ 5. Доказательство теоремы

Теорема. *Пусть S — схема, реализующая линейную функцию от n переменных. Тогда* $L(S)\geqslant 2\frac{1}{9}n-2\frac{11}{18}$.

Доказательство. Преобразуем схему S в приведенную схему S_1, реализующую ту же функцию, согласно утверждению 1. Верно, что $L(S)-L(S_1)\geqslant 0$.

Схема S_1 может содержать входы, соединенные с тремя или более входами элементов одного знака. Согласно лемме 4 каждый такой вход может быть удален с уменьшением сложности не менее, чем на три. Пусть S_2 — схема, которая получается из S_1 после последовательного применения леммы 4. В схеме S_2 нет входов, которые подаются на три и более входа элемента одного знака, схема S_2 реализует линейную функцию и является приведенной. Пусть n_2 — число входов схемы S_2. Верно, что

$$L(S)-L(S_2)\geqslant 3(n-n_2), \tag{1}$$

$$F(S_2)\leqslant 4n_2, \quad T(S_2)\leqslant n_2. \tag{2}$$

К схеме S_2 будем последовательно применять лемму 5, удаляя входы и уменьшая значение меры схемы не менее чем на δ на каждый удаленный вход, где

$$\delta\geqslant\min(3+\alpha_F-\alpha_T;\ 2\tfrac{2}{3}+1\tfrac{2}{3}\alpha_F-\tfrac{1}{3}\alpha_T;\ 2{,}5+2\alpha_F;\ 2\tfrac{1}{3}+2\tfrac{2}{3}\alpha_F+\tfrac{2}{3}\alpha_T;$$

$$2{,}25+3\alpha_F+\alpha_T;\ 2+6\alpha_F+\alpha_T;\ 2+3{,}5\alpha_F+1{,}5\alpha_T;\ 1+7\alpha_F+5\alpha_T),$$

до тех пор, пока число входов схемы не станет меньше или равно одному. Поэтому

$$\mu(S_2) = L(S_2) + \alpha_F F(S_2) + \alpha_T T(S_2) \geqslant \delta(n_2 - 1).$$

Учитывая неравенства (2),

$$L(S_2) \geqslant (\delta - 4\alpha_F - \alpha_T)n_2 - \delta.$$

Выберем значения параметров, дающие наибольшую нижнюю оценку на сложность S_2, решив следующую задачу линейного программирования:

$$\text{максимизировать}\quad \delta - 4\alpha_F - \alpha_T$$

$$\text{при условиях}\quad \begin{cases} \delta \leqslant \min(3 + \alpha_F - \alpha_T,\ 2\frac{2}{3} + 1\frac{2}{3}\alpha_F - \frac{1}{3}\alpha_T,\ 2.5 + 2\alpha_F, \\ \qquad 2\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3}\alpha_F + \frac{2}{3}\alpha_T,\ 2.25 + 3\alpha_F + \alpha_T, \\ \qquad 2 + 6\alpha_F + \alpha_T,\ 2 + 3.5\alpha_F + 1.5\alpha_T, \\ \qquad 1 + 7\alpha_F + 5\alpha_T), \\ \delta,\ \alpha_F,\ \alpha_T \geqslant 0. \end{cases}$$

Зафиксируем значения параметров, соответствующие оптимальному решению задачи:

$$\delta = 2\frac{11}{18}, \quad \alpha_F = \frac{1}{18}, \quad \alpha_T = \frac{5}{18}.$$

При выбранных параметрах нижняя оценка на сложность S_2 примет следующий вид:

$$L(S_2) \geqslant 2\frac{1}{9}n_2 - 2\frac{11}{18}.$$

Тогда, учитывая (1),

$$L(S) \geqslant 3(n - n_2) + L(S_2) \geqslant 3(n - n_2) + 2\frac{1}{9}n_2 - 2\frac{11}{18} \geqslant 2\frac{1}{9}n - 2\frac{11}{18}.$$

Теорема доказана.

§ 6. Разбор случая 5.3.2.2.3.2 леммы 5

Все предположения и обозначения, введенные при доказательстве леммы 5, сохраняются. Для упрощения записи случай 5.3.2.2.3.2 будем обозначать как случай А.

Случай А. Элементы E_1, E_2 не подаются на одновходовые элементы. Согласно предположению случая 5, x_1 — подходящий вход. Следовательно, особая пара элементов E_1, E_2 не является открытой. Следовательно, на входы одного из потомков элементов E_1 и E_2 не подаются неособые элементы. Пусть этот потомок — элемент E_3, без ограничения общности считаем, что E_3 является потомком E_1. Пусть E_4 — второй потомок E_1.

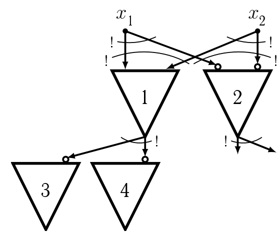

Рис. 27

На вход E_3 могут подаваться лишь особые элементы и входы схемы. Без ограничения общности считаем, что все входы схемы, подающиеся на элемент E_3, подаются на его положительный вход (см. утверждение 4).

С л у ч а й А.1. На вход E_3 подается вход x_3 степени 2. Пусть E_5 — отличный от E_3 потомок x_3 (E_5 отличен от E_4, так как в противном случае подача константы один на входы x_1, x_2 делала бы выходную функцию схемы независимой от переменной x_3). Подадим константы на входы схемы: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. После этого элемент E_1 будет реализовывать константу один, элементы E_2, E_3 и E_4 — константу ноль, а элемент E_5 — функцию, зависящую лишь от x_3 (см. лемму 2). После удаления элементов, реализующих константы снижение меры схемы составит не менее $4 + 5\alpha_F$, после $*$-удаления элемента E_5 снижение меры схемы (на один забитый вход) составит не менее $2{,}5 + 2\alpha_F$.

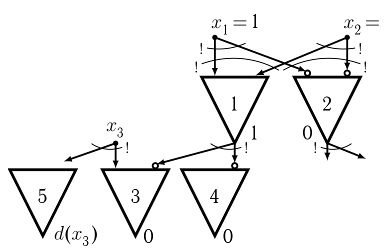

Рис. 28

С л у ч а й А.2. На вход E_3 подается вход x_3, из которого исходит более чем одно положительное ребро. Пусть E_5 — отличный от E_3 элемент, на положительный вход которого подается вход x_3 (E_5 отличен от E_4, так как в противном случае подача константы один на вход x_1 и константы ноль на вход x_3 делала бы выходную функцию схемы независимой от x_2).

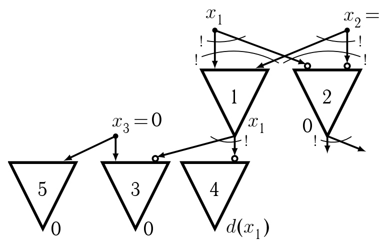

Рис. 29

Подадим константы на входы схемы: $x_2=1$, $x_3=0$. Элементы E_2, E_3 и E_5 будут реализовывать константу ноль, а элемент E_1 — функцию x_1. После удаления этих элементов будут удалены входы x_2 степени 2 и x_3 степени, не меньшей 2, а степень входа x_1 уменьшится на один (и станет равна 1); общее снижение меры схемы составит $4+5\alpha_F$. В полученной схеме вход x_1 подается лишь на элемент E_3, поэтому по лемме 2 элемент E_3 реализует функцию, зависящую лишь от x_1. После $*$-удаления E_3 снижение меры схемы (на один забитый вход) составит не менее $2{,}5+2\alpha_F$.

Случай A.3. На вход E_3 не подаются входы степени 2 и входы, из которых исходит более одного положительного ребра. Учитывая предположения (VI) и (V), получаем, что степень любого входа, подающегося на E_3, равна трем и из любого такого входа исходит одно положительное и два отрицательных ребра.

Случай A.3.1 На вход E_3 не подаются элементы, отличные от E_1. Учитывая предположение случая A, на E_3 должны подаваться какие-то вершины схемы, отличные от E_1. Очевидно, в рассматриваемом случае это должны быть входы схемы.

