



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 12 за 2022 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Н.С. Климов, К.М. Гуторов,
Д.В. Коваленко, [А.Н. Козлов](#),
[В.С. Коновалов](#), В.Л. Подковыров,
А.Д. Ярошевская

Спектры излучения в потоках
ионизирующихся газов для
установки КСПУ-Т с
продольным полем

Статья доступна по лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Спектры излучения в потоках ионизирующихся газов для установки КСПУ-Т с продольным полем / Н.С. Климов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 12. 32 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-12>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-12>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

**Н.С. Климов, К.М. Гуторов,
Д.В. Коваленко, А.Н. Козлов,
В.С. Коновалов, В.Л. Подковыров,
А.Д. Ярошевская**

**Спектры излучения
в потоках ионизирующихся газов
для установки КСПУ-Т
с продольным полем**

Москва — 2022

*Климов Н.С., Гуторов К.М., Коваленко Д.В., Козлов А.Н., Коновалов В.С.,
Подковыров В.Л., Ярошевская А.Д.*

Спектры излучения в потоках ионизирующихся газов для установки КСПУ-Т с продольным полем

Представлены результаты расчетов спектральных и интегральных характеристик излучения в потоках ионизирующихся газов в канале квазистационарного плазменного ускорителя при наличии дополнительного продольного магнитного поля. В основе численной модели радиационной магнитной газодинамики лежат модифицированные уравнения переноса для многокомпонентной среды, состоящей из атомов, ионов и электронов. МГД уравнения для двумерных осесимметричных течений представлены в терминах азимутальных компонент магнитного поля и векторного потенциала магнитного поля с учетом электропроводности, теплопроводности и переноса излучения. Спектральные и интегральные характеристики излучения определены в рамках 3D модели с помощью метода длинных характеристик в многогрупповом приближении.

Ключевые слова: уравнения радиационной магнитной газодинамики, течения ионизирующегося газа, спектры излучения, плазменный ускоритель

*Klimov N.S., Gutorov K.M., Kovalenko D.V., Kozlov A.N., Konovalov V.S.,
Podkovyrov V.L., Yaroshevskaya A.D.*

Radiation spectra in ionizing gas flows for the QSPA-T installation with a longitudinal field

The results of calculations of the spectral and integral characteristics of radiation in flows of ionizing gases in the channel of the quasi-stationary plasma accelerator in the presence of an additional longitudinal magnetic field are presented. The numerical model of the radiative magnetogasdynamics is based on the modified transport equations for the multicomponent medium consisting of atoms, ions, and electrons. The MHD equations for two-dimensional axisymmetric flows are presented in terms of the azimuthal components of magnetic field and vector potential of magnetic field, taking into account the electrical conductivity, thermal conductivity, and radiation transport. The spectral and integral characteristics of radiation were determined within the framework of the 3D model using the method of long characteristics in the multigroup approximation.

Key words: equations of radiative magnetic gas dynamics, flows of ionizing gas, radiation spectra, plasma accelerator

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-29-21007_мк).

Введение

Комплексное изучение процессов в плазме и различных установках для ее генерации основано на теоретических, численных и экспериментальных исследованиях. Одной из установок, обеспечивающей генерацию высокоскоростных потоков достаточно плотной плазмы, является квазистационарный плазменный ускоритель (КСПУ), предложенный А.И. Морозовым [1-2]. Плазменные ускорители разработаны в различных научных центрах (см., например, [2-13]) и являются многофункциональными установками, предназначенными для исследований по программе управляемого термоядерного синтеза (УТС) и технологических приложений. В последние годы особый интерес к установкам КСПУ связан с космическими приложениями и перспективами использования плазменных ускорителей в качестве мощных электрореактивных плазменных двигателей (ЭРПД) при наличии компактных атомных реакторов на борту космических аппаратов. Новая установка КСПУ-Т [6] разработана в АО «ГНЦ РФ ТРИНИТИ». Ускорение плазмы в КСПУ происходит за счет силы Ампера $\frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}$, где ток в плазме \mathbf{j} , имеющий преимущественно радиальное направление, протекает между коаксиальными электродами, подключенными к электрической цепи. При этом электрический ток, протекающий вдоль внутреннего электрода, генерирует азимутальное магнитное поле.

В некоторых плазменных ускорителях [2, 5, 6, 9, 13], включая установку КСПУ-Т, используется дополнительное продольное магнитное поле, которое позволяет уменьшить отрицательное воздействие приэлектродных процессов, а также может обеспечить эффективное взаимодействие между первой и второй ступенями КСПУ. Первые экспериментальные исследования КСПУ с дополнительным продольным магнитным полем, которое создавалось с помощью специальной конструкции внешнего электрода, были представлены в работе [13]. Продольное магнитное поле может быть создано также с помощью катушки Гельмгольца, которая представляет собой два одинаковых кольцевых токонесущих витка, расположенных на расстоянии радиуса витка (см., например, [5]). Такая катушка создает практически постоянное продольное магнитное поле в отсутствие плазменного ускорителя.

В двухступенчатых установках КСПУ, разработанных ранее [2-4, 7, 8, 11, 13], первая ступень состоит из набора малых коаксиальных плазменных ускорителей, в которых осуществляются ионизация поступающего газа и предварительное ускорение плазмы. Вторая ступень в полноблочных установках КСПУ представляет собой большой плазменный ускоритель, подключенный к независимой цепи питания. Двухступенчатая схема КСПУ предполагает непрерывную подачу плазмы на входе второй ступени, которая обеспечивает окончательное ускорение плазмы.

Помимо КСПУ существует ряд других установок для генерации плазмы. К ним относятся, например, стационарные плазменные двигатели, а также ионные и холловские двигатели (см., например, [14, 15, 16]). В данных установках используется разреженная плазма, а теоретические и численные исследования проводятся на основе кинетических уравнений для функции распределения.

Исследования процессов в плотной плазме проводятся с помощью уравнений магнитной газодинамики (МГД) (см., например, [2, 17-30]). Теоретические и численные исследования в КСПУ для достаточно плотной плазмы также проводятся на основе МГД уравнений и широко представлены в литературе (см., например, [31-45]). Эти и другие публикации отражают различные проблемы, связанные с переносом излучения, формированием фронта ионизации и трансзвуковых течений в каналах ускорителей, а также компрессионных потоков на выходе из КСПУ. В последние годы особое внимание уделяется изучению влияния дополнительного продольного магнитного поля на процессы в КСПУ [35], в том числе на приэлектродные процессы, обусловленные эффектом Холла [36, 37]. Процесс ионизации в малых плазменных ускорителях исследуется с помощью различных моделей, основанных на приближении локального термодинамического равновесия (ЛТР) [40], в рамках модифицированного диффузионного приближения [21, 41-43], а также с помощью системы уравнений поуровневой кинетики [44]. Исследование течений ионизирующегося газа при наличии дополнительного продольного магнитного поля в установке КСПУ представлено в данной работе и проведено в приближении ЛТР. Работы по изучению процессов ионизации и переноса излучения формируют отдельные направления исследований с актуальными научно-техническими приложениями в различных сферах.

Расчеты спектров излучения в потоках ионизирующихся газов и плазмы, представленные в данной работе, являются одним из элементов комплексных экспериментальных и теоретико-вычислительных исследований. В частности, уширение спектральных линий можно связать с характерной концентрацией в потоке, максимальная интенсивность ядра линий характеризует температуру среды, а смещение спектральных линий за счет эффекта Доплера связано с характерной скоростью потока. При этом спектральные характеристики в численной модели определяются для известных рассчитанных распределений термодинамических параметров плазмы. Кроме того, решения уравнения переноса излучения, найденные в различных направлениях на основе метода длинных характеристик [46-49], используются в дальнейшем для вычисления интегральных характеристик излучения, отвечающих плотности энергии излучения и потоку энергии излучения для различных точек канала ускорителя, охватывая весь спектр излучения. Для вычисления интегральных характеристик излучения разработана 3D модель, которая позволяет в деталях учесть геометрию излучающего объема и основные механизмы излучения и поглощения.

Модель радиационной магнитной газодинамики

Численная модель течений ионизирующегося газа основана на уравнениях переноса для многокомпонентной среды [18], состоящей из атомов, электронов и ионов. В уравнении переноса импульса для электронной компоненты пренебрегаем инерцией электронов $m_e \frac{d \mathbf{V}_e}{d t}$, поскольку $m_e \ll m_i = m_a = m$.

Учитывая, что скорость потока существенно меньше скорости света $V \ll c$, в уравнении Максвелла $rot \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ пренебрегаем током смещения

$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. В уравнении диффузии магнитного поля используем закон Ома в

классической форме $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{V}, \mathbf{H}]$, где проводимость определяется через сумму частот столкновений электрона с атомами и ионами.

Концентрация среды в установке КСПУ-Т является достаточно высокой $n = 10^{16} \div 10^{18} \text{ см}^{-3}$, а ее температура на формирующемся фронте ионизации увеличивается до уровня $1 \div 3 \text{ эВ}$. В этом случае среду можно считать квазинейтральной, поскольку радиус Дебая $R_D = \sqrt{k_B T / (4 \pi e^2 n_e)}$ является малой величиной по сравнению с характерными размерами системы и пространственными масштабами процессов, включая толщину фронта ионизации. Скорости всех компонент среды можно считать равными $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_e = \mathbf{V}$ в рамках одножидкостного приближения, используемого для достаточно плотной среды. Оценки и экспериментальные данные также показывают, что компоненты среды имеют примерно одинаковую температуру $T_a = T_i = T_e = T$. В результате преобразований исходных уравнений с учетом сделанных замечаний получим следующую модифицированную систему уравнений радиационной магнитной газодинамики (РМГД):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad \rho \frac{d \mathbf{V}}{d t} + \nabla P = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}, \quad \frac{d}{d t} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + div(\rho \varepsilon \mathbf{V}) + P div \mathbf{V} = \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} - div \mathbf{q} - div \mathbf{W}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = rot(\mathbf{V} \times \mathbf{H}) - c rot \frac{\mathbf{j}}{\sigma}, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} rot \mathbf{H},$$

$$P = P_a + P_i + P_e = (1 + \alpha)(c_p - c_v) \rho T, \quad \varepsilon = (1 + \alpha) c_v T + \varepsilon_I,$$

$$k_B / m = R = c_p - c_v = c_v (\gamma - 1), \quad \alpha = n_e / (n_a + n_i), \quad \mathbf{q} = -\kappa_e \nabla T.$$

Здесь $\rho = mn$ – плотность тяжелых частиц, $n = n_a + n_i$ – концентрация тяжелых частиц, P – суммарное давление, α – степень ионизации, \mathbf{q} – тепловой поток, κ_e – электронная теплопроводность, \mathbf{W} – поток энергии излучения.

В рамках РМГД модели учитывается радиационный перенос тепла с помощью слагаемого $\text{div } \mathbf{W}$ в уравнении для внутренней энергии. Плотность потока энергии излучения для низкотемпературной достаточно плотной плазмы может оказывать определенное влияние на перераспределение энергии в среде.

Внутренняя энергия на единицу массы ε содержит дополнительное слагаемое $\varepsilon_I = \zeta \alpha I / m_i$, определяющее потери энергии на ионизацию, где I – энергия ионизации атома. Джоулев нагрев $Q_{mp} = \mathbf{j}^2 / \sigma$ в уравнении для внутренней энергии, обусловленный взаимодействием электронов с тяжелыми частицами, существенно превосходит тепло, выделяемое при трении между собой тяжелых компонент.

Уравнения (1) содержат электропроводность многокомпонентной среды $\sigma = e^2 n_e / m_e \nu_e$. Средняя частота ν_e складывается из частот столкновений электронов с атомами и ионами:

$$\nu_e = \nu_{ea} + \nu_{ei}, \quad \nu_{ea} = n_a \langle V_e \rangle S_{ea}, \quad \nu_{ei} = n_i \langle V_e \rangle S_{ei},$$

где S_{ea} , S_{ei} – эффективные сечения столкновений. Эффективное сечение столкновения электронов с атомами для водорода определено в соответствии с работой [25] с помощью соотношения $S_{ea}^H = 1.2 \cdot 10^{-13} / \sqrt{T}$ [см²], в котором температура измеряется в градусах $^{\circ}K$.

