



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 100 за 2022 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Э.М. Карташов, [С.В. Поляков](#)

Обобщенные модельные
представления теории
теплого удара для
локально-неравновесных
процессов теплообмена

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](#)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Карташов Э.М., Поляков С.В. Обобщенные модельные представления теории теплого удара для локально-неравновесных процессов теплообмена // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 100. 28 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2022-100>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-100>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Э.М. Карташов, С.В. Поляков

**Обобщенные модельные представления
теории теплового удара для локально-
неравновесных процессов теплообмена**

Москва — 2022

Карташов Э.М., Поляков С.В.

Обобщенные модельные представления теории теплового удара для локально-неравновесных процессов теплообмена

В статье рассмотрена открытая проблема теории теплового удара в терминах обобщенной модели динамической термоупругости в условиях локально-неравновесного процесса переноса теплоты. Модель включает в себя одновременно три системы координат: декартовы координаты – массивное тело, ограниченное плоской поверхностью; сферические координаты – массивное тело с внутренней сферической полостью; цилиндрические координаты – массивное тело с внутренней цилиндрической полостью. Рассматриваются три вида интенсивного нагрева и охлаждения: температурный, тепловой, средой. Ставится задача: получить аналитическое решение и провести его физический анализ.

В результате развиты обобщенные модельные представления теплового удара в терминах динамической термоупругости для локально-неравновесных процессов переноса теплоты одновременно в трех системах координат: декартовой, сферической и цилиндрической. Наличие кривизны граничной поверхности области теплового удара обосновывает исходную постановку динамической задачи в перемещениях с использованием предложенного соответствующего уравнения «совместности». Последнее позволило предложить обобщенную динамическую модель термической реакции массивных тел с внутренними полостями одновременно в декартовой, сферической и цилиндрической системах координат в условиях интенсивного температурного нагрева и охлаждения, теплового нагрева и охлаждения, нагрева и охлаждения средой. Модель рассмотрена в перемещениях на основе локально-неравновесного теплопереноса. Получено аналитическое решение для напряжений, проведен численный эксперимент; описан волновой характер распространения термоупругой волны. Проведено сравнение с классическим решением без учета локальной неравновесности. На основе операционного решения задачи предложены важные в практическом отношении расчетные инженерные соотношения для верхней оценки максимума термических напряжений.

Ключевые слова: тепловой удар, обобщенная динамическая модель, аналитическое решение, термические напряжения

Eduard Mikhailovich Kartashov, Sergey Vladimirovich Polyakov

Generalized model representations of the theory thermal shock for local non-equilibrium processes heat transfer

The article considers an open problem of the theory of thermal shock in terms of a generalized model of dynamic thermoelasticity under conditions of a locally nonequilibrium heat transfer process. The model simultaneously includes three coordinate systems: Cartesian coordinates - a massive body bounded by a flat surface; spherical coordinates - a massive body with an internal spherical cavity; cylindrical coordinates - a massive body with an internal cylindrical cavity. Three types of intensive heating and cooling are considered: temperature, thermal, medium. The task is set: to obtain an analytical solution, to carry out numerical experiments and to give their physical analysis.

As a result, generalized model representations of thermal shock in terms of dynamic thermoelasticity have been developed for locally nonequilibrium heat transfer processes simultaneously in three coordinate systems: Cartesian, spherical, and cylindrical. The presence of curvature of the boundary surface of the thermal shock area substantiates the initial statement of the dynamic problem in displacements using the proposed corresponding "compatibility" equation. The latter made it possible to propose a generalized dynamic model of the thermal reaction of massive bodies with internal cavities simultaneously in Cartesian, spherical and cylindrical coordinate systems under conditions of intense thermal heating and cooling, thermal heating and cooling, heating and cooling by the medium. The model is considered in displacements on the basis of local non-equilibrium heat transfer. An analytical solution for stresses is obtained, a numerical experiment is carried out; the wave nature of the propagation of a thermoelastic wave is described. A comparison with the classical solution is made without taking into account local non-equilibrium. On the basis of the operational solution of the problem, design engineering relations important in practical terms for the upper estimate of the maximum thermal stresses are proposed.

Key words: heat stroke, generalized dynamic model, analytical solution, thermal stresses

Оглавление

Введение.....	5
Определяющие соотношения динамической термоупругости.....	7
Обобщенная математическая модель задачи и ее аналитическое решение.....	13
Физический анализ решения.....	24
Заключение.....	27
Библиографический список.....	27

Введение

Процессы переноса энергии в твердых телах и вызываемые ими тепловые нагрузки [1] имеют самое широкое распространение в природе и технике. Этим объясняется исключительно важное научное и практическое значение построения теории указанных процессов, создание эффективных методов исследования развиваемых при этом модельных представлений. Цель этих исследований – установление основных закономерностей протекания достаточно сложных процессов, особенно в условиях мощных энергетических воздействий в различного рода технологических операциях. К ним можно отнести плазмохимическую обработку материалов, а также обработку в инфракрасных печах и гелиоустановках; интенсивный нагрев материалов лазерными или электронными лучами; применение мощных радиационных излучателей для термической закалки и упрочнения поверхности изделий. Интенсивному тепловому воздействию подвергаются поверхности авиационно-космических аппаратов и пусковых установок и т.д. Во всех указанных случаях возникает так называемый термический удар – одна из центральных тем в термомеханике и физике прочности твердых тел, имеющая важное научное и практическое значение. Накоплено значительное количество публикаций, описывающих указанную проблему главным образом на основе классической феноменологии Фурье о распространении теплоты в твердых телах. В последние годы усилился интерес к изучению различного рода локально-неравновесных процессов, связанных с переносом энергии (теплоты, массы, импульса или их аналогов). Это связано, с одной стороны, с естественным направлением развития науки – от равновесных в целом систем к локально-равновесным и далее к локально-неравновесным. С другой стороны, интенсификация указанных выше технологических процессов, использование материалов со сложной структурой (полимеров, жидких кристаллов, капиллярно-пористых и других дисперсных систем), возможность получения сверхвысоких (или сверхнизких) температур и давлений объясняют с практической точки зрения необходимость математического описания систем и физических процессов в экстремальных, локально-неравновесных условиях. Изучение таких систем может быть основано на различных версиях локально-неравновесной термодинамики: кинетических, молекулярно-динамических, феноменологических. Наибольшее развитие получила феноменологическая теория Максвелла-Каттанео-Лыкова-Вернотта, учитывающая инерцию теплового потока, связанную с конечной скоростью распространения теплоты в твердых телах. С точки зрения модельных представлений эта теория приводит к краевым задачам нестационарной теплопроводности для уравнений гиперболического типа. Такие задачи значительно отличаются от классических для уравнений параболического типа как по постановке, так и по сложности их решения. Значительно сложнее становится и процедура описания термической реакции системы на интенсивный нагрев или охлаждение, а также нахождение

аналитического решения соответствующей математической модели теории теплового удара. На этом пути возникают серьезные трудности вычислительного характера.

Статья продолжает исследования автора, описанные в [1-3]. В рамках обобщенной модели динамической термоупругости изучается открытая проблема термической реакции на нагрев массивного тела, ограниченного изнутри либо плоской поверхностью (упругое полупространство в декартовой системе координат), либо цилиндрической поверхностью (упругое пространство в цилиндрической системе координат с внутренней цилиндрической полостью), либо сферической поверхностью (упругое пространство в сферической системе координат с внутренней сферической полостью). Рассматриваются три случая интенсивного нагрева границы тела (области): температурный, тепловой, нагрев средой. Следует подчеркнуть, что развитие обобщенных моделей, затрагивающих многочисленные практические приложения, – одно из направлений в теории теплового удара, не получившее своего развития до настоящего времени. Специфика такого рода исследований, с одной стороны, заключается в относительной простоте исходных математических моделей, с другой – связана с вычислительными трудностями при получении искомого результата и при этом очевидной значимостью применения полученных соотношений в многочисленных практических ситуациях. Исследование проводится в условиях локально-неравновесного процесс переноса теплоты [4-9]. Принимаются во внимание два обстоятельства. При высокоинтенсивном нагреве твердых тел, создающих тепловой удар, тепловые потоки $\bar{q}(M, t)$ в области $\Omega = \{M(x, y, z) \in D, t > 0\}$, описывающих реальное твердое тело, отстают от градиента температуры $T(M, t)$ на величину, пропорциональную времени релаксации τ_r , связанную со скоростью распространения теплоты v_T соотношением $v_T = \sqrt{a / \tau_r}$ (a – температуропроводность)

$$\bar{q}(M, t) = -\lambda_T \text{grad} T(M, t) - \tau_r \frac{\partial \bar{q}(M, t)}{\partial t}, \quad (1)$$

где λ_T – теплопроводность. Уравнение энергии для изотропных твердых тел $c\rho\partial T(M, t) / \partial t = \text{div} \bar{q}(M, t)$ приводит к уравнению переноса гиперболического типа

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a\Delta T(M, t) - \tau_r \frac{\partial^2 T(M, t)}{\partial t^2}, \quad (2)$$

содержащему не только первую, но и вторую производную от температуры по времени. Вследствие этого уравнение (2) описывает волновые процессы, в данном случае волновой теплоперенос. Второе обстоятельство состоит в том,

что вопросы корректной постановки краевых задач для уравнения (2) рассмотрены сравнительно недавно [10], и ряд вопросов, связанных с тепловыми задачами для уравнения (2), требуют своего дальнейшего изучения.

