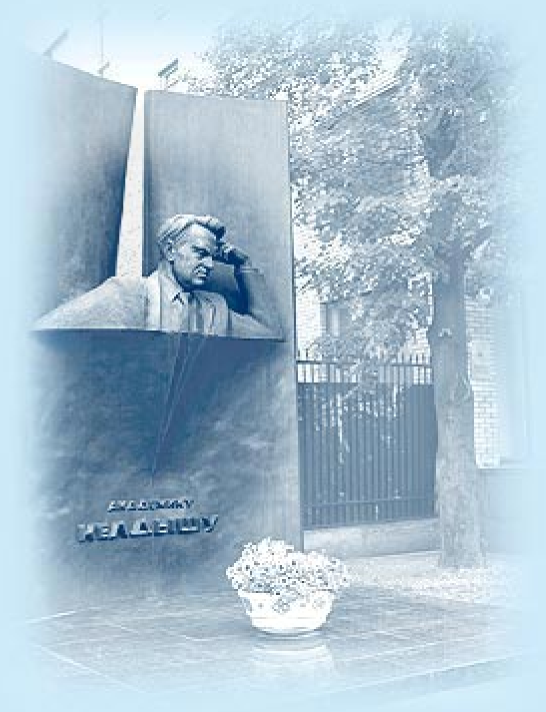
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 19 за 2022 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)



А.Б. Батхин

Гомологическое уравнение произвольного порядка и вычисление нормальной формы системы Гамильтона

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Батхин А.Б. Гомологическое уравнение произвольного порядка и вычисление нормальной формы системы Гамильтона // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 19. 24 с. **https://doi.org/10.20948/prepr-2022-19**
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-19

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Российской академии наук

А. Б. Батхин

Гомологическое уравнение произвольного порядка и вычисление нормальной формы системы Гамильтона

Москва — 2022

УДК 517.913
Александр Борисович Батхин

Гомологическое уравнение произвольного порядка и вычисление нормальной формы системы Гамильтона. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, Москва, 2022

В препринте рассматривается процедура получения гомологических уравнений произвольного порядка, решения которых используются для итерационной процедуры нормализации гамильтониана в окрестности положения равновесия. Обсуждаются особенности реализации алгоритма приведения к нормальной форме с помощью современных систем компьютерной алгебры. Процедура нормализации применяется к гамильтониану задачи Хилла, записанной в масштабированных регулярных переменных. Полученная нормальная форма задачи Хилла может быть использована для поиска множеств аналитичности нормализующего преобразования.

Ключевые слова: нормальная форма, гомологическое уравнение, система Гамильтона, задача Хилла, область аналитичности.

Alexander Borisovich Batkhin

Homological equation of arbitrary order and computation of the normal form of a Hamiltonian system

In the preprint the procedure of deriving homological equations of arbitrary order, the solutions of which are used for the iterative procedure of normalization of the Hamiltonian in the neighborhood of the equilibrium position, is considered. The features of the implementation of the normalization algorithm using modern computer algebra systems are discussed. The normalization procedure is applied to the Hamiltonian of the Hill problem written in scaled regular variables. The resulting normal form of the Hill problem can be used to find sets of analyticity of the normalizing transformation.

Key words: normal form, homological equation, Hamiltonian system, Hill's problem, domain of analyticity.

1. Введение

Нормальная форма (НФ) системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), вычисленная вблизи инвариантного многообразия (положения равновесия, периодического решения или инвариантного тора), является достаточно мощным инструментом для исследования локальной динамики фазового потока в окрестности этой инвариантной структуры. Несмотря на то, что НФ является формальным объектом, его можно использовать для поиска первых интегралов системы, семейств периодических решений, для изучения интегрируемости, устойчивости и бифуркаций (подробнее см. [1—3]). Особые свойства гамильтоновых систем требуют специфических алгоритмов для вычисления их НФ. Цель данной работы — дать процедуру построения так называемого гомологического уравнения любого порядка, которое используется в современных методах нормализации.

Препринт состоит из четырёх разделов, списка сокращений и списка литературы. В разделе 2 рассматривается НФ системы Гамильтона в окрестности положения равновесия для случая полупростых собственных значений. Даётся краткий обзор методов нормализации, приводятся основные свойства НФ. В разделе 3 подробно рассматривается метод инвариантной нормализации системы Гамильтона с использованием гомологических уравнений. Обсуждается процедура упрощения этих уравнений и формулируется утверждение, позволяющее получать гомологические уравнения произвольного порядка. В разделе 4 показано применение процедуры инвариантной нормализации для плоской круговой задачи Хилла, записанной в масштабированных регулярных координатах. Вычислена НФ её функции Гамильтона в окрестности начала координат до 22-го порядка. Полученная НФ использована для поиска множества аналитичности нормализующего преобразования.

Обозначения

- Полужирные символы типа $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ обозначают столбцы-векторы в n-мерных вещественных $\mathbb{R}^n$ или комплексных $\mathbb{C}^n$ пространствах.
- Полужирные символы типа $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ обозначают векторы в n-мерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^n$.
- $|\mathbf{p}| = \sum_{j=1}^{n} |p_j|$ обозначает норму вектора.
- Для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ и $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)^\top$ обозначим через $\mathbf{x}^\mathbf{p} \equiv \prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{p_j}$ мультииндекс и через $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j$ скалярное произведение пары векторов.
- Пусть $\mathfrak{A}$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^{2n}$, тогда для пары функций $F, G \in \mathfrak{A}$ запись $\{F, G\} \equiv F * G$ обозначает

скобку Пуассона: $\{F,G\} \equiv \langle J \operatorname{grad} G, \operatorname{grad} F\rangle$, где J — симплектическая единица.

- Запись $F * G^n$, $n > 1$, означает кратную левоассоциативную скобку Пуассона: $F * G^n = F * G^{n-1} * G$.

2. Гамильтонова нормальная форма

Мы рассматриваем аналитическую систему Гамильтона

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}, \quad \dot{\mathbf{y}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \tag{1}$$

с n степенями свободы, положение равновесия (ПР) которой совпадает с началом координат

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0.$$

Функция Гамильтона $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ разлагается в сходящийся степенной ряд

$$H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum H_{\mathbf{pq}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}}$$

с постоянными коэффициентами $H_{\mathbf{pq}}$, $\mathbf{p},\mathbf{q} \geqslant 0$, $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}| \geqslant 2$.

Канонические преобразования координат $\mathbf{x},\mathbf{y}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \text{ и } \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \tag{2}$$

сохраняют гамильтонов характер исходной системы (1).

Обозначим через $\mathbf{z} = (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n}$ фазовый вектор. Тогда линейная часть системы (1) записывается в виде

$$\dot{\mathbf{z}} = B\mathbf{z}, \quad B = \frac{1}{2}\, J \operatorname{Hess} H\big|_{\mathbf{z}=0}, \quad J = \begin{pmatrix} 0^n & E^n \\ -E^n & 0^n \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где J — симплектическая единичная матрица, а $\operatorname{Hess} H$ — гессиан (матрица частных производных второго порядка) гамильтониана H.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ — собственные значения матрицы B, они могут быть переупорядочены таким образом, что $\lambda_{j+n} = -\lambda_j$, $j = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^\top$ — n-мерный вектор собственных чисел линейной системы (3).

