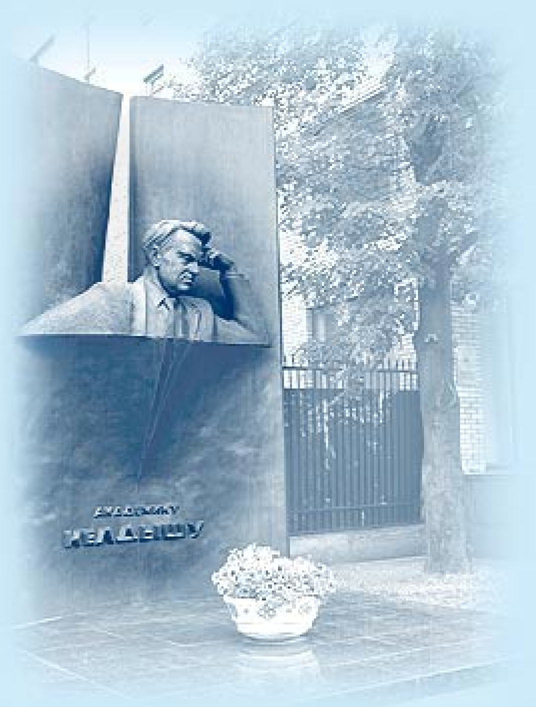
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 23 за 2022 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)



В.В. Веденяпин, В.И. Парёнкина, А.Г. Петров, Чжан Хаочэнь

Уравнение Власова-Эйнштейна и точки Лагранжа

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Уравнение Власова-Эйнштейна и точки Лагранжа / В.В. Веденяпин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 23. 23 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2022-23
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-23

Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша Российской академии наук»

**В.В.Веденяпин, В.И.Паренкина , А.Г.Петров,
Чжан Хаочэнь**

Уравнение Власова-Эйнштейна и точки Лагранжа

Москва — 2022

***В.В.Веденяпин*[1]*, В.И.Паренкина*[2] *, А.Г.Петров*[3]*, Чжан Хаочэнь*[1,4]**

[1]*ФИЦ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Миусская пл., д.4, Москва, 125047 Россия*

[2]*Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области Московский государственный областной университет Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, 141014 Россия*

[3]*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, 119526 Россия*

[4]*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, 141701 Россия*

Уравнение Власова-Эйнштейна и точки Лагранжа

В классических работах (см. [1-4]) уравнения для полей предлагаются без вывода правых частей. Здесь мы даем вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна в рамках уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна из классического, но более общего принципа наименьшего действия. Причём в случае модели Вселенной Фридмана получается одна возможность объяснить загадочное ускоренное расширение Вселенной [39-40]. Ускоренное расширение Вселенной, отмеченное Нобелевской премией по физике в 2011 году, вызывает пристальное внимание. Общепринятым объяснением сейчас является добавление лямбда-члена Эйнштейна в релятивистское действие. И хорошо известно, что в нерелятивистской теории это соответствует добавлению отталкивающего квадратичного потенциала [41-43].

Ключевые слова: уравнение Власова, уравнение Власова-Эйнштейна, уравнение Власова-Максвелла, уравнение Власова-Пуассона, треугольная точка Лагранжа.

Vedenyapin V.V., Parenkina V.I., Petrov A.G., Zhang Haochen

Vlasov-Einstein equation and Lagrange points

In classical works, equations for fields are proposed without derivation of the right-hand sides. Here we give a derivation of the right-hand sides of the Maxwell and Einstein equations in the framework of the Vlasov-Maxwell-Einstein equations from the classical, but more general principle of least action. Moreover, in the case of Friedman's model of the Universe, one possibility is obtained to explain the mysterious accelerated expansion of the Universe [39-40]. The accelerated expansion of the Universe, marked by the 2011 Nobel Prize in Physics, is receiving close attention. The generally accepted explanation now is the addition of Einstein's lambda term to the relativistic action. And it is well known that in the nonrelativistic theory this corresponds to the addition of a repulsive quadratic potential [41-43].

Key words: Vlasov equation, Vlasov-Einstein equation, Vlasov-Maxwell equation, Vlasov-Poisson equation, Lagrange triangular point.

