



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 20 за 2022 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Г.К. Боровин, В.В. Лапшин**

**Колесо без обода**

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Боровин Г.К., Лапшин В.В. Колесо без обода // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 20. 17 с.  
<https://doi.org/10.20948/prepr-2022-20>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-20>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**Г.К. Боровин, В.В. Лапшин**

**Колесо без обода**

**Москва — 2022**

*Г.К. Боровин, В.В. Лапшин*

### **Колесо без обода**

В работе высказана гипотеза о том, что двуногая ходьба является процессом автоколебаний по части переменных. Рассмотрена простейшая модель двуногой ходьбы – движение колеса без обода (колеса с ногами). В нелинейной постановке аналитически исследована динамика его плоского движения вниз по наклонной плоскости. Показано, что возможны различные режимы движения колеса без обода, наиболее интересным из которых является существование устойчивого периодического решения (автоколебаний).

**Ключевые слова:** нелинейная динамика, двуногая ходьба, колесо без обода.

*G.K. Borovin, V.V. Lapshin*

### **Rimless wheel**

The paper hypothesizes that bipedal walking is a process of self-oscillations in terms of variables. The simplest model of bipedal walking – the movement of a rimless wheel (a wheel with legs) is considered. In a nonlinear formulation, the dynamics of its plane motion down an inclined plane is analyzed analytically. It is shown that various modes of movement of a rimless wheel are possible. The most interesting of which is the existence of a stable periodic solution (self-oscillations).

**Keywords:** nonlinear dynamics, bipedal walking, rimless wheel.

## **Оглавление**

Введение .....	3
1. Постановка задачи .....	5
2. Удар при смене опорных ног .....	6
3. Вращение вокруг опорной ноги .....	9
4. Условие безотрывности движения колеса без обода от опорной поверхности .....	10
5. Отображение Пуанкаре. Автоколебания .....	11
Заключение .....	14
Библиографический список .....	15

## Введение

Проблема создания и управления движением автоматических двуногих устройств, способных перемещаться подобно человеку, привлекает внимание ученых и инженеров со времен Леонардо да Винчи. Известны различные подходы к решению задачи управления движением двуногих аппаратов. Некоторые из них приведены в работах [1–17]. Если двуногий робот имеет большие управляемые стопы, его движение можно организовать в рамках статической устойчивости. Однако для организации движения двуногого аппарата, способного перемещаться в рамках динамической устойчивости, в том числе аппарата без управляемых стоп, системе управления приходится решать весьма сложную проблему управления механической системой с дефицитом управлений. В этом случае невозможно обеспечить произвольное программное движение по всем степеням подвижности аппарата. Обычно строится периодическое программное движение и разрабатываются алгоритмы стабилизации этого движения. При движении аппарата, способного менять параметры своего движения, системе управления движением приходится интегрировать дифференциальные уравнения движения аппарата даже при движении по простой местности (ровной горизонтальной поверхности или поверхности с небольшими неровностями). В то же время человек при своем движении не интегрирует дифференциальные уравнения движения, а при движении по простой относительно ровной местности вообще не задумывается о процессе организации ходьбы. Все осуществляется на уровне подсознания. Можно предположить, что управление движением двуногого устройства можно осуществить существенно проще. Возможно, ходьба — это постоянный процесс падения, при котором для предотвращения падения человек подставляет очередную ногу для предотвращения падения. При этом он может легко менять параметры своего движения. Система управления движением строится достаточно просто за счет существования устойчивых периодических движений по части переменных (автоколебаний). Для управления движением по части переменных можно использовать разомкнутые (без обратной связи) контуры управления аналогично тому, как это делается при движении пассивных двуногих шагающих устройств [10, 11, 14] и прыгающих аппаратов с упругими элементами в конструкции ног [19–22]. При этом параметры этих устойчивых периодических решений (автоколебаний) могут меняться за счет работы независимых контуров управления движением по другим степеням подвижности аппарата.



Рис. 1. Колесо без обода, как модель двуногой ходьбы [23]

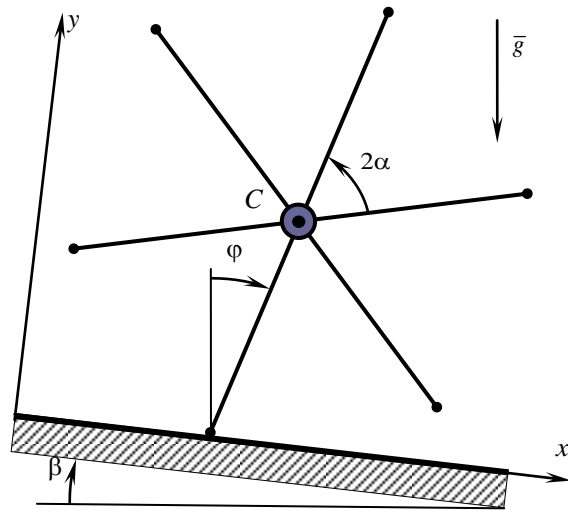


Рис. 2. Конструктивная схема колеса без обода на наклонной плоскости.