Существует [4, § 12, Теорема 12] каноническое формальное преобразование (2) в виде степенного ряда, которое приводит исходную систему (1) к её *нормальной форме*

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}}, \quad \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}},$$

задаваемой нормализованным гамильтонианом $h(\mathbf{u},\mathbf{v})$

$$h(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j v_j + \sum h_{\mathbf{pq}} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}},$$

который содержит только резонансные члены $h_{\mathbf{pq}} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}}$ с

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0.$$

Здесь $0 \leqslant \mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$, $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}| \geqslant 2$ и $h_{\mathbf{pq}}$ — постоянные коэффициенты.

Если матрица B полупростая, т.е. геометрические и алгебраические кратности собственных значений $\boldsymbol{\lambda}$ равны, то мы имеем так называемую нормальную форму Биркгофа [5] или Черри–Густавсона [6].

2.1. Методы построения канонических преобразований. Существует несколько методов построения нормализующих канонических преобразований. Укажем их в хронологическом порядке.

I) Метод порождающих функций Якоби [5; 6], известный как *метод Биркгоффа*.

II) Метод рядов Ли [7; 8], более известный своей реализацией как *метод Девпри–Хори*.

III) Метод примитивных функций [9].

IV) Метод параметрических порождающих функций Пуанкаре [10; 11].

Ниже подробнее дано описание разновидности метода Деприи–Хори, названного методом *инвариантной нормализации* [12]. Хоть этот метод и не является универсальным в том смысле, что он применяется только в случае ненулевых простых (или полупростых) собственных чисел, но он довольно эффективен и его программная реализация существенно легче, чем в методе Деприи–Хори и, тем более, чем в методе Биркгоффа.

Суть метода нормализации с помощью рядов Ли состоит в использовании вспомогательного гамильтониана $G(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, называемого *порождающим*. Этот гамильтониан определяет каноническую систему

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{Y}}, \quad \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \tau} = -\frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}} \tag{4}$$

с начальными условиями $\mathbf{X}(0) = \mathbf{x}$, $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{y}$. Порождающая функция G представлена в виде ряда по степеням малого параметра ε:

$$G(\mathbf{X},\mathbf{Y},\varepsilon) = \varepsilon G_1 + \varepsilon^2 G_2 + \varepsilon^3 G_3 + \cdots .$$

Пусть для $\tau = 1$ новые переменные $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ определяются как решение задачи Коши (4): $\mathbf{u} = \mathbf{X}(1), \mathbf{v} = \mathbf{Y}(1)$. Преобразование $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \to (\mathbf{u},\mathbf{v})$ на фазовом потоке гамильтоновой системы (1) является унивалентным каноническим преобразованием.

Для малых значений ε старые переменные $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$ могут быть записаны в виде рядов Ли от новых переменных $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{u} * G + \frac{1}{2!}\mathbf{u} * G^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{u} * G^3 + \cdots ,$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{v} + \mathbf{v} * G + \frac{1}{2!}\mathbf{v} * G^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{v} * G^3 + \cdots .$$

Здесь $\mathbf{u} * G$ обозначает векторный вариант скобки Пуассона.

Новый преобразованный гамильтониан h также связан со старым H следующим рядом Ли

$$h(\mathbf{u},\mathbf{v}) = H(\mathbf{u},\mathbf{v}) + H * G + \frac{1}{2!}H * G^2 + \frac{1}{3!}H * G^3 + \cdots$$

Процедуру нелинейной нормализации вещественного гамильтониана H удобнее выполнять, когда он записан в комплексной форме. В [1, п. 1Г] были предложены такие комплексные координаты $\mathbf{z}$, что их комплексно-сопряжённые значения $\bar{\mathbf{z}}$ не являются их канонически-сопряжёнными, но эти координаты позволяют записать универсально квадратичную НФ для любых наборов собственных значений $\boldsymbol{\lambda}$. Переход к таким комплексным координатам задаётся унивалентным преобразованием.

Здесь мы будем использовать другой набор комплексных координат $\mathbf{z}$, комплексно сопряжённые значения которых одновременно являются канонически сопряжёнными. Обычно это удобно, когда собственные значения λ_j являются либо чисто мнимыми, либо вещественными, что и предполагается в дальнейшем.

Существует формальное преобразование $\Phi : (\mathbf{x},\mathbf{y}) \to (\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})$, которое преобразует исходный гамильтониан к виду

$$h(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}) = \sum h_{\mathbf{pq}} \mathbf{z}^{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{z}}^{\mathbf{q}}, \tag{5}$$

где $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$ и $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}| \geqslant 2$. Значение $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|$ называется *порядком* соответствующего члена разложения.

Определение 1. Функция Гамильтона $h(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})$ называется *комплексной нормальной формой* для полупростого случая, если

- его квадратичная часть h_2 имеет вид $h_2 = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j z_j \bar{z}_j$,
- разложение (5) содержит только члены

$$h_{\mathbf{pq}} \mathbf{z}^{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{z}}^{\mathbf{q}}, \tag{6}$$

которые удовлетворяют резонансному условию

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$$

Слагаемые (6), у которых $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, называются *секулярными*, все остальные называются *строго резонансными*.

2.2. Свойства нормальной формы. Приведём здесь некоторые свойства гамильтоновой НФ, которые понадобятся в дальнейшем. Их доказательство см. в [2].

Свойство 1. *Если НФ h записана в виде степенного ряда $h = h_2 + f$, где h_2 — квадратичная часть, то h_2 и f коммутативны, т.е. $h_2 * f = 0$.*

Свойство 2. *Если квадратичная часть h_2 гамильтониана $h = h_2 + f$ нормирована и ряд f, состоящий из мономов степени больше двух, коммутирует с ней $h_2 * f = 0$, то ряд f содержит только резонансные члены.*

Поэтому условие $h_2 * f = 0$ является необходимым и достаточным условием для нормальной формы.

Далее мы рассмотрим важный с практической точки зрения случай, когда все собственные значения λ_j либо вещественные $\lambda_j = \gamma_j \in \mathbb{R}$, либо чисто мнимые $\lambda_j = \mathrm{i}\omega_j$, $\omega_j \in \mathbb{R}$.

3. Нормализация методом рядов Ли

3.1. Обзор процедуры нормализации. Опишем общую схему процедуры нормализации системы Гамильтона в окрестности её ПР, расположенной в начале координат.

1) Вначале исходный вещественный гамильтониан $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ записывается в комплексной форме $H(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})$ с помощью соответствующего канонического преобразования.
2) Затем к $H(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})$ применяется один из методов нормализации, и получаем НФ $h(\mathbf{Z},\bar{\mathbf{Z}})$ (до определённого порядка), которая содержит только резонансные члены.
3) Наконец, полученную комплексную НФ $h(\mathbf{Z},\bar{\mathbf{Z}})$ можно преобразовать в вещественную НФ $h(\mathbf{X},\mathbf{Y})$.