Электронная теплопроводность также зависит от степени ионизации среды и определяется с помощью формул, представленных в [25]. При этом атомарная теплопроводность вносит определенный вклад при малых степенях ионизации. В целом теплопроводность не оказывает существенного влияния на динамику ионизирующихся газов.

Процесс ионизации описывается разными способами, представленными кратко во введении. Данное исследование проведено в рамках приближения ЛТР. При этом концентрации всех трех компонент среды и электронная температура связаны уравнением Саха

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = K_1(T) = \frac{2 \Sigma_i}{\Sigma_a} \left(\frac{m_e k_B T}{2 \pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{I}{k_B T} \right), \quad (2)$$

где K_1 – константа ионизационного состояния, а Σ_a и Σ_i – статистические суммы атома и иона. Приближение ЛТР предполагает, что в любом локальном объеме плазмы происходит два взаимно обратных процесса: прямой процесс ионизации атома из основного состояния в результате электронного удара и обратный процесс рекомбинации при столкновении иона с электронами $A + e \leftrightarrow A^+ + e + e$.

Учитывая, что концентрации компонент среды связаны с концентрацией тяжелых частиц: $n_e = n_i = \alpha n$ и $n_a = n - n_i = (1 - \alpha) n$, соотношение (2) при условии квазинейтральности позволяет определить степень ионизации с помощью следующего соотношения

$$\alpha = -K_1(T) / 2n + \sqrt{(K_1(T) / 2n)^2 + K_1(T) / n}. \quad (3)$$

Интегральные характеристики излучения, включая плотность энергии излучения U и плотность потока энергии излучения \mathbf{W} , определяются через интенсивность излучения $I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$, которое распространяется в направлении телесного угла $\mathbf{\Omega}$ с частотой ν и отвечает точке с координатой \mathbf{r} ,

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} \int_{0}^{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) d\Omega d\nu, \quad \mathbf{W}(\mathbf{r}) = \int_0^{\infty} \int_{0}^{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) \mathbf{\Omega} d\Omega d\nu. \quad (4)$$

Скорость распространения излучения существенно выше характерных скоростей плазмодинамических процессов. Поэтому поле излучения мгновенно подстраивается под распределение параметров потока, и можно ограничиться решением стационарного уравнения переноса излучения

$$\mathbf{\Omega} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \eta_\nu(\mathbf{r}) - \kappa_\nu(\mathbf{r}) \cdot I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}). \quad (5)$$

Здесь коэффициент поглощения $\kappa_\nu(\mathbf{r})$ и излучательная способность $\eta_\nu(\mathbf{r})$ отвечают процессам поглощения и излучения в линиях, фотоионизации и фоторекомбинации, а также рассеянию. Данные коэффициенты определяются с помощью следующих соотношений [19, 24, 46-48, 50]:

$$\begin{aligned} \kappa_\nu = & n \sum_{\substack{k < j \\ k, j = 1}}^{K-1} x_k \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{kj} \phi_{kj}(\nu) \left(1 - \frac{n_j g_k}{n_k g_j} \right) + n \sigma_K^{ff}(\nu) (1 - e^{-h\nu/k_B T}) + \\ & + n \sum_{k=1}^{K-1} x_k \sigma_k^{PI}(\nu) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi \hbar^2}{m_e k_B T} \right)^{3/2} \frac{n_i g_k}{n n_k \Sigma_i} \exp\left(\frac{h\nu_k - h\nu}{k_B T} \right) \right), \\ \eta_\nu = & n \sum_{\substack{k > j \\ j, k = 1}}^{K-1} x_k \frac{g_j \pi e^2}{g_k m_e c} f_{jk} \phi_{jk}(\nu) \frac{h\nu^3}{\pi c^2} + n \frac{h\nu^3}{\pi c^2} \sigma_K^{ff}(\nu) e^{-h\nu/k_B T} + \\ & + \sum_{k=1}^{K-1} n_i n_e \frac{(h\nu)^3}{4 \hbar^2 \pi^2 c^2} \left(\frac{2\pi \hbar^2}{m_e k_B T} \right)^{3/2} \sigma_k^{PI}(\nu) \frac{g_k}{\Sigma_i} \exp\left(\frac{h\nu_k - h\nu}{k_B T} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где ν – частота фотона, $x_k = n_k / n$ – относительная концентрация k -го состояния атома, g_k – статистический вес k -го состояния атома, f_{kj} – сила осцилляторов при переходе атома из k -го в j -е состояние, $\phi_{kj}(\nu)$ – профиль линии соответствующего связанно-связанного перехода, $\sigma_k^{PI}(\nu)$ – сечение

фотоионизации из k -го состояния, $\sigma_K^{ff}(\nu)$ – сечение обратного тормозного поглощения. Суммирование в формулах (6) проводится по всем состояниям, за исключением состояния $k = K$, отвечающего ионам с концентрацией n_i . Силы осцилляторов f_{kj}^i вычисляются с помощью известного кода [51].

Профиль спектральных линий рассчитывается по формуле Фойгта, которая учитывает разные по природе механизмы уширения линий,

$$\phi_{kj}(\nu) = \frac{\gamma_e}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2} ds}{(\nu - \nu_{kj} - s D)^2 + \gamma_e^2}, \quad (7)$$

где $D = \nu_{kj} V_a / c$ – ширина Доплера, V_a – характерная скорость атома, γ_e – суммарная ширина, обусловленная взаимодействием атома с окружающими его ионами, электронами и излучением. Значительное уширение спектральных линий связано с воздействием электронов для указанных выше значений концентрации и температуры. Расчет уширения γ_e за счет электронного удара проводится в соответствии с работами [24, 50], используя следующую формулу

$$\gamma_e = \frac{32}{3} \frac{\hbar^2 n_e}{m_e^2 \langle V_e \rangle} \ln \left(\frac{R_D}{R_W} + 0.215 \right) I(k, j), \quad (8)$$

где R_D – радиус Дебая, $R_W = a_0 \sqrt{2/3} \sqrt{I(k, j)} e^2 / (\hbar \langle V_e \rangle)$ – радиус Вайскопфа, $I(k, j) = 0.5(k^4 + j^4)$, $\langle V_e \rangle$ – средняя скорость электронов.

Формула Фойгта приводит к колоколообразной кривой для профиля линии, характерная ширина которой соответствует времени жизни состояния. Оптимальный способ вычисления профиля по формуле (7) изложен в [52]. С помощью формулы Фойгта вычисляются профили отдельных линий, для которых подробно описывается форма ядра и крыльев линий, используя несколько спектральных групп. Остальные линии в спектральном диапазоне рассматриваются в рамках одной группы. Весь спектр излучения в рамках многогруппового приближения разбивается на 300 и более спектральных групп.

Сечения указанных процессов рассчитываются в приближении Крамерса:

$$\sigma_k^{PI}(\nu) = \frac{38 \pi k e^2 a_0^2}{3\sqrt{3} \hbar c} \left(\frac{E_k}{h\nu} \right)^3, \quad \sigma_K^{ff}(\nu) = \frac{16 \pi^3}{3\sqrt{3}} \frac{n_e e^6}{4\pi^2 \hbar c m_e^2 \nu^3 \langle V_e \rangle},$$

где E_k – энергия ионизации с k -го уровня атома. Для атома водорода имеем $E_k = -Z^2 e^2 / (2 a_0 k^2)$, где a_0 – радиус Бора.

В приближении ЛТР населенности различных состояний атома в формулах (6) определяются с помощью соотношения Саха (2) и формулы Больцмана:

$$x_k = \frac{n_a g_k}{n \Sigma_a} \exp(-(E_k - E_1) / k_B T). \quad (9)$$

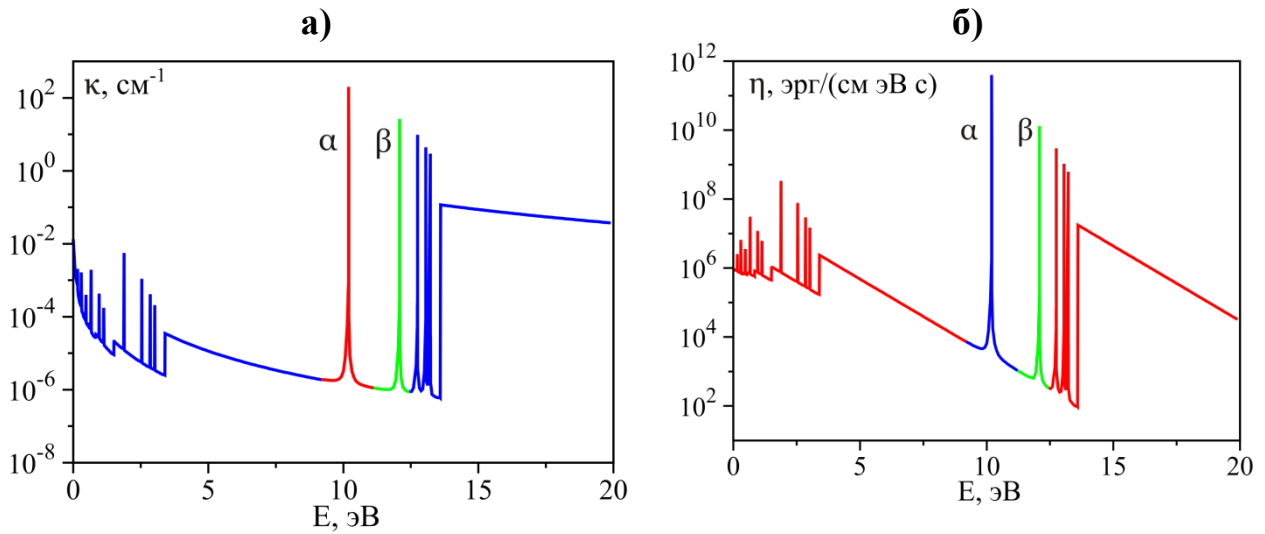


Рис. 1. Зависимости а) коэффициента поглощения и б) излучательной способности от энергии излучения

В качестве примера на рис. 1 представлены зависимости коэффициента поглощения и излучательной способности от энергии излучения для водородной плазмы при концентрации $n = 3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ и температуре $T = 1 \text{ эВ}$. Если в формулах (6) излучательная способность отвечает единичному интервалу частот, то на рис. 1 она отнесена к единичному интервалу энергии фотонов в 1 эВ. На данном рисунке отмечены α - и β -линии серии Лаймана, которые переносят значительную долю энергии линейчатого спектра [39]. Профили этих линий описываются более детально по формуле Фойгта, используя несколько спектральных групп, в отличие от остальных линий. Излучательная способность и коэффициент поглощения, представленные на рис. 1, рассчитаны в предположении равновесной заселенности уровней атома водорода в соответствии с формулой (9). Приведенные зависимости соответствуют трем группам процессов перехода электрона из одного энергетического состояния в другое, включая связанно-связанные процессы, отвечающие поглощению и излучению в линиях. Коэффициент поглощения в данном примере построен с учетом 15 уровней энергии.