Определяющие соотношения динамической термоупругости

Пусть D – конечная или частично ограниченная выпуклая область пространства $M(x, y, z)$, описывающая реальное твердое тело и находящаяся в условиях термонапряженного состояния; S – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область D ; $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – внешняя нормаль к S (вектор, непрерывный на S); $T(M, t)$ – распределение температуры в области D при $t > 0$; T_0 – начальная температура, при которой область находится в недеформированном и ненапряженном состоянии. Пусть $\sigma_{ij}(M, t), \varepsilon_{ij}(M, t), U_i(M, t)$ – соответственно компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие основным уравнениям (несвязанной) термоупругости (в индексных обозначениях) [11]:

$$\sigma_{ij,j}(M, t) + F_i(M, t) = \rho^* U_i(M, t), \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = (1/2) [U_{i,j}(M, t) + U_{j,i}(M, t)], \quad (4)$$

$$\sigma_{ij}(M, t) = 2\mu\varepsilon_{ij}(M, t) + [\lambda\varepsilon_{ii}(M, t) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T(M, t) - T_0)]\delta_{ij}, \quad (5)$$

$$M \in D, \quad t > 0,$$

где ρ^* – плотность, λ, μ – изотермические коэффициенты Ламе, G – модуль сдвига, $\lambda = 2G\nu / (1 - 2\nu)$, ν – коэффициент Пуассона, при этом $2G(1 + \nu) = E$, E – модуль Юнга, α_T – коэффициент линейного теплового расширения, δ_{ij} – символ Кронекера, $F_i(M, t)$ – компоненты объемной силы, $\bar{e}(M, t) = U_{i,i}(M, t) = \varepsilon_{ii}(M, t)$ – объемная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений $\bar{\sigma}(M, t) = \sigma_{nn}(M, t) (n = x, y, z)$ соотношением

$$\bar{e}(M, t) = \frac{1 - 2\nu}{E} \bar{\sigma}(M, t) + 3\alpha_T [T(M, t) - T_0]. \quad (6)$$

Термонапряженное состояние области D при $t > 0$ может возникать при различных режимах теплового воздействия на границу S , создающих термический удар. К ним можно отнести наиболее распространенные на практике случаи:

- температурный нагрев–охлаждение:

$$T(M, t) = T_c(t), \quad M \in S, \quad t > 0 \quad (T_c(t) > T_0 \text{ либо } T_c(t) < T_0, \quad t \geq 0); \quad (7)$$

- тепловой нагрев–охлаждение:

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial n} \Big|_{M \in S} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = (-+) \frac{1}{\lambda_T} q(t) S_+(t), \quad t \geq 0; \quad (8)$$

- нагрев–охлаждение средой:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial n} \Big|_{M \in S} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = \\ = h \left\{ T(M, t) \Big|_{M \in S} - [T_0 + S_+(t)(T_c - T_0)] \right\}, \\ (T_c > T_0 \text{ либо } T_c < T_0), \end{aligned} \quad (9)$$

а также от действия внутренних источников теплоты. Здесь λ_T – теплопроводность материала, $q_0(t)$ – величина теплового потока; h – относительный коэффициент теплообмена; T_c – температура окружающей среды:

$$S_+(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Входящая в (5) температурная функция $T(M, t)$ находится из решения краевой задачи нестационарной теплопроводности для уравнения (2) с граничными условиям (7)-(9). Соотношения (3)-(6) – общие соотношения динамической термоупругости, связывающие напряжения, деформации, перемещения и температуру. При переходе к конкретным случаям выражения (3)-(6) необходимо преобразовать в так называемые уравнения совместности либо в напряжениях, либо в перемещениях и для этих уравнений записывать соответствующую задачу динамической термоупругости. Для рассматриваемого в статье случая необходимо учесть влияние кривизны граничной поверхности твердого тела на температуру и соответствующие температурные напряжения. Здесь более удобной математической моделью является уравнение «совместности» в перемещениях, одновременно охватывающее цилиндрическую, сферическую и декартовую системы координат. Подставляя правые части (5) в (3) (без объемных сил) и используя далее (4) и (6), после ряда длительных преобразований приходим к трем уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta U_i(M, t) + \frac{1}{(1-2\nu)} \frac{\partial \bar{e}(M, t)}{\partial i} - (\rho^* / G) \frac{\partial^2 U_i(M, t)}{\partial t^2} = \\ = \frac{2(1+\nu)\alpha_T}{(1-2\nu)} \frac{\partial [T(M, t) - T_0]}{\partial i}, \quad i = x, y, z, \end{aligned} \quad (11)$$

которое формально можно записать в виде векторного равенства

$$\begin{aligned} \Delta \bar{U}(M, t) + \frac{1}{(1-2\nu)} \operatorname{grad} [\operatorname{div} \bar{U}(M, t)] - (\rho^* / G) \frac{\partial^2 \bar{U}(M, t)}{\partial t^2} = \\ = \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha_T \operatorname{grad} [T(M, t) - T_0], \quad M \in D, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что при обратном переходе необходимо приравнять соответствующие компоненты в векторной записи левой и правой частей в (12).

Рассмотрим далее практические случаи динамической термоупругости на основе соотношения (12). В первой случае в декартовых координатах (x, y, z) рассматривается область $z > R, t > 0$, ограниченная плоской поверхностью, температурное состояние которой описывается функцией $T_i(z, t) (i=1, 2, 3)$, при этом $U_x = U_y = 0, U_z = U_z(z, t)$ и соотношение (12) будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial^2 U_z(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 U_z(z, t)}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \frac{\partial [T_i(z, t) - T_0]}{\partial z}, \quad z > R, \quad t > 0. \quad (13)$$

Интересующая нас компонента напряжения $\sigma_{zz}(z, t)$ связана с перемещением соотношением:

$$\sigma_{zz}(z, t) = 2G \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_z(z, t)}{\partial z} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T [T_i(z, t) - T_0] \right\}. \quad (14)$$

Температурная функция удовлетворяет трем условиям нагрева-охлаждения:

$$\frac{\partial T_i(z, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_i(z, t)}{\partial z^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T_i(z, t)}{\partial t^2}, \quad z > R, \quad t > 0, \quad (15)$$

$$T_i(z, t) \Big|_{t=0} = T_0, \quad \frac{\partial T_i(z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad z \geq R; \quad |T_i(z, t)| < \infty, \quad z \geq R, \quad t \geq 0, \quad (16)$$

$$T_1(z, t) \Big|_{z=R} = T_c, \quad t > 0, \quad (17)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=R} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = - + \frac{1}{\lambda_T} q_0, \quad t > 0, \quad (18)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_3(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=R} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = h [T_3(z, t) \Big|_{z=R} - T_c], \quad t > 0. \quad (19)$$

($T_c > T_0$ – нагрев, $T_c < T_0$ – охлаждение).