Заметим, что описанная процедура нормализации предполагает, что в исходном гамильтониане H выделена его невозмущённая часть, обозначаемая далее H^0. Этот невозмущённый гамильтониан H^0 определяет структуру фазового потока в начальном приближении и может быть получен с помощью так называемых гамильтоновых укорочений (см. [13, Гл. IV]).

Итак, рассматривается гамильтонова система, ПР которой совпадает с началом координат. Применяя масштабирование фазовых переменных $\mathbf{x} \to \varepsilon\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \to \varepsilon\mathbf{y}$ и независимой переменной $t \to \varepsilon^2 t$, её гамильтониан H вблизи ПР можно записать в виде степенного ряда по ε

$$H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = H^0 + F = H^0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j H_j(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

где H_j — однородная форма порядка $j+2$:

$$H_j = \sum_{|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|=j+2} H_{\mathbf{pq}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}}.$$

Ищем НФ исходного гамильтониана H в виде степенного ряда

$$h(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}) = h^0 + f = h^0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j h_j(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}),$$

где $h^0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_j \bar{z}_j$, а однородные формы h_j, $j > 2$, содержат только резонансные члены $h_{\mathbf{pq}} \mathbf{z}^{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{z}}^{\mathbf{q}}$, $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}| = j$, такие, что $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (p_j - q_j) = 0$.

Переход от исходного гамильтониана H к его НФ h осуществляется с помощью генератора Ли (порождающей функции) $G = \sum\limits_{j=1} \varepsilon^j G_j$:

$$h = H + H * G + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} H * G^j.$$

Поскольку генератор Ли G производит близкое к идентичному каноническое преобразование, то получим, что $h^0 = H^0$, и тогда

$$f = h^0 * G + M, \quad M = F + F * G + \sum_{j=2} \frac{1}{j!} H * G^j. \tag{7}$$

Используя свойство 1 и собирая члены уравнения (7) при соответствующих степенях ε^j, $j = 0,1,2,\ldots$, можно переписать его как рекуррентную систему *гомологических уравнений*

$$h^0 * f_j = 0, \quad f_j = h^0 * G_j + M_j, \quad j = 1,2,\ldots, \tag{8}$$

где член M_j зависит от величин H_k, F_k, G_k, $k < j$, полученных на предыдущих шагах процедуры нормализации.

Для малых значений j члены M_j имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} M_1 =& F_1, \quad M_2 = F_2 + F_1 * G_1 + \frac{1}{2} H^0 * G_1^2, \\ M_3 =& F_3 + F_1 * G_2 + F_2 * G_1 + \frac{1}{2} H^0 * (G_1 * G_2 + G_2 * G_1) + \frac{1}{2} F_1 * G_1^2 + \\ &+ \frac{1}{6} H^0 * G_1^3. \end{aligned} \tag{9}$$

При увеличении индекса j число N_M членов в слагаемом M_j растёт экспоненциально: $N_M = 2^j - 1$.

3.2. Решение гомологических уравнений. Существует два метода решения гомологических уравнений (8)

1) *Алгебраический метод*, который был независимо разработан G. Hori [7] и A. Deprit [8] и усовершенствован в последующих работах [14—18]. Гомологические уравнения решаются как система линейных алгебраических уравнений коэффициентов однородных форм f_j и G_j. Этот метод не имеет ограничений на структуру квадратичной части h^0 и может быть применён также в случае кратных или нулевых собственных значений. Тем не менее из-за большого числа мономов порядок соответствующих систем быстро растёт.

2) *Метод инвариантной нормализации*, предложенный В.Ф. Журавлевым [12], [2, Гл. 8]. Этот метод можно рассматривать как последовательное усреднение функций M_j на невозмущенных решениях $\mathbf{z}(t,\mathbf{Z},\bar{\mathbf{Z}})$. Он может быть применён для случая ненулевых собственных значений. В случае кратных собственных значений этот метод также работает, но требует другого масштабирования фазовых координат, что приводит к тому, что члены $H_j(\mathbf{x},\mathbf{y})$ уже не являются однородными формами (см. [19]).

Здесь мы приведём краткое описание метода инвариантной нормализации (подробнее см. [12] или [2, гл. 7]), а также опишем особенности её программной реализации.

На решениях $\mathbf{z}(t,\mathbf{Z},\bar{\mathbf{Z}})$, $\bar{\mathbf{z}}(t,\mathbf{Z},\bar{\mathbf{Z}})$ невозмущенной канонической системы

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial H^0}{\partial \bar{\mathbf{z}}}, \quad \dot{\bar{\mathbf{z}}} = \frac{\partial H^0}{\partial \mathbf{z}} \tag{10}$$

мы имеем следующие тождества:

- $h^0 * f_j = df_j/dt = 0$ согласно свойству 1;
- $h^0 * G_j = dG_j/dt$.

Таким образом, гомологические уравнения можно переписать в виде

$$\frac{df_j}{dt} = 0, \quad M_j = f_j - \frac{dG_j}{dt}, \quad j = 1,2,\ldots \tag{11}$$

Подставим решения $\mathbf{z}(t,\mathbf{Z},\bar{\mathbf{Z}})$, $\bar{\mathbf{z}}(t,\mathbf{Z},\bar{\mathbf{Z}})$ невозмущенной системы (10) в функцию M_j:

$$m_j(t,\mathbf{Z},\bar{\mathbf{Z}}) = M_j\left(t,\mathbf{z}(t,\mathbf{Z},\bar{\mathbf{Z}}), \bar{\mathbf{z}}(t,\mathbf{Z},\bar{\mathbf{Z}})\right). \tag{12}$$

Согласно уравнениям (11) получаем следующую квадратуру

$$\int\limits_0^t m_j(t,\mathbf{Z},\bar{\mathbf{Z}})dt = tf_j(\mathbf{Z},\bar{\mathbf{Z}}) + G_j(\mathbf{Z},\bar{\mathbf{Z}}) + g(t). \tag{13}$$

Следовательно, на каждом шаге процедуры нормализации очередной член НФ f_j равен коэффициенту при t, а член генератора Ли G_j равен не зависящему от времени члену в квадратуре (13).