Данная работа является первым шагом в попытке разобраться с данной гипотезой. Начнем с исследования объекта, существенно более простого, чем двуногий шагающий аппарат, – колеса без обода, или колеса с ногами (рис. 1-2), который предложил А.М. Формальский [1]. Независимо от него несколько позже эту модель рассмотрел Т. McGeer [14], полученные результаты он использовал при создании аппарата, демонстрирующего пассивную двуногую ходьбу без использования приводов в шарнирах ног. Колесо без обода является простейшей моделью движения плоского двуногого шагающего аппарата. Если при движении двуногого аппарата (человека) он, чтобы не упасть вперед, подставляет новую ногу, то у колеса без обода очередная нога входит в соприкосновение с опорной поверхностью в результате его поворота (качения). Такая модель движения шагающего аппарата представляет интерес в силу своей простоты. Исследуется плоское движение твердого тела, в то время как шагающий аппарат (человек) представляет из себя систему нескольких твердых тел, имеющих приводы в шарнирах, соединяющих эти тела. Колесо без обода также предлагал использовать D.J. Todd [18] в конструкциях колесных роботов повышенной проходимости. Колесо без обода напоминает штурвал корабля, шестерню, колесо телеги без обода, жесткое колесо с большими грунтозацепами или колесо с очень грубым протектором при их движении по твердой поверхности.

При постановке ноги колеса без обода на опорную поверхность происходит удар. Предполагается, что при этом происходит абсолютно неупругий удар и нога не скользит по опорной поверхности. При ударе

происходит потеря энергии, и в результате при движении по горизонтальной поверхности скорость движения замедляется и колесо останавливается [1]. При движении вниз по наклонной плоскости с достаточно большим углом наклона к горизонту колесо выходит на устойчивый периодический режим движения (автоколебания). При этом поступление энергии в систему обеспечивается за счет работы силы тяжести. Этот процесс приближенно исследовал Т. McGeer [14] в линеаризованной модели движения в предположении малости угла между ногами колеса без обода и угла наклона поверхности к горизонту. В данной работе эта задача аналитически решена в нелинейной постановке.

Исследование движения колеса без обода методами моделирования его движения на ЭВМ и макетирования проводилось в работах [24-30]. В [30] доступна в интернете интерактивная математическая модель движения колеса без обода с анимацией его движения, построением фазовых траекторий и возможностью задания параметров колеса и угла наклона склона, по которому оно движется.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим твердое тело (рис. 2) – диск, к краю которого прикреплено  $n$  одинаковых стержней, где  $n \geq 3$ . Внешние концы этих стержней образуют правильный многоугольник. Назовем это тело колесом без обода. Отрезок, соединяющий центр масс тела  $C$  с внешним концом стержня, будем называть ногой (виртуальной ногой), а внешний конец стержня будем называть стопой. Предположим, что длины всех ног одинаковы и равны  $l$ . Угол между соседними ногами равен  $2\alpha$ , где  $\alpha = \pi/n$ . Масса равна  $m$ ,  $J_C = m\rho^2$  – момент инерции относительно центра масс,  $\rho$  – радиус инерции относительно центра масс,  $\rho > 0$ . Положение колеса определяется углом поворота  $\varphi$ , отсчитываемым от вертикали до опорной ноги. За положительное направление отсчета угла примем направление по ходу часовой стрелки.

Рассмотрим плоское движение колеса без обода вниз по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту  $\beta$ . Предположим, что опорная поверхность является абсолютно шероховатой и стопы не могут скользить по опорной поверхности. Скорость центра масс обозначим через  $\bar{V}$ , а угловую скорость колеса через  $\omega$ . Движение колеса заключается в чередовании фаз вращения вокруг стопы опорной ноги и ударов при смене опорных ног.

## 2. Удар при смене опорных ног

До удара (рис. 3) колесо опирается на опорную поверхность в точке  $S_{i-1}$ , которая имеет нулевую скорость. В результате вращения твердого тела вокруг этой точки происходит удар об опорную поверхность в новой точке контакта  $S_i$ . При этом удар предполагается абсолютно неупругим, и после удара новая точка соприкосновения остается на опорной поверхности.