Численное моделирование на основе уравнений (1) проводится в безразмерных переменных. В качестве единиц измерения взяты длина канала L , характерная концентрация или плотность газа n_0 ($\rho_0 = m n_0$) и температура T_0 на входе в канал ускорителя, а также характерная величина азимутального магнитного поля на входе $H_0 = 2J_p / c R_0$, где J_p – разрядный ток в системе, R_0 – характерный радиус канала. С помощью данных величин формируются единицы давления $P_0 = H_0^2 / 4\pi$, скорости $V_0 = H_0 / \sqrt{4\pi\rho_0}$, времени $t_0 = L / V_0$, электрического поля $E_0 = H_0 V_0 / c$, тока в плазме $j_0 = c H_0 / 4\pi L$, а также

потока энергии излучения $W_o = V_o H_o^2 / 4\pi$. Уравнения, безразмерные параметры и граничные условия определяют решение МГД задачи. Безразмерными параметрами являются, в частности, отношение характерного газового давления к магнитному $\beta = 8\pi P_o / H_o^2$ ($P_o = k_B n_o T_o$), параметр $T^* = I / k_B T_o$ и магнитная вязкость $\nu_m = 1 / \text{Re}_m = c^2 / 4\pi L V_o \sigma$, обратно пропорциональная магнитному числу Рейнольдса. Учитывая приведенное выше значение средней частоты ν_e столкновений электронов с атомами и ионами, для вычисления магнитной вязкости получим следующие соотношения

$$\nu_m = \frac{1}{\text{Re}_m} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}, \quad \sigma_1 = \frac{\alpha \sigma_{10}}{(1-\alpha)\sqrt{T}}, \quad \sigma_2 = \sigma_{20} T^{3/2},$$

где величины σ_{10} и σ_{20} выражаются через исходные размерные параметры и физические константы. Соответственно, магнитная вязкость и проводимость при малых степенях ионизации определяются столкновениями электронов с атомами, а полностью ионизованной среде отвечает проводимость Спитцера.

Уравнения с векторным потенциалом магнитного поля

Если в установке КСПУ-Т присутствует дополнительное продольное магнитное поле, то в МГД модели участвуют все три компоненты поля. Для осесимметричных течений плазмы ($\partial/\partial\varphi = 0$) можно использовать векторный потенциал \mathbf{A} магнитного поля с помощью соотношения $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$. В этом случае азимутальная компонента векторного потенциала A_φ определяет компоненты магнитного поля:

$$H_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r}. \quad (10)$$

Соотношения (10) обеспечивают точное выполнение уравнения $\text{div } \mathbf{H} = 0$ и сохранение свойства соленоидальности магнитного поля при условии аксиальной симметрии течения. Соответственно, систему РМГД уравнений (1) в осесимметричном случае представим в безразмерном виде в терминах азимутальной компоненты векторного потенциала A_φ и азимутальной компоненты магнитного поля H_φ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho V_r)}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho V_z^2 + P + \frac{H_\varphi^2}{2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V_z V_r) = j_\varphi \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho V_r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_z V_r)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\rho V_r^2 + P + \frac{H_\varphi^2}{2} \right) \right] &= \frac{1}{r} \left(\rho V_\varphi^2 + P - \frac{H_\varphi^2}{2} \right) + \frac{j_\varphi}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r}, \\
\frac{\partial D_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial(V_z D_\varphi)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r V_r D_\varphi)}{\partial r} &= \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \frac{\partial(r H_\varphi)}{\partial r}, \\
\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \varepsilon V_z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho \varepsilon V_r)}{\partial r} &= -P \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r V_r)}{\partial r} \right) - \left(\frac{\partial W_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r W_r)}{\partial r} \right) + \\
&+ \nu \left\{ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r H_\varphi)}{\partial r} \right]^2 + \left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right)^2 + j_\varphi^2 \right\} - \left(\frac{\partial q_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r q_r)}{\partial r} \right), \\
\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial(V_z H_\varphi)}{\partial z} + \frac{\partial(V_r H_\varphi)}{\partial r} &= \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V_\varphi}{r} \right) - r \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\varphi}{r} \right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial r} \left[\nu \frac{\partial(r H_\varphi)}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right), \\
\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} + V_z \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} + \frac{V_r}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} &= \nu \left(\Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} \right),
\end{aligned}$$

где $j_\varphi = \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = -\Delta A_\varphi + \frac{A_\varphi}{r^2}$ – азимутальный ток, $\Delta A_\varphi = \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right)$,

$D_\varphi = r \rho V_\varphi$, $P = \frac{\beta}{2} (1 + \alpha) \rho T$ и $\varepsilon = \frac{\beta(1 + \alpha) T}{2(\gamma - 1)} + \frac{\beta}{2} \zeta \alpha T^*$. Уравнения (11)

содержат семь независимых переменных ρ , T , V_z , V_r , V_φ , H_φ , A_φ .

Осесимметричный канал плазменного ускорителя образован двумя коаксиальными электродами $r = r_a(z)$ и $r = r_k(z)$. Граничные условия на электродах и входе в канал ускорителя завершают постановку задачи. Считаем, что на входе в канал при $z = 0$ подается газ, например, водород с известными значениями плотности $\rho(r) = f_1(r)$ и температуры $T(r) = f_2(r)$, а электрический ток в цепи питания не меняется и поступает в систему только через электроды. В этом случае при $z = 0$ имеем $j_z = 0$ или $r H_\varphi = r_0 = const$ ($r_0 = R_0/L$). Полагаем также, что эквипотенциальные электроды ($E_\tau = 0$) являются непроницаемыми поверхностями ($V_n = 0$).

Данные граничные условия являются традиционными для численных моделей динамики ионизирующегося газа и плазмы в каналах КСПУ в отсутствие продольного магнитного поля. При наличии продольного поля для величин V_φ и A_φ также необходимы граничные условия. Предполагаем, что во входном сечении при $z = 0$ поступающий газ не вращается и $V_\varphi = 0$, т.е. азимутальная скорость равна нулю. Зададим на входе значение продольного магнитного поля $H_z \neq 0$. Для газовой среды можно считать, что катушка Гельмгольца создает

продольное поле, которое не зависит от радиуса во входном сечении и $H_z(r) = H_z^0 = const$. Тогда с учетом (10) получим следующее соотношение для функции магнитного потока при $z=0$

$$\psi(r) = r A_\varphi = 0.5 H_z^0 r^2.$$

На эквипотенциальных и непроницаемых электродах $r = r_K(z)$ и $r = r_A(z)$, образующих стенки канала ускорителя, также необходимо дополнительное граничное условие при наличии продольного магнитного поля. Типичным и естественным условием в плазмодинамике является соотношение $H_n = 0$, которое связывает компоненты магнитного поля на границе плазма–проводник и обеспечивает сохранение магнитного потока вдоль канала. В итоге, на электродах должны быть выполнены следующие граничные условия:

$$E_r = 0, \quad V_n = 0, \quad H_n = 0,$$

где электрическое поле определяется с помощью закона Ома.

Результаты моделирования квазистационарных течений ионизирующегося газа показали, что в окрестности формирующегося фронта ионизации происходит переход скорости потока сначала через газодинамическую скорость звука $V_g^2 = \gamma P / \rho$, а затем в окрестности наиболее узкой части канала через скорость быстрой магнитозвуковой волны V_f или скорость сигнала V_s в отсутствие продольного магнитного поля [2]. Скорость сигнала при наличии единственной азимутальной компоненты поля равна $V_s = \sqrt{V_g^2 + V_A^2}$, где $V_A^2 = H^2 / 4 \pi \rho$. Соответственно, на выходе имеем сверхзвуковое течение, отвечающее свободному вытеканию ионизованного газа или плазмы.

Граничное условие для уравнения переноса излучения предполагает отсутствие излучения на поверхности электродов $I_\nu = 0$. Излучение электродов можно учесть на основе данных о степени черноты металлов в зависимости от температуры [53]. Соответствующие расчеты показали, что это излучение не оказывает заметного влияния на поле излучения внутри канала.

Моделирование течений ионизирующегося газа при наличии дополнительного продольного магнитного поля проведено на основе уравнений (11) области переменных (z, r) для канала ускорителя, представленного на рис. 2. Данная расчетная область в численной модели отображается на единичный квадрат в плоскости переменных (y, z) с помощью соотношения

$$r = (1 - y) r_K(z) + y r_A(z). \quad (12)$$

Алгоритм расчетов двумерных осесимметричных течений ионизирующегося газа и плазмы включает расщепление по координатным направлениям и физическим факторам с учетом смешанного типа МГД уравнений. Гиперболическая часть уравнений рассчитывается на основе разностной схемы

с коррекцией потоков [54]. Влияние электропроводности и теплопроводности в параболической части системы МГД уравнений учитывается с помощью потокового варианта метода прогонки [55] при условии сильного изменения диссипативных факторов на фронте ионизации.

Моделирование переноса излучения в потоках ионизирующегося газа и плазмы проведено на основе трехмерной постановки задачи для осесимметричного течения в канале ускорителя. Координатная сетка для 3D задачи о переносе излучения получена поворотом исходной двумерной координатной сетки на 360 градусов вокруг оси канала с заданным шагом. Генерация 3D сетки возможна также на основе специальных вычислительных кодов (см., например, [56]). Решение уравнения переноса излучения (5) для интенсивности излучения определяется по разным направлениям для того, чтобы вычислить интегральные значения для плотности потока энергии излучения (4) в любом узле координатной сетки. Для каждого узла координатной сетки строится дополнительная угловая сетка по азимутальному и полярному углу. При этом полный телесный угол $\Omega = 4\pi$ разбивается на элементы угловой сетки с помощью метода, который обеспечивает равномерное распределение лучей по направлениям [57, 58], используя до 440 лучей в каждом узле координатной сетки.

Для численного решения задачи о переносе излучения используется метод длинных характеристик [46-49]. Трассировка лучей позволяет определить точки их пересечений с гранями ячеек трехмерной координатной сетки и место падения лучей на одну из границ трехмерной расчетной области. Невидимые теневые области, возникающие в процессе трассировки лучей, исключаются из расчета потока энергии излучения в том или ином узле сетки. Коэффициент поглощения и излучательную способность можно считать постоянными в пределах отдельно взятой ячейки и рассчитать их по среднему значению плотности и температуры в центре ячейки. Соответственно, лучи или характеристики последовательно проходят через ячейки с известными оптическими свойствами. На границах ячеек проводится сшивка решений для уравнения переноса излучения (5). В результате получим решение на всей характеристике, проходящей через определенное количество однородных областей с известными коэффициентами поглощения и излучательными способностями. Детальная постановка задачи о переносе излучения в канале КСПУ представлена в [40].

Численное моделирование переноса излучения предполагает параллельные вычисления (см., например, [59-61]). Параллельные расчеты на основе разработанной 3D модели для исследования переноса излучения в потоках ионизирующегося газа в каналах квазистационарных плазменных ускорителей реализованы с помощью DVM системы на языке Fortran-DVMH. Данный язык является расширением стандартного языка Фортран и позволяет использовать спецификации параллелизма, оформленные в виде директив для компилятора.

Течения ионизирующегося газа с продольным полем

В соответствии с экспериментами и осциллограммами тока длительность разряда в установке КСПУ-Т превышает миллисекунду. В то же время пролетное время частиц $t_o = L/V_o$ составляет несколько микросекунд. В этом случае численные исследования течений ионизирующегося газа можно проводить для заданного фиксированного значения разрядного тока, а процессы в электрической цепи не учитывать, поскольку плазмодинамические процессы в канале плазменного ускорителя, как показали ранее проведенные исследования, не оказывают существенно влияния на протекание тока в электрической цепи. Поиск квазистационарных течений осуществляется методом установления в процессе решения нестационарной МГД задачи. При этом время установления решения также много меньше длительности разряда и по порядку величины равно t_o . Постановка задачи при условии $J_p = const$ отвечает разработке перспективных мощных ЭРПД нового поколения на основе КСПУ для космических приложений с использованием компактных атомных реакторов.

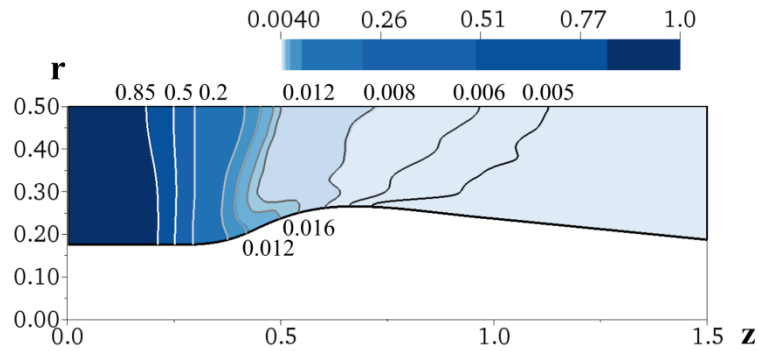
Параметры расчетов соответствуют условиям проведения экспериментов на установке КСПУ-Т. В экспериментах осуществляется непрерывная подача газа на входе в канал ускорителя, где давление находится в диапазоне $P_o = 10 \div 100 \text{ торр}$. В представленных расчетах давление на входе равно $P_o = 30 \text{ торр}$. Предшествующие численные исследования показали, что излучение от фронта ионизации с энергией фотонов в рекомбинационной части спектра проникает в объем поступающего газа. В этом случае возможен определенный произвол в задании температуры газа T_o на входе в канал плазменного ускорителя. В то же время концентрация n_o на входе должна соответствовать значению характерного давления газа $P_o = k_B n_o T_o$.