Оглавление

Действие в общей теории относительности и уравнения для полей

Пусть $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e)$ функция распределения частиц по пространству $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, по скоростям $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$, массам $m\in\mathbb{R}$ и зарядує $\in\mathbb{R}$ в момент времени $t\in\mathbb{R}$. Это означает, что число частиц в объеме $d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{v}dmde$ равно $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e)d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{v}dmde$. Рассмотрим действие:

Equation Section 1

$$
\begin{aligned}
S &= -c\int mf\left(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e\right)\sqrt{g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}}\,d^3xd^3vdmdedt-\\
&-\frac{1}{c}\int ef\left(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e\right)A_{\mu}u^{\mu}\,d^3xd^3vdmdedt+\\
&+k_1\int\left(R+\Lambda\right)\sqrt{-g}\,d^4x+k_2\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $c-$ скорость света, $u^0=c$ и $u^i=v^i$ $(i=1,2,3)-$ трехмерная скорость, $x^0=ct$, x^i $(i=1,2,3)$ – координата, $g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t)-$ метрика $(\mu,\nu=0,1,2,3)$, $A_\mu(\boldsymbol{x},t)-$ 4-потенциал электромагнитного поля, $F_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial A_\mu(\boldsymbol{x},t)}{\partial x^\nu}-\frac{\partial A_\nu(\boldsymbol{x},t)}{\partial x^\mu}-$ электромагнитные поля, $R-$ полная кривизна, $\Lambda-$ лямбда-член Эйнштейна, $k_1=-\frac{c^3}{16\pi\gamma}$и $k_2=-\frac{1}{16\pi c}-$ константы [1-4], g –определитель метрики $g_{\mu\nu}$, $\gamma-$ постоянная тяготения, по повторяющимся индексам, как обычно, идёт суммирование.

Вид действия (1) удобен для получения уравнений Эйнштейна и Максвелла при варьировании по полям $g_{\mu\nu}$ и A_μ. Такой способ вывода уравнений Власова-Максвелла и Власова-Эйнштейна использовался в работах [5-11]. При варьировании (1) по $g_{\mu\nu}$ получим уравнение Эйнштейна:

$$
k_1\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g}=
$$

(2)

$$
=\int m\frac{f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e)}{2\sqrt{g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta}}u^\mu u^\nu d^3vdmde-\frac{1}{2}k_2F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}
$$

Первое слагаемое правой части этого уравнения и является по определению Гильберта тензором энергии-импульса. Он выписан впервые в таком виде в работах [9-11] в менее общем виде без распределения по массам и зарядам. Попытки выписать тензор энергии-импульса через функцию распределения предпринимались, насколько нам известно, только в релятивистской кинетической теории для уравнения Власова-Эйнштейна [5-15]. Если использовалась функция распределения от 4-хмерного импульса, что приводило к необходимости использовать дельта функцию $\delta\left((mc)^2 - g^{\mu\nu}P_\mu P_\nu\right)$, что неудобно, а уравнения движения, приводящие к уравнению типа Власова, также оказывались неудовлетворительными.

Уравнение электромагнитных полей получается варьированием (1) по A_μ и называется уравнением Максвелла:

$$k_2 \frac{\partial\sqrt{-g}F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c^2}\int e\, u^\mu f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e)d^3v dm de \qquad (3)$$

Покажем, что вид действия (1) является более является общим, чем в [1-4]. Для получения стандартного вида действия возьмем функцию распределения в виде δ- функции для одной частицы:

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e,t) = \delta\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'(t)\right)\delta\left(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'(t)\right)\delta(m-m')\delta(e-e') \qquad (4)$$

Подставляя (4) в действие (1) и опустив штрихи, получаем стандартные [1-4] выражения для всех слагаемых:

$$S = -cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t)u^\mu u^\nu}\,dt - \frac{e}{c}\int A_\mu\,(\boldsymbol{x},t)u^\mu dt$$

$$+k_1\int(R+\Lambda)\sqrt{-g}d^4x + k_2\int\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}d^4x \qquad (5)$$

В роли частиц могут быть электроны и ионы в плазме, планеты в галактиках, галактики в супергалактиках, скопление галактик во Вселенной. В равенстве (4) мы можем взять сумму дельта-функций и получить обычное действие [1-4] для конечной системы частиц: этим обосновывается единственность выбора более общего действия (1).