Во втором случае в сферических координатах (ρ, φ, θ) рассматривается область $\rho > R$, $t > 0$, с внутренней сферической полостью при нагреве в условиях центральной симметрии $T_i = T_i(\rho, t)$, так что $U_\varphi = U_\theta = 0$, $U_\rho = U_\rho(\rho, t)$ и (12) записывается в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_\rho(\rho, t)}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial U_\rho(\rho, t)}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho^2} U_\rho(\rho, t) - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 U_\rho(\rho, t)}{\partial t^2} = \\ & = \frac{1+v}{1-v} \alpha_T \frac{\partial [T_i(\rho, t) - T_0]}{\partial \rho}, \quad \rho > R, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (20)$$

При этом

$$\begin{aligned} & \sigma_{\rho\rho}(\rho, t) = \\ & = 2G \left\{ \frac{1-v}{1-2v} \frac{\partial U_\rho(\rho, t)}{\partial \rho} + \frac{2v}{1-2v} \frac{1}{\rho} U_\rho(\rho, t) - \frac{1+v}{1-2v} \alpha_T [T_i(\rho, t) - T_0] \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{\partial T_i(\rho, t)}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T_i(\rho, t)}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial T_i(\rho, t)}{\partial \rho} \right) - \tau_r \frac{\partial^2 T_i(\rho, t)}{\partial t^2}, \quad \rho > R, \quad t > 0; \quad (22)$$

$$T_i(\rho, t) \Big|_{t=0} = T_0, \quad \frac{\partial T_i(\rho, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \rho \geq R; \quad |T_i(\rho, t)| < \infty, \quad \rho \geq R, \quad t \geq 0, \quad (23)$$

$$T_1(\rho, t) \Big|_{\rho=R} = T_c, \quad t > 0, \quad (24)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_2(\rho, \tau)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = - + \frac{1}{\lambda_T} q_0, \quad t > 0, \quad (25)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_3(\rho, \tau)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = h [T_3(\rho, t) \Big|_{\rho=R} - T_c], \quad t > 0. \quad (26)$$

В третьем случае в цилиндрических координатах (r, φ, z) рассматривается область $r > R$, $t > 0$ с внутренней цилиндрической полостью в условиях радиальной температуры $T_i = T_i(r, t)$, так что $U_\varphi = U_z = 0$, $U_r = U_r(r, t)$ и соотношение (12) будет:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_r(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r(r, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} U_r(r, t) - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 U_r(r, t)}{\partial t^2} = \\ & = \frac{1+v}{1-v} \alpha_T \frac{\partial [T_i(r, t) - T_0]}{\partial r}, \quad r > R, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Далее:

$$\sigma_{rr}(r,t) = 2G \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_r(r,t)}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{1}{r} U_r(r,t) - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T [T_i(r,t) - T_0] \right\}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial T_i(r,t)}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T_i(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_i(r,t)}{\partial r} \right) - \tau_r \frac{\partial^2 T_i(r,t)}{\partial t^2}, \quad r > R, \quad t > 0; \quad (29)$$

$$T_i(r,t) \Big|_{t=0} = T_0, \quad \frac{\partial T_i(r,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad r \geq R; \quad |T_i(r,t)| < \infty, \quad r \geq R, \quad t \geq 0; \quad (30)$$

$$T_1(r,t) \Big|_{r=R} = T_c, \quad t > 0, \quad \frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_2(r,\tau)}{\partial r} \Big|_{r=R} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = - + \frac{1}{\lambda_T} q_0, \quad t > 0, \quad (31)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_3(r,\tau)}{\partial r} \Big|_{r=R} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = h [T_3(r,t) \Big|_{r=R} - T_c], \quad t > 0. \quad (32)$$

Здесь

$$v_p = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho^*(1-2\nu)}} = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho^*} \quad (33)$$

– скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука.

Подобные случаи интенсивного нагрева (охлаждения) поверхности области (реального тела) представляют значительный практический интерес, например, в следующих случаях: поверхностный диэлектрический нагрев; расчет термических напряжений в стенках цилиндров паровых машин и двигателей внутреннего сгорания; в теории автоматических систем регулировки температуры; при исследовании области звуковых частот металлов при высоких или очень низких температур поверхности; многочисленные случаи резкой смены температуры поверхности космических авиационных объектов; в машиностроительной отрасли при работе на различных экспериментальных установках для определения температурного состояния образцов и др. [7] Представляет интерес охватить одновременно все три случая во всех трех системах координат в рамках обобщенной модели, что может представлять несомненную практическую значимость в теории теплового удара.

Введем далее следующие безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{v_p z}{a}, \quad \tau = \frac{v_p^2 t}{a}, \quad \xi_0 = \frac{v_p R}{a}, \quad \beta = \frac{v_p}{v_T}, \quad Bi^* = \frac{ha}{v_p}, \quad S_T = \frac{2G\alpha_T(1+\nu)}{1-2\nu}.$$

Тогда в области $z > R, t > 0$:

$$\begin{aligned}
W_i(\xi, \tau) &= \frac{T_i(z, t) - [(1-\gamma)T_0 + \gamma T_c]}{(T_c - T_0)(1-2\gamma)}, \quad i=1,3; \\
W_2(\xi, \tau) &= \frac{T_2(z, t) - T_0}{(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)}, \quad i=2; \\
\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) &= \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T(T_c - T_0)(1-2\gamma)}, \quad i=1,3; \\
\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) &= \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)}, \quad i=2; \\
U_i(\xi, \tau) &= \frac{(1-\nu)U_z(z, t)}{(1+\nu)\alpha_T(T_c - T_0)(a / v_p)(1-2\gamma)}, \quad i=1,3; \\
U_2(\xi, \tau) &= \frac{(1-\nu)U_z(z, t)}{(1+\nu)\alpha_T(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)^2}, \quad i=2;
\end{aligned} \tag{34}$$

В области $\rho > R$, $t > 0$, переменная $\xi = \frac{v_p \rho}{a}$ и

$$\begin{aligned}
W_i(\xi, \tau) &= \frac{T_i(\rho, t) - [(1-\gamma)T_0 + \gamma T_c]}{(T_c - T_0)(1-2\gamma)}, \quad i=1,3; \\
W_2(\xi, \tau) &= \frac{T_2(\rho, t) - T_0}{(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)}, \quad i=2; \\
\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) &= \frac{\sigma_{\rho\rho}(\rho, t)}{S_T(T_c - T_0)(1-2\gamma)}, \quad i=1,3; \\
\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) &= \frac{\sigma_{\rho\rho}(\rho, t)}{S_T(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)}, \quad i=2; \\
U_i(\xi, \tau) &= \frac{(1-\nu)U_\rho(\rho, t)}{(1+\nu)\alpha_T(T_c - T_0)(a / v_p)(1-2\gamma)}, \quad i=1,3; \\
U_2(\xi, \tau) &= \frac{(1-\nu)U_\rho(\rho, t)}{(1+\nu)\alpha_T(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)^2}, \quad i=2.
\end{aligned} \tag{35}$$

В области $r > R$, $t > 0$, переменная $\xi = \frac{v_p r}{a}$ и

$$\begin{aligned}
 W_i(\xi, \tau) &= \frac{T_i(r, t) - [(1-\gamma)T_0 + \gamma T_c]}{(T_c - T_0)(1-2\gamma)}, \quad i = 1, 3; \\
 W_2(\xi, \tau) &= \frac{T_2(r, t) - T_0}{(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)}, \quad i = 2; \\
 \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) &= \frac{\sigma_{rr}(r, t)}{S_T(T_c - T_0)(1-2\gamma)}, \quad i = 1, 3; \\
 \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) &= \frac{\sigma_{rr}(r, t)}{S_T(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)}, \quad i = 2; \\
 U_i(\xi, \tau) &= \frac{(1-\nu)U_r(r, t)}{(1+\nu)\alpha_T(T_c - T_0)(a / v_p)(1-2\gamma)}, \quad i = 1, 3; \\
 U_2(\xi, \tau) &= \frac{(1-\nu)U_r(r, t)}{(1+\nu)\alpha_T(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)^2}, \quad i = 2.
 \end{aligned} \tag{36}$$

В (34)-(36) $\gamma = 0$ при нагреве, $\gamma = 1$ при охлаждении.