Случай A.3.1.1. На вход E_3 подается ровно один вход схемы (вход x_3). Подадим на вход x_1 константу ноль. Элемент E_1 будет реализовывать константу ноль, элемент E_2 — функцию, зависящую лишь от x_2, а элемент E_3 — функцию, зависящую лишь от x_3. После удаления элемента E_1 будет удален вход x_1 степени два, а степень входа x_2 уменьшится на один; снижение меры схемы составит не менее $1+3\alpha_F$. Удалим элемент E_2; после этого степень x_2 увеличится на один и станет равна двум (напомним, что $\deg E_2 = 2$). Общее снижение меры схемы составит $2 + 2\alpha_F$. Наконец, $*$-удалим E_3. Общее снижение меры схемы (на один забитый вход) составит не менее $3+\alpha_F-\alpha_T$.

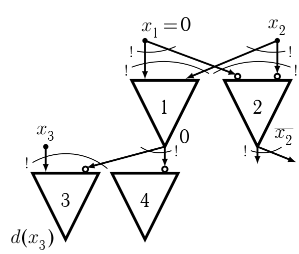

Рис. 30

Случай A.3.1.2. На E_1 подается ровно два входа схемы — входы x_3 и x_4. Ни один из входов, подающихся на E_3, не подается на E_4. Действительно, пусть, скажем, вход x_3 подается на E_3 и E_4. Мы можем, подав подходящие константы на входы x_2, x_3 и x_4, удалить элементы E_2, E_3 и E_4 как реализующие константы. После этого x_1 будет подаваться лишь на элемент E_1 степени ноль, что означает забиваемость переменной x_1. Пусть E_5, E_6 — элементы, на отрицательные входы которых подается вход x_3 (такие элементы существуют, так как $\deg x_3 = 3$ и из x_3 выходит лишь одно положительное ребро; см. случай A.3).

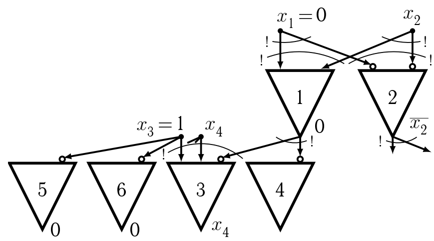

Рис. 31

Подадим константы на входы схемы: $x_1=0$, $x_3=1$. После этого элементы E_1, E_5 и E_6 будут реализовывать константу ноль, а элементы E_2 и E_3 — функции $\overline{x_2}$ и x_4 соответственно. После удаления элементов, реализующих константы, будут удалены вход x_1 степени 2 и вход x_3 степени 3, а степень x_2 уменьшится с 2 до 1; общее снижение меры схемы составит не менее $3+6\alpha_F+\alpha_T$. Удаляя элемент E_2 (напомним, $\deg E_2=2$) и $*$-удаляя элемент E_4, получаем, что общее снижение меры схемы (на один забитый вход) составит не менее $2{,}5+2\alpha_F+0{,}5\alpha_T$.

Случай A.3.1.3. На E_3 подается не менее трех входов схемы. Подадим константу один на входы x_1 и x_2. После этого элементы E_1, E_2, E_3 и E_4 будут удалены как реализующие константы, также будут удалены входы x_1 и x_2 степени 2, а степень не менее чем трех входов, подаваемых на E_3, уменьшится с 3 до 2. Общее снижение меры схемы (на один забитый вход) составит не менее $2+3{,}5\alpha_F+1{,}5\alpha_T$.

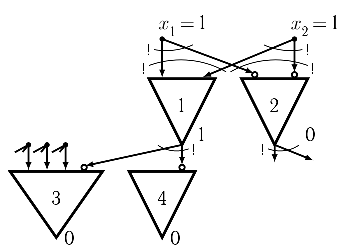

Рис. 32

Случай A.3.2. На вход E_3 подается элемент, отличный от E_1. Учитывая выбор элемента E_3 (см. случай A), такой элемент должен быть особым. Это может быть элемент E_2 или особый элемент, отличный от E_1 и E_2.

Случай A.3.2.1. Элемент E_2 подается на E_3, и на входы E_3 не подаются элементы, отличные от E_1 и E_2. В этом случае на входы E_3, помимо элементов E_1, E_2, могут подаваться лишь входы схемы.

Случай A.3.2.1.1. На входы E_3 подаются лишь элементы E_1, E_2. Подадим константу один на вход x_1. Элемент E_2 будет реализовывать константу ноль, а элементы E_1 и E_3 — функции x_2 и $\overline{x_2}$ соответственно. После удаления элементов E_1 и E_2 (и входа x_1 степени 2) степень входа x_2 останется равной 2, а снижение меры схемы составит $2+2\alpha_F$. После $*$-удаления E_3 получаем снижение меры схемы (на один забитый вход) не менее $3+\alpha_F-\alpha_T$.

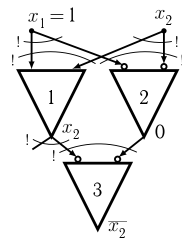

Рис. 33

Случай А.3.2.1.2. На вход E_3 подается вход схемы x_3. Без ограничения общности (см. утверждение 4) x_3 подается на положительный вход E_3.

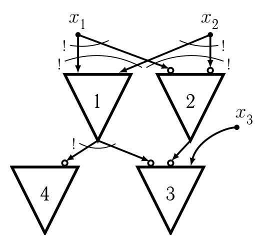

Рис. 34

Случай А.3.2.1.2.1. На вход E_4 подается элемент E_5, отличный от E_1–E_3. Подадим константы на входы схемы: $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. После этого элементы E_2 и E_3 будут реализовывать константу ноль, а E_1 — функцию x_1. После удаления этих элементов будут удалены вход x_2 степени 2, вход x_3 степени, не меньшей чем 2, а степень входа x_1 станет равна 1. Так как в полученной схеме E_4 — единственный потомок x_1, согласно лемме 2 элемент E_5 реализует константу, а элемент E_4 — функцию, зависящую лишь от x_1. После $*$-удаления элемента E_4 и элемента E_5 получаем общее снижение меры схемы (на один забитый вход) не менее $2{,}5+2\alpha_F$.

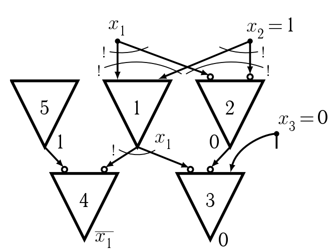

Рис. 35

Случай А.3.2.1.2.2. На вход E_4 не подаются элементы, отличные от E_1–E_3. На вход E_4 должна подаваться хотя бы одна вершина схемы, отличная от E_1, в силу предположения случая А. На вход E_4 не могут подаваться входы схемы, отличные от x_3 (если бы на E_4 подавался отличный от x_1–x_3 вход x_4, мы могли бы сделать выходную функцию схемы не зависящей от x_1, подав подходящие константы на входы x_2–x_4).

Случай А.3.2.1.2.2.1. На вход E_4 подается вход x_3. Учитывая предположение случая А.3, x_3 подается на отрицательный вход E_4 и существует элемент E_5, отличный от $E_1 - E_4$, на отрицательный вход которого также подается x_3. Подадим на входы x_1 и x_3 константу один. Элементы E_2, E_4 и E_5 будут реализовывать константу ноль, а элемент E_1 — функцию x_2; после их удаления будут удалены вход x_1 степени 2 и вход x_3 степени 3, а степень x_2 уменьшится с 2 до 1. Общее снижение меры схемы составит $4+6\alpha_F+\alpha_T$.

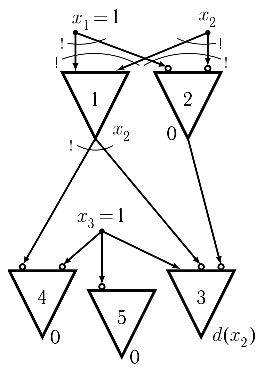

Рис. 36

Для полученной схемы из леммы 2 получаем, что элемент E_3 реализует функцию, зависящую лишь от x_2; $*$-удаляя его по лемме 3, получаем общее снижение меры схемы (на один забитый вход) не менее $2{,}5+2{,}5\alpha_F+0{,}5\alpha_T$.

Случай А.3.2.1.2.2.2. Вход x_3 не подается на E_4. Тогда на E_4 помимо E_1 подается либо лишь E_2, либо лишь E_3, либо лишь E_2 и E_3 (см. случай А.3.2.1.2.2.).