Уравнения движения частиц в заданных полях, уравнение Лиувилля и уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна

Воспользуемся инвариантностью первых двух слагаемых уравнения (5), относительно замены $t = \phi(\lambda)$, где λ – произвольный параметр. Такая инвариантность хорошо известна [1-4]. Перепишем первые два слагаемых из действия (5):

$$S = -cm \int \sqrt{g_{\mu\nu} w^\mu w^\nu} d\lambda - \frac{e}{c} \int A_\mu w^\mu d\lambda. \tag{6}$$

Варьируя по $\boldsymbol{x}(\lambda)$ и учитывая, что $w^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, получаем уравнение Эйлера - Лагранжа:

$$cm \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{g_{\mu\nu} w^\nu}{\sqrt{g_{\eta\alpha\beta} w^\alpha w^\beta}} + \frac{e}{c} A_\mu\right] = cm \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\alpha\beta} w^\alpha w^\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} w^\alpha w^\beta + \frac{e}{c} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} w^\nu \tag{7}$$

Учитывая, что величина $I = g_{\eta\xi} \frac{\partial x^\eta}{\partial\lambda} \frac{\partial x^\xi}{\partial\lambda}$ является интегралом движения по λ для уравнения (7) , (обоснование этого см. в [9,10]) приведем это уравнение к виду

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\eta} \frac{dx^\eta}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{e}{mc^2} \sqrt{I} F^\mu_\nu \frac{dx^\nu}{d\lambda}, \tag{8}$$

Где $\Gamma^\mu_{\nu\eta}$ – символ Кристоффеля:

$$\Gamma^\mu_{\nu\eta} = \frac{1}{2} g^{\mu\varsigma} \left(\frac{\partial g_{\varsigma\eta}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\varsigma\nu}}{\partial x^\eta} - \frac{\partial g_{\eta\nu}}{\partial x^\varsigma}\right).$$

Уравнение (8) отличается от приведенных в руководствах [1-4] наличием $\sqrt{I}$ в правой части: в этих руководствах дифференцирование идет по собственному времени $ds = d\lambda\sqrt{I}$. Это неудобно, так как для каждой частицы это собственное время индивидуально. Далее будет использована формула (8), которая обладает симметрией при замене $\boldsymbol{x} \to \alpha\boldsymbol{x}$, $\lambda \to \alpha\lambda$, что позволяет понизить её порядок. Для этого перепишем уравнение (8) в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = w^\mu \\ \frac{dw^\mu}{d\lambda} = -\Gamma^\mu_{\nu\eta} w^\nu w^\eta + \frac{e\sqrt{I}}{mc^2} F^\mu_\nu w^\nu \end{cases} \tag{9}$$

Избавляемся от λ, поделив остальные уравнения на первое из уравнений системы (9). Так как $x^0 = ct$ пропорционально времени, обозначим

$$\frac{w^\mu}{w^0} = \frac{dx^\mu}{dx^0} = \frac{u^\mu}{c}.$$

При этом из-за симметрии, описанной выше, можно избавиться от уравнения на

$$\frac{du^0}{dx^0}$$

и написать уравнения на трёхмерные переменные $x^i, v^i (i = 1,2,3)$. Здесь по-прежнему **u**=(c,**v**). Такое понижение порядка описано для гравитации в книгах Фока [1] и Вейнберга [3]. Там этот переход в уравнениях приведен для гравитации, где уравнения не отличаются для параметра λ и собственного времени s. Однако если добавляется электромагнетизм, то отличие заключается как раз в появлении корня в правой части, который обеспечивает необходимую симметрию. Нам это понижение переходом к времени t необходимо, так как наша цель получить замкнутую систему уравнений для полей и частиц, а значит, получить уравнение на функцию распределения $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, m, e)$, которая была в уранениях для полей. Тогда:

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{dt} = v^i \\ \frac{dv^i}{dt} = G^i \end{cases} \tag{10}$$

где через G^i обозначено следующее выражение:

$$G^i = -\Gamma^i_{\nu\eta} u^\nu u^\eta + \frac{v^i}{c} \Gamma^0_{\eta\nu} u^\eta u^\nu + \frac{e\sqrt{J}}{mc^2} \left[F^i_\nu u^\eta - \frac{v^i}{c} \Gamma^0_\eta u^\eta \right],$$

а $J = g_{\nu\xi} u^\nu u^\xi$, $u^0 = c$, $u^i = v^i$ (i=1,2,3).

Мы получили уравнения движения заряженных частиц в электромагнитных и гравитационных полях в релятивистской форме из принципа наименьшего действия в форме Вейнберга-Фока.

В заключение выпишем уравнение Лиувилля (его также называют уравнением переноса или уравнением неразрывности) для функции распределения $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, m, e, t)$для системы (10):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial (G^i f)}{\partial v^i} = 0 \qquad (11)$$

Уравнения (11), (2) и (3) образуют систему уравнений для гравитации и электродинамики Власова-Максвелла-Эйнштейна. Это замкнутая система уравнений релятивистких электродинамики и гравитации. Общий смысл уравнений типа Власова именно таков: они 1) позволяют замкнуть систему электродинамики (уравнение Власова-Максвелла) и гравитации (уравнение Власова-Эйнштейна) и 2) вывести их из принципа наименьшего действия.