Когда все собственные значения $\boldsymbol{\lambda}$ простые и чисто мнимые или вещественные, нет необходимости интегрировать левую часть (13). Все функции M_j являются однородными полиномами в $\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}$, поэтому после подстановки получаем $m_j = \sum_k C_k \mathrm{e}^{\beta_k t} + C_0$, где β_k есть не равная нулю линейная комбинация собственных чисел λ_j, $j = 1,\ldots,n$, а C_0, C_k — некоторые многочлены от новых переменных $\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}$. Из формулы (13) следует, что

$$f_j = C_0, \quad G_j = \sum_k \frac{C_k}{\beta_k}. \tag{14}$$

3.3. Упрощение гомологических уравнений. Покажем, что можно примерно в 4 раза сократить число слагаемых в функциях M_j, $j = 2,3,\cdots$. Из первого уравнения (7) для каждого $j = 2,3,\ldots$ можно получить $h^0 * G_j = f_j - M_j$. Члены f_j и M_j вычислены на предыдущих шагах и могут быть использованы в последующих вычислениях:

$$h^0 * G_1 = f_1 - F_1 \Rightarrow \frac{1}{2}H^0 * G_1^2 = \frac{1}{2}\left(f_1 - F_1\right) * G_1.$$

Подставляя это в M_2 в (15), получаем

$$M_2 = F_2 + \frac{1}{2}\left(F_1 + f_1\right) * G_1.$$

Таким образом, три вычисления скобок Пуассона сводятся к вычислению только одной скобки.

Введём следующие обозначения:

$$f_j^+ \stackrel{\mathrm{def}}{=} F_j + f_j, \quad f_j^- \stackrel{\mathrm{def}}{=} F_j - f_j, \quad H * G^k_{j_1\cdots j_k} = H * G^{k-1}_{j_1\cdots j_{k-1}} * G_{j_k}.$$

Здесь приведём упрощённые выражения функций M_j, $j = 3{,}4{,}5{,}6$. Все индексы $k_1{,}k_2{,}k_3$ — натуральные числа.

$$\begin{aligned}
M_3 =& F_3 + \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=3} f^+_{k_1} * G_{k_2} + \frac{1}{12} f^-_1 * G^2_1,\\
M_4 =& F_4 + \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=4} f^+_{k_1} * G_{k_2} + \frac{1}{12}\sum_{k_1+k_2+k_3=4} f^-_{k_1} * G^2_{k_2k_3},\\
M_5 =& F_5 + \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=5} f^+_{k_1} * G_{k_2} + \frac{1}{12}\sum_{k_1+k_2+k_3=5} f^-_{k_1} * G^2_{k_2k_3} - \frac{1}{720} f^-_1 * G^4_1,\\
M_6 =& F_6 + \frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=6} f^+_{k_1} * G_{k_2} + \frac{1}{12}\sum_{k_1+k_2+k_3=6} f^-_{k_1} * G^2_{k_2k_3} -\\
&- \frac{1}{720}\sum_{k_1+\dots+k_4=6} f^-_{k_1} * G^4_{k_2k_3k_4}.
\end{aligned}$$

Уже по приведённым выше формулам несложно восстановить общий вид упрощённой функции M_j для произвольных значений j. Здесь главная сложность состояла в нахождении коэффициентов при кратных скобках Пуассона. Автор предпринял несколько попыток их вычисления. Вначале была использована система компьютерной алгебры (СКА) `Maple` [20], в которой была реализована процедура упрощения M_j и был найден их вид и соответствующие коэффициенты для $j < 14$. Для бо́льших номеров j созданный алгоритм в силу его экспоненциальной сложности был неприменим. Затем был реализован более эффективный комбинаторный алгоритм, позволивший продвинуться до значений $j \leqslant 17$. Дальнейшее продвижение было уже затруднительно, поскольку времена счёта для каждого значения j увеличивались с коэффициентом 4 и, например, для $j = 17$ составляли порядка $2.5 \cdot 10^6$ с на довольно производительном компьютере. Тем не менее выполненные вычисления позволили высказать предположение об общей структуре упрощённого выражения функций M_j, а также подобрать производящую функцию для коэффициентов при кратных скобках Пуассона.

Каждый член последовательности $\{M_2, M_3, \dots\}$, получается по следующей схеме:

1) используется член F_j из разложения функции H по малому параметру ε;

2) добавляется сумма скобок Пуассона $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k_1+k_2=j} f^+_{k_1} * G_{k_2}$;

3) добавляются ранее записанные суммы кратных скобок Пуассона, составленных из членов f^-_k и G_l, $k{,}l < j$, умноженные на соответствующий

коэффициент α_k. Кратность скобок Пуассона всегда нечётна и не превышает j, а сумма индексов этих функций, участвующих в вычислении, равна j.

Более точное описание упрощённых гомологических уравнений может быть дано в терминах разбиений целых чисел.

Определение 2. Разбиением $\nu(n)$ натурального числа n называется любая конечная неубывающая последовательность натуральных чисел $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$, такая, что $\sum_{j=1}^{k} \nu_j = n$. Каждое разбиение можно записать в виде

$$\nu = [1^{n_1} 2^{n_2} 3^{n_3} \ldots],$$

где n_j — число повторений слагаемого j в разбиении $\nu(n)$, т. е. $\sum j n_j = n$. Обозначим через $\nu^{(k)}(n)$ такое разбиение числа n, которое состоит ровно из k слагаемых.

Теперь сформулируем основной результат работы о структуре упрощённого гомологического уравнения.

Утверждение 1. *Для $j > 2$ функция M_j строится таким образом:*

1) добавляются член F_j и сумма $\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{j-1} f_k^+ * G_{j-k}$;

2) для каждого k не больше $[j/2]$ вычисляем множество $\mu_{2k+1}(j)$ всех перестановок любого разбиения $\nu^{(2k+1)}(j)$, т. е. множество $\mu_{2k+1}(j)$ содержит кортежи из $2k+1$ индексов, сумма которых равна j. Для каждого такого кортежа $\mathcal{J}[i_1, \ldots, i_{2k+1}]$ индексов необходимо вычислить все скобки Пуассона вида $f_{i_1}^- * G^{2k}_{i_2 \cdots i_{2k+1}}$;

3) сумма всех вычисленных выше скобок Пуассона умножается на коэффициент α_{2k}. Эти коэффициенты (несколько первых их значений даны в таблице 1) суть хорошо известные числа Бернулли B_{2k}, делённые на величину $(2k)!$:

$$\alpha_{2k} = \frac{B_{2k}}{(2k)!}.$$

Они могут быть получены с помощью производящей функции

$$\mathfrak{g}(\varepsilon) = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\varepsilon} - 1} \right).$$

4) Окончательная формула для M_j может быть представлена в следующем виде

$$M_j = F_j + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{j-1} f_k^+ * G_{j-k} + \sum_{k=1}^{[j/2]} \alpha_{2k} \sum_{(i_1,\ldots,i_{2k+1}) \in \mu^j_{2k+1}} f_{i_1}^- * G^{2k}_{i_2 \cdots i_{2k+1}}. \qquad (15)$$

Таблица 1. Коэффициенты α_k.

k	2	4	6	8	10	12
α_k	$\dfrac{1}{12}$	$-\dfrac{1}{720}$	$\dfrac{1}{30240}$	$-\dfrac{1}{1209600}$	$\dfrac{1}{47900160}$	$-\dfrac{691}{1307674368000}$

Для нечётных k все $\alpha_k \equiv 0$.