Случай А.3.2.1.2.2.2.1. На E_4 подаются лишь элементы E_1, E_2. Данный случай рассматривается аналогично случаю А.3.2.1.1.

Случай А.3.2.1.2.2.2.2. На E_4 подаются лишь элементы E_1, E_3. Пусть E_5 — элемент-потомок E_4 (такой элемент существует, так как E_4 реализует нелинейную функцию и, следовательно, не является выходным). Напомним, что $\deg x_3 = 3$ (см. случай А.3). Подадим константу ноль на входы x_1, x_3. Элементы E_1, E_3, E_4 и E_5 будут реализовывать константу, а элемент E_2 — функцию $\overline{x_2}$. После удаления константных элементов и $*$-удаления элемента E_2 получаем снижение меры схемы (на один забитый вход) не менее $2{,}5+2{,}5\alpha_F+0{,}5\alpha_T$.

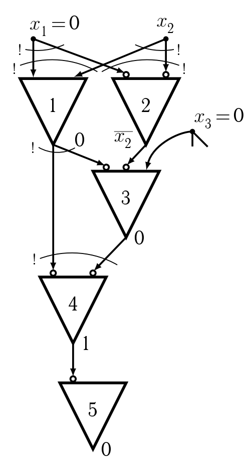

Рис. 37

Случай А.3.2.1.2.2.2.3. На E_4 подаются лишь элементы E_1, E_2, E_3 (см. рис. 38).

Случай А.3.2.1.2.2.2.3.1. На E_3 подается ровно один вход схемы — вход x_3. Элемент E_4 реализует функцию $(x_1 \oplus x_2) \& \overline{(x_1 \oplus x_2) \& x_3}$, которая обращается в тождественный ноль при $x_3 = 1$. Пусть E_5, E_6 — отличные от E_3 потомки x_3; вход x_3 подается на их отрицательные входы (см. случай А.3). Подадим на вход x_3 константу один. Элементы E_4, E_5 и E_6 будут реализовывать константу ноль, после их удаления снижение меры схемы составит не менее $3+3\alpha_F+\alpha_T$.

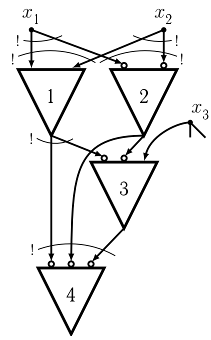

Рис. 38

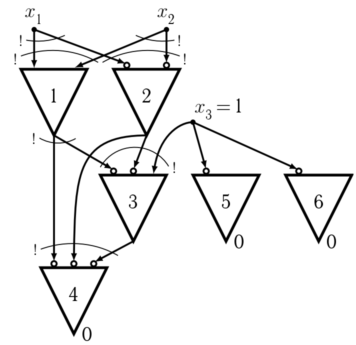

Рис. 39

Случай A.3.2.1.2.2.2.3.2. На E_3 подаются ровно два входа схемы — входы x_3 и x_4. Элемент E_4 реализует функцию $(x_1 \oplus x_2)\&\overline{(x_1 \oplus x_2)\&x_3\&x_4}$, которая обращается в тождественный ноль при $x_3 = 1, x_4 = 1$. Степень входов x_3, x_4 равна трем, каждый из этих входов подается на два отрицательных входа элементов (см. случай A.3). Среди отличных от E_3 потомков x_3, x_4 найдутся по крайней мере три различных элемента (если бы x_3 и x_4 подавались на вход элемента E_3 и еще двух одних и тех же элементов, при подаче константы один на входы x_1, x_2, x_3 выходная функция схемы становилась бы независимой от x_4). Пусть E_5, E_6, E_7 — различные отличные от E_3 потомки x_3, x_4.

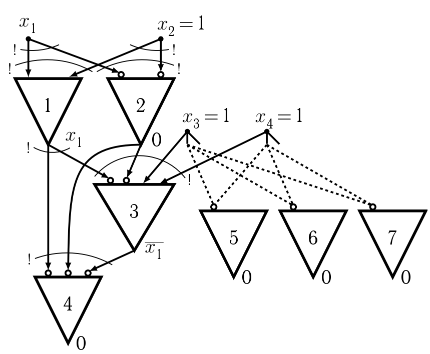

Рис. 40

Подадим константу один на входы x_2, x_3 и x_4. Элементы E_2, E_4, E_5, E_6, E_7 будут реализовывать константу ноль, элемент E_1 — функцию x_1, а элемент E_3 — функцию $\overline{x_1}$. После удаления элементов, реализующих константы, и элемента E_1, будут удалены вход x_2 степени 2, два входа x_3, x_4 степени 3, а степень входа x_1 уменьшится с 2 до 1; общее снижение меры схемы составит $6 + 9\alpha_F + 2\alpha_T$. После $*$-удаления E_3 получаем снижение меры схемы (на один забитый вход) не менее $2\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3}\alpha_F + \frac{2}{3}\alpha_T$.

Случай A.3.2.1.2.2.2.3.3. На E_3 подается не менее трех входов схемы. Степень каждого входа, подаваемого на E_3 равна трем (см. случай A.3). Подадим константу один на входы x_1, x_2. Элемент E_1 будет реализовывать константу один, а элементы E_2, E_3, E_4 — константу ноль; после их удаления будут удалены два входа x_1, x_2 степени 2, а степень не менее чем трех входов, подающихся на E_3, уменьшится с 3 до 2. Снижение меры схемы (на один забитый вход) составит $2+3{,}5\alpha_F+1{,}5\alpha_T$.

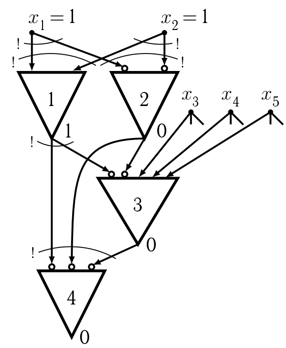

Рис. 41

Случай А.3.2.2. На вход E_3 подается особый элемент E_5, отличный от E_1, E_2. Пусть E_6 — особый элемент, образующий особую пару с элементом E_5. Пусть x_3, x_4 — входы схемы, подающиеся на элементы E_5, E_6. Без ограничения общности считаем, что x_3, x_4 подаются на положительные входы E_5 (см. утверждение 4). Тогда x_3, x_4 подаются на отрицательные входы E_6 (иначе одна из переменных забивала бы другую).

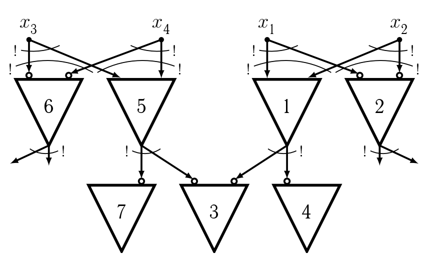

Рис. 42

Так как элемент E_5 является особым, степень E_5 равна двум. Элемент E_5 не может подаваться на E_4 (в этом случае подача единицы на входы x_1, x_3, x_4 делала бы выходную функцию схемы не зависящей от x_2). Поэтому найдется элемент E_7, отличный от E_1−E_6 и являющийся потомком E_5.

Случай А.3.2.2.1. На вход E_3 подается два или более входа схемы. Подадим константу один на входы x_1, x_2, x_3. Элементы E_1, E_2, E_3, E_4, E_6 будут реализовывать константу, а элемент E_5 — функцию x_4. После удаления этих элементов будет удалено три входа x_1, x_2, x_3 степени 2, степень не менее чем двух входов, подаваемых на E_3, уменьшится с 3 до 2, а степень x_4 уменьшится с 2 до 1, общее снижение меры схемы составит не менее $6+9\alpha_F+2\alpha_T$. Так как степень x_4 станет равна одному, из леммы 2 следует, что E_7 станет реализовывать функцию, зависящую лишь от x_4. Производя $*$-удаление E_7, получаем снижение меры схемы (на один забитый вход) не менее $2\frac{1}{3}+2\frac{2}{3}\alpha_F+\frac{2}{3}\alpha_T$.