Расчеты двумерных осесимметричных течений ионизирующегося газа проведены на сетке (51x151), равномерной по направлениям y и z в соответствии с отображением (12). Трехмерная сетка для решения задачи о переносе излучения получена поворотом исходной двумерной сетки в плоскости (r, z) на азимутальный угол с шагом 6 градусов.

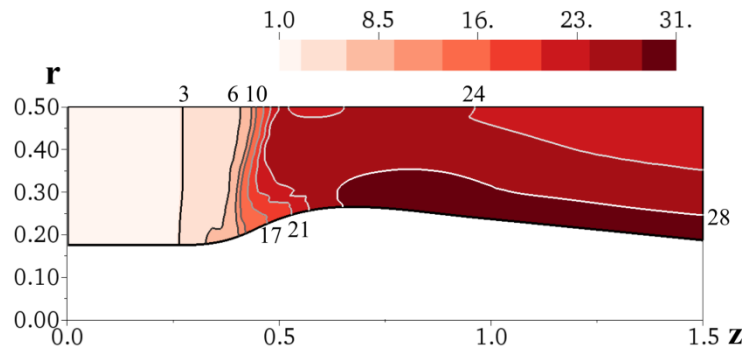
На рис. 2 представлено установившееся квазистационарное течение ионизирующегося водорода при наличии дополнительного продольного магнитного поля в канале ускорителя и при условии равномерной подачи газа на входе в канал при $z = 0$, где плотность и температура в безразмерных переменных равны соответственно $\rho(r) = 1$ и $T(r) = 1$. Расчет проведен для следующих параметров задачи: $n_o = 4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $T_o = 750 \text{ }^\circ\text{K}$, $J_p = 60 \text{ кА}$,

$L = 10 \text{ см}$ и $R_o = 5 \text{ см}$. Продольное магнитное поле при $z = 0$ равно $H_z^o = 0.1$ в безразмерных переменных при условии, что единицей поля является его азимутальная составляющая на входе $H_o = 2J_p / c R_o = 2400 \text{ эрстед}$.

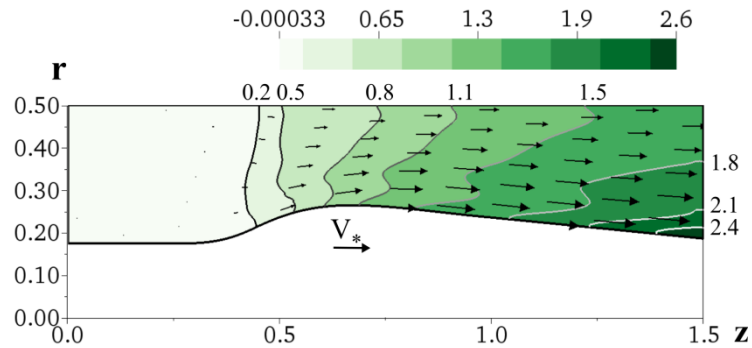
а)



б)



в)



г)

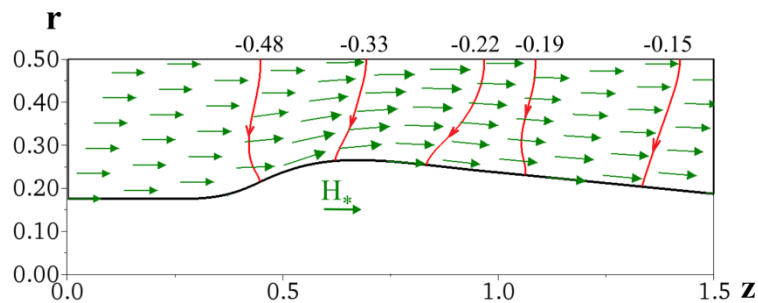


Рис. 2. Распределения а) плотности, б) температуры, в) векторного поля скоростей и азимутальной скорости, г) плазменного тока и векторного магнитного поля в потоке ионизирующегося водорода с продольным магнитным полем, равным на входе $H_z^0 = 0.1$

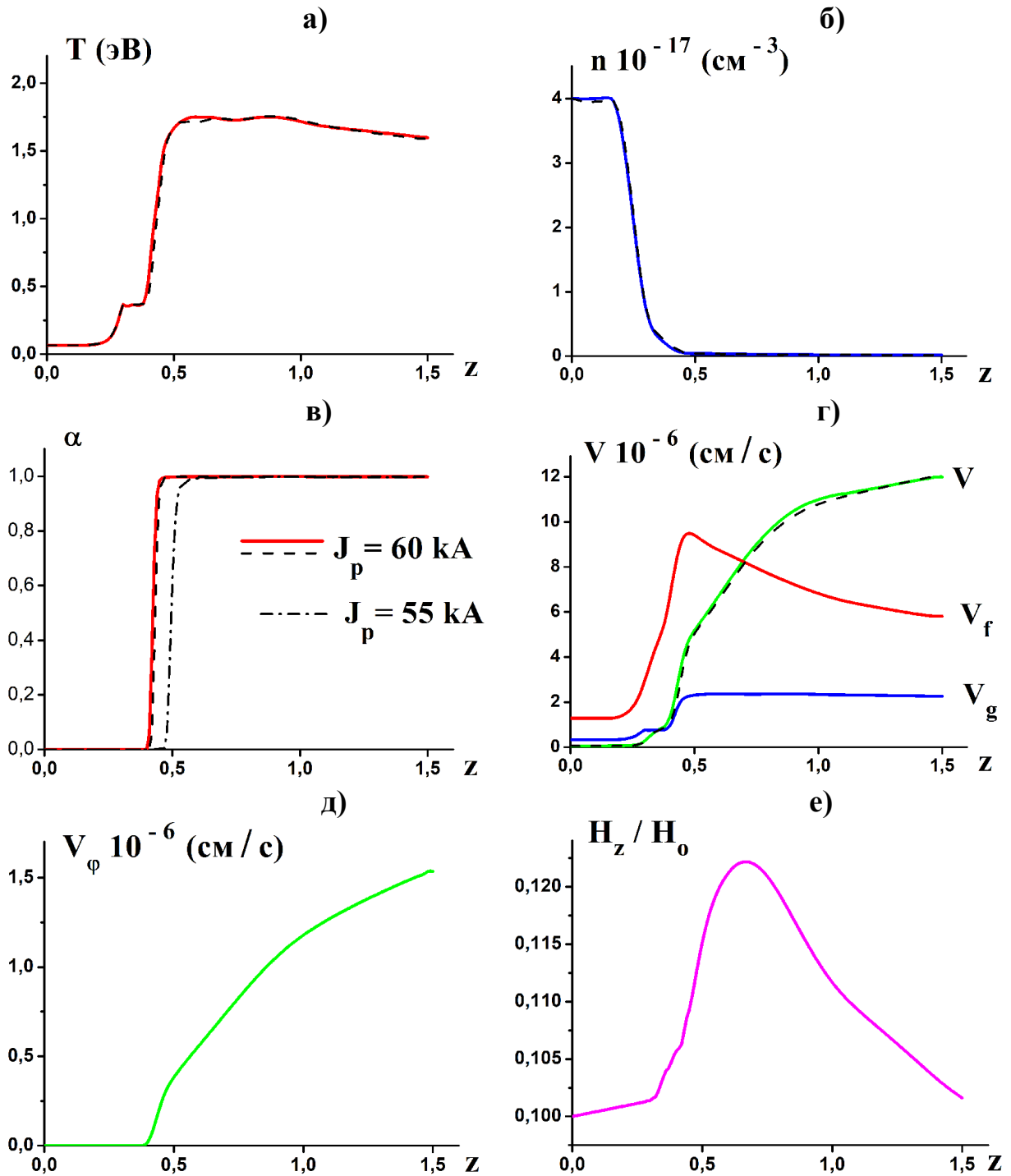


Рис. 3. Изменение МГД переменных в потоке ионизирующегося газа вдоль средней координатной линии при наличии продольного магнитного поля:
 а) температура; б) концентрация тяжелых частиц;
 в) степень ионизации для $J_p = 60 \text{ kA}$ и $J_p = 55 \text{ kA}$ (штрихпунктирная кривая);
 г) скорость потока V , скорость звука V_g , скорость быстрой волны V_f ;
 д) азимутальная скорость; е) продольное магнитное поле.
 Штриховые кривые отвечают течению в отсутствии продольного поля

Цветные картинки для распределений плотности, температуры и азимутальной скорости соответственно на рис. 2а, 2б и 2в дополнены линиями уровня. На рис. 2г красным цветом изображены линии уровня функции $r H_\varphi = const$, отвечающие электрическому току, а направление стрелок для электрического тока и отрицательные значения $r H_\varphi$ соответствуют выбранной полярности электродов, когда внешний электрод является анодом. При этом на входе имеем $r H_\varphi = -r_0 = -0.5$. Масштаб векторов на рис. 2в и 2г определяется значениями $V_* = 20 \cdot V_0$ и $H_* = 0.14$, представленными на рисунках, где единица скорости равна $V_0 = 8.3 \cdot 10^5 \text{ см/с}$ для указанных параметров, а единицей магнитного поля является его азимутальная составляющая на входе.

На рис. 2 видно, что все изменения в основном происходят в продольном направлении. На рис. 3 вдоль средней координатной линии $y = 0.5$ с учетом соотношения (12) изображены соответствующие одномерные графики зависимостей МГД переменных, включая температуру, концентрацию тяжелых частиц, степень ионизации, скорость потока, газодинамическую скорость звука V_g , скорость быстрой магнитозвуковой волны V_f , азимутальную скорость и безразмерное значение продольного магнитного поля. Двумерные распределения и одномерные графики ясно показывают, что в сужающейся части канала формируется фронт ионизации, где температура и степень ионизации резко увеличиваются, а плазма быстро ускоряется благодаря силе Ампера, что приводит к ее разрежению. При этом процесс ускорения сопровождается последовательным переходом скорости потока через газодинамическую скорость звука V_g и далее в наиболее узкой части канала через местную скорость быстрой магнитозвуковой волны V_f . Продольное магнитное поле, представленное на рис. 2г и 3е, имеет максимальные значения в узкой части канала в соответствии с законом сохранения магнитного потока. На рис. 2в и 3д видно, что при наличии продольного поля возникает вращение ионизованного газа, нарастающее к выходу из установки КСПУ-Т. Тем не менее на выходе из ускорителя при $z = 1.5$ доля кинетической энергии

$K_\varepsilon = \frac{\varepsilon_\varphi}{\varepsilon_z} 100 \%$, обусловленная вращением $\varepsilon_\varphi = \frac{1}{2} \int_{r_k}^{r_a} \rho V_\varphi^2 \pi r dr$, составляет

малую часть от продольной кинетической энергии вытекающего потока $\varepsilon_z = \frac{1}{2} \int_{r_k}^{r_a} \rho V_z^2 \pi r dr$. В данном случае при $H_z^0 = 0.1$ эта доля равна

$K_\varepsilon = 1.6 \%$. С ростом величины H_z^0 и продольного магнитного поля в канале ускорителя наблюдается естественное увеличение значения K_ε . При $H_z^0 = 0.15$

имеем $K_\varepsilon = 3.5\%$, а для $H_z^0 = 0.2$ получим $K_\varepsilon = 6.2\%$, т.е. параметр K_ε имеет малые значения даже для достаточно сильного продольного магнитного поля.