Замечание 1. Поскольку гомологическое уравнение является основой метода нормализации рядов Ли, его упрощённая форма, полученная в утверждении 1, также может быть использована в методе Деприи-Хори.

Основные вычислительные затраты при построении нормальной формы связаны с многократным вычислением скобок Пуассона от функций f_j^+, f_j^- и G_j. Для оптимизации вычислений при реализации метода были построены многоуровневые таблицы, которые последовательно заполнялись результатами вычисления вложенных скобок Пуассона от ранее определённых функций. Это позволило существенно сократить время вычисления генератора G_j из гомологического уравнения.

Очевидно, что нормализация гамильтониана H до высокого порядка возможна только в системах компьютерной алгебры. Например, такое программное обеспечение [2, Гл. 7] было разработано в СКА Wolfram Mathematica [21]. Далее обсудим некоторые детали программной реализации метода.

3.4. Программная реализация метода инвариантной нормализации. Алгоритм инвариантной нормализации может быть реализован с использованием технологии ленивых или отложенных вычислений, т. е. выполнение шагов алгоритма по вычислению необходимых для его работы данных происходит только в момент обращения к последним, но не выполняется заранее. Это позволяет в большинстве ситуаций сократить общее время вычислений.

Приведём ниже схематичное описание алгоритма вычисления НФ гамильтониана, представленного в виде ряда $H^0 + \sum\limits_j F_j$, где $H^0 = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j z_j \bar{z}_j$, а каждый член F_j есть форма от комплексных фазовых переменных $z_j,\bar{z}_j$, $j = 1,\dots,n$.

Пусть выполнена нормализация до $(j-1)$-го порядка включительно, где $j \geqslant 1$. Тогда невозмущённое решение записано в виде

$$z_j = Z_j \mathrm{e}^{\lambda_j t}, \quad \bar{z}_j = \bar{Z}_j \mathrm{e}^{-\lambda_j t}, \quad j = 1,\dots,n, \tag{16}$$

а также уже вычислены члены f_k НФ, определены величины f_k^+, f_k^-, найдены члены генератора G_k, $k < j$, и вычислены кратные скобки Пуассона для соответствующих наборов индексов, полученных в п. 2) утверждения 1.

I Составляем функцию M_j гомологического уравнения j-го порядка согласно п. 2). Для этого для каждого $k \leqslant [j/2]$ находим разбиение $\nu_{2k+1}(j)$, представленное в виде кортежа $\mathcal{J}[i_1, \ldots, i_{2k+1}]$ индексов. Находим множество $\mu_{2k+1}(j)$ всех перестановок этого кортежа индексов, и для каждого набора индексов из множества $\mu_{2k+1}(j)$ вычисляем $(2k+1)$-кратную скобку Пуассона вида $f_{i_1}^- * G^{2k}_{i_2 \cdots i_{2k+1}}$. Если ранее уже была вычислена $(2k-1)$-кратная скобка $f_{i_1}^- * G^{2k}_{i_2 \cdots i_{2k-1}}$, то результат её вычисления хранится в соответствующей ячейке вспомогательной разреженной матрицы и используется для вычислений. Найденная таким образом $(2k+1)$-кратная скобка Пуассона также сохраняется для дальнейшего использования.

II Когда все слагаемые формулы (15) найдены, выполняется подстановка в него невозмущенного решения (16), а затем происходит упрощение показателей каждого слагаемого из M_j. Группируя слагаемые с равными экспоненциальными множителями, получаем выражение (12), с помощью которого согласно формулам (14) находим и сохраняем для последующего использования j-е члены разложения НФ f_j и генератора G_j соответственно. Вычисляются величины f_j^+ и f_j^- для получения правой части гомологического уравнения $(j+1)$-го порядка.

Замечание 2. Указанные выше шаги алгоритма нормализации могут быть легко запрограммированы с использованием различных СКА, в которых присутствуют эффективные комбинаторные процедуры. Здесь укажем лишь некоторые из таких реализаций.

- В СКА Wolfram Mathematica [2; 22]. Авторы отмечают, что данная программа справляется с ситуацией, когда собственные числа могут быть выражены в радикалах.
- В СКА Maplesoft Maple [23].
- Программный комплекс, реализованный с использованием языков программирования `C++` и `Python` [24], библиотека [25], реализованная с использованием языков программирования `C/C++`.

Для вычислений, приведённых в разделе 4, автор реализовал описанный выше алгоритм в СКА `Maplesoft Maple` [20]. Тем не менее описанный в этом разделе метод инвариантной нормализации может быть без проблем реализован и в других СКА с открытым исходным кодом. Например, в СКА `SageMath` [26], которая фактически использует пакет символьных вычислений `SymPy` [27], или в СКА `Maxima` [28].

Замечание 3. Отметим, что эффективность выполнения вычислений на шаге II алгоритма существенно зависит от того, в какой форме удаётся представить собственные числа $\boldsymbol{\lambda}$. В тех редких случаях, когда все λ_j рациональны, все вычисления могут быть выполнены точно. Если все или часть собственных чисел принадлежат алгебраическому расширению поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то вычисление коэффициентов НФ и генератора Ли можно проводить в этом расширении. Также возможно выполнять вычисление НФ по модулю идеала, который задаёт нули характеристического многочлена матрицы B формулы (3), так, как это, например, сделано в [29, п. 5.6, Способ 3]. Последний приём может быть использован, если квадратичная часть H_2 исходного гамильтониана H зависит от параметров.

4. Применение к задаче Хилла

4.1. Гамильтониан задачи Хилла. Задача Хилла, уравнения которой описывают плоское движение спутника в окрестности меньшего из двух массивных тел [30], имеет следующий автономный гамильтониан

$$H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{r}, \tag{17}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\mathbf{x} = (x_1,x_2)$ — вектор координат, а $\mathbf{y} = (y_1,y_2)$ — канонически сопряжённый вектор импульса.

Каноническое преобразование, называемое регуляризацией Леви-Чивитты [31, Гл. 4],

$$\mathbf{x} = L(\mathbf{q})\mathbf{q},\ \mathbf{y} = \frac{2}{q_1^2 + q_2^2} L(\mathbf{q})\mathbf{p},\ L(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix},$$

которое вместе с заменой времени

$$d\tau = \frac{4dt}{q_1^2 + q_2^2}$$

приводит функцию Гамильтона (17) с сингулярностью в начале координат к полиномиальному виду

$$\begin{aligned} \widetilde{H}\left(\mathbf{q},\mathbf{p},\tilde{h}\right) =& \frac{\tilde{h}}{4}\left(q_1^2 + q_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(q_1^2 + q_2^2\right)\left(q_2 p_1 - q_1 p_2\right) - \\ & - \frac{1}{4}\left(q_1^2 + q_2^2\right)\left(q_1^4 - 4q_1^2 q_2^2 + q_2^4\right) - \frac{1}{4} \equiv 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь константа $\tilde{h}$ выбирается так, чтобы $\tilde{h} + H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$. Поскольку гамильтониан $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ не зависит явно от времени, то величина $-\tilde{h}$ является значением интеграла обобщённой энергии. Обычно её записывают в виде константы