Обобщенная математическая модель задачи и ее аналитическое решение

Запишем обобщенную модель задачи, предполагая границы области свободными от напряжений

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 U_i(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \frac{2m+1}{\xi} \left[\frac{\partial U_i(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \frac{U_i(\xi, \tau)}{\xi} \right] - \frac{\partial^2 U_i(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} = \\
 = \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \xi}, \quad \xi > \xi_0, \quad \tau > 0,
 \end{aligned} \tag{37}$$

$$U_i(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial U_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq \xi_0, \quad |U_i(\xi, \tau)| < \infty, \quad \xi \geq \xi_0, \quad \tau \geq 0; \tag{38}$$

$$\left[\frac{\partial U_i(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \frac{(2m+1)\nu}{1-\nu} \frac{1}{\xi} U_i(\xi, \tau) \right]_{\xi=\xi_0} = \begin{cases} W_i(\xi, \tau) \Big|_{\xi=\xi_0} + \frac{\gamma}{1-2\gamma}, & i = 1, 3 \\ W_i(\xi, \tau) \Big|_{\xi=\xi_0}, & i = 2. \end{cases} \tag{39}$$

$$\frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \frac{2m+1}{\xi} \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \beta^2 \frac{\partial^2 W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} = 0, \quad (40)$$

$$\xi > \xi_0, \quad \tau > 0,$$

$$W_i(\xi, \tau)|_{\tau=0} = \begin{cases} \frac{\gamma}{2\gamma-1}, & i=1,3, \\ 0, & i=2, \end{cases} \quad \xi \geq \xi_0, \quad \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0, \quad i=1,2,3, \quad (41)$$

$$|W_i(\xi, \tau)| < \infty, \quad \xi \geq \xi_0, \quad \tau \geq 0;$$

$$W_1(\xi, \tau) \Big|_{\xi=\xi_0} = \frac{1-\gamma}{1-2\gamma}, \quad \tau > 0, \quad (42)$$

$$\frac{1}{\beta^2} \int_0^\tau \frac{\partial W_2(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{\beta^2}\right) d\tau' = \frac{1}{2\gamma-1}, \quad \tau > 0, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta^2} \int_0^\tau \frac{\partial W_3(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{\beta^2}\right) d\tau' = \\ & = Bi^* \left[W_3(\xi, \tau) \Big|_{\xi=\xi_0} - \frac{1-\gamma}{1-2\gamma} \right], \quad \tau > 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь $i=1$ при $m=-1/2$; $i=2$ при $m=1/2$; $i=3$ при $m=0$. Заметим, что искомое напряжение $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ во всех трех случаях связано с перемещением $U_i(\xi, \tau)$ соотношением

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \frac{\partial U_i(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \frac{(2m+1)\nu}{(1-\nu)} \frac{1}{\xi} U_i(\xi, \tau) - \begin{cases} W_i(\xi, \tau) - \frac{\gamma}{1-2\gamma}, & i=1,3 \\ W_i(\xi, \tau), & i=2. \end{cases} \quad (45)$$

Решение обобщенной задачи (38)-(45) с целью изучения, например, влияния геометрии области на кинетику соответствующих термоупругих напряжений – открытая проблема теории теплового удара. Ее решение приводится ниже.

В пространстве изображение по Лапласу

$$\begin{aligned}\bar{W}_i(\xi, p) &= \int_0^{\infty} W_i(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau, \\ \bar{U}_i(\xi, p) &= \int_0^{\infty} U_i(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau, \\ \bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) &= \int_0^{\infty} \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau,\end{aligned}\quad (46)$$

и решение тепловой задачи (41)-(44) имеет вид:

$$\bar{W}_i(\xi, p) = \bar{f}_i(\xi_0, p) (\xi_0 / \xi)^m K_m \left[\xi \bar{\mu}(p) \right] + \begin{cases} \frac{\gamma}{p(2\gamma - 1)}, & i = 1, 3, \\ 0, & i = 2, \end{cases}\quad (47)$$

$$(\bar{\mu}(p) = \sqrt{\beta^2 p^2 + p}).$$

$$\bar{f}_i(\xi_0, p) = \begin{cases} \frac{1}{p K_m \left[\xi_0 \bar{\mu}(p) \right] (1 - 2\gamma)}, & i = 1; \\ \frac{\bar{\mu}(p)}{p^2 K_{m+1} \left[\xi_0 \bar{\mu}(p) \right] (1 - 2\gamma)}, & i = 2; \\ \frac{Bi^* \bar{\mu}(p)}{p \left\{ p K_{m+1} \left[\xi_0 \bar{\mu}(p) \right] + Bi^* \bar{\mu}(p) K_m \left[\xi_0 \bar{\mu}(p) \right] \right\} (1 - 2\gamma)}, & i = 3. \end{cases}\quad (48)$$

Здесь $K_m(z)$ – модифицированная функция Бесселя.

Соотношения (37)-(39) переведем в пространство изображений (46):

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \bar{U}_i(\xi, p)}{d\xi^2} + \frac{2m+1}{\xi} \frac{d\bar{U}_i(\xi, p)}{d\xi} - \left(p^2 + \frac{2m+1}{\xi^2} \right) \bar{U}_i(\xi, p) &= \\ = \frac{d\bar{W}_i(\xi, p)}{d\xi}, & \quad \xi > \xi_0,\end{aligned}\quad (49)$$

$$\left[\frac{d\bar{U}_i(\xi, p)}{d\xi} + \frac{(2m+1)v}{(1-v)} \frac{1}{\xi} \bar{U}_i(\xi, p) \right] \Big|_{\xi=\xi_0} = \begin{cases} \bar{W}_i(\xi_0, p) - \frac{\gamma}{1-2\gamma}, & i = 1, 3, \\ \bar{W}_i(\xi_0, p), & i = 2. \end{cases}\quad (50)$$

$$|\bar{U}_i(\xi, p)| < \infty, \quad \xi \geq \xi_0. \quad (51)$$

Общее решение уравнения (49) состоит из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного

$$\bar{U}_i(\xi, p) = \frac{1}{\xi^m} [C_1 K_{m+1}(\xi p) + C_2 I_{m+1}(\xi p)] + \bar{U}_{i\text{чп}}(\xi, p). \quad (52)$$

Нахождение частного решения уравнения (49) требует отдельного рассмотрения. Имеем:

$$\frac{d}{d\xi}(\Delta \bar{U}_i) = \Delta \left(\frac{d\bar{U}_i}{d\xi} \right) - \frac{2m+1}{\xi^2} \frac{d\bar{U}_i}{d\xi}. \quad (53)$$

При этом

$$\Delta \bar{U}_i = \frac{d^2 \bar{U}_i}{d\xi^2} + \frac{2m+1}{\xi} \frac{d\bar{U}_i}{d\xi}; \quad \Delta \bar{W}_i = (\beta^2 p^2 + p) \bar{W}_i. \quad (54)$$

Частное решение в (52) ищем в виде $\bar{U}_{i\text{чп}}(\xi, p) = A \frac{d\bar{W}_i}{d\xi}$, где постоянная A подлежит нахождению. Подставляя это выражение в (52) и используя (53)-(54), находим $A = \frac{1}{p^2(\beta^2 - 1) + p}$. Таким образом, общее решение уравнения (49) с учетом граничного условия (51) будет иметь вид:

$$\bar{U}_i(\xi, p) = C \left[\frac{1}{\xi^m} K_{m+1}(\xi p) \right] - \bar{\varphi}_i(\xi_0 p) (\xi_0 / \xi)^m K_{m+1}[\xi \bar{\mu}(p)], \quad (55)$$

где

$$\bar{\varphi}_i(\xi_0, p) = \begin{cases} \frac{A \cdot \bar{\mu}(p)}{p(1-2\gamma) K_m[\xi_0 \bar{\mu}(p)]}, & i=1; \\ \frac{A \cdot \bar{\mu}^{-2}(p)}{p^2(1-2\gamma) K_{m+1}[\xi_0 \bar{\mu}(p)]}, & i=2; \end{cases} \quad (56)$$

$$\bar{\varphi}_i(\xi_0, p) = \frac{A \cdot B i^* \bar{\mu}^{-2}(p)}{p(1-2\gamma) [p K_{m+1}(\xi_0 \bar{\mu}(p)) + B i^* \bar{\mu}(p) K_m(\xi_0 \bar{\mu}(p))]}, \quad i=3. \quad (57)$$

Здесь было использовано соотношение

$$\frac{d}{d\xi} \left[\xi^{-m} K_m(\xi \bar{\mu}(p)) \right] = -\bar{\mu}(p) \xi^{-m} K_{m+1} \left[\xi \bar{\mu}(p) \right]. \quad (58)$$