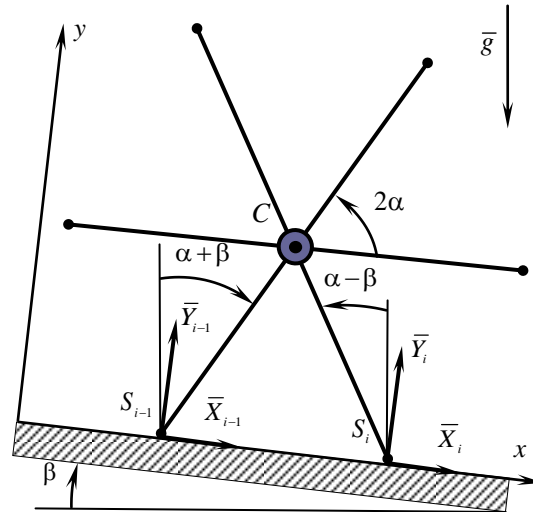


Рис. 3. Колесо без обода. Удар при соприкосновении второй ноги с опорной поверхностью.

В силу того, что угол поворота колеса  $\varphi$  отсчитывается от вертикали до опорной ноги, его значение при ударе (постановке новой ноги на опорную поверхность) изменяется (рис. 3)

$$\varphi^- = \beta + \alpha, \quad \varphi^+ = \beta - \alpha.$$

Здесь и далее индекс "плюс" соответствует значению после удара, а индекс "минус" – значению до удара.

Ударные импульсы реакции опорной поверхности возникают как в точке соударения  $S_i$ , так и в точке опоры  $S_{i-1}$ . В результате удара первоначальная точка опоры может остаться на опорной поверхности либо покинуть ее в силу того, что связь является неудерживающей.

Обозначим  $\bar{V}_i^- = (\dot{x}_{Ci}^-, \dot{y}_{Ci}^-)$ ,  $\bar{V}_i^+ = (\dot{x}_{Ci}^+, \dot{y}_{Ci}^+)$ ,  $\omega_i^-$ ,  $\omega_i^+$  скорость центра масс  $C$  и угловую скорость колеса соответственно до удара и после удара. За положительное направление угловой скорости принимается направление по

ходу часовой стрелки, которое является положительным направлением отсчета угла поворота колеса  $\varphi$ .

В момент удара возникают ударные импульсы в точках опоры ног (ударные реакции опорной поверхности); их проекции на оси координат обозначим  $X_{i-1}, Y_{i-1}$  в стопе  $S_{i-1}$  и  $X_i, Y_i$  в стопе  $S_i$  (рис. 3).

Наложенные на координаты стоп опорных ног связи являются неудерживающими (стопы опорных ног могут оторваться от опорной поверхности и двигаться вверх). Следовательно, вертикальные составляющие ударных реакций в точках опоры ног являются неотрицательными

$$Y_{i-1} \geq 0, \quad Y_i \geq 0. \quad (1)$$

Если стопа  $S_{i-1}$  в результате удара отрывается от опорной поверхности, то после удара скорость стопы направлена вверх

$$\dot{y}_{S_{i-1}}^+ = \omega_i^+ 2l \sin \alpha > 0. \quad (2)$$

Кроме того, примем гипотезу, что ударные реакции в точке опоры этой ноги равны нулю [3]

$$X_{i-1} = 0, \quad Y_{i-1} = 0. \quad (3)$$

Это предположение равносильно отсутствию импульсных управлений в степенях подвижности ног, которые могли бы дополнительно “подтолкнуть” тело ног, которая оторвется от опорной поверхности.

До удара тело вращалось вокруг неподвижной стопы  $S_{i-1}$  и в момент соприкосновения стопы  $S_i$  с опорной поверхностью (до удара) имело угловую скорость

$$\omega_i^- > 0, \quad (4)$$

тогда

$$\dot{x}_{Ci}^- = \omega_i^- l \cos \alpha, \quad \dot{y}_{Ci}^- = -\omega_i^- l \sin \alpha. \quad (5)$$

В силу теорем о движении центра масс и изменении кинетического момента системы относительно центра масс при ударе имеем

$$\begin{aligned} m(\dot{x}_{Ci}^+ - \omega_i^- l \cos \alpha) &= X_{i-1} + X_i, \\ m(\dot{y}_{Ci}^+ + \omega_i^- l \sin \alpha) &= Y_{i-1} + Y_i, \end{aligned} \quad (6)$$

$$m\rho^2(\omega_i^+ - \omega_i^-) = (Y_{i-1} - Y_i)l \sin \alpha - (X_{i-1} + X_i)l \cos \alpha.$$

Возможны два различных типа удара.