Штриховые кривые на рис. 3 отвечают течению в отсутствие продольного поля. Они практически совпадают со сплошными кривыми, соответствующими течению при наличии продольного поля. Соответственно, продольное магнитное поле не оказывает существенного влияния на процесс ионизации и квазистационарные течения ионизирующегося газа. На это указывают также интегральные характеристики течения при наличии и в отсутствие продольного поля. К ним относятся следующие интегральные параметры: расход

$$\dot{m} = 2\pi \int_{r_k}^{r_a} \rho V_z r dr, \text{ мощность } W = \int_{r_k}^{r_a} \rho \frac{V^2}{2} V_z 2\pi r dr \text{ и } F = \int_{r_k}^{r_a} \rho V_z^2 2\pi r dr -$$

тяга в плазменном ускорителе. Интегралы вычисляются на выходе из канала. Для варианта течения, представленного на рис. 2 и 3 при наличии продольного магнитного поля, имеем $\dot{m} = 2.2 \text{ г/с}$, $F = 243 \text{ Н}$ и $W = 14 \text{ МВт}$. Практически такие же значения интегральных параметров течения были получены в отсутствие продольного магнитного поля.

Наиболее значительное влияние на течения ионизирующегося газа в канале КСПУ оказывает разрядный ток в установке. В частности, увеличение разрядного тока приводит к смещению фронта ионизации в направлении входа в ускоритель. На рис. 3 сплошные и штриховые кривые отвечают разрядному току $J_p = 60 \text{ кА}$ соответственно при наличии и в отсутствие продольного поля.

Штрихпунктирная кривая на рис. 3в соответствует разрядному току $J_p = 55 \text{ кА}$. Отчетливо видно, что фронт ионизации смещается в направлении входа в ускоритель при увеличении разрядного тока. Данный результат расчетов полностью соответствует экспериментальным данным.

В экспериментах через продольную щель во внешнем электроде проводилась высокоскоростная фотосъемка, и получены подробные временные развертки свечения водорода вдоль канала для различных значений напряжения на разрядной батарее, например, $U = 1.6 \text{ кВ}$ и $U = 2 \text{ кВ}$. Данные исследования показали, что в начале пробоя происходят колебания, а затем все устанавливается и в процессе разряда наблюдается равномерное свечение вдоль канала ускорителя. Кроме того, для двух значений напряжения на батарее и, соответственно, разных разрядных токов проведен сравнительный анализ распределения интенсивности вдоль катода в конкретные моменты времени после начала разряда: 100, 270 и 600 мкс. Проведенные эксперименты показали, что левая граница свечения, отвечающая фронту ионизации, смещается в направлении входа в канал при увеличении напряжения на разрядной батарее и соответственно разрядного тока. Тем самым установлено, что фронт ионизации смещается в направлении входа в канал при увеличении разрядного тока.

Интегральные характеристики излучения

К интегральным характеристикам излучения относятся плотность энергии излучения U и векторная величина плотности потока энергии излучения \mathbf{W} , которые представлены на рис. 4 и соответствуют распределениям плотности и температуры, изображенным на рис. 2. Поле излучения с помощью соотношений (4)-(7) рассчитано в условиях локального термодинамического равновесия, когда населенности состояний атомов определяются уравнением Саха (2) и формулой Больцмана (9). На рис. 4 приведено распределение безразмерной величины \tilde{U} , которая связана с плотностью энергии излучения следующим соотношением $\tilde{U} = c \cdot U / U_0$, где $U_0 = 10^8 \text{ эрг} / \text{см}^2 \text{ сек}$, а масштаб векторов \mathbf{W} определяется модулем вектора $W_* = 7.7 \cdot 10^7 \text{ эрг} / \text{см}^2 \text{ сек}$, указанным на рисунке.

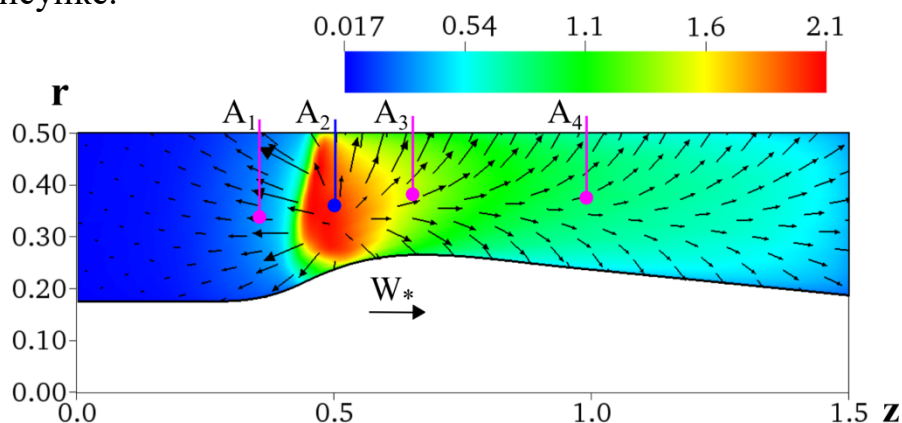


Рис. 4. Распределение плотности энергии излучения и векторное поле плотности потока энергии излучения в потоке, представленном на рис. 2

Видно, что в окрестности фронта ионизации расположена область с относительно высокими значениями плотности энергии излучения U , выделенная красным цветом. Векторное поле потока энергии излучения \mathbf{W} представлено черными стрелками, которые направлены во все стороны от указанной области с высокими значениями энергии излучения. В частности, поток энергии излучения присутствует в набегающем потоке слабоионизованного газа, что приводит к его предварительной ионизации перед фронтом и в глубине объема поступающего газа.

Рис. 5 демонстрирует соответствующие одномерные распределения плотности энергии излучения и продольной составляющей плотности потока энергии излучения W_z вдоль средней координатной линии $y = 0.5$, определяемой соотношением (12). Данные графики построены в соответствии с интегралами (4) для разных участков спектра. Черные кривые отвечают интегралам для всего спектра, красные кривые – для α -линии Лаймана, зеленые кривые – для β -линии Лаймана, синие кривые – интегралам для рекомбинационной части спектра без учета линейчатого спектра.

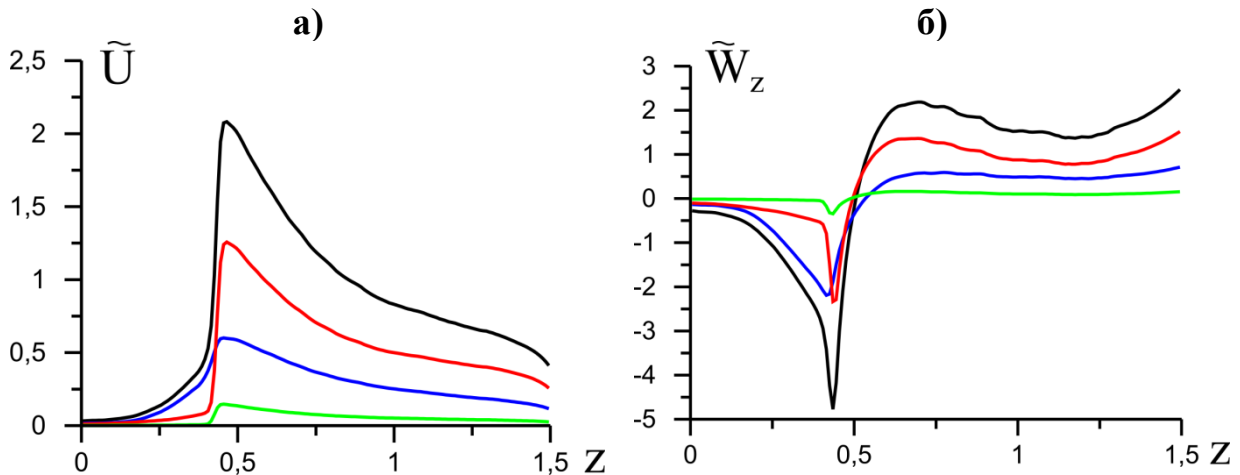


Рис. 5. Распределения а) плотности энергии излучения и б) продольной составляющей плотности потока энергии излучения вдоль средней координатной линии для всего спектра (черные кривые), α -линии Лаймана (красные кривые), β -линии Лаймана (зеленые кривые) и рекомбинационного спектра (синие кривые)

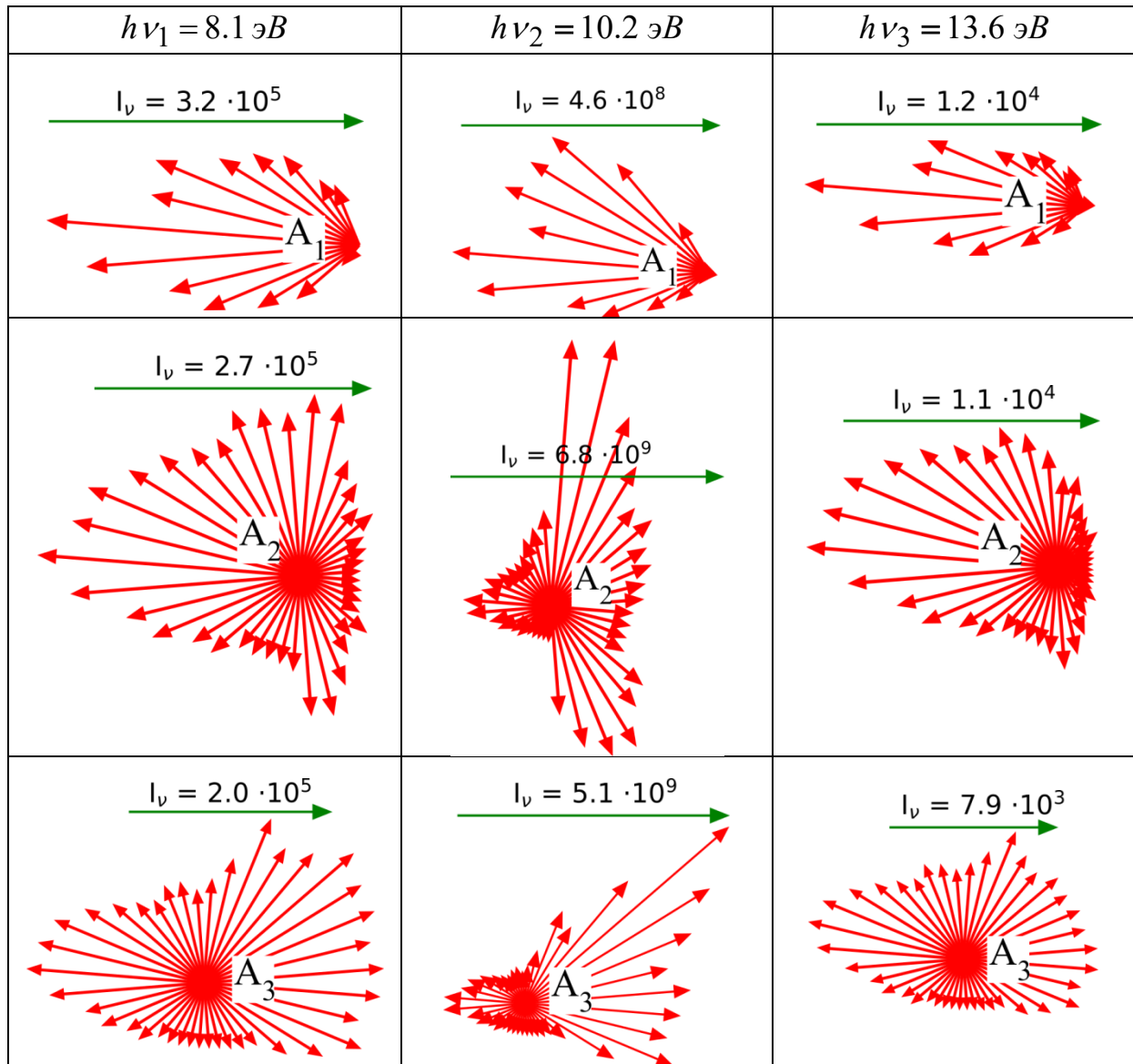
Сравнение графиков на рис. 5 показывает, что излучение в линиях вносит существенный вклад в общее поле излучения в потоке ионизирующегося водорода. Плотность энергии излучения U достигает максимальных значений в окрестности фронта ионизации. При этом продольная составляющая плотности потока энергии излучения имеет отрицательные значения перед фронтом ионизации и положительные за фронтом, т.е. поток энергии излучения меняет свое направление при переходе через фронт ионизации, в окрестности которого продольная компонента W_z принимает нулевое значение. Видно также, что излучение в рекомбинационной части спектра в наибольшей степени распространяется от фронта в направлении поступающего потока газа.