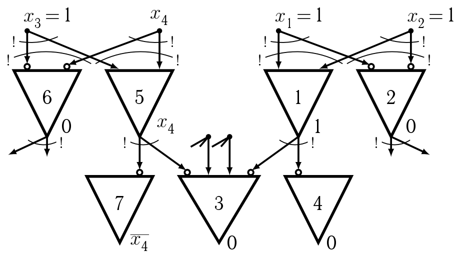

Рис. 43

Случай А.3.2.2.2. На вход E_3 подается не более одного входа схемы.

Случай А.3.2.2.2.1 На вход E_3 подается более двух элементов. Все элементы, подающиеся на E_3, — особые (см. случай А). Поэтому на E_3, помимо элементов E_1 и E_5, может подаваться элемент E_2, или элемент E_6, или особый элемент, отличный от E_1–E_4.

Случай А.3.2.2.2.1.1. На вход E_3 подается особый элемент E_8, отличный от E_1–E_4. Пусть E_9 — элемент, образующий с E_8 особую пару, x_5, x_6 — входы схемы, подающиеся на E_8, E_9, а E_{10} — второй потомок E_8 (E_{10} отличен от E_3, E_7 из соображений забиваемости переменных, аналогично предыдущему случаю). Без ограничения общности считаем, что x_5, x_6 подаются на положительные входы E_8 и на отрицательные входы E_9.

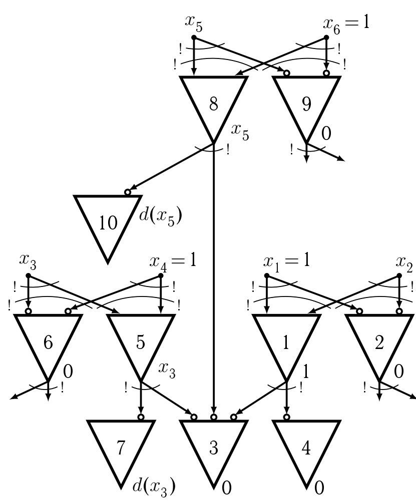

Рис. 44

Подадим константу один на входы x_1, x_2, x_4, x_6. Элементы $E_1, E_2, E_3, E_4, E_6, E_9$ будут реализовывать константы, а элементы E_5 и E_8 — функции x_3 и x_5 соответственно. После удаления этих элементов снижение меры схемы составит не менее $8+10\alpha_F$, а степень входов x_3, x_5, станет равна одному. Учитывая лемму 2, из этого следует, что элементы E_7, E_{10} реализуют функции, зависящие лишь от x_3, x_5 соответственно; $*$-удаляя эти элементы, получаем снижение меры схемы (на один забитый вход) не менее $2{,}5+2\alpha_F$.

Случай А.3.2.2.2.1.2. На вход E_3 подается элемент E_2 или элемент E_6 (или оба элемента E_2, E_6), и на вход E_3 не подаются элементы, отличные от E_1–E_4. На рисунках, сопровождающих подслучаи этого случая, некоторые ребра будут изображаться пунктиром. Если две вершины V и W соединены пунктирным ребром, это означает, что вершина V, быть может, подается на вершину W.

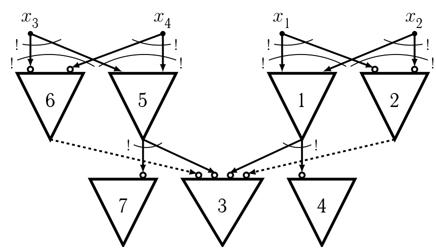

Рис. 45

Случай А.3.2.2.2.1.2.1. Существует элемент E_8, отличный от E_1–E_7, который подается на вход E_4 или на вход E_7. Без ограничения общности E_8 подается на вход E_4. Подадим константу один на входы x_1, x_3, x_4. Элементы E_2–E_6 будут реализовывать константы, а элемент E_1 — функцию x_1. После удаления этих элементов степень входа x_1 станет равна одному, поэтому по лемме 2 элемент E_8 будет реализовывать константу, а элемент E_4 — функцию, зависящую лишь от x_1. Удаляя эти два элемента (элемент E_4 $*$-удаляется), получаем общее снижение меры схемы на один забитый вход не менее $2\frac{2}{3} + 2\alpha_F$.

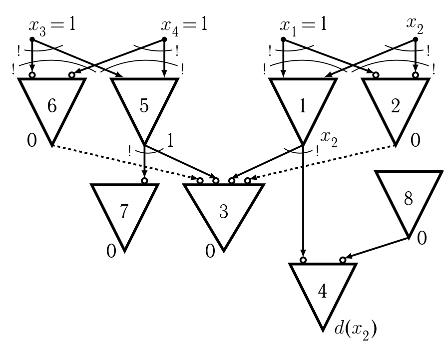

Рис. 46

Случай А.3.2.2.2.1.2.2 (А.В). На элементы E_4, E_7 не подаются элементы, отличные от E_1–E_7. Далее для упрощения записи будем обозначать этот случай как А.В.

Так как схема не содержит циклов, хотя бы один из элементов E_4, E_7 не подается на другой. Без ограничения общности считаем, что E_7 не подается на E_4. Рассмотрение этого случая потребует перебора значительного количества подслучаев. Поэтому прежде, чем перейти к разбору, мы перечислим факты о соединении элементов E_1–E_7.

(VII) На E_3 могут подаваться лишь элементы E_1, E_5, E_2, E_6 и отличный от x_1–x_4 вход x_5. Один из элементов E_2, E_6 подается на E_3.

Факт (VII) следует из предположений случаев А.3.2.2.2.1.2 и А.3.2.2.2.

(VIII) На E_4 могут подаваться лишь элементы E_1, E_2, E_3 и E_6.

Докажем факт (VIII). На E_4 не могут подаваться входы схемы: если бы на E_4 подавался, скажем, вход x_5, мы могли бы, подав подходящие константы на входы x_2, x_3, x_4, x_5, добиться того, чтобы элемент E_5 реализовывал константу один, а элементы E_2, E_3, E_4 — константу ноль. Следовательно, переменная x_1 забивалась бы другими переменными, что невозможно.

По предположению рассматриваемого случая на E_4 могут подаваться лишь элементы E_1, E_2, E_3, E_5, E_6. Осталось отметить, что E_5 не может подаваться на E_4 (так как в таком случае подача константы один на входы x_2, x_3, x_4 делала бы функцию, реализуемую схемой, независящей от x_1). Факт (VIII) доказан.

(IX) На E_7 могут подаваться лишь элементы E_1, E_2, E_3, E_4 и E_6.

Факт (IX) доказывается аналогично факту (VIII).

(X) Если на E_3 подается вход x_5, то x_5 имеет степень 3 и подается на положительный вход E_3 и отрицательные входы двух элементов, отличных от E_1–E_7.

Для обоснования факта (X) см. случаи А.3 и А.

Далее рассматриваем случаи в зависимости от того, какие элементы подаются на E_4. Учитывая факт (VIII), получаем, что, помимо E_1 на E_4, могут подаваться элементы из любого непустого подмножества множества элементов $\{E_2, E_3, E_6\}$.

С л у ч а й А.В.1. Элемент E_6 подается на E_4. Заметим, что E_6 не подается на E_3. Действительно, в противном случае подача константы ноль на входы x_3, x_4 и константы один на вход x_2 делала бы выходную функцию схемы независимой от x_1, что противоречит утверждению 3. Учитывая факт (VII), заключаем, что E_2 подается на E_3.

Напомним, что x_5 — вход, который, быть может, подается на E_3 (см. факт (VII)).

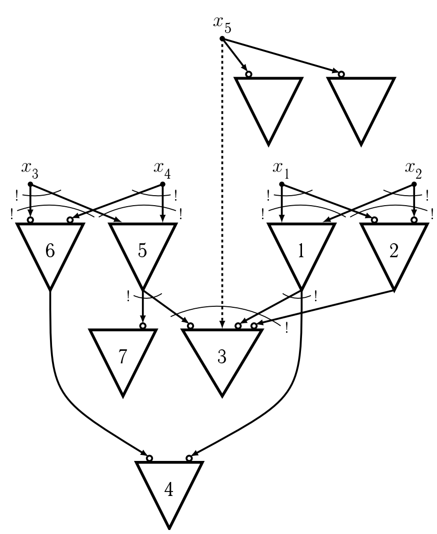

Рис. 47

Опишем подстановку констант вместо входов переменных, которую мы будем называть подстановкой σ. Произведем следующие подстановки:

$x_3 = x_4 = 0$, $x_2 = 1$. Также в случае если x_5 подается на вход E_3, произведем подстановку $x_5 = 1$.