1. В результате удара обе ноги остаются на опорной поверхности. Возникают ударные реакции в точках опоры обеих ног. После удара колесо останавливается

$$\dot{x}_{Ci}^+ = 0 \quad , \quad \dot{y}_{Ci}^+ = 0 \quad , \quad \omega_i^+ = 0.$$

Подставляя эти соотношения в (6), имеем

$$\begin{aligned} -m\omega_i^- l \cos \alpha &= X_{i-1} + X_i, \\ m\omega_i^- l \sin \alpha &= Y_{i-1} + Y_i, \\ -m\rho^2 \omega_i^- &= (Y_{i-1} - Y_i)l \sin \alpha - (X_{i-1} + X_i)l \cos \alpha. \end{aligned}$$

Тогда

$$Y_{i-1} = -\frac{\rho^2 + l^2 \cos 2\alpha}{2l \sin \alpha} m\omega_i^- \quad , \quad Y_i = \frac{\rho^2 + l^2}{2l \sin \alpha} m\omega_i^- . \quad (7)$$

Условие неотрицательности вертикальных составляющих ударных реакций (1) в силу (4) и (7) равносильно условию

$$\cos 2\alpha \leq -\left(\frac{\rho}{l}\right)^2 < 0. \quad (8)$$

2. После удара начинается вращение тела вокруг неподвижной стопы  $S_i$  с угловой скоростью

$$\omega_i^+ > 0 \quad , \quad \dot{x}_{Ci}^+ = \omega_i^+ l \cos \alpha \quad , \quad \dot{y}_{Ci}^+ = \omega_i^+ l \sin \alpha .$$

Подставляя эти соотношения и (3) в (6), имеем

$$\begin{aligned} m(\omega_i^+ - \omega_i^-)l \cos \alpha &= X_i, \\ m(\omega_i^+ + \omega_i^-)l \sin \alpha &= Y_i, \\ m\rho^2(\omega_i^+ - \omega_i^-) &= -Y_i l \sin \alpha - X_i l \cos \alpha. \end{aligned}$$

Тогда

$$\omega_i^+ = k \omega_i^- , \quad (9)$$

$$Y_i = 2 \frac{\rho^2 + l^2 \cos^2 \alpha}{\rho^2 + l^2} m\omega_i^- l \sin \alpha ,$$

где

$$k = \frac{\rho^2 + l^2 \cos 2\alpha}{\rho^2 + l^2}. \quad (10)$$

Вращение вокруг стопы  $S_i$  возникает в результате удара тогда и только тогда, когда  $\omega_i^+ > 0$ ,  $Y_i > 0$ . В силу (4), (9) и (10) эти условия выполнены, если  $k > 0$  или

$$\cos 2\alpha > -\left(\frac{\rho}{l}\right)^2. \quad (11)$$

Из (8), (11) следует, что модель удара является корректной (детерминированной). При любых значениях параметров имеет место только один из двух возможных типов удара. Отметим, что характер движения колеса после удара зависит только от конструктивных параметров и не зависит от угловой скорости колеса до удара.

Угол  $\alpha = \pi/n$ , где  $n$  – количество ног. При  $n \geq 5$  угол между соседними ногами  $2\alpha$  острый  $\cos 2\alpha > 0$  и условие (11) выполнено всегда. При  $n = 4$   $\cos 2\alpha = 0$  и условие (11) выполнено, если  $\rho \neq 0$ . Отметим, что  $\rho = 0$  соответствует случаю, когда вся масса колеса сосредоточена в его центре масс. При  $n = 3$   $\cos 2\alpha = -1/2$  и условие (11) выполнено если  $\rho > \sqrt{2}l$ .

В дальнейшем будем рассматривать только случай, когда выполнено условие (11) и в результате удара стопа  $S_{i-1}$  отрывается от опорной поверхности и начинается вращение вокруг стопы  $S_i$ .

Отметим, что при этом

$$0 < k < 1, \quad (12)$$

а тогда в силу (9)  $0 < \omega_i^+ < \omega_i^-$ , т.е. при ударе происходит потеря энергии. При увеличении числа ног угол  $\alpha = \pi/n$  уменьшается и коэффициент  $k$  увеличивается. В пределе при  $n \rightarrow \infty$  коэффициент  $k \rightarrow 1$ . Предельный переход к бесконечному числу ног можно трактовать как переход к обычному колесу.

### 3. Вращение вокруг опорной ноги

После удара колесо вращается вокруг стопы  $S_i$  (рис. 2). В соответствии с теоремой об изменении кинетического момента относительно точки  $S_i$

$$(\rho^2 + l^2)\ddot{\varphi} = gl \sin \varphi, \quad (13)$$

где  $\varphi$  – угол поворота колеса. Отметим, что угловая скорость колеса  $\omega = \dot{\varphi}$ . В начале этой фазы движения  $\varphi_0 = \varphi_i^+ = \beta - \alpha$ ,  $\omega_0 = \omega_i^+$ . Уравнение (13) – это уравнение движения перевернутого маятника.