Используя свойства функций Бесселя, находим после длительных преобразований следующее важное соотношение, имеющее принципиальное значение для нахождения аналитического решения обобщенной проблемы (37)-(44):

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{\xi^m} K_{m+1}(\xi p) \right] + \frac{(2m+1)v}{(1-v)} \frac{1}{\xi^{m+1}} K_{m+1}(\xi p) = -\frac{1}{\xi^{m+1}} \bar{\Theta}(\xi p), \quad (59)$$

где

$$\bar{\Theta}(\xi p) = \xi p K_m(\xi p) + (2m+1) \frac{(1-2v)}{(1-v)} K_{m+1}(\xi p). \quad (60)$$

Соотношения (59)-(60) и граничное условие (50) позволяют определить постоянную величину в (55), а вместе с этим искомого перемещение. Находим:

$$\begin{aligned} \bar{U}_i(\xi, p) &= \frac{(\xi_0 / \xi)^m \bar{\Theta}[\xi_0 \mu(p)] K_{m+1}(\xi p) \bar{\varphi}_i(\xi_0 p)}{\bar{\Theta}(\xi_0 p)} - \\ & - \frac{(\xi_0 / \xi)^m K_m[\xi_0 \bar{\mu}(p)] K_{m+1}(\xi p) \bar{f}_i(\xi_0, p)}{\xi_0^{-1} \bar{\Theta}(\xi_0 p)} - \\ & - (\xi_0 / \xi)^m \bar{\varphi}_i(\xi_0, p) K_{m+1}[\xi \bar{\mu}(p)]. \end{aligned} \quad (61)$$

Находим искомого напряжение:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)(1-2\gamma)}{(\xi_0 / \xi)^m} &= \frac{(\xi_0 / \xi) \bar{\Theta}(\xi p) K_m[\xi_0 \bar{\mu}(p)] \bar{f}_i(\xi_0, p)}{\bar{\Theta}(\xi_0 p)} + \\ & + \frac{\bar{\varphi}_i(\xi_0, p) \bar{\Theta}[\xi \bar{\mu}(p)]}{\xi} - \frac{\bar{\varphi}_i(\xi_0, p) \bar{\Theta}[\xi_0 \bar{\mu}(p)] \bar{\Theta}(\xi p)}{\xi \bar{\Theta}(\xi_0 p)} - \bar{f}_i(\xi_0, p) K_m[\xi \bar{\mu}(p)]. \end{aligned} \quad (62)$$

Теперь можно записать для напряжений операционные соотношения для всех трех видов нагрева:

Температурный нагрев–охлаждение ($i = 1$):

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)(1-2\gamma)}{(\xi_0/\xi)^m} &= \frac{(\xi_0/\xi)\bar{\Theta}(\xi p)}{p\bar{\Theta}(\xi_0 p)} + \frac{A \cdot \bar{\mu}(p)\bar{\Theta}[\xi\bar{\mu}(p)]}{\xi p K_m[\xi_0\bar{\mu}(p)]} - \\ &- \frac{K_m[\xi\bar{\mu}(p)]}{p K_m[\xi_0\bar{\mu}(p)]} - \frac{A \cdot \bar{\mu}(p)\bar{\Theta}[\xi_0\bar{\mu}(p)]\bar{\Theta}(\xi p)}{\xi p K_m[\xi_0\bar{\mu}(p)]\bar{\Theta}(\xi_0 p)}; \end{aligned} \quad (63)$$

Тепловой нагрев–охлаждение ($i = 2$):

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)(1-2\gamma)}{(\xi_0/\xi)^m} &= \frac{(\xi_0/\xi)\bar{\mu}(p)\bar{\Theta}(\xi p)K_m[\xi_0\bar{\mu}(p)]}{p^2\bar{\Theta}(\xi_0 p)K_{m+1}[\xi_0\bar{\mu}(p)]} + \\ &+ \frac{A \cdot \bar{\mu}^2(p)\bar{\Theta}(\xi\bar{\mu}(p))}{\xi p^2 K_{m+1}[\xi_0\bar{\mu}(p)]} - \frac{\bar{\mu}(p)K_m[\xi\bar{\mu}(p)]}{p^2 K_{m+1}[\xi_0\bar{\mu}(p)]} - \frac{A \cdot \bar{\mu}^2(p)\bar{\Theta}(\xi p)\bar{\Theta}[\xi_0\bar{\mu}(p)]}{\xi p^2\bar{\Theta}(\xi_0 p)K_{m+1}[\xi_0\bar{\mu}(p)]}; \end{aligned} \quad (64)$$

Нагрев–охлаждение средой ($i = 3$):

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)(1-2\gamma)}{(\xi_0/\xi)^m} &= \frac{(\xi_0/\xi)\bar{\Theta}(\xi p)K_m[\xi_0\bar{\mu}(p)]Bi^*\bar{\mu}(p)}{p\bar{\Theta}(\xi_0 p)[pK_{m+1}(\xi_0\bar{\mu}(p)) + Bi^*\bar{\mu}(p)K_m(\xi_0\bar{\mu}(p))]} + \\ &+ \frac{A \cdot Bi^*\bar{\mu}^2(p)\bar{\Theta}[\xi\bar{\mu}(p)]}{\xi p [pK_{m+1}(\xi_0\bar{\mu}(p)) + Bi^*\bar{\mu}(p)K_m(\xi_0\bar{\mu}(p))]} - \\ &- \frac{A \cdot Bi^*\bar{\mu}^2(p)\bar{\Theta}[\xi_0\bar{\mu}(p)]\bar{\Theta}(\xi p)}{\xi p [pK_{m+1}(\xi_0\bar{\mu}(p)) + Bi^*\bar{\mu}(p)K_m(\xi_0\bar{\mu}(p))]\bar{\Theta}(\xi_0 p)} - \\ &- \frac{Bi^*\bar{\mu}(p)K_m[\xi\bar{\mu}(p)]}{p [pK_{m+1}(\xi_0\bar{\mu}(p)) + Bi^*\bar{\mu}(p)K_m(\xi_0\bar{\mu}(p))]}; \end{aligned} \quad (65)$$

Обратное преобразование в (63)-(65) оказывается весьма трудоемким и приводит к сложным и трудно обозримым выражениям. Но если учесть, что в постановке задачи (38)-(45) имеют место инерционные эффекты микросекундной длительности [10], во времена которых напряжения $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ как раз и достигают максимальных значений, то можно рассмотреть малые времена τ , соответствующие в изображениях большим p , то есть непосредственно после теплового удара. Для этого используем в (63)-(65) асимптотическое представление цилиндрических функций для больших p

$$K_v(p) = \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{p}} \exp(-p) (v \geq 0). \quad (66)$$

Введем далее следующие обозначения:

$$A_m(\xi) = \frac{(2m+1)(1-2v)}{(1-v)\xi}; \quad \gamma_1 = \frac{1}{1-\beta^2}. \quad (67)$$

Введем также новую функцию для данного класса задач – Кар-функцию

$$\bar{\chi}_m(\xi, p) = \frac{p + A_m(\xi)}{(p - \gamma_1)[p + A_m(\xi_0)]}, \quad (68)$$

которую используем при нахождении оригиналов найденных изображений. Оригинал этой функции имеет вид:

$$\chi_m(\xi, \tau) = \frac{\gamma_1 + A_m(\xi)}{\gamma_1 + A_m(\xi_0)} \left[\frac{A_m(\xi_0) - A_m(\xi)}{\gamma_1 + A_m(\xi)} \exp(-A_m(\xi_0)\tau) + \exp(\gamma_1\tau) \right]. \quad (69)$$

После преобразований находим:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)(1-2\gamma)}{(\xi_0/\xi)^{m+1/2}} = \\ = -\bar{\Psi}_1(\xi, p) \exp[-(\xi - \xi_0)\bar{\mu}(p)] + \bar{\Psi}_2(\xi, p) \exp[-(\xi - \xi_0)p], \end{aligned} \quad (70)$$