Случай А.В.1.1. Элемент E_3 подается на не более чем один элемент, не реализующий константу ноль при подстановке σ.

Элемент E_3 должен подаваться на хотя бы один элемент, не реализующий константу (иначе подстановка σ делала бы выходную функцию схемы независящей от x_1). Обозначим этот элемент через E_8. Очевидно, он отличен от $E_1{-}E_6$, также он отличен от потомков x_5 (если потомок x_5 отличен от E_3, от он реализует константу ноль при подстановке σ, см. факт (X)).

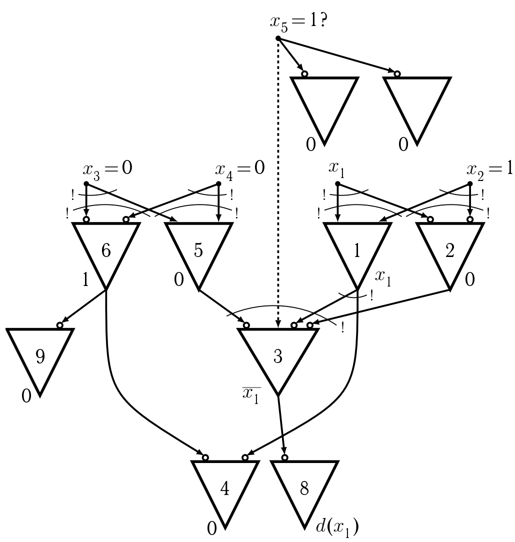

Рис. 48

Напомним, что степень элемента E_6 равна двум. Значит, E_6 подается на вход некоторого элемента, отличного от E_4. Обозначим этот элемент через E_9. Элемент E_9, очевидно, отличен от $E_1{-}E_6$, отличен от E_8, так как E_9 реализует ноль при подстановке σ, а E_8 — функцию, отличную от нуля. Наконец, E_9 не может быть потомком x_5: в противном случае подача константы один на входы x_1, x_2, x_5 и константы ноль на вход x_3 делала бы выходную функцию схемы независящей от x_4.

При подстановке σ элементы E_2, E_4, E_4, E_6, E_9 реализуют константы, а элементы E_1, E_3 — функции, зависящие лишь от x_1. После удаления этих элементов (и входов x_2, x_3, x_4) мера схемы снизится на $7 + 7\alpha_F$, а степень входа x_1 станет равна одному (и этот вход будет подаваться лишь на E_8). Следовательно, по лемме 2 элемент E_8 будет реализовывать функцию, зависящую лишь от x_1, $*$-удаляя его получаем снижение меры схемы $8{+}6\alpha_F$.

Если x_5 не подавался на E_3, снижение меры схемы на один забитый вход составит не менее $2\dfrac{2}{3} + 2\alpha_F$. Если x_5 подавался на E_3, то мы дополнительно удаляем один вход степени три и два потомка x_5, что уменьшает меру схемы еще на $2 + 3\alpha_F + \alpha_T$. Общее снижение меры схемы на один забитый вход составит $2{,}5 + 2{,}25\alpha_F + 0{,}25\alpha_T$.

Случай А.В.1.2. Элемент E_3 подается хотя бы на два элемента, не реализующих константу ноль при подстановке σ. Обозначим эти два элемента через E_8, E_9. Они, очевидно, отличны от E_1, E_2, E_3, E_5, E_6, а также от E_4 и от отличных от E_3 потомков x_5 (эти элементы реализуют ноль при подстановке σ).

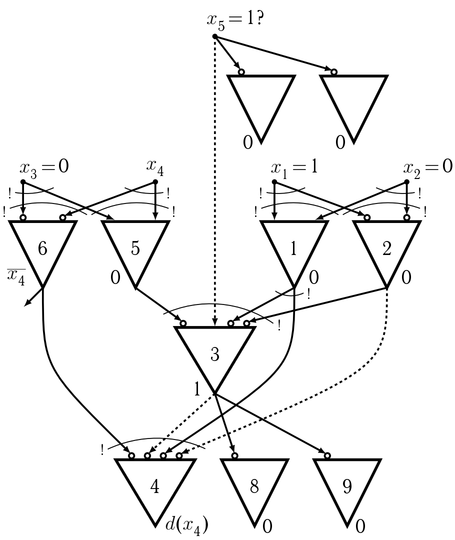

Рис. 49

Произведем подстановку: $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = 1$. Также если на E_3 подается вход x_5, произведем подстановку $x_5 = 1$. Элементы E_1, E_2, E_3, E_5, E_8, E_9 реализуют константы, а элемент E_6 — функцию $\overline{x_4}$. На входы E_4 подаются лишь элементы, реализующие константы или функции, зависящие лишь от x_4 (см. факт (VIII)). Поэтому E_4 также реализует константу или функцию, зависящую лишь от x_4. Удаление входов x_1, x_2, x_3 и перечисленных элементов снижает меру схемы не менее чем на $8 + 5\alpha_F - \alpha_T$ (элемент E_4, быть может, $*$-удаляется).

Если x_5 не подавался на E_3, снижение меры схемы на один забитый вход составит не менее $2\frac{2}{3} + 1\frac{2}{3}\alpha_F - \frac{1}{3}\alpha_T$. Если x_5 подавался на E_3, то мы дополнительно удаляем один вход степени три и два потомка x_5, что уменьшает меру схемы еще на $2 + 3\alpha_F + \alpha_T$. Общее снижение меры схемы (на один забитый вход) составит не менее $2{,}5 + 2\alpha_F$.

С л у ч а й А.В.2. Элемент E_6 не подается на E_4. Значит, помимо E_1, на E_4 могут подаваться лишь E_2 и E_3 (см. факт (VIII)).

С л у ч а й А.В.2.1. На E_4 подаются лишь элементы E_1, E_2. Этот случай рассматривается аналогично случаю А.3.2.1.1.

С л у ч а й А.В.2.2. На E_4 подаются лишь элементы E_1, E_3.

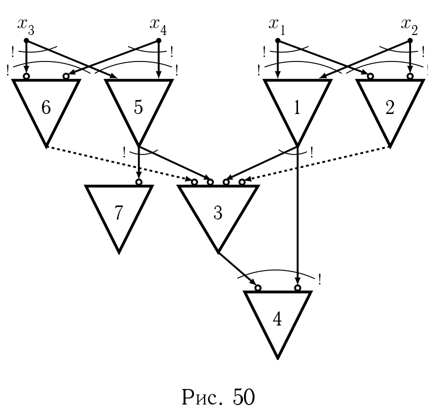

Рис. 50

С л у ч а й А.В.2.2.1. Элемент E_4 подается лишь на элемент E_7. Проведем подстановку: $x_1 = x_3 = x_4 = 1$. После этого лишь элементы E_1, E_4 будут реализовывать функции, зависящие от x_2. Следовательно, переменная x_2 забиваема, что противоречит утверждению 3.

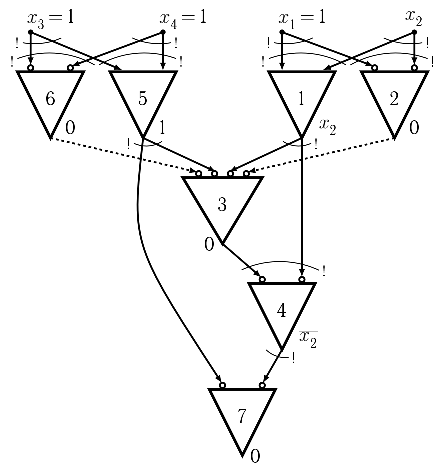

Рис. 51

Случай А.В.2.2.2. Существует элемент E_8, отличный от E_1–E_7, на который подается элемент E_4. Проведем подстановку: $x_3=x_4=1$, $x_1=0$. Элементы $E_1, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8$ будут реализовывать константы, а элемент E_2 — функцию $\overline{x_2}$. Удаляя эти элементы, получаем снижение меры схемы (на один забитый вход) не менее $2\frac{2}{3}+2\alpha_F$.