Интегральные характеристики излучения в соотношениях (4) определяются через интенсивность излучения $I_\nu(\mathbf{r}, \Omega)$. Рассмотрим ее распределения по разным направлениям для некоторых участков спектра в точках A_1 , A_2 и A_3 , отмеченных на рис. 4. Точка A_1 расположена перед фронтом в поступающем потоке слабоионизованного газа. Точка A_2 находится в области фронта ионизации, а точка A_3 расположена за фронтом в потоке ионизованного газа. Характерные диаграммы направленности излучения в плоскости сечения канала (r, z) для трех указанных точек представлены в таблице 1. Здесь диаграммы, характеризующие интенсивность излучения в разных направлениях, отвечают трем участкам спектра с энергией фотонов: $h\nu_1 = 8.1 \text{ эВ}$, $h\nu_2 = 10.2 \text{ эВ}$ и $h\nu_3 = 13.6 \text{ эВ}$. Масштаб векторов в таблице определен длиной характерного вектора, приведенного сверху каждой диаграммы с указанием соответствующего значения интенсивности излучения

I_ν , отнесенной к единичному интервалу энергии фотонов, выраженной в эВ, т.е. интенсивность излучения для указанных значений имеет размерность $[I_\nu] = \text{эрг} / (\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{эВ})$.

Таблица 1

Диаграммы направленности излучения



Энергия $h\nu_2 = 10.2 \text{ эВ}$ отвечает центру α -линии Лаймана. Фотоны, отвечающие центрам линий, имеют ограниченную проникающую способность. Энергия $h\nu_3 = 13.6 \text{ эВ}$ соответствует рекомбинационному участку спектра с высокой проникающей способностью. Видно, что в точке A_1 , расположенной перед фронтом в области с малой степенью ионизации, излучение, идущее от фронта, определяет его направленность в разных диапазонах энергии фотонов.

В точках A_2 и A_3 , расположенных в окрестности фронта в областях с высокой степенью ионизации, значительный вклад вносит излучение в линиях, идущее от фронта. Значение интенсивности для энергии фотонов $h\nu_2 = 10.2 \text{ эВ}$, соответствующей α -линии Лаймана, существенно превышает значения интенсивности для других участков спектра. Наименьшие значения интенсивности отвечают рекомбинационной части спектра.

Расчеты спектров излучения

Спектроскопические исследования давно сформировали отдельное научное направление и занимают важное место в диагностике плазменных процессов. Существует множество экспериментальных методов спектроскопии для определения концентрации, температуры, скорости и электромагнитного поля (см., например, [19, 21, 48, 50-53, 62]). Теоретико-вычислительные работы (см., например, [19, 46-53, 62-64]) в области спектроскопии существенным образом дополняют экспериментальные результаты и способствуют развитию данного направления. Развитие спектроскопических методов исследования для установок КСПУ связано с рядом трудностей, поскольку речь идет о высокоскоростных неоднородных потоках ионизирующегося газа и плазмы при условии, что процесс ионизации и предварительного ускорения плазмы происходит в канале, ограниченном электродами. Спектроскопия потоков в КСПУ находится на начальном этапе развития, но со временем она может стать одним из основных способов диагностики процессов в плазменных ускорителях. Наличие продольной щели на внешнем электроде в ускорительном канале позволяет получать экспериментальные спектры излучения для различных линий. В данной работе представлены результаты расчетов ряда спектров для радиальных лучей, проходящих через точки A_1 , A_2 , A_3 и A_4 , указанные на рис. 4. В таблице 2 приведены значения температуры T , концентрации n и степени ионизации α в точках A_i ($i=1 \div 4$), расположенных на средней координатной линии $y = 0.5$ с учетом соотношения (12). Поскольку изменение переменных в канале происходит в основном в продольном направлении, величины T , n и α , указанные для отдельной точки A_i , определяют их характерные значения вдоль всего радиального луча.

Таблица 2

Значения температуры, концентрации и степени ионизации в точках A_i

	$A_1(z = 0.35)$	$A_2(z = 0.5)$	$A_3(z = 0.65)$	$A_4(z = 1)$
T (эВ)	0.36	1.67	1.75	1.71
$n \cdot 10^{-16}$ (см ⁻³)	2.94	0.41	0.32	0.20
α	$0.13 \cdot 10^{-5}$	0.998	0.999	0.999

На рис. 6 и 7 представлены распределения интенсивности излучения I_ν [эрг / (см² · с · эВ)] в узких диапазонах частот или энергии фотона для известных спектральных серий Лаймана и Бальмера. Расчеты проведены для радиальных лучей, выходящих из объема плазмы в направлении детектора. На рис. 6 представлены спектры излучения для серии Лаймана в направлении радиальных лучей, проходящих через точки A_1, A_2 и A_3 , указанные на рис. 4. Известно, что α - и β -линии Лаймана вносят существенный вклад в общее поле излучения, что подтверждает рис. 5.

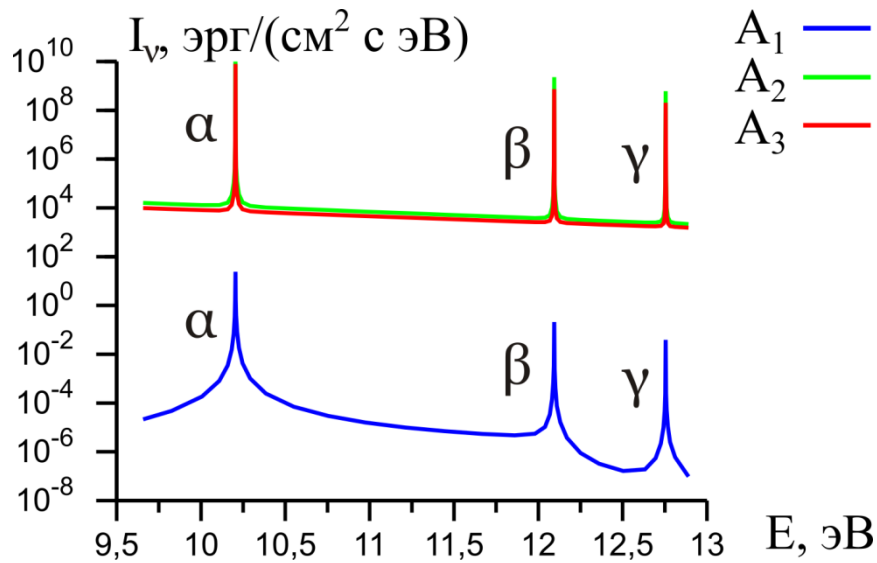


Рис. 6. Спектры излучения для серии Лаймана в направлении радиальных лучей A_1, A_2 и A_3 (см. рис. 4)

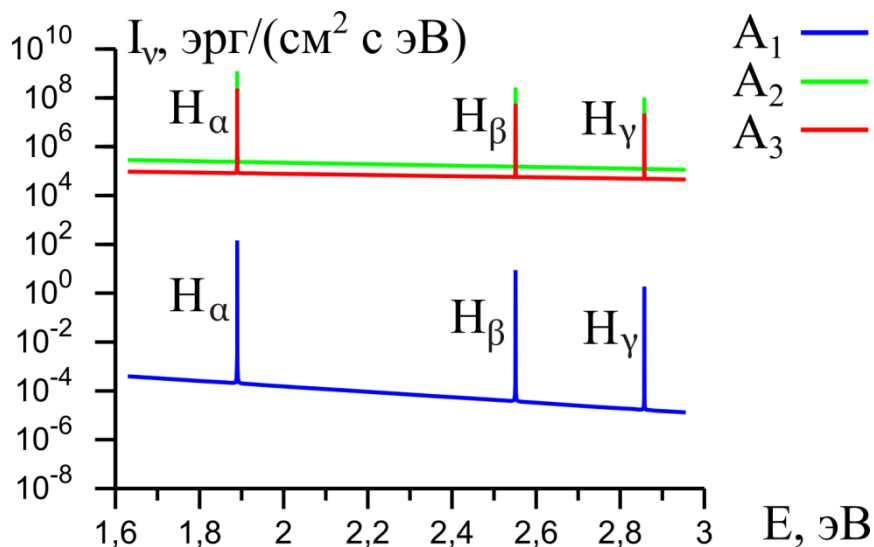


Рис. 7. Спектры излучения для серии Бальмера в направлении радиальных лучей A_1, A_2 и A_3 (см. рис. 4)

На рис. 7 изображены спектры излучения для серии Бальмера в направлении радиальных лучей, проходящих через те же точки. Серия Бальмера отвечает видимой части спектра и широко представлена в экспериментальной спектроскопии. На рис. 6 и 7 видно, что интенсивность излучения в направлении луча A_1 имеет крайне малые значения перед фронтом ионизации в набегающем потоке газа с малой степенью ионизации в соответствии с данными таблицы 2. Это отвечает экспериментальным результатам, согласно которым излучение перед фронтом ионизации не наблюдается. Для анализа спектров излучения необходимо детальное представление той или иной линии излучения, например, H_β -линии Бальмера, которая, как правило, рассматривается в экспериментах.

На рис. 8 представлено детальное распределение интенсивности излучения для спектральной линии H_β серии Бальмера в направлении радиальных лучей, проходящих через точки A_2 , A_3 и A_4 , указанные на рис. 4. Данной линии Бальмера отвечает энергия фотонов 2.551 эВ и соответственно длина волны 486.0 нм. Видно, что высота линий для разных лучей практически не меняется. Это соответствует тому, что температура в точках A_2 , A_3 и A_4 , указанная в таблице 2, имеет примерно одинаковые значения для рассматриваемых лучей. Уширение линии, в том числе за счет электронного удара с учетом соотношения (8), также меняется незначительно для данных лучей. При этом концентрация, равная $n = 0.41 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ в точке A_2 , уменьшается в результате ускорения плазмы до величины $n = 0.32 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ в точке A_3 и до значения $n = 0.2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ в точке A_4 .

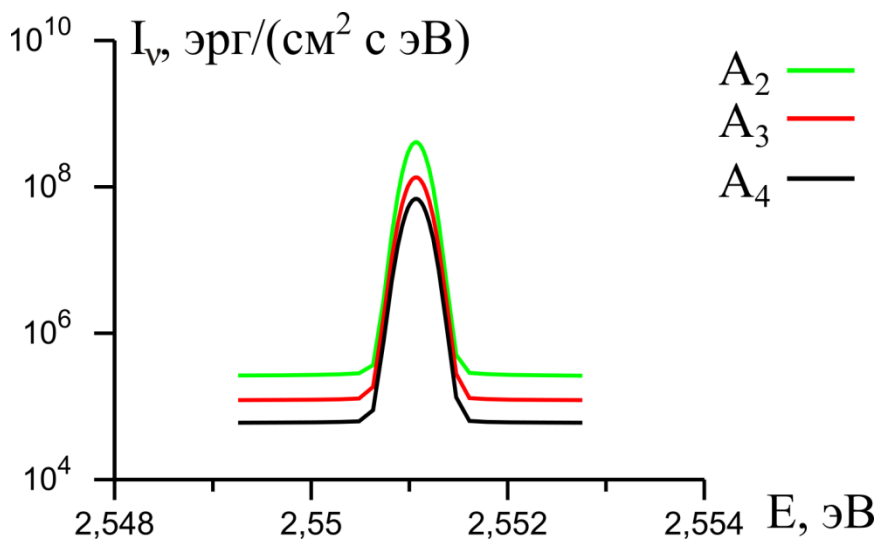


Рис. 8. Распределение интенсивности для H_β -линии серии Бальмера в направлении радиальных лучей A_2 , A_3 и A_4 (см. рис. 4)

Очевидно, что детальное представление линий излучения водородной плазмы на основе данного численного эксперимента не позволяет достаточно точно соотнести уширение линий с конкретными значениями концентрации в канале КСПУ. Доплеровское смещение водородных линий также может быть использовано лишь для приблизительной оценки скорости потока при условии, что скорость ионизирующегося газа много меньше скорости света $V \ll c$.