Якоби

$$C = 3x_1^2 - \frac{2}{r} - \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 = 2\tilde{h}. \tag{19}$$

В работе [32] предложено преобразование (см., также [33])

$$\mathbf{q} = 2^{3/4}|\tilde{h}|^{1/4}\mathbf{Q}, \quad \mathbf{p} = 2^{1/4}|\tilde{h}|^{3/4}\mathbf{P}, \quad s = \sqrt{2/|\tilde{h}|}\,\tau,$$

определённое для всех значений $\tilde{h} \neq 0$, что приводит регуляризованный гамильтониан (18) к виду

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathbf{Q},\mathbf{P}) =& \frac{\delta}{2}\left(Q_1^2 + Q_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(P_1^2 + P_2^2\right) + 2\left(Q_1^2 + Q_2^2\right)\left(Q_2P_1 - Q_1P_2\right) - \\ &- 4\left(Q_1^2 + Q_2^2\right)\left(Q_1^4 - 4Q_1^2Q_2^2 + Q_2^4\right),\end{aligned} \tag{20}$$

где $\delta = \pm 1$, а s — новая независимая переменная. Здесь δ выбирается в зависимости от знака величины $\tilde{h}$, а именно $\delta = \operatorname{sign}\tilde{h}$.

Структура функции (20) такова, что начало координат O соответствует положению равновесия системы канонических уравнений, определяемой гамильтонианом $\mathcal{H}(\mathbf{Q},\mathbf{P})$. Квадратичная часть $\mathcal{H}_2$ уже приведена к вещественной нормальной форме. Это позволяет без дополнительных преобразований применить алгоритм нормализации, описанный в разделе 3, предварительно записав функцию $\mathcal{H}$ в комплексной форме.

С точки зрения приложений задачи Хилла к проблемам динамики спутников более интересным является случай, когда $\delta = 1$, поскольку он соответствует значениям постоянной Якоби (19) $C > 0$. Именно таким значениям C соответствуют движения естественных спутников планет Солнечной системы (см. [30; 34]).

Далее приведём описание НФ задачи Хилла в регулярных переменных для случая $\delta = 1$, т. е. когда квадратичная форма $\mathcal{H}_2$ имеет две пары полупростых собственных чисел $\pm\mathrm{i}$. Аналогичные вычисления могут быть проделаны для случая $\delta = -1$.

4.2. Нормальная форма задачи Хилла вблизи начала координат. Введём комплексные переменные $z_j,\bar{z}_j$, $j = 1,2$, с помощью унивалентного канонического преобразования

$$Q_j = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{i}}}\left(z_j - \bar{z}_j\right), \quad P_j = \sqrt{\frac{\mathrm{i}}{2}}\left(z_j + \bar{z}_j\right), \quad j = 1,2.$$

Для более компактной записи функции Гамильтона $\mathcal{H}$ и её НФ h в комплексных переменных используем обозначения:

$$\rho_i \stackrel{\text{def}}{=} z_i\bar{z}_i,\ i = 1,2, \quad h_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{i}(\rho_1 + \rho_2), \quad g_2 \stackrel{\text{def}}{=} z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1. \tag{21}$$

Тогда в этих комплексных переменных функция Гамильтона (20) примет вид $\mathcal{H}(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}) = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_4 + \mathcal{H}_6$, где

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_2 =& h_2,\\
\mathcal{H}_4 =& \mathrm{i}\left((z_1-\bar z_1)^2 + (z_2-\bar z_2)^2\right) g_2,\\
\mathcal{H}_6 =& -\frac{\mathrm{i}}{2}\left((z_1-\bar z_1)^2 + (z_2-\bar z_2)^2\right)\times\\
&\times\left((z_1-\bar z_1)^4 - 4(z_1-\bar z_1)^2(z_2-\bar z_2)^2 + (z_2-\bar z_2)^4\right).
\end{aligned}
$$

Процедура инвариантной нормализации гамильтониана $\mathcal{H}$ была реализована автором в СКА `Maple` и выполнена до 22-го порядка включительно.

Первые восемь членов (включая h_2) нормальной формы h следующие:

$$
\begin{aligned}
h_4 =& -2h_2 g_2,\\
h_6 =& -2h_2\left(5h_2^2 + 4g_2^2 + 30\rho_1\rho_2\right),\\
h_8 =& -5h_2 g_2\left(15h_2^2 + 11g_2^2 + 96\rho_1\rho_2\right),\\
h_{10} =& -h_2\left(417h_2^4 + 678g_2^2h_2^2 + 445g_2^4 +\right.\\
&\left.+4\rho_1\rho_2\left(3336h_2^2 + 4668g_2^2 + 7860\rho_1\rho_2\right)\right),\\
h_{12} =& -\frac{h_2g_2}{2}\left(15955h_2^4 + 13832g_2^2h_2^2 + 7841g_2^4 +\right.\\
&\left.+4\rho_1\rho_2\left(31873h_2^2 + 24921g_2^2 + 76140\rho_1\rho_2\right)\right),\\
h_{14} =& -\frac{h_2}{24}\left(848407h_2^6 + 874685g_2^6 + 2666775h_2^4g_2^2 + 1725613h_2^2g_2^4 +\right.\\
&+16\rho_1\rho_2\left(546163h_2^4 + 826144g_2^4 + 1373271h_2^2g_2^2 +\right.\\
&\left.\left.+4\rho_1\rho_2\left(476834h_2^2 + 876771g_2^2 + 619290\rho_1\rho_2\right)\right)\right),\\
h_{16} =& -\frac{h_2g_2}{360}\left(387639075h_2^6 + 126523557g_2^6 + 529277675h_2^4g_2^2 +\right.\\
&+264089597h_2^2g_2^4 + 8\rho_1\rho_2\left(510067595h_2^4 + 277494642g_2^4 +\right.\\
&+553863605h_2^2g_2^2 +\\
&\left.\left.+600\rho_1\rho_2\left(2976121h_2^2 + 2509718g_2^2 + 3825180\rho_1\rho_2\right)\right)\right),
\end{aligned}
\tag{22}
$$

где в выражениях для ρ_1, ρ_2, h_2 и g_2 все исходные координаты $z_j,\bar z_j$ надо заменить на нормальные координаты $Z_j,\bar Z_j$, $j = 1,2$. Другие найденные члены НФ довольно громоздки и здесь не приводятся.

Вычисленные начальные члены разложения нормальной формы h позволяют сформулировать некоторую гипотезу о её структуре.

Гипотеза. Нормальная форма h регуляризованного гамильтониана (20) задачи Хилла в окрестности начала координат обладает следующими свойствами.