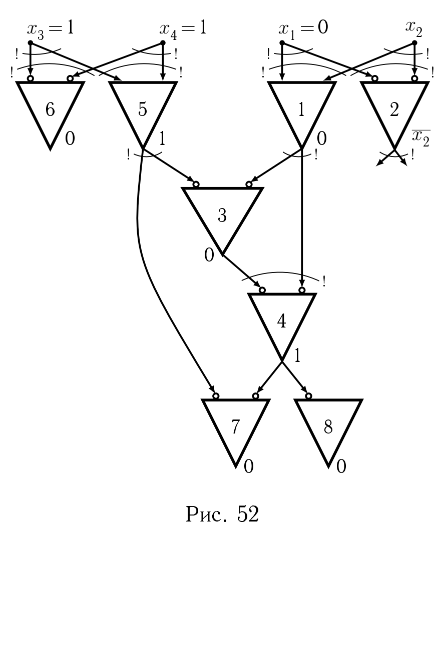

Рис. 52

Случай А.В.2.3. На E_4 подаются лишь элементы E_1, E_2, E_3.

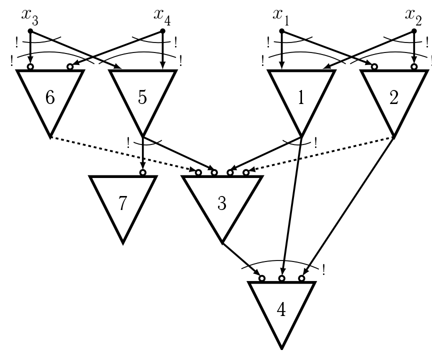

Рис. 53

Случай A.B.2.3.1. Элемент E_2 не подается на вход E_3. Учитывая факт (VII), из этого следует, что E_6 подается на E_3.

Случай A.B.2.3.1.1. Элемент E_3 подается лишь на элемент E_4 и, быть может, элементы, на которые подается вход x_5. Напомним, что x_5 — вход, который, быть может, подается на E_3 (см. факт (VII)).

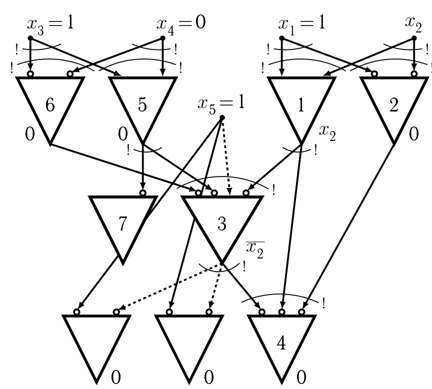

Рис. 54

Произведем подстановку: $x_1=x_3=x_5=1$, $x_4=0$. После этого элемент E_4 будет реализовывать константу ноль (так как на его входы подается функция x_2 с выхода элемента E_1 и функция $\overline{x_2}$ с выхода элемента E_3). Все элементы, на которые подается x_5, кроме элемента E_3, будут реализовывать константу ноль (см. факт (X)). Поэтому лишь элементы E_1, E_3 будут реализовывать функции, зависящие от x_2. Следовательно, переменная x_2 является забиваемой, что противоречит утверждению 3.

Случай A.B.2.3.1.2. Существует элемент E_8, отличный от E_1–E_6, на вход которого подается элемент E_3 и не подается вход x_5 (совпадение элементов E_7 и E_8 допускается).

Произведем подстановку: $x_3=1$, $x_1=x_4=0$. Также в случае, если на E_3 подается вход x_5, произведем подстановку $x_5=0$. Элементы E_1, E_5, E_6 будут реализовывать константу ноль, элемент E_3 — константу один, и, следовательно, элементы E_4 и E_8 будут реализовывать константу ноль. Элемент E_2 будет реализовывать функцию $\overline{x_2}$.

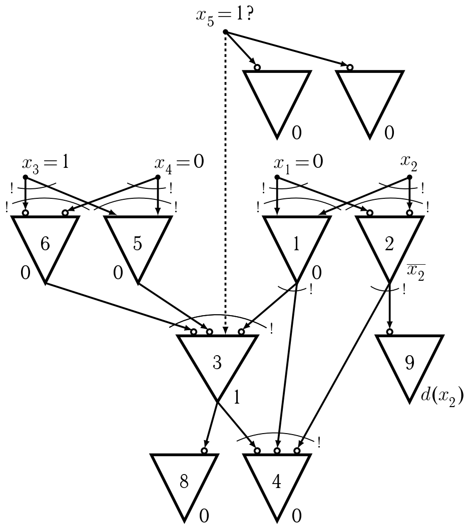

Рис. 55

Степень элемента E_2 равна двум. Элемент E_2 не может подаваться на вход элемента E_8 (иначе переменная x_2 была бы забиваемой). Следовательно, E_2 подается на вход элемента E_9, отличного от E_1-E_8.

Удалим элементы E_1-E_8. После этого степень входа x_1 станет равна одному и, согласно лемме 2, элемент E_9 будет реализовывать функцию, зависящую лишь от x_2. Проведем $*$-удаление элемента E_9.

Если x_5 не подавался на E_3, то всего было удалено 8 элементов (один был $*$-удален) и три входа степени 2, снижение меры схемы (на один забитый вход) составит не менее $2\frac{2}{3}+1\frac{2}{3}\alpha_F$.

Если x_5 подавался на E_3, то оба элемента, на отрицательные входы которых подавался x_5, будут реализовывать константу ноль (см. факт (X)). Значит, эти элементы отличны от E_9, который реализует функцию, зависящую от x_1. Эти элементы отличны от E_8 в силу предположения рассматриваемого случая и от E_1-E_7 в силу факта (X).

Итак, если x_5 подавался на E_3, дополнительно будут удалены 2 элемента и вход степени 3; снижение меры схемы (на один забитый вход) составит не менее $2{,}5+2\alpha_F+0{,}25\alpha_T$.

С л у ч а й А.В.2.3.2. Элемент E_6 не подается на вход E_3. Учитывая факт (VII) из этого следует, что E_2 подается на E_3. Подадим константу ноль на вход x_3, а также, в случае, если на вход элемента E_3 подается вход x_5, подадим константу один на вход x_5. Элемент E_5 будет реализовывать константу ноль, E_6 — функцию $\overline{x_4}$, элемент E_3 — функцию $x_1 \oplus x_2$, а элемент E_4 — функцию $(\overline{x_1 \oplus x_2})\&(\overline{x_1\&x_2})\&(\overline{\overline{x_1}\&\overline{x_2}})=0$.

Если вход x_5 не подавался на E_3, после удаления элементов E_4, E_5, E_6 получаем снижение меры схемы не менее $3+2\alpha_F$.

Если вход x_5 подавался на E_3, дополнительно удаляем вход x_5 степени 3 и два его потомка, получая общее снижение меры схемы (на один забитый вход) не менее $2{,}5+2{,}5\alpha_F+0{,}5\alpha_T$.

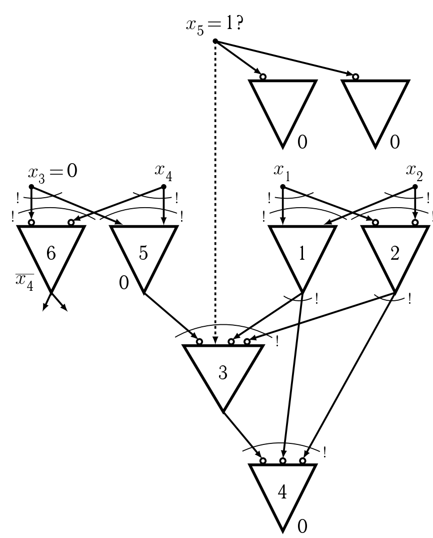

Рис. 56

С л у ч а й А.В.2.3.3. На вход E_3 подается и элемент E_2 и элемент E_6.

С л у ч а й А.В.2.3.3.1. На вход E_7 подается элемент E_8, отличный от E_1-E_6. Произведем подстановку $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Элементы E_1, E_2, E_3, E_4, E_6 будут реализовывать константы, а элемент E_5 — функцию x_4. После удаления этих элементов мера схемы снизится на $6 + 7\alpha_F$, а степень входа x_4 станет равна одному. Поэтому по лемме 2 элемент E_7 будет реализовывать функцию, звисящую лишь от x_4, а E_8 — константу ноль. Удаляя эти два элемента (E_7 $*$-удаляется) получаем снижение меры схемы (на один удаленный вход) не менее $2\frac{2}{3} + 2\alpha_F$.