Тем не менее проблемы диагностики потоков ионизирующегося газа и плазмы в каналах КСПУ на основе спектроскопии можно решить, используя примеси. В частности, в экспериментах часто используют гелий. Предшествующие исследования [65] показали, что процесс ионизации гелия в канале КСПУ сопровождается образованием в основном однократно ионизованных ионов гелия. Примеси, в том числе гелия, можно вводить в поток разными способами. Простейший способ состоит в том, чтобы предварительно подготовить смеси рабочего газа с известным содержанием примесей, например, на уровне 5% или 10%.

Известно, что в зависимости от ориентации спинов электронов в гелии возможно образование синглетных и триплетных конфигураций. Гелий в данных состояниях называется соответственно парагелием или ортогелием. Наиболее важные линии в видимой части спектра гелия отвечают длине волны 501.4 нм и энергии 2.473 эВ для синглетной линии, а также длине волны 587.3 нм и энергии 2.111 эВ для триплетной серии, которой отвечают три близко расположенных линии. В работе [65] было показано, что суммарный спектр излучения в рассматриваемом случае низкотемпературной плазмы определяется в основном излучением нейтрального атома. При этом группа линий атомарного гелия в диапазоне энергий 20-24 эВ вносит наиболее значительный вклад в общее поле излучения. Более высоким значениям энергии фотонов отвечает свой характерный спектр излучения ионов гелия с однократной ионизацией.

На рис. 9 представлены детальные распределения интенсивности излучения для синглетной линии и триплетной серии в видимой части спектра гелия в направлении трех радиальных лучей, проходящих через точки A_2 , A_3 и A_4 , указанные на рис. 4. В каждом случае рассмотрены три смеси рабочего газа с добавлением примеси гелия на уровне 5%, 10% и 15%. Отчетливо видно, как меняются распределения интенсивности, включая высоту и уширение линий, в зависимости от содержания гелия. Кроме того, наблюдается явная зависимость интенсивности излучения в спектральных линиях примеси гелия от характерной концентрации водородно-гелиевой плазмы для трех лучей. В соответствии с таблицей 2 значения концентрации для трех рассматриваемых лучей существенно отличаются. Данные результаты указывают на возможность разработать в дальнейшем достаточно точный алгоритм диагностики макроскопических параметров плазмы на основе спектроскопических исследований примесей, добавляемых в рабочий газ перед разрядом.

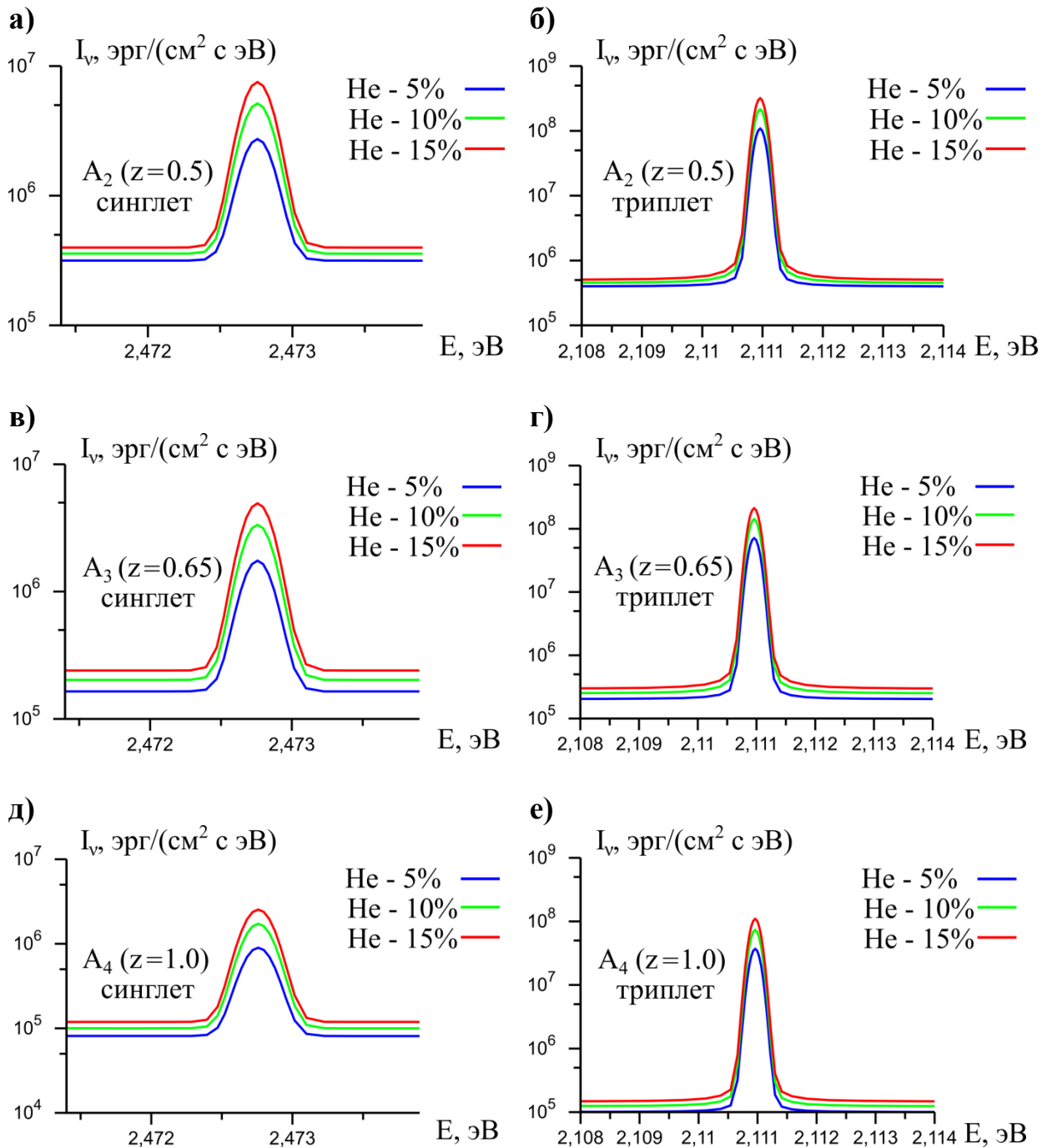


Рис. 9. Распределения интенсивности для двух спектральных линий гелия в видимой части спектра в направлении лучей A_2 , A_3 и A_4 (см. рис. 4) для рабочего газа с различным содержанием примеси гелия

Важным элементом комплексных исследований является сопоставление экспериментальных и расчетных данных. На рис. 10 в направлении радиального луча, проходящего через точку A_4 , представлены спектры излучения водородной плазмы, полученные в экспериментах и расчетах. Интенсивность излучения в эксперименте выражена в относительных единицах.

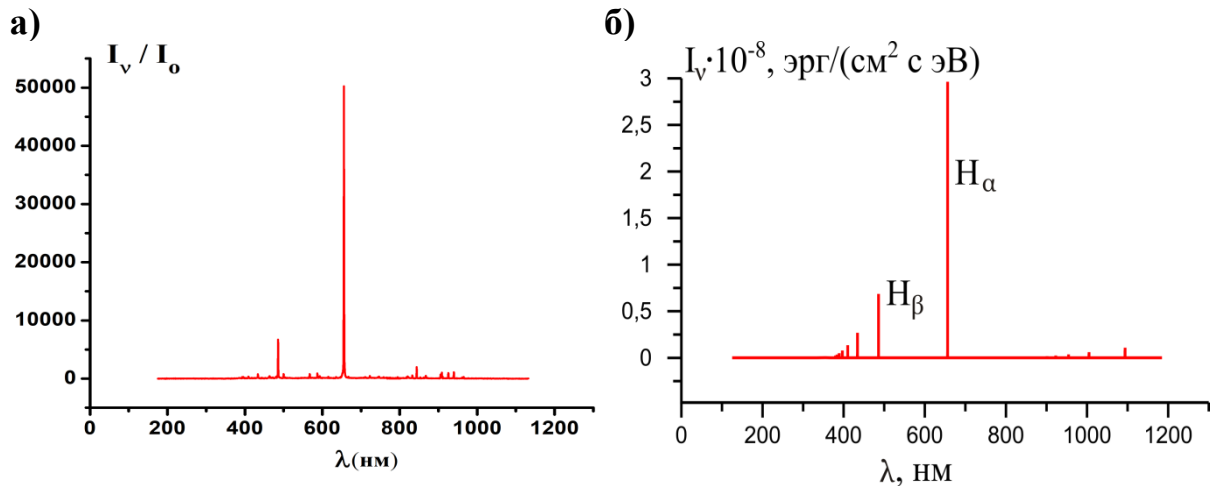


Рис. 10. Спектры излучения водородной плазмы в направлении радиального луча, проходящего через точку A_4 (см. рис. 4), отвечающие а) экспериментам и б) расчетам

Рис. 10 демонстрирует хорошее совпадение экспериментальных и расчетных результатов для спектров излучения водородной плазмы.

Таким образом, результаты расчетов спектров излучения можно использовать в дальнейшем для сопоставления с экспериментальными данными, полученными на основе спектроскопии потоков в каналах КСПУ. Комплексный анализ локальных термодинамических параметров и данных спектроскопии открывает новые возможности в исследовании динамики потоков ионизирующегося газа и плазмы внутри канала КСПУ.

Заключение

Численное исследование радиационных характеристик в потоках ионизирующихся газов проведено в канале квазистационарного плазменного ускорителя КСПУ-Т при наличии дополнительного продольного магнитного поля. МГД модель двумерных осесимметричных течений ионизирующегося газа основана на уравнениях переноса для многокомпонентной среды, состоящей из атомов, ионов и электронов, с учетом электропроводности и теплопроводности. Модифицированные МГД уравнения включают векторный потенциал магнитного поля. Перенос излучения рассчитывается в 3D постановке задачи в многогрупповом приближении с учетом основных механизмов излучения и поглощения фотонов. Моделирование процесса ионизации и переноса излучения проведено в приближении локального термодинамического равновесия. Исследовано влияние дополнительного продольного магнитного поля на квазистационарные течения ионизирующихся газов. Установлено, что фронт ионизации смещается в направлении входа в канал при увеличении разрядного тока в соответствии с имеющимися экспериментальными результатами. Определены интегральные характеристики излучения среды для установки КСПУ-Т. В направлении различных лучей, выходящих из объема

плазмы, представлены спектры излучения для серий Лаймана и Бальмера в водородной плазме, а также для отдельных спектральных линий примеси гелия. Проведено сопоставление спектральных характеристик излучения с термодинамическими параметрами в потоках ионизирующихся газов.