Метрика Минковского

Рассмотрим пример с действием и метрикой Минковского:

$$S = -mc \int \left(\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x^\mu} \dot{x^\mu}} + \frac{U(x,t)}{c} \right) dt - \frac{1}{8\pi g} \int (\nabla U)^2 d^4 x \qquad (12)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Варьирование по потенциалу

Переходим к действию по обычной схеме, заменяя Лагранжевы координаты на Эйлеровы

$$S = -mc \int \left(\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x^\mu} \dot{x^\mu}} + \frac{U(x,t)}{c} \right) f(x,p,t,m) dxdpdmdt - \frac{1}{8\pi g} \int (\nabla U)^2 d^4 x$$

(14)

Теперь варьируем действие по потенциалу:

$$\delta_U S = 0 = -\int mf(x,p,t,m) \delta U dxdpdmdt - \frac{1}{8\pi g} \int (-2\Delta U) d^4\, x \qquad (15)$$

И получим уравнение Пуассона для полей:

$$\frac{1}{4\pi g} \Delta U = \int m\, f(x,p,t,m) d^3 p dm \qquad (16)$$

Варьирование по частицам

Используя принцип минимального действия, варьируем действие(12) по $x(t)$:

$$\delta_x S = 0 = -mc\delta \int \left(\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x^\mu}\dot{x^\mu}} + \frac{U(x,t)}{c} \right) dt =$$
$$= -mc\delta \int \left(\sqrt{c^2 - \dot{x^2}} + \frac{U(x,t)}{c} \right) dt =$$
$$= -mc \int \left(-\frac{\dot{x}_\iota \delta \dot{x}_\iota}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i \right) dt =$$
$$= -mc \int \left(\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}_\iota}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial x_i} \right) \delta x_i \, dt \qquad (17)$$

Итак, получим уравнение Эйлера Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}_\iota}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = -m\frac{\partial U}{\partial x_i}; \qquad (18)$$

$$L = -mc\sqrt{c^2 - v^2} - mU = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - mU \qquad (19)$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\iota} = -\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\iota}\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x^\mu}\dot{x^\mu}}mc = -mc\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\iota}\sqrt{c^2 - v^2} = \frac{mv_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (20)$$

Получаем:$\frac{dp_i}{dt} = m\frac{\partial U}{\partial x_i}; p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$$p_i = \gamma m v_i \Rightarrow p^2 = \gamma^2 m^2 v^2 = m^2c^2(\gamma^2 - 1), \text{где } \gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}^{-1} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}} \qquad (21)$$

Получается уравнение Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}}\left(\frac{\vec{p}}{m}, \frac{\partial f}{\partial x} \right) - m\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial p} \right) = 0 \qquad (22)$$

Общий вид уравнения Лиувилля в Гамильтоновой форме:
$\frac{\partial f(t,p,q)}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} = 0$ или $\frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0.$

В этой задаче $v_l = \dot{q}_\iota = \frac{p_l}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}}$, то

$$H = \sum \dot{q}_\iota p_l - L = \frac{p^2}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}} - L = \frac{p^2 + m^2c^2}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}} + mU =$$
$$mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} + mU \qquad (23)$$

Уравнение Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{p_\iota} = -m\dfrac{\partial U}{\partial q_l} \\ \dot{q_\iota} = \dfrac{p_l}{m}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}} \end{cases} \tag{24}$$

Итак, уравнение Лиувилля в Гамильтоновой форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}}\left(\frac{\vec{p}}{m}, \frac{\partial f}{\partial q}\right) - m\left(\frac{\partial U}{\partial q}, \frac{\partial f}{\partial p}\right) = 0. \tag{25}$$

Таким образом получается система уравнений Власова-Пуассона:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}}\left(\dfrac{\vec{p}}{m}, \dfrac{\partial f}{\partial \mathrm{q}}\right) - m\left(\dfrac{\partial U}{\partial \mathrm{q}}, \dfrac{\partial f}{\partial p}\right) = 0 \\ \Delta U = 4\pi g \int mf(x,p,t,m)d^3\,pdm \end{cases} \tag{26}$$

Переход к гидродинамике и уравнению Гамильтона-Якоби

Пусть у нас распределение Максвелла: $\mathrm{f} = \frac{1}{(2\pi mkT)^{3/2}}\exp\left(\frac{p^2 - Q^2(x,t)}{2\pi mkT}\right)$.

Сделаем гидродинамическую подстановку $f(t,x,p) = \rho(x,t)\delta\left(\vec{p} - \vec{Q}(x,t)\right)$.