при температурном нагреве–охлаждении ($i = 1$)

$$\bar{\Psi}_1(\xi, p) = \left\{ \frac{\gamma_1 \bar{\mu}(p) [\bar{\mu}(p) + A_m(\xi)]}{p^2(p - \gamma_1)} + \frac{1}{p} \right\}; \quad (71)$$

$$\bar{\Psi}_2(\xi, p) = \left\{ \frac{p - \gamma_1}{p} \bar{\chi}_m(\xi, p) + \frac{\gamma_1 \bar{\mu}(p) [\bar{\mu}(p) + A_m(\xi_0)] \bar{\chi}_m(\xi, p)}{p^2} \right\}; \quad (72)$$

при тепловом нагреве–охлаждении ($i = 2$)

$$\bar{\Psi}_1(\xi, p) = \left\{ \frac{\gamma_1 \bar{\mu}^2(p) [\bar{\mu}(p) + A_m(\xi)]}{p^3(p - \gamma_1)} + \frac{\bar{\mu}^2(p)}{p^2} \right\}; \quad (73)$$

$$\bar{\Psi}_2(\xi, p) = \left\{ \frac{\bar{\mu}(p)(p - \gamma_1)\bar{\chi}_m(\xi, p)}{p^2} + \frac{\gamma_1\bar{\mu}^2(p)[\bar{\mu}(p) + A_m(\xi_0)]\bar{\chi}_m(\xi, p)}{p^3} \right\}; \quad (74)$$

при нагреве–охлаждении средой ($i = 3$)

$$\bar{\Psi}_1(\xi, p) = \left\{ \frac{\gamma_1 Bi^* \bar{\mu}^2(p)[\bar{\mu}(p) + A_m(\xi)]}{p^2(p - \gamma_1)[p + Bi^* \bar{\mu}(p)]} + \frac{Bi^* \bar{\mu}(p)}{p[p + Bi^* \bar{\mu}(p)]} \right\}; \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_2(\xi, p) = \\ = \left\{ \frac{Bi^* \bar{\mu}(p)(p - \gamma_1)\bar{\chi}_m(\xi, p)}{p[p + Bi^* \bar{\mu}(p)]} + \frac{\gamma_1 Bi^* \bar{\mu}^2(p)[\bar{\mu}(p) + A_m(\xi_0)]\bar{\chi}_m(\xi, p)}{p^2[p + Bi^* \bar{\mu}(p)]} \right\}. \end{aligned} \quad (76)$$

При нахождении оригиналов в (70) следует обратить внимание на величину параметра $\beta = v_p / v_T$. Так для органического стекла $\beta = 0,4$, для кварца и кремния $\beta = 0,7$, то есть $\beta < 1$; для стали $\beta = 3,4$, для кристаллов и алюминия $\beta = 1,8$, то есть $\beta > 1$. Величина параметра β играет определяющую роль в записи интервалов изменения напряжения $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$. Находим для напряжений:

при $\beta < 1$:

$$\frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)(1 - 2\gamma)}{(\xi_0 / \xi)^{m+1/2}} = \begin{cases} 0, & \tau < (\xi - \xi_0)\beta, \\ -\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau), & (\xi - \xi_0)\beta < \tau < (\xi - \xi_0), \\ -\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \tau > (\xi - \xi_0); \end{cases} \quad (77)$$

при $\beta > 1$:

$$\frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)(1 - 2\gamma)}{(\xi_0 / \xi)^{m+1/2}} = \begin{cases} 0, & \tau < (\xi - \xi_0), \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & (\xi - \xi_0) < \tau < (\xi - \xi_0)\beta, \\ -\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \tau > \beta(\xi - \xi_0). \end{cases} \quad (78)$$

Здесь $\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau)$ – оригинал изображения

$$\bar{\Psi}_1(\xi, p) \exp\left[-(\xi - \xi_0)\beta\sqrt{p^2 + p/\beta^2}\right];$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \Psi_2[\xi, \tau - (\xi - \xi_0)].$$

Переходя к оригиналам, запишем аналитические соотношения для напряжений во всех трех случаях нагрева:

- температурный нагрев–охлаждение ($i = 1$)

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau)}{\eta[\tau - (\xi - \xi_0)\beta]} = \\ & = \gamma_1 \left\{ \exp\left[\gamma_1(\tau - (\xi - \xi_0)\beta) - \frac{\xi - \xi_0}{2\beta}\right] + \frac{\xi - \xi_0}{2\beta} J_1 \right\} + \frac{\gamma_1 A_m(\xi)}{\beta} J_2 - \frac{A_m(\xi)}{\beta} J_3, \\ & J_1 = \int_{(\xi - \xi_0)\beta}^{\tau} \exp[\gamma(\tau - \tau') - B\tau'] \frac{I_1(B\sqrt{\tau'^2 - (\xi - \xi_0)^2 \beta^2})}{\sqrt{\tau'^2 - (\xi - \xi_0)^2 \beta^2}} d\tau', \\ & J_2 = \int_{(\xi - \xi_0)\beta}^{\tau} \exp[\gamma_1(\tau - \tau') - B\tau'] I_0(B\sqrt{\tau'^2 - (\xi - \xi_0)^2 \beta^2}) d\tau', \\ & J_3 = \int_{(\xi - \xi_0)\beta}^{\tau} \exp[-B\tau'] I_0(B\sqrt{\tau'^2 - (\xi - \xi_0)^2 \beta^2}) d\tau', \\ & B = \frac{1}{2\beta^2}, \end{aligned} \tag{79}$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \Psi_2[\xi, \tau - (\xi - \xi_0)], \tag{80}$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_2(\xi, \tau) = & \gamma_1 \chi_m(\xi, \tau) + A_m(\xi_0) \left[2\beta \int_0^{\tau} \chi_m(\xi, \tau') d\tau' \right] - \\ & - \beta \int_0^{\tau} \exp[-B(\tau - \tau')] \chi_m(\xi, \tau') d\tau'. \end{aligned} \tag{81}$$

- тепловой нагрев–охлаждение ($i = 2$):

$$\frac{\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau)}{\eta[\tau - (\xi - \xi_0)\beta]} = \gamma_1 \beta \exp[-B\tau] I_0(B\sqrt{\tau^2 - (\xi - \xi_0)^2 \beta^2}) + \frac{\gamma^2}{\beta} J_2 +$$

$$+ A_m(\xi) \left\{ \exp[(\gamma_1 - 1)(\tau - (\xi - \xi_0)\beta) - 1] \exp[-B\tau] + \frac{\xi - \xi_0}{2\beta} J_4 \right\}, \quad (82)$$

$$J_4 = \int_{(\xi - \xi_0)\beta}^{\tau} \exp[(\gamma - 1)(\tau - \tau') - 1] \exp[-B\tau'] \frac{I_1(B\sqrt{\tau'^2 - (\xi - \xi_0)^2 \beta^2})}{\sqrt{\tau'^2 - (\xi - \xi_0)^2 \beta^2}} d\tau'.$$

$$\Psi_2(\xi, \tau) = \gamma_1 \beta \chi_m(\xi, \tau) + \frac{\gamma_1 [1 + 2\beta^3 A_m(\xi_0)]}{2\beta} \int_0^{\tau} \chi_m(\xi, \tau') d\tau' +$$

$$+ \gamma_1 A_m(\xi_0) \int_0^{\tau} (\tau - \tau') \chi_m(\xi, \tau') d\tau'; \quad (83)$$

- нагрев–охлаждение средой ($i = 3$):

для этого случая при нахождении оригинала используем разложение изображения $\bar{\mu}(p) = \beta p \left[1 + 1/(\beta^2 p) \right]^{1/2}$ в биномиальный ряд. Введем также ряд обозначений:

$$\gamma_1 = 1 + \gamma\beta^2; \quad \gamma_2 = \frac{1}{1 + Bi^* \beta}; \quad \gamma_3 = \frac{Bi^*}{2\beta(1 + Bi^* \beta)};$$

$$A_1 = \gamma_1 - \frac{\gamma_2 [\gamma_1^2 + (\gamma_1 - 1) Bi^* A_m(\xi)]}{\gamma_1 + \gamma_3};$$

$$A_2 = \frac{\gamma_2 [\gamma_1^2 + (\gamma_1 - 1) Bi^* A_m(\xi)]}{\gamma_1 + \gamma_3} - \gamma_1 \gamma_2 + 2\beta A_m(\xi); \quad A_3 = -2\beta A_m(\xi);$$

$$A_4 = [\gamma_1 \gamma_2 (1 + \gamma_3) - \gamma_2 \gamma_3 - \gamma_1 (1 + \gamma_2) \beta A_m(\xi_0)].$$