Уравнение (13) имеет интеграл энергии

$$\frac{\omega^2}{2} + \frac{gl}{\rho^2 + l^2} \cos \varphi = \frac{(\omega_i^+)^2}{2} + \frac{gl}{\rho^2 + l^2} \cos(\beta - \alpha). \quad (14)$$

При  $\beta < \alpha$ , если колесо достигнет критического положения, когда центр масс находится над точкой опоры  $S_i$  ( т.е.  $\varphi = 0$ ) с ненулевой угловой скоростью, то оно перевалит через это положение и ударится об опорную поверхность следующей ногой  $S_{i+1}$ . Для этого в силу интеграла энергии (14) необходимо и достаточно, чтобы

$$\omega_i^+ > \omega_{кр},$$

где

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{2gl}{\rho^2 + l^2} (1 - \cos(\beta - \alpha))}. \quad (15)$$

Если  $\beta = \alpha$ , то  $\omega_{кр} = 0$ .

Если  $\beta > \alpha$ , положение колеса при опоре на ноги  $S_{i-1}$  и  $S_i$  статически неустойчивое, под действием силы тяжести при любых значениях  $\omega_i^+ \geq 0$  колесо будет вращаться вокруг стопы  $S_i$  и продолжит движение вниз по склону и ударится следующей ногой  $S_{i+1}$ . При этом даже из состояния покоя колесо начнет движение вниз по склону.

#### **4. Условие безотрывности движения колеса без обода от опорной поверхности**

При движении колеса связь в точке опоры ноги является неударивающей, и при больших значениях угловой скорости колеса может произойти отрыв опорной ноги от опорной поверхности. При этом колесо переходит от "ходьбы" к "бегу". Это происходит, когда нормальная к опорной поверхности реакция, необходимая для обеспечения вращения колеса,  $Y_i < 0$ . В данной работе будем считать это недопустимым, т.е. ограничимся

исследованием режима "ходьбы" колеса. Для этого необходимо и достаточно, чтобы на каждом шаге  $Y_i$  было больше нуля.

В соответствии с теоремой о движении центра масс

$$Y_i = m(g \cos \beta + \ddot{y}_C) = m(g \cos \beta - l \cos(\varphi - \beta) \dot{\varphi}^2 - l \sin(\varphi - \beta) \ddot{\varphi}).$$

Подставляя в это соотношение  $\ddot{\varphi}$  из (13) и  $\dot{\varphi}^2 = \omega^2$  из (14), получаем, что условие безотрывности движения колеса на  $i$ -м шаге имеет вид

$$\Phi(\omega_i^+, \beta, \alpha) > 0, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\omega_i^+, \beta, \alpha) = & \min_{\varphi \in [\beta - \alpha, \beta + \alpha]} \{ g \cos \beta - \\ & - \frac{gl^2}{\rho^2 + l^2} [2 \cos(\varphi - \beta) [\cos(\beta - \alpha) - \cos \varphi] - l \sin(\varphi - \beta) \sin \varphi] - l \cos(\varphi - \beta) (\omega_i^+)^2 \} \end{aligned}$$

## 5. Отображение Пуанкаре. Автоколебания

Если  $\omega_i^+ < \omega_{кр}$ , то колесо не достигнет критического положения и под действием силы тяжести начнет вращаться в обратном направлении и ударится об опорную поверхность предыдущей ногой  $S_{i-1}$ . При повторном ударе ногой  $S_{i-1}$  об опорную поверхность в силу интеграла энергии  $\omega_{i+1}^- = -\omega_i^+$ , тогда после удара

$$\omega_{i+1}^+ = f_1(\omega_i^+) = -k\omega_i^+. \quad (17)$$

Это соотношение является отображением Пуанкаре для изменения угловой скорости за  $i$ -й шаг. Оно является линейным и имеет одну неподвижную точку  $\omega_0 = 0$ , которой соответствует устойчивое положение равновесия с опорой на две ноги  $S_{i-1}$  и  $S_i$ , в силу теоремы Кёнигса [31], т.к.

$$\left| \frac{df_1}{d\omega_i^+} \right| = k < 1.$$

Значение  $k$  определяется соотношением (10) и  $0 < k < 1$ .

Отображение Пуанкаре (17) показано на рис. 4. При этом угловая скорость уменьшается в геометрической прогрессии. Можно показать, что и продолжительность каждого шага уменьшается в геометрической прогрессии.

Имеет место бесконечная серия ударов с переваливанием с одной ноги на другую, но общая продолжительность этой серии ударов – конечная.

Если  $\omega_i^+ = \omega_{кр}$ , то колесо будет бесконечно долго достигать критического положения.