1) В силу обозначений (21) НФ h является функцией только от величин ρ_j, $j = 1{,}2$, и g_2, т. е. $h = h(\rho_1,\rho_2,g_2)$.
2) Члены разложения с номерами $4k$, $k \geqslant 1$ состоят только из строго резонансных мономов, члены с номерами $4k-2$ содержат как строго резонансные, так и секулярные мономы.
3) Все члены разложения, начиная с h_4, раскладываются на множители, один из которых всегда равен h_2.
4) Члены разложения с номерами $4k$, $k \geqslant 2$ раскладываются на три множителя, один из которых равен g_2, а другой h_2.
5) Каждый из членов h_k, а следовательно, и вся НФ h, инвариантны относительно перестановки $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$.

Вычисленная НФ задачи Хилла вблизи начала координат позволяет исследовать динамику исходной системы в этой области фазового пространства. В частности, с помощью НФ можно искать так называемые области аналитичности [1, Гл. I], на которых нормализующее преобразование сходится, и, следовательно, решениям нормализованной системы с гамильтонианом $h(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})$ будут соответствовать решения исходной системы с гамильтонианом (17) или (20).

Замечание 4. Можно также вычислить НФ задачи Хилла для случая $\delta = -1$, т.е. когда квадратичная форма $\mathcal{H}_2$ имеет две пары полупростых собственных значений ± 1. В этой ситуации комплексные переменные $z_j, \bar{z}_j$, $j = 1{,}2$, вводятся каноническим преобразованием

$$Q_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z_j - \bar{z}_j\right), \quad P_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z_j + \bar{z}_j\right), \quad j = 1{,}2.$$

Вычисленная НФ совпадает с НФ для случая $\delta = 1$, приведённой в (22), где $h_2 = \rho_1 + \rho_2$.

В этом случае нет необходимости вычислять множество аналитичности, так как согласно результатам В.С. Самовола [35] существует гладкое преобразование, сводящее полученную гамильтонову систему в НФ к эквивалентной линейной системе.

4.3. Вычисление множества аналитичности $\mathcal{A}$ нормализующего преобразования. Обычно нормализующее преобразование расходится, однако НФ позволяет найти множества в фазовом пространстве системы, на которых имеет место сходимость. Анализ областей сходимости даёт возможность вычислить семейства периодических и квазипериодических решений исходной системы. Здесь, однако, ограничимся только вычислением множества $\mathcal{A}$.

Кратко напомним определение множества $\mathcal{A}$ (подробнее, см. [36, Part II], [37]). Пусть система Гамильтона с n степенями свободы приведена к нормальной форме h в окрестности положения равновесия, совпадающего с началом координат. Тогда множество $\mathcal{A}$ — это аффинное многообразие в фазовом пространстве с нормальными координатами $z_j,\bar{z}_j$, $j = 1,\ldots,n$, задаваемое системой уравнений

$$\frac{\partial h}{\partial z_j} = \lambda_j a \bar{z}_j, \quad \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j} = \lambda_j a z_j, \quad j = 1,\ldots,n. \tag{23}$$

Здесь a — некоторый свободный параметр.

Используя свойства НФ h регуляризованной задачи Хилла, сформулированные в гипотезе 4.2, вычислим некоторое подмногообразие множества $\mathcal{A}$.

Для случая задачи Хилла, т. е. для двух степеней свободы система (23), с учётом пункта 3) гипотезы 4.2 и соотношений (21) система (23) переписывается в виде двух подсистем. Первая подсистема имеет вид

$$\frac{\partial h}{\bar{z}_1 \partial z_1} = \frac{\partial h}{\partial \rho_1} + \frac{\partial h}{\partial g_2}\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \mathrm{i}a, \tag{24a}$$

$$\frac{\partial h}{z_1 \partial \bar{z}_1} = \frac{\partial h}{\partial \rho_1} - \frac{\partial h}{\partial g_2}\frac{z_2}{z_1} = \mathrm{i}a, \tag{24b}$$

а вторая подсистема соответственно принимает вид:

$$\frac{\partial h}{\bar{z}_2 \partial z_2} = \frac{\partial h}{\partial \rho_2} + \frac{\partial h}{\partial g_2}\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \mathrm{i}a, \tag{25a}$$

$$\frac{\partial h}{z_2 \partial \bar{z}_2} = \frac{\partial h}{\partial \rho_2} - \frac{\partial h}{\partial g_2}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{i}a. \tag{25b}$$

Из уравнений системы (24) или системы (25) получаем соотношение

$$\frac{\partial h}{\partial g_2}\left(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1\right) = 0,$$

из которого следует, что либо $\partial h/\partial g_2 = 0$, либо

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 0. \tag{26}$$

Разность уравнений (24a) и (25b) (или (24b) и (25a)) можно представить в виде

$$\frac{\partial h}{\partial \rho_1} - \frac{\partial h}{\partial \rho_2} + \frac{\partial h}{\partial g_2} \cdot \frac{\rho_2 - \rho_1}{\bar{z}_1 z_2} = 0.$$

В силу свойства 5) гипотезы 4.2 разность частных производных $\partial h/\partial \rho_1 - \partial h/\partial \rho_2$ раскладывается на множители, один из которых есть $\rho_1 - \rho_2$ или в переменных $z_j,\bar{z}_j$ получаем уравнение $z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2 = 0$.

Далее ограничимся анализом решений системы, получаемой из условий (26) и $\rho_1 = \rho_2$:

$$\begin{cases} z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2 = 0, \\ z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 0. \end{cases}$$

Из неё легко получить уравнения $z_1\left(\bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2\right) = z_2\left(\bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2\right) = 0$. Корень $z_1 = z_2 = 0$ даёт тривиальное решение. Второй множитель даёт пару решений

$$z_2 = +\mathrm{i}z_1, \quad \bar{z}_2 = -\mathrm{i}\bar{z}_1, \tag{27}$$

$$z_2 = -\mathrm{i}z_1, \quad \bar{z}_2 = +\mathrm{i}\bar{z}_1. \tag{28}$$

Подставляя найденные решения (27) и (28) соответственно в левую часть уравнения (24а) и ограничиваясь членами до 6-го порядка по ρ_1 получим соотношение

$$\mathrm{i} \mp 8\rho_1 + 36\mathrm{i}\rho_1^2 \pm 320\rho_1^3 - 2420\mathrm{i}\rho_1^4 \pm 12576\rho_1^5 + \ldots = \mathrm{i}a.$$

Очевидно, что ни при каком вещественном a последнее равенство выполнено быть не может. Это означает, что на этих компонентах множества аналитичности $\mathcal{A}$ не существует периодических или квазипериодических решений.

Здесь мы имеем пример комплексных множеств аналитичности, которые пересекаются в вещественной точке. Эта ситуация соответствует рисунку 5 в разделе 3.3 из [36, Part II].

Благодарности

Автор выражает благодарность профессору А.Д. Брюно за полезное обсуждение работы и её поддержку.