Находим искомые оригиналы:

$$\begin{aligned}
\Psi_1(\xi, \tau) &= A_1 \left\{ \exp[\gamma_1(\tau - (\xi - \xi_0)\beta) - (\xi - \xi_0)/2\beta] \right\} + \\
&+ \frac{A_1(\xi - \xi_0)}{2\beta} J_6 \eta[\tau - (\xi - \xi_0)\beta] + \\
&+ A_2 \left\{ \exp[-\gamma_3(\tau - (\xi - \xi_0)\beta) - (\xi - \xi_0)/2\beta] + \frac{\xi - \xi_0}{2\beta} J_7 \right\} \eta[\tau - (\xi - \xi_0)\beta] + \\
&+ A_3 \left\{ \exp[-(1/2\beta)(\xi - \xi_0)] + \frac{\xi - \xi_0}{2\beta} \right\} \eta[\tau - (\xi - \xi_0)\beta]; \\
J_6 &= \int_{(\xi - \xi_0)\beta}^{\tau} \exp[\gamma_1(\tau - \tau') - B\tau'] \frac{I_1(B\sqrt{\tau'^2 - (\xi - \xi_0)^2\beta^2})}{\sqrt{\tau'^2 - (\xi - \xi_0)^2\beta^2}} d\tau', \\
J_7 &= \int_{(\xi - \xi_0)\beta}^{\tau} \exp[-B\tau'] \frac{I_1(B\sqrt{\tau'^2 - (\xi - \xi_0)^2\beta^2})}{\sqrt{\tau'^2 - (\xi - \xi_0)^2\beta^2}} d\tau'; \tag{84}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_2(\xi, \tau) &= \gamma_1(1 - \gamma_2)\chi_m(\xi, \tau) + 2\beta A_m(\xi_0) \int_0^{\tau} \chi_m(\xi, \tau') d\tau' + \\
&+ A_4 \int_0^{\tau} \exp[-\gamma_3(\tau - \tau')] \chi_m(\xi, \tau') d\tau'. \tag{85}
\end{aligned}$$

Таким образом, полученные соотношения (77)-(85) завершают решение практически важной задачи о термической реакции массивного тела с внутренними полостями. В дополнение к развитому подходу можно указать весьма эффективный способ оценки величины термических напряжений, практически не применявшийся ранее в теории теплового удара. Как следует из операционного решения динамической задачи, наличие в (70) слагаемого $\bar{\Psi}_2(\xi, p) \exp[-(\xi - \xi_0)p]$ показывает, можно предложить расчетную инженерную формулу для верхней оценки величины температурного напряжения через скачок напряжений в (70) на фронте термоупругой волны. Для этого используем теорему запаздывания [6] в виде

$$\bar{\Psi}(\xi, p) \exp[-(\xi - \xi_0)p] \leftarrow \begin{cases} 0, & \tau < \xi - \xi_0, \\ \Psi_2[\xi, \tau - (\xi - \xi_0)], & \tau > \xi - \xi_0, \end{cases}$$

откуда видно, что в точке $(\xi - \xi_0)$ происходит скачок функции $\Psi_2(\xi, \tau)$, величина которого рассчитывается по формуле

$$|\Delta| = \lim_{\tau \rightarrow (\xi - \xi_0) + 0} \Psi_2[\xi, \tau - (\xi - \xi_0)] = \lim_{\tau \rightarrow 0 +} \Psi_2(\xi, \tau) = \lim p \bar{\Psi}_2(\xi, p).$$

Вначале находим величину скачка для напряжений $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ в координатах (ξ, τ) , затем переходим к исходным напряжениям в исходных областях (13)-(32), используя формулы перехода (34)-(37). В результате для режима температурного нагрева (72) находим:

$$|\Delta| = \left| \sigma_{zz}; \sigma_{\rho\rho}; \sigma_{rr} \right|_{\max} = \begin{cases} \frac{2G\gamma_1(1+\nu)\alpha_T |T_c - T_0|}{(1-2\nu)}, m = -1/2; \\ \frac{(R/\rho)2G\gamma_1(1+\nu)\alpha_T |T_c - T_0|}{(1-2\nu)}, m = 1/2; \\ \frac{\sqrt{R/r}2G\gamma_1(1+\nu)\alpha_T |T_c - T_0|}{(1-2\nu)}, m = 0. \end{cases} \quad (86)$$

Оценки (86) справедливы как при интенсивном нагреве ($T_c > T_0$), когда в фиксированном сечении $\xi = const > \xi_0$ возникают напряжения сжатия, так и при охлаждении ($T_c < T_0$), когда возникают более опасные напряжения растяжения.

Физический анализ решения

На рис. 1 представлены кривые зависимости напряжения (77), (79)-(81) (температурный нагрев) от времени в фиксированном сечении $\xi = 1$ при $\xi_0 = 0, 1, \nu = 0, 3, \beta = 0, 4$ для $m = -1/2; 0; 1/2$. На рис. 2 представлены кривые для напряжений (температурный нагрев) при тех же данных, но для $\beta = 0$, то есть для случая классической феноменологии Фурье на основе уравнений параболического типа.

Представляет интерес сравнить указанные два подхода, а именно описать влияние гиперболичности динамической задачи (то есть влияние локальной неравновесности в системе) на величину температурных напряжений. Выпишем решение «параболической» задачи теплового удара при температурном нагреве для всех трех описанных выше областей, учитывая, что эта часть исследований также представляет большой практический интерес и до настоящего времени также является открытой проблемой.

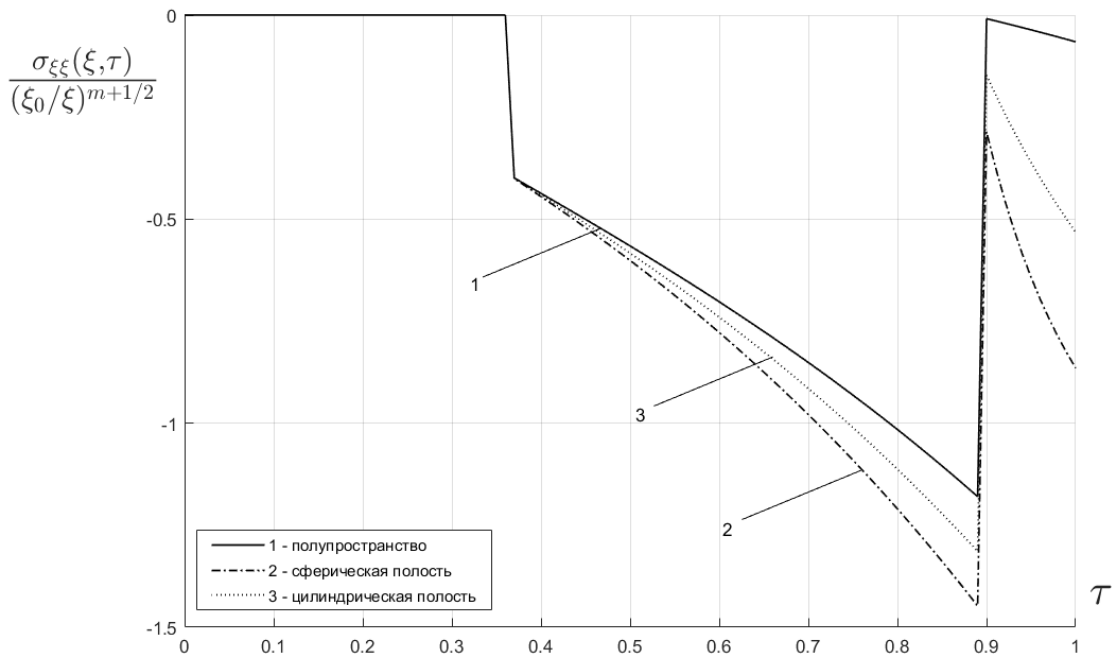


Рис. 1. Зависимость напряжения от времени в сечении $\xi = 1$ при $\xi_0 = 0,1, \nu = 0,3, \beta = 0,4, \gamma = 0$. Рассчитано по формулам (77)-(81) для $m = -1/2$ (кривая 1), $m = 1/2$ (кривая 2), $m = 0$ (кривая 3)