Если  $\beta \geq \alpha$  или  $\beta < \alpha$  и  $\omega_i^+ > \omega_{кр}$ , то колесо перевернется через опорную ногу. Из интеграла энергии (14) определим угловую скорость колеса при ударе ногой  $S_{i+1}$  об опорную поверхность, учитывая, что в этом положении  $\theta = \theta_{i+1}^- = \beta + \alpha$ , получаем

$$\begin{aligned} (\omega_{i+1}^-)^2 &= (\omega_i^+)^2 + \frac{2gl}{\rho^2 + l^2} [\cos(\beta - \alpha) - \cos(\beta + \alpha)] = \\ &= (\omega_i^+)^2 + \frac{4gl}{\rho^2 + l^2} \sin \alpha \sin \beta \quad , \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\omega_{i+1}^- > 0$  – угловая скорость колеса в конце  $i$ -го шага или, что то же самое, в начале  $(i+1)$ -го шага.

Из соотношения (9) для удара стопой  $S_{i+1}$  и соотношения (18) получаем отображение Пуанкаре для изменения угловой скорости колеса за  $i$ -й шаг, который состоит из этапа вращения вокруг стопы  $S_i$  и последующего удара стопой  $S_{i+1}$

$$\omega_{i+1}^+ = f(\omega_i^+) = k \left[ (\omega_i^+)^2 + \frac{4gl}{\rho^2 + l^2} \sin \alpha \sin \beta \right]^{1/2}. \quad (19)$$

Это отображение имеет неподвижную точку

$$\omega_* = \left[ \frac{k^2}{1 - k^2} \frac{4gl}{\rho^2 + l^2} \sin \alpha \sin \beta \right]^{1/2}.$$

В соответствии с теоремой Кёнигса [31] этой неподвижной точке соответствует устойчивый предельный цикл, так как

$$\left| \frac{df}{d\omega_i^+} \right| = k^2 < 1 \quad , \quad \text{при } \omega = \omega_*.$$

Однако колесо на самом деле выйдет на это устойчивое периодическое решение, только если  $\beta \geq \alpha$  либо  $\beta < \alpha$ ,  $\omega_i^+ > \omega_{кр}$  и  $\omega_* > \omega_{кр}$ . Это отображение Пуанкаре (19) приведено на рис. 5.

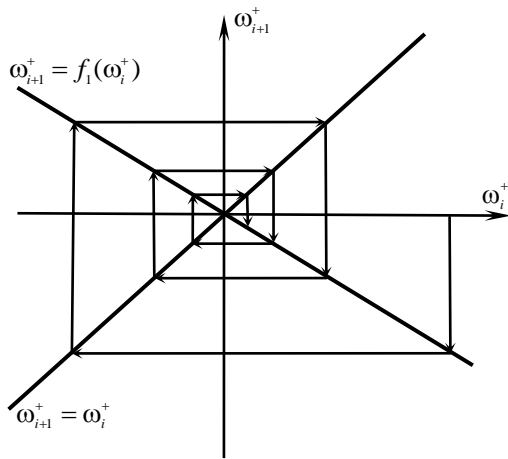


Рис. 4. Отображение Пуанкаре при  $\beta < \alpha$  и  $\omega_1^+ < \omega_{кр}$ .

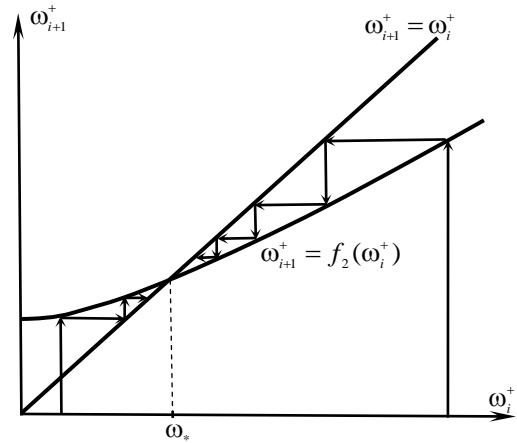


Рис. 5. Отображение Пуанкаре при  $\beta \geq \alpha$  либо  $\beta < \alpha$ ,  $\omega_1^+ > \omega_{кр}$  и  $\omega_* > \omega_{кр}$ .

Отметим, что этот устойчивый периодический режим движения имеет место, если на каждом шаге выполнено условие безотрывности движения колеса от опорной поверхности. Для этого необходимо и достаточно выполнение этого условия на предельном цикле и на первом шаге, т.е.

$$\Phi(\omega_*, \beta, \alpha) > 0 \quad , \quad \Phi(\omega_1^+, \beta, \alpha) > 0.$$

При  $\beta < \alpha$ ,  $\omega_i^+ > \omega_{кр}$  и  $\omega_* < \omega_{кр}$  не существует периодического решения, соответствующего неподвижной точке  $\omega_*$ . Объясняется это тем, что отображение Пуанкаре (19) справедливо только до тех пор, пока колесо переворачивается через опорную ногу. В течение нескольких шагов угловая скорость колеса будет уменьшаться, пока не станет меньше  $\omega_{кр}$ . После этого колесо будет переваливаться с одной ноги на другую в соответствии с отображением Пуанкаре (17). Отображение Пуанкаре для этого случая приведено на рис. 6.