Список литературы

1. *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. М. : Наука, 1990. 296 с.
2. *Журавлев В. Ф.*, *Петров А. Г.*, *Шундерюк М. М.* Избранные задачи гамильтоновой механики. М. : ЛЕНАНД, 2015. 304 с.
3. *Bruno A. D.*, *Batkhin A. B.* Survey of eight modern methods of Hamiltonian mechanics // Axioms. 2021. Vol. 10, no. 4. DOI: `10.3390/axioms10040293`. URL: `https://www.mdpi.com/2075-1680/10/4/293`.
4. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений (II) // Тр. ММО. 1972. Т. 26. С. 199—239.
5. *Биркгоф Д. Д.* Динамические системы. Ижевск : Изд. дом «Удмуртский университет», 1999. 408 с.
6. *Gustavson F. G.* On constructing formal integrals of a Hamiltonian system near ail equilibrium point // Astronomical Journal. 1966. Oct. Vol. 71, no. 8. P. 670–686. DOI: `https://doi.org/10.1086/110172`.
7. *Hori G.* Theory of General Perturbation with Unspecified Canonical Variable // Publications of the Astronomical Society of Japan. 1966. Jan. Vol. 18, no. 4. P. 287–296.
8. *Deprit A.* Canonical transformations depending on a small parameter // Celestial Mechanics. 1969. Mar. Vol. 1, no. 1. P. 12–30. DOI: `https://doi.org/10.1007/BF01230629`.
9. *Haro À.* An algorithm to generate canonical transformations: application to normal forms // Physica D. 2002. Vol. 167. P. 197–217.
10. *Петров А. Г.* Об инвариантной нормализации неавтономных гамильтоновых систем // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68, № 3. С. 402—413.
11. *Петров А. Г.* Асимптотические методы решения уравнений Гамильтона с помощью параметризации канонических преобразований // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 5. С. 626—638.
12. *Журавлев В. Ф.* Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем // Прикл. матем. и мех. 2002. Т. 66, № 3. С. 356—365.
13. *Брюно А. Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М. : Наука, 1998. 288 с.

14. *Kamel A. A.* Expansion formulae in canonical transformations depending on a small parameter // Celestial Mechanics. 1969. Vol. 1, no. 2. P. 190–199. DOI: `https://doi.org/10.1007/bf01228838`.

15. *Mersman W.* A new algorithm for the Lie transformation // Celestial Mechanics. 1970. Vol. 3, no. 1. P. 81–89.

16. *Джакалья Г. Е. О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем / под ред. П. ред. А.П. Маркеева. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. 320 с.

17. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М. : «Мир», 1976. 456 с.

18. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М. : Гл. ред. физ.-мат. литер. изд-ва «Наука», 1978. 352 с.

19. *Брюно А. Д.*, *Петров А. Г.* Вычисление гамильтоновой нормальной формы // ДАН. 2006. Т. 410, № 4. С. 474—478.

20. *Thompson I.* Understanding Maple. Cambridge University Press, 2016. 228 p.

21. *Wolfram S.* The Mathematica Book. Wolfram Media, Inc., 2003. 1488 p.

22. *Прокопеня А. Н.* Нормализация гамильтониана в ограниченной задаче многих тел методами компьютерной алгебры // Программирование. 2012. Т. 38, № 3. С. 65—78.

23. *Шевченко И. И.* Исследование некоторых проблем устойчивости и хаотического поведения в небесной механике : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.03.01 / Шевченко Иван Иванович. С.-Петербург : ГАО РАН, 2000. 257 с.

24. *Burbanks A. D.*, *Wiggins S.*, *Waalkens H.*, *Schubert R.* Background and Documentation of Software for Computing Hamiltonian Normal Forms //. School of mathematics, University of Bristol, Bristol, University Walk, Bristol BS8 1TW, 2008.

25. *Jorba À.* A methodology for the numerical computation of normal forms, centre manifolds and first integrals of hamiltonian systems // Experimental Mathematics. 1999. Vol. 8, no. 2. P. 155–195.

26. *The Sage Developers*. SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 9.1.1). 2020. DOI: `https://doi.org/10.5281/zenodo.4066866`. https://www.sagemath.org.

27. *Meurer A.*, *Smith C. P.*, [et al.]. SymPy: symbolic computing in Python // PeerJ Computer Science. 2017. Vol. 3. e103. ISSN 2376–5992. DOI: `10.7717/peerj-cs.103`. URL: `https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103`.

28. *Maxima*. Maxima, a Computer Algebra System. Version 5.45.1. 2021. URL: `https://maxima.sourceforge.io/`.

29. *Брюно А. Д.*, *Батхин А.* Алгоритмы и программы вычисления корней многочлена от одной или двух неизвестных // Программирование. 2021. № 5. С. 22—43. DOI: `https://doi.org/10.31857/S0132347421050046`.

30. *Батхин А. Б.*, *Батхина Н. В.* Задача Хилла. Волгоград : Волгоградское научное издательство, 2009. ISBN 978-5-98461-574-7.

31. *Себехей В.* Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М. : Наука, 1982. 656 с.

32. *Simó C.*, *Stuchi T. J.* Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the planar Hill problem // Physica D. 2000. Vol. 140. P. 1–32.

33. *Батхин А. Б.* Сеть семейств периодических орбит обобщенной задачи Хилла // ДАН. 2014. Т. 458, № 2. С. 131—137. DOI: `https://doi.org/10.7868/S086956521426003X`.

34. *Hénon M.* Numerical exploration of the restricted problem. VI. Hill's case: non-periodic orbits // Astron. & Astr. 1970. No. 9. P. 24–36.

35. *Samovol V. S.* Linearization of a system of differential equations in the neighborhood of a singular point // Sov. Math. Dokl. 1972. Vol. 13. P. 1255–1259.

36. *Bruno A. D.* Local Methods in Nonlinear Differential Equations. Berlin – Heidelberg – New York – London – Paris – Tokyo : Springer–Verlag, 1989. 350 p.

37. *Bruno A. D.* Families of periodic solutions and invariant tori of Hamiltonian systems // Formal and Analytic Solutions of Differential Equations / G. Filipuk, A. Lastra, S. Michalik. WORLD SCIENTIFIC (EUROPE), 2022. Гл. 1. DOI: `https://doi.org/10.1142/q0335`. URL: `https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/q0335`.

Аббревиатуры

НФ Нормальная форма 3, 6–8, 10, 13–19
ПР положение равновесия 4, 7, 8
СКА система компьютерной алгебры 11, 13, 14, 17

Оглавление

1 Введение 3
2 Гамильтонова нормальная форма 4
2.1 Методы построения канонических преобразований 5
2.2 Свойства нормальной формы 7
3 Нормализация методом рядов Ли 7
3.1 Обзор процедуры нормализации 7
3.2 Решение гомологических уравнений 9
3.3 Упрощение гомологических уравнений 10
3.4 Программная реализация метода инвариантной нормализации . 13
4 Применение к задаче Хилла 15
4.1 Гамильтониан задачи Хилла 15
4.2 Нормальная форма задачи Хилла вблизи начала координат . . . 16
4.3 Вычисление множества аналитичности 18
Список литературы 21
Аббревиатуры 24