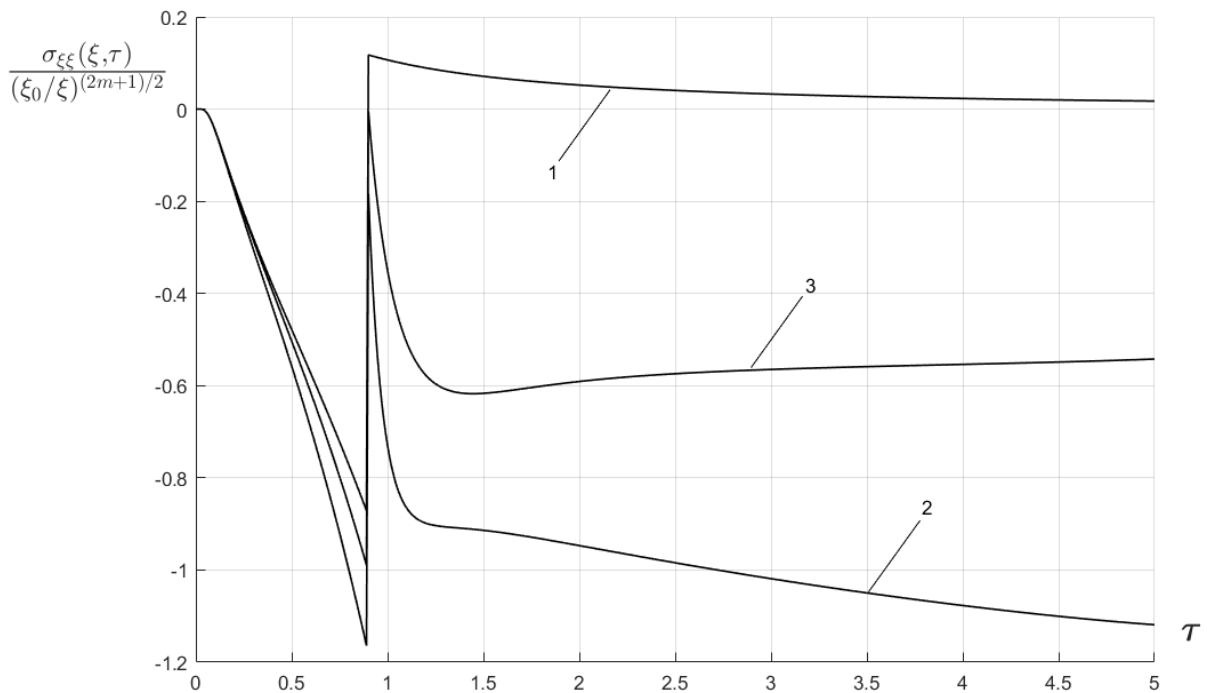


Рис. 2. Зависимость напряжения от времени в сечении $\xi = 1$ при $\xi_0 = 0,1, \nu = 0,3$ ($\beta = 0$). Рассчитано по формулам (87)-(89) для $m = -1/2$ (кривая 1), $m = 1/2$ (кривая 2), $m = 0$ (кривая 3).

$$\frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{(\xi_0 / \xi)^{m+1/2}} = \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \begin{cases} 0, \tau < \xi - \xi_0, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), \tau > \xi - \xi_0, \end{cases} \quad (87)$$

где $\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = -\Psi_1^*(\xi, \tau)$; $\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \Psi_2^*[\xi, \tau - (\xi - \xi_0)]$;

$$\begin{aligned} \Psi_1^*(\xi, \tau) = & \frac{1}{2} \left\{ \exp[\tau - (\xi - \xi_0)] \Phi^*\left(\frac{\xi - \xi_0}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau}\right) + \exp[\tau + (\xi - \xi_0)] \Phi^*\left(\frac{\xi - \xi_0}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\right) \right\} + \\ & + A_m(\xi) \left\langle \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \exp(\tau - (\xi - \xi_0)) \Phi^*\left(\frac{\xi - \xi_0}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau}\right) \\ - \exp(\tau + (\xi - \xi_0)) \Phi^*\left(\frac{\xi - \xi_0}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\right) \end{bmatrix} \right\rangle - \\ & - \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(\xi - \xi_0)^2}{4\tau}\right] + (\xi - \xi_0) \Phi^*\left(\frac{\xi - \xi_0}{2\sqrt{\tau}}\right); \end{aligned} \quad (88)$$

$$\Psi_2^*(\xi, \tau) = \chi_m(\xi, \tau) + \frac{2A_m(\xi_0)}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \sqrt{\tau - \tau'} \chi_m(\xi, \tau') d\tau'. \quad (89)$$

Здесь $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z)$, $\Phi(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z \exp(-y^2) dy$ – функция Лапласа.

Как следует из графиков, учет конечной скорости распространения теплоты приводит к существенному изменению картины динамических температурных напряжений по сравнению с данными на рис. 2. Соотношение (77), в отличие от (87), показывает наличие двух скачков напряжений: один – на фронте тепловой волны, другой – на фронте упругой волны, идущие соответственно со скоростями v_T и v_p . Рассмотрим фиксированное сечение внутри области $\xi > \xi_0$. При $\beta < 1$ напряжения в сечении в начале равны нулю. В момент времени $\tau = \beta(\xi - \xi_0)$ к этому сечению приходит тепловая волна напряжений, фронт которой движется со скоростью v_T ; возникает скачком сжимающее напряжение, которое дальше возрастает. В момент времени $\tau = \xi - \xi_0$ к сечению подходит продольная упругая волна, что вызывает скачкообразное изменение напряжения и его дальнейшее уменьшение. Кривые на рис. 1 показывают и другой интересный результат: наиболее «уязвимой» (в смысле термической реакции) является область с внутренней сферической полостью. Во всех трех случаях ($m = -1/2$, $m = 0$, $m = 1/2$) возникающие напряжения являются сжимающими. Оценки (86) отчетливо показывают, что приповерхностные слои (вблизи границы тела (области)) в наибольшей степени

подвержены термическому удару. Что касается теплового удара в классическом случае (рис. 2), то здесь наибольшие напряжения сжатия характерны для массивного тела, ограниченного плоской поверхностью ($m=-1/2$). При этом после прохождения волны расширения (за счет функции $\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau)$ в (87)) напряжение переходит в область положительных (растягивающих) значений и затем быстро убывает, достигая квазистатических значений.

Заключение

Развиты обобщенные модельные представления теплового удара в терминах динамической термоупругости для локально-неравновесных процессов переноса теплоты. Получено аналитическое решение (открытой) обобщенной задачи термической реакции массивных тел с внутренними полостями одновременно в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат при температурном нагреве, тепловом нагреве, нагреве средой границы твердого тела. Проведены численные эксперименты, показывающие влияние локальной неравновесности на кинетику температурных напряжений (по сравнению с классической феноменологией Фурье). Предложены важные в практическом отношении расчетные инженерные соотношения для верхней границы температурных напряжений при интенсивном температурном нагреве.

Библиографический список

1. Карташов Э.М. Модельные представления теплового удара в динамической термоупругости // Российский технологический журнал. 2020;8(2):35-108.
2. Карташов Э.М., Ненахов Е.В. Модельные представления теплового удара массивного тела с внутренней полостью // Математическое моделирование. 2021; 33(4):116-132.
3. Карташов Э.М. Новые операционные соотношения для математических моделей локально-неравновесного теплообмена // Российский технологический журнал. 2022; 10(1):7-18.
4. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Математическая модель локально-неравновесного теплопереноса с учетом пространственно-временной нелокальности // Инженерно-физич.журн. 2015;(92):393-408.
5. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В. Разработка и исследование сильно неравновесной модели теплообмена в жидкости с учетом пространственно-временной нелокальности // Теплофизика и аэромеханика. 2017;24(6):929-935.
6. Кирсанов Ю.А., Кирсанов А.Ю. Об измерении времени тепловой релаксации твердых тел // Изв.РАН, Энергетика. 2015;1; 113-122.

7. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. М.: URSS;2012;1080 с.
8. Соболев С.Л. Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах // Успехи физических наук.1991;161(3);5-29.
9. Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса. Успехи физических наук.1997;167(10); 1095-1106.
10. Карташов Э.М. Аналитические решения гиперболических моделей теплопроводности // Инженерно-физич. журн.2014;87(5); 1072-1081.
11. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и термоупругости. М.: URSS;2012. 670 с.