При  $\beta < \alpha$ ,  $\omega_i^+ > \omega_{кр}$  и  $\omega_* = \omega_{кр}$  колесо будет стремиться к периодическому решению, соответствующему неподвижной точке  $\omega_*$ . Но это периодическое решение неустойчиво, т.к. при  $\omega_i^+ < \omega_{кр}$  имеет место отображение Пуанкаре (17). Отображение Пуанкаре для этого случая приведено на рис. 7.

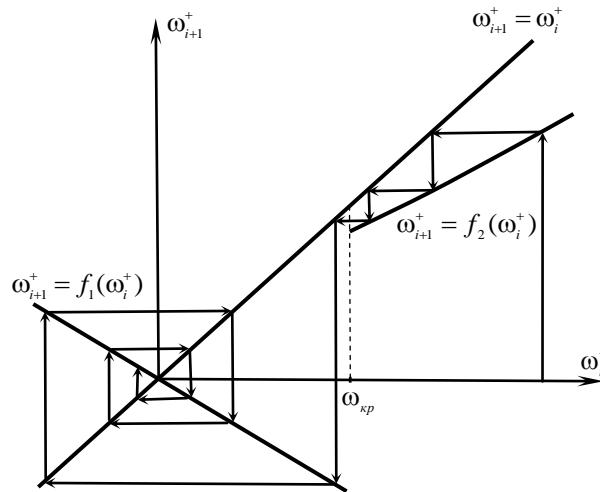


Рис. 6. Отображение Пуанкаре при  $\beta < \alpha$ ,  $\omega_1^+ > \omega_{kp}$  и  $\omega_* < \omega_{kp}$

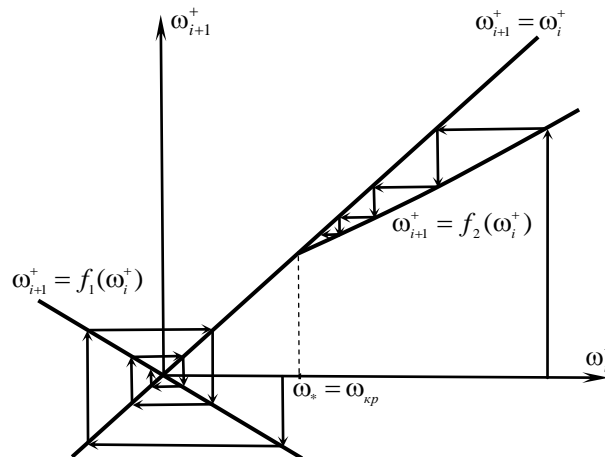


Рис. 7. Отображение Пуанкаре при  $\beta < \alpha$  и  $\omega_* = \omega_{kp}$

## Заключение

В работе выдвигается гипотеза, что при движении двуногого аппарата (робота) существуют устойчивые периодические движения по части переменных (автоколебания). При этом можно легко менять параметры этого периодического движения, используя разомкнутые (без обратной связи) контуры управления по части переменных. В качестве первого этапа проверки этой гипотезы аналитически исследуется динамика движения колеса без обода вниз по наклонной плоскости. Колесо без обода является простейшей моделью пассивной двуногой ходьбы. При его движении поступление энергии в систему

осуществляется за счет работы силы тяжести. Показано, что точечное отображение изменения угловой скорости колеса за шаг (отображение Пуанкаре) в подавляющем большинстве случаев имеет одну неподвижную точку. Этой неподвижной точке соответствует либо устойчивое периодическое решение (автоколебание), являющееся качением колеса вниз по наклонной плоскости, либо движение колеса заканчивается его остановкой в результате бесконечной серии ударов при покачивании на двух ногах. В вырожденном случае отображение Пуанкаре имеет две неподвижные точки. Одной из них соответствует неустойчивый предельный цикл, соответствующий качению колеса, второй – остановка колеса. При этом предельный цикл является устойчивым снаружи и неустойчивым внутри себя.