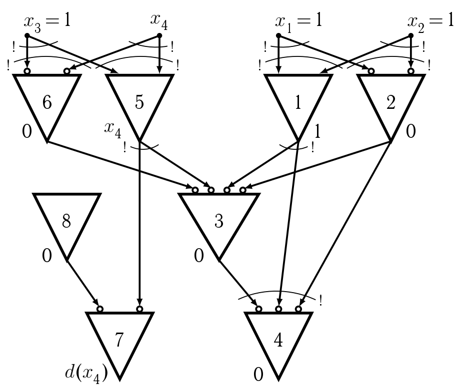

Рис. 57

С л у ч а й A.B.2.3.3.2. На вход E_7 не подаются элементы, отличные от E_1–E_6. Аналогично предыдущему случаю из леммы 2 следует, что на вход элемента E_7 могут подаваться лишь элементы, реализующие константу ноль при подстановке $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Таковы элементы E_2, E_3, E_4 и E_6. Элемент E_2 не может подаваться на E_7 (известно, что $\deg E_2 = 2$). Итак, на E_7, помимо E_5, могут подаваться лишь E_3, E_4 и E_6.

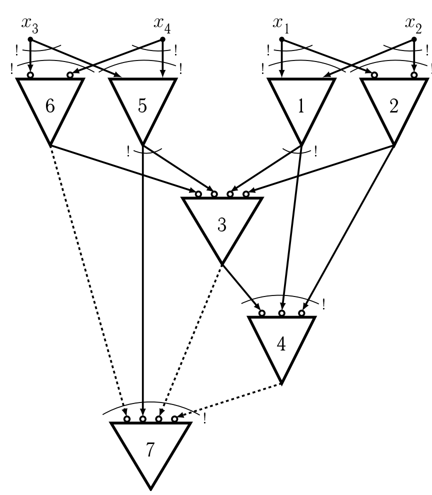

Рис. 58

С л у ч а й A.B.2.3.3.2.1. Элемент E_6 не подается на вход E_7. Пусть E_8 — отличный от E_1–E_7 потомок E_6 (такой элемент существует, т. к. $\deg E_6 = 2$).

Произведем подстановку: $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$. Элементы E_1–E_5 будут реализовывать константу; также константу будет реализовывать элемент E_8 (на его входы могут подаваться лишь элементы E_3, E_4, E_5). Элемент E_6 будет реализовывать функцию $\overline{x_4}$. После удаления E_1–E_7 снижение меры схемы будет равно $7 + 7\alpha_F$, а степень входа x_4 станет равна одному. По лемме 2 элемент E_8 будет реализовывать функцию, зависящую лишь от x_4; $*$-удаляя E_8 получаем снижение меры схемы (на один забитый вход) не менее $2\frac{2}{3}+2\alpha_F$.

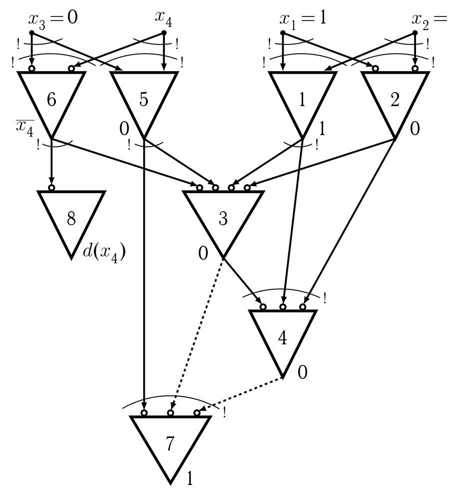

Рис. 59

С л у ч а й А.В.2.3.3.2.2. Элемент E_6 подается на вход E_7. Также на E_7, помимо E_5, могут подаваться лишь элементы E_3, E_4.

С л у ч а й А.В.2.3.3.2.2.1. На вход E_7 подаются лишь элементы E_5, E_6. Данный случай рассматривается аналогично случаю А.3.2.1.1.

С л у ч а й А.В.2.3.3.2.2.2. На вход E_7 подаются лишь элементы E_5, E_6, E_3. Подадим константу один на входы x_1, x_3. Элементы E_2, E_6 будут реализовывать константу ноль, а элементы E_1, E_5 — функции x_2 и x_4 соответственно. Удалим элементы E_1, E_2, E_5, E_6. Снижение меры схемы будет равно $4 + 4\alpha_F$.

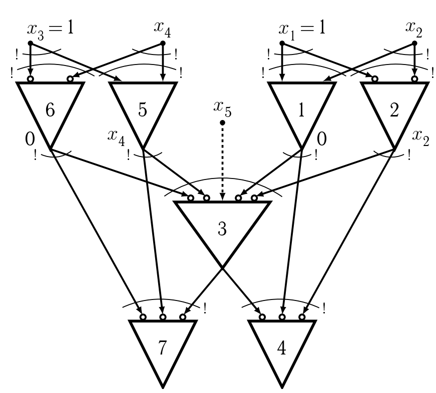

Рис. 60

В случае если на вход E_3 не подается вход x_5, элементы E_3, E_4, E_7 будут реализовывать функции $\overline{x_2}\,\overline{x_4}$, $\overline{x_2}x_4$ и $x_2\overline{x_4}$ соответственно. Функции, реализуемые в этом случае элементами E_3, E_4, E_7 при всех возможных значениях x_2, x_4, указаны в табл. 1а.

Если же на вход E_3 подается вход x_5, то E_3, E_4, E_7 реализуют функции $\overline{x_2}\,\overline{x_4}x_5$, $\overline{x_2}x_4 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_5}$ и $x_2\overline{x_4} \vee \overline{x_4}\,\overline{x_5}$. Функции, реализуемые в этом случае элементами E_3, E_4, E_7 при всех возможных значениях x_2, x_4, указаны в табл. 1б.

Таблица 1

x_2	x_4	E_3	E_4	E_7
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	0	1
1	1	0	0	0

а) x_5 не подается на E_3

x_2	x_4	E_3	E_4	E_7
0	0	x_5	$\overline{x_5}$	$\overline{x_5}$
0	1	0	1	0
1	0	0	0	1
1	1	0	0	0

б) x_5 подается на E_3

Перестроим схему: заменим элемент E_3 на элемент, реализующий константу ноль, а элементы E_4 и E_7 — на верхние элементы, реализующие функции $\overline{x_2}x_4$ и $x_2\overline{x_4}$. Функции, реализуемые элементами после преобразования, описаны в табл. 2.

Таблица 2

x_2	x_4	E_3	E_4	E_7
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	0	1
1	1	0	0	0

Покажем, что функция, реализуемая схемой, не изменилась после перестройки. Как видно из табл. 1 и 2, при $x_2 \neq 0$ и $x_4 \neq 0$ функции, реализуемые тремя затронутыми элементами, не изменились. Значит, при $x_2 \neq 0$ и $x_4 \neq 0$ не изменилась и функция, реализуемая схемой. При $x_2 = x_4 = 0$ все затронутые элементы реализуют тождественный ноль (так же, как и при $x_2 = x_4 = 1$ в исходной схеме). Учитывая, что входы x_2 и x_4 не подаются ни на какие элементы, кроме E_3, E_4, E_7, получаем, что функция, реализуемая преобразованной схемой при $x_2 = x_4 = 0$, та же, что и функция, реализуемая исходной схемой при $x_2 = x_4 = 1$. Осталось отметить, что функция, реализуемая исходной схемой, является линейной, а подстановка двух единиц вместо переменных линейной функции приводит к тому же результату, что и подстановка двух нулей (т.к. $1 \oplus 1 = 0 \oplus 0 = 0$). Следовательно, преобразованная схема реализует ту же линейную функцию, что и исходная.

После преобразования мы можем удалить элемент E_3, реализующий константу ноль. Общее снижение меры схемы (на один забитый вход) составит не менее $2{,}5 + 2\alpha_F$.

Случай А.В.2.3.3.2.2.3. На вход E_7 подаются лишь элементы E_5, E_6, E_4.