Перепишем уравнение Лиувилля для произвольной системы ОДУ для функции распределения $f(t,q,p)$: $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial w_i f}{\partial x_i} + \frac{\partial g_k f}{\partial p_k} = 0$, где $i = \overline{1,m}, j = \overline{m+1,n}$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}\delta(p-Q) - \rho\frac{\partial \delta(p-Q)}{\partial p^i}\delta\left(\frac{\partial Q_i}{\partial t}\right) \tag{27}$$

$$\frac{\partial\big(w_i\rho\delta(p-Q)\big)}{\partial x^i} = \frac{\partial \rho\omega_i}{\partial x^i}\delta(p-Q) - \rho\omega_i\frac{\partial\delta(p-Q)}{\partial p^k}\frac{\partial Q_k}{\partial x^i} \tag{28}$$

$$\frac{\partial\Big(g_j\rho(x,t)\delta(p-Q)\Big)}{\partial p^j} = g_j(x,Q)\rho(x,t)\frac{\partial}{\partial p}\delta(p-Q) \tag{29}$$

Тогда подставим это в уравнение Лиувилля и соберём множители по дельте и её производной

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\delta(p-Q) - \rho\frac{\partial\delta(p-Q)}{\partial p^i}\frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{\partial\rho\omega_i}{\partial x^i}\delta(p-Q) - \rho\omega_i\frac{\partial\delta(p-Q)}{\partial p^k}\frac{\partial Q_k}{\partial x^i} + \frac{\partial\big(g_j f\big)}{\partial p^j} + \rho g_j\frac{\partial\delta(p-Q)}{\partial p^j} = 0$$

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\omega_i)}{\partial x^i}\right)\delta(p-Q) - \left(\rho\frac{\partial Q_k}{\partial t} + \rho\omega_i\frac{\partial Q_k}{\partial x_i} - \rho g_k\right)\frac{\partial\delta(p-Q)}{\partial p^k} = 0$$

(30)

Таким образом получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial\rho\omega_i(x,Q)}{\partial x^i} = 0 \\ \rho\left(\dfrac{\partial Q_k}{\partial t} + \omega_i(x,Q)\dfrac{\partial Q_k}{\partial x^i} - g_k(x,Q)\right) = 0 \end{cases} \tag{31}$$

Сделав подстановку $Q(x,t) = \nabla W$ для системы уравнений Гамильтона, получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i(\nabla W))}{\partial x^i} = 0 \\ \rho \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial W}{\partial t} + H(x, \nabla W)\right) = 0 \end{cases} \tag{32}$$

В итоге подставляя гамильтониан нашей задачи получается система уравнений Власова-Пуассона-Гамильтона-Якоби:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(v_i(\nabla W)\rho)}{\partial x^i} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + (\nabla W)^2} + mU(x) = 0 \\ \Delta U = 4\pi g \int mf(x,p,t) d^3\, p dm \end{cases} \tag{33}$$

где $v_i(p) = \frac{p_i}{m\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}}$

Решение уравнений

Перепишем эту систему уравнений для изотропного случая, когда $\rho = \rho(t,r,m),\ U = U(t,r),\ W = W(t,r,m,e)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{cW' x^i}{r\sqrt{(mc)^2+(W')^2}}\right) = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + (W')^2} + mV = 0 \\ \Delta U = 3U'(r) + r\left(\frac{U'}{r}\right)' = 4\pi g \int m\rho dm dp \end{cases} \tag{34}$$

В этой системе все ρ, W, U зависят только от r, t. Используя модель типа Фридмана, космологическим решениям соответствует случай, когда $\rho $ не зависит отпространственной переменной x: $\rho = \rho(m,t)$. При этом решим третье уравнение:

$$U' = \frac{r}{3}\left(4\pi g \int m\rho dm\, dr\right) + \frac{C(t)}{r^2}$$

$$U = \frac{r^2}{6}\left(4\pi g \int m\rho dm\, dr\right) - \frac{C_1(t)}{r} \tag{35}$$

где C, C_1 - не зависит от r, а только от t.

Из уравнения неразрывности получаем:

$$\frac{d\rho}{dt} + 3H_0\rho = 0 \tag{36}$$

где H_0 - постоянная Хаббла. Обычно полагают, что постоянная Хаббла зависит только времени наблюдения.

Считая первое уравнение системы, то

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{cW' x^i}{r\sqrt{(mc)^2+(W')^2}}\right) = 3H_0 \tag{37}$$

Допустим $\varphi = \frac{cW'}{r