### Библиографический список

1. Формальский А.М. Перемещение антропоморфных механизмов. М.: Наука, 1982, 368 с.
2. Белецкий В.В. Двухногая ходьба. Модельные задачи динамики и управления. М.: Наука, 1984, 288 с.
3. Болотин Ю.В., Новожилов И.В. Управление походкой двухногого шагающего аппарата. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*, 1977, № 3, с. 47-52.
4. Болотин Ю.В. О разделении движений в задаче стабилизации двухногой ходьбы. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*, 1979, № 4, с. 48-53.
5. Бордюг Б.А., Ларин В.Б., Тимошенко А.Г. Задачи управления шагающим аппаратом. Киев: Наукова думка, 1985, 263 с.
6. Вукобратович М. Шагающие роботы и антропоморфные механизмы. М.: Мир, 1976. 541 с.
7. Крищенко А.П., Ткачев С.Б., Фетисов Д.А. Управление движением робота по лестнице. *Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Естественные науки*, 2006, № 1, с.38-64.
8. Лапшин В.В. Механика и управление движением шагающих машин. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2012, 199 с.
9. Ковальчук А.К., Кулаков Б.Б., Кулаков Д.Б., Семенов С.Е., Яроц В.В. Основы теории исполнительных механизмов шагающих роботов. М.: Изд-во "Рудомино", 2010. 170 с.
10. Collins S.H., Wisse M., Ruina A. A 3-D Passive Dynamic Walking Robot with Two Legs and Knees. *The International Journal of Robotics Research*, 2001, Vol. 20, p. 607-615.



11. Garcia M., Chatterjee A., Ruina A. Speed, Efficiency and Stability of Small Slope 2D Passive Dynamic Bipedal Walking. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1998, p. 2351-2356.
12. Grishin A.A., Formal'skii A.M., Lensky A.V., Zhitomirsky S.V. Dynamic Walking of Vehicle with Two Telescopic Legs Controlled by Two Drives. *The International Journal of Robotics Research*, 1994, Vol. 13, No. 2, p. 137-147.
13. Formal'skii A.M. Ballistic Walking Design via Impulsive Control. *ASCE Journal of Aerospace Engineering*, 2010, Vol. 23, No. 2, p. 129-138.
14. McGeer T. Passive Dynamic Walking. *The International Journal of Robotics Research*, 1990, Vol. 9, No. 2, p. 62-82.
15. Telesh A. Design of Bipedal Robot Walking Based on Non-Linear Periodical Oscillations. PhD thesis, Otto-Von-Guericke Universität, Magdeburg, 2012, 120 p.
16. Pratt J.E. Exploiting Inherent Robustness and Natural Dynamics of Bipedal Walking Robots. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2000, 157 p.
17. <http://asimo.honda.com> (дата обращения 21.12.2020).
18. Todd D.J. Walking Machines. An Introduction to Legged Robots. London: Kogan Page, 1985, 190 p.
19. Raibert M.H. Legged Robots that Balance. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1986, 234 p.
20. Лапшин В.В. Управление вертикальным и горизонтальным движением прыгающего аппарата. *Известия РАН. Механика твердого тела*. 1991, № 3, с. 38-46.
21. Lapshin V.V. Vertical and Horizontal Motion Control of a One-legged Hopping Machine. *The International Journal of Robotics Research*, 1992, Vol. 11, No. 5, p. 491-498.
22. Ahmadi M., Michalska H., Buehler M. Control and Stability Analysis of Limit Cycles in a Hopping Robot. *IEEE Transactions on Robotics*, 2007, Vol. 23, No 3, p. 553-563
23. Неизвестный автор.
24. Coleman M.J., Ruina A., Chaterjee A. Motion of a Rimless Spoked Wheel: a Simple 3D Systems with Impacts. *Dynamics and Stability of Systems*, 1997, Vol. 12, No. 3, p. 139-159.
25. Byl K., Tedrake R. Metastable walking machines. *The International Journal of Robotics Research*, 2009, Vol. 28, p. 1040-1064.
26. Asano F., Luo Z.-W. Asymptotically Stable Biped Gait Generation based on Stability Principle of Rimless Wheel. *Robotica*, 2009, Vol. 27, No. 6, p. 949-958.
27. Narukawa T., Takamashi M., Yoshida K. Design and Stability Analysis of a 3D Rimless Wheel with Flat Feet and Ankle Springs. *Journal of System Design and Dynamics*, 2009, Vol. 3, No. 3, p. 258-269.
28. Lapshin V.V. Walking Wheel. *Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Серия "Естественные науки"*, 2020, № 6. С. 23-35.

29. Asano F., Zheng Y., Li L. Modeling and Motion Analysis of Planar Passive-Dynamic Walker with Tensegrity Structure Formed of Four Limbs and Eight Viscoelastic Elements. *Proc. Int. Conf. CLAWAR 2021* (CLAWAR Association Ltd UK) pp 242-254.
30. Te-yuan Chou. Rimless Wheel Locomotion // <http://demonstrations.wolfram.com/RimlesswheelLocomotion> (дата обращения 21.12.2021).
31. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981, 918 с.