Напомним, что на E_3, быть может, подается вход схемы x_5 (см. факты (VII) и (X)). В схеме найдется элемент E_8, на который подается E_7 и на который не подается x_5 (иначе подстановка $x_1 = x_2 = x_5 = 1$ делала бы функцию, реализуемую схемой, не зависящей от x_3, x_4).

Произведем подстановку: $x_4 = 0$, $x_2 = x_3 = 1$. Также в случае если на E_3 подается вход x_5, произведем подстановку $x_5 = 1$. Элементы $E_2, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8$ реализуют константы, а элементы E_1 и E_3 — функции x_1 и $\overline{x_1}$ соответственно. Удаляя все перечисленные элементы (элемент E_3 $*$-удаляется), получаем общее снижение меры схемы не менее $8+6\alpha_F$.

Если на вход E_3 не подавался вход x_5, снижение меры схемы (на один забитый вход) составит не менее $2\frac{2}{3}+2\alpha_F$.

Если на вход E_3 подавался вход x_5, дополнительно удаляются два элемента-потомка x_5 и вход степени 3; общее снижение меры схемы (на один забитый вход) составит не менее $2{,}5+2{,}25\alpha_F+0{,}25\alpha_T$.

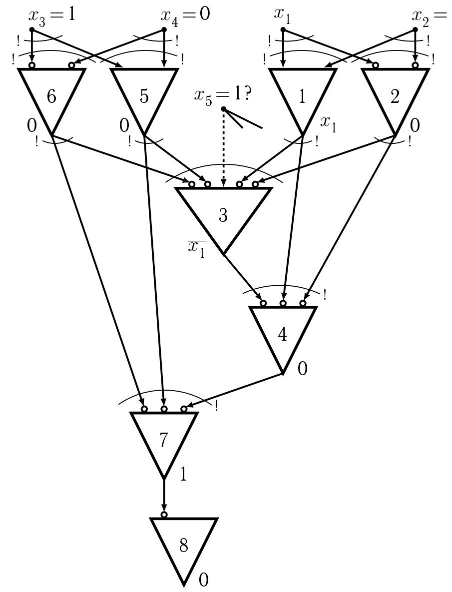

Рис. 61

С л у ч а й А.В.2.3.3.2.2.4. На вход E_7 подаются лишь элементы E_5, E_6, E_4, E_3. Выписав функции, реализуемые всеми рассматриваемыми элементами, легко убедиться в том, что ребро, ведущее из E_4 в E_7, является избыточным, что противоречит предположению (III).

С л у ч а й А.3.2.2.2.2. На вход E_3 не подаются элементы, отличные от E_1, E_5. Далее будем рассматривать случаи в зависимости от числа входов схемы, подаваемых на E_3. Напомним (см. случаи А.3 и А.3.2.2.2), что на E_3 подается не более одного входа, степень такого входа должна быть равна трем и он должен подаваться на положительный вход E_3 и два отрицательных входа других элементов.

С л у ч а й А.3.2.2.2.2.1. На вход E_3 не подаются входы схемы. Подадим константу ноль на входы x_1, x_3. После этого элементы E_1, E_5 будут реализовывать константу ноль, элемент E_3 — константу один, а элементы E_2 и E_6 — функции $\overline{x_2}$ и $\overline{x_4}$ соответственно. Удаляя перечисленные элементы, получаем снижение меры схемы (на один забитый вход) не менее $2{,}5+2\alpha_F$.

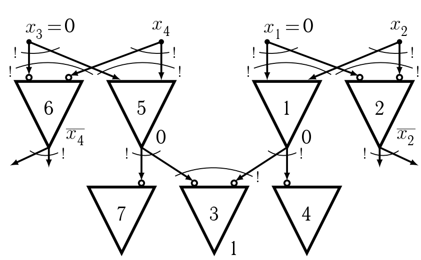

Рис. 62

С л у ч а й А.3.2.2.2.2.2. На вход E_3 подается единственный вход схемы — вход x_5. Отметим, что x_5 не подается на E_4 или на E_7. Действительно, пусть x_5 подается на положительный вход E_3 и отрицательный вход E_4. Тогда подача константы один на входы x_2, x_3, x_4, x_5 делала бы выходную функцию схемы независимой от x_1, что невозможно. Пусть E_8, E_9 — элементы, отличные от E_1–E_7, на отрицательные входы которых подается x_5.

Элемент E_3 не подается на элементы E_8, E_9 (ребро, идущее из E_3, скажем, в E_8 было бы избыточным, противореча предположению (III)). Элемент E_3 не является выходным, так как реализует нелинейную функцию, следовательно, у него должен быть хотя бы один потомок. Пусть E_{10} — потомок E_3. Элемент E_{10} отличен от $E_1, E_2, E_3, E_5, E_6, E_8$ и E_9; совпадение с E_4 или E_7 допускается.

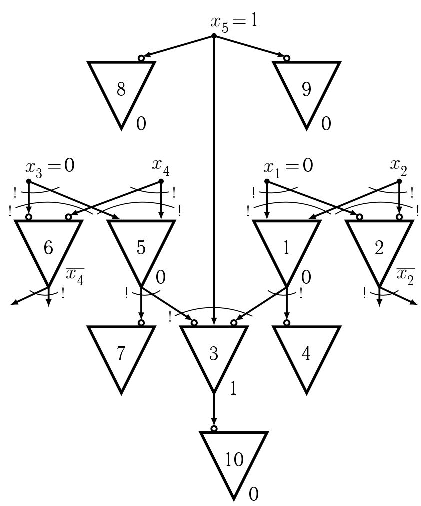

Рис. 63

Проведем подстановку: $x_1 = x_3 = 0$, $x_5 = 1$. Элементы E_1, E_3, E_5, E_8, E_9 и E_{10} будут реализовывать константы, а элементы E_2 и E_6 — функции $\overline{x_2}$ и $\overline{x_4}$ соответственно. После удаления перечисленных элементов снижение меры схемы (на один забитый вход) составит не менее $2\frac{2}{3}+2\frac{1}{3}\alpha_F+\frac{1}{3}\alpha_T$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клосс Б. М., Малышев В. А. Оценки сложности некоторых классов функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 1965. — № 4. — С. 44–51.
2. Комбаров Ю. А. О минимальных реализациях линейных булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. — 2012. — Т. 19, № 3. — С. 39–57.
3. Комбаров Ю. А. О минимальных схемах в базисе Шеффера для линейных булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. — 2013. — Т. 20, № 4. — С. 65–87.
4. Комбаров Ю. А. Верхняя оценка сложности реализации линейных функций схемами в одном базисе из многовходовых элементов // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2015. — № 5. — С. 47–50.
5. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
6. Подольская О. В. Сложность реализации симметрических булевых функций схемами в базисе антицепных функций // Дискретная математика. — 2015. — Т. 27, № 3. — С. 95–107.

7. Редькин Н. П. Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 23. — М.: Наука, 1970. — С. 83–101.
8. Редькин Н. П. О минимальной реализации линейной функции схемой из функциональных элементов // Кибернетика. — 1971. — № 6. — С. 31–38.
9. Редькин Н. П. Обобщенная сложность линейных булевых функции // Дискретная математика. — 2018. — Т. 30, № 4. — С. 88–96.
10. Find M., Golovnev A., Hirsch E., Kulikov A. A better-than-3n lower bound for the circuit complexity of an explicit function // 2016 IEEE 57th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). — 2016. — P. 89–98.
11. Iwama K., Lachish O., Morizumi H., Raz R. An explicit lower bound of $5n - o(n)$ for Boolean circuits // Proceeding of the 33rd STOC. — 2001. — P. 399–408.
12. Lai H. Ch., Muroga S. Logic networks with a minimum number of NOR (NAND) gates for parity functions of n variables // IEEE Transactions on computers. — 1987. — V. C-36, No 2. — P. 157–166.
13. Schnorr C. P. Zwei lineare untere Schranken für die Komplexität Boolescher Funktionen // Computing. — 1974. — No 13. — P. 155–171.
14. Wegner I. The complexity of the parity function in unbounded fan-in, unbounded depth circuits // Theoretical Computer Science. — 1991. — No 85. — P. 155–170.

Поступило в редакцию 3 II 2022