Библиографический список

1. Morozov A.I. Principles of coaxial (quasi) steady plasma accelerators (QSPA) // *Sov. J. Plasma Phys.* 1990. V. 16. P. 69-78.
2. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2008. 613 с.
3. Белан В.Г., Золотарев С.П., Левашов В.Ф., Майнашев В.С., Морозов А.И., Подковыров В.Л., Скворцов Ю.В. Экспериментальное исследование квазистационарного плазменного ускорителя, питаемого от индуктивного и емкостного накопителей // *Физика плазмы.* 1990. Т.16, № 2. С. 176-185.
4. Klimov N., Podkovyrov V., Zhitlukhin A., Kovalenko D., Bazylev B., Landman I., Pestchanyi S., Janeschitz G., Federici G., Merola M., Loarte A., Linke J., Hirai T., Compan J. Experimental study of PFCs erosion under ITER-like transient loads at plasma gun facility QSPA // *Journal of Nuclear Materials.* 2009. V. 390-391. P. 721-726.
5. Kozlov A.N., Drukarenko S.P., Klimov N.S., Moskacheva A.A., Podkovyrov V.L. The experimental research of the electric characteristics of discharge in the quasi-steady plasma accelerator with the longitudinal magnetic field // *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics.* 2009. No. 1. P. 92-94.
6. Климов Н.С., Коваленко Д.В., Подковыров В.Л., Кочнев Д.М., Ярошевская А.Д., Урлова Р.В., Козлов А.Н., Коновалов В.С. Экспериментальное исследование интегральных характеристик потока плазмы и разряда квазистационарного сильноточного плазменного ускорителя с собственным магнитным полем // *Вопросы атомной науки и техники. Серия: Термоядерный синтез.* 2019. Т. 42, № 3. С. 52-63.
7. Волошко А.Ю., Гаркуша И.Е., Морозов А.И., Соляков Д.Г., Терешин В.И., Царенко А.В., Чеботарев В.В. Исследование локальной картины течения плазмы в двухступенчатом КСПУ // *Физика плазмы.* 1990. Т. 16, № 2. С. 168-175.
8. Tereshin V.I., Bandura A.N., Byrka O.V., Chebotarev V.V., Garkusha I.E., Landman I., Makhraj V.A., Neklyudov I.M., Solyakov D.G., Tsarenko A.V. Application of powerful quasi-steady-state plasma accelerators for simulation of ITER transient heat loads on divertor surfaces // *Plasma Phys. Contr. Fusion.* 2007. V. 49. P. A231-A239.
9. Garkusha I.E., Chebotarev V.V., Herashchenko S.S., Makhraj V.A., Kulik N.V., Ladygina M.S., Marchenko A.K., Petrov Yu.V., Staltsov V.V., Shevchuk P.V., Solyakov D.G., Yelisyeyev D.V. Novel test-bed facility for PSI issues in fusion reactor conditions on the base of next generation QSPA plasma accelerator // *Nuclear Fusion.* 2017. V. 57, No. 11. Ar. 116011.

10. Garkusha I. E., Makhlai V. A., Petrov Y. V., Chebotarev V. V., Yelisyeyev D. V., Kulik N. V., Staltsov V. V., Herashchenko S. S., Solyakov D. G., Ladygina M. S., Marchenko A. K. and Aksenov N. N. Influence of a magnetic field on plasma energy transfer to material surfaces in edge-localized mode simulation experiments with QSPA-M // Nuclear Fusion. 2019. V. 59, No. 8. Ar. 086023.
11. Ананин С.И., Асташинский В.М., Баканович Г.И., Костюкевич Е.А., Кузмицкий А.М., Маньковский А.А., Минько Л.Я., Морозов А.И. Исследование процессов формирования плазменных потоков в квазистационарном сильноточном плазменном ускорителе (КСПУ) // Физика плазмы. 1990. Т.16, № 2. С. 186-196.
12. Astashynski V. M., Ananin S. I., Askerko V. V., Kostyukevich E. A., Kuzmitski A. M., Uglov V. V., Anishchik V. M., Astashynski V. V., Kvasov N. T., Danilyuk L. A. Materials surface modification using quasi-stationary plasma accelerators // J. Surface and Coating Technology. 2004. V. 180-181. P. 392-395.
13. Дьяконов Г.А., Тихонов В.Б. Экспериментальное исследование влияния геометрии ускорительного канала и внешнего магнитного поля на режимы течения плазмы в коаксиальном квазистационарном плазменном ускорителе (КСПУ) типа П-50А // Физика плазмы. 1994. Т. 20, № 6. С. 533-540.
14. Morozov A. I., Savelyev V. V. Fundamentals of stationary plasma thruster theory // Reviews of plasma physics / Edited by B. V. Kadomtsev and V. D. Shafranov. Consultants Bureau. 2000. V. 21. P. 203-391.
15. Гришин С. Д., Лесков Л. В. Электрические ракетные двигатели космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1989. 216 с.
16. Горшков О. А., Муравлев В. А., Шагайда А. А. Холловские и ионные плазменные двигатели для космических аппаратов. / Под ред. Коротеева А.С. М.: Машиностроение, 2009. 208 с.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 2-е изд., 1982. 620 с.
18. Брагинский С.И. Явление переноса в плазме // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. вып. 1. С. 183-272.
19. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
20. Кролл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975. 525 с.
21. Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. М.: Наука, 1982. 375 с.
22. Суржииков С.Т. Физическая механика газовых разрядов. М.: изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 640 с.
23. Имшенник В.С., Морозов Ю.П. Радиационная релятивистская газодинамика высокотемпературных явлений. М.: Атомиздат, 1981. 88 с.
24. Фортов В.Е. Уравнения состояния вещества: от идеального газа до кварк-глюонной плазмы. М.: Физматлит. 2012. 492 с.
25. Грановский В.Л. Электрический ток в газе. М.: Наука, 1971. 543 с.

26. Имшенник В.С., Боброва Н.А. Динамика столкновительной плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1997. 319 с.
27. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М.: Бинوم. Лаборатория знаний, 2009. 200 с.
28. Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Calculation of plasma dynamic parameters of the magneto-inertial fusion target with combined exposure // *Physics of Plasmas*. 2019. V. 26. 092704.
29. Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Numerical Simulation of Pulsed Jets of a High-Current Pulsed Surface Discharge // *Computational Thermal Sciences*. 2021. V. 13. P. 45-56.
30. Клименко Г.К., Кузенов В.В., Ляпин А.А., Рыжков С.В. Расчет, моделирование и проектирование генераторов низкотемпературной плазмы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021. 261 с.
31. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле // *Вопросы теории плазмы*. / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат. 1974, вып. 8. С. 3-87.
32. Брушлинский К.В., Морозов А.И. Расчет двумерных течений плазмы в каналах // *Вопросы теории плазмы*. / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат. 1974, вып. 8. С. 88-163.
33. Брушлинский К.В., Заборов А.М., Козлов А.Н., Морозов А.И., Савельев В.В. Численное моделирование течений плазмы в КСПУ // *Физика плазмы*. 1990. Т. 16, № 2. С. 147-157.
34. Козлов А.Н. Влияние продольного магнитного поля на эффект Холла в канале плазменного ускорителя // *Изв. РАН. МЖГ*. 2003. № 4. С. 165-175.
35. Kozlov A.N. Basis of the quasi-steady plasma accelerator theory in the presence of a longitudinal magnetic field // *J. Plasma Physics*. 2008. V.74, No.2. P.261-286.
36. Козлов А.Н. Двухжидкостная магнитогидродинамическая модель течений плазмы в квазистационарном ускорителе с продольным магнитным полем // *Прикладная механика и техническая физика*. 2009. Т. 50, № 3. С. 44-55.
37. Козлов А.Н. Исследование приэлектродных процессов в квазистационарных плазменных ускорителях с непроницаемыми электродами // *Физика плазмы*. 2012. Т. 38, № 1. С. 15-25.
38. Kozlov A.N. The study of plasma flows in accelerators with thermonuclear parameters // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2017. V. 59, No. 11. Ar. 115004, P. 1-7.
39. Kozlov A.N., Garkusha I.E., Konovalov V.S., Novikov V.G. The radiation intensity of the Lyman alpha line at ionization front in the quasi-steady plasma accelerator // *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics*. 2013, No.1. P. 128-130.
40. Kozlov A.N., Konovalov V.S. Numerical study of the ionization process and radiation transport in the channel of plasma accelerator // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (CNSNS)*. 2017. V. 51. P. 169-179.

41. Козлов А.Н. Кинетика ионизации и рекомбинации в канале плазменного ускорителя // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 5. С. 181-188.
42. Бармин А.А., Козлов А.Н. Структура стационарного фронта ионизации в канале плазменного ускорителя // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 4. С. 155-167.
43. Брушлинский К.В., Козлов А.Н., Коновалов В.С. Численные модели стационарных и пульсирующих течений ионизирующегося газа в каналах плазменных ускорителей // ЖВМ и МФ. 2015. Т. 55, № 8. С. 1405-1416.
44. Козлов А.Н., Коновалов В.С. Модель неравновесного процесса ионизации с учетом поуровневой кинетики и переноса излучения в канале плазменного ускорителя // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 103. 28 с.
45. Kozlov A.N., Klimov N.S., Konovalov V.S., Podkovyrov V.L., Urlova R.V. Study of the ionizing gas flow in the channel of plasma accelerator with different ways of gas inflow at the inlet // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1394. Ar. 012021. P. 1-8.
46. Михалас Д. Звездные атмосферы (1 часть). М.: Мир, 1982. 352 с.
47. Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985. 304 с.
48. Castor John I. Lectures on radiation hydrodynamics. – Lawrence Livermore National Laboratory, 2000.
49. Carlson B.G. A Method of Characteristics and Other Improvements in Solutions Methods for the Transport Equations // NSE. 1976. V. 61. P. 408-425.
50. Вайнштейн Л.А., Собельман И.И., Юков Е.А. Возбуждение атомов и уширение спектральных линий. М.: Наука. 1979. 319 с.
51. Gu M.F. The flexible atomic code // Canadian Journal of Physics. 2008. V. 86, No. 5. P. 675-689.
52. Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б. Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы. М.: Физматлит, 2000. 399 с.
53. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. М.: Мир, 1975. 934 с.
54. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. М.: Мир, 1990.
55. Дегтярев Л.М., Фаворский А.П. Поточковый вариант метода прогонки для разностных задач с сильно меняющимися коэффициентами // ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9, № 1. С. 211-218.
56. Geuzaine C., Remacle J.F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2009. V. 79, No. 11. P. 1309-1331.
57. Лебедев В.И. О квадратурах на сфере // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16, № 2. С. 293-306.
58. Цыбулин И.В., Скалько Ю.И., Павлова Е.С. Распределенный метод длинных характеристик для решения уравнения переноса излучения // Труды Московского физико-технического института. 2015. Т. 7, № 2. С. 51–59.

59. Chetverushkin B.N., Olkhovskaya O.G., Gasilov V.A. Solution of the radiative transfer equation on parallel computer systems // *Doklady Mathematics*. 2015. V. 92, No. 2. P. 528-531.
60. Гасилов В.А., Болдарев А.С., Дьяченко С.В., Ольховская О.Г., Карташева Е.Л., Болдырев С.Н., Багдасаров Г.А., Гасилова И.В., Бояров М.С., Шмыров В.А. Пакет прикладных программ MARPLE3D для моделирования на высокопроизводительных ЭВМ импульсной магнитоускоренной плазмы // *Математическое моделирование*. 2012. Т. 24, № 1. С. 55–87.
61. Olkhovskaya O., Kotelnikov A., Yakobovskiy M., Gasilov V. Parallel Ray Tracing Algorithm for Numerical Analysis in Radiative Media Physics // *Series: Advances in Parallel Computing. Ebook*, V. 32. P. 137 – 146, doi:10.3233/978-1-61499-843-3-137, <https://ebooks.iospress.nl/volumearticle/48602>
62. Очкин В.Н. Спектроскопия низкотемпературной плазмы. М.: Физматлит, 2010. 592 с.
63. Вичев И.Ю., Новиков В.Г., Соломянная А.Д. Моделирование спектров излучения плазмы вольфрама // *Математическое моделирование*. 2008. Т. 20, № 7. С. 93-106.
64. Вичев И.Ю., Грушин А.С., Цыгвинцев И.П., Романов И.В., Кологривов А.А. О нахождении параметров плазмы по интегральному спектру // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2017. № 2. 19 с.
65. Козлов А.Н., Коновалов В.С., Климов Н.С., Коваленко Д.В., Подковыров В.Л., Урлова Р.В., Гуторов К.М. Исследование переноса излучения в потоке ионизирующегося гелия в плазменном ускорителе // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2020. № 61. 27с.

Оглавление

Введение	3
Модель радиационной магнитной газодинамики	5
Уравнения с векторным потенциалом магнитного поля.....	10
Течения ионизирующегося газа с продольным полем	14
Интегральные характеристики излучения	19
Расчеты спектров излучения	22
Заключение.....	27
Библиографический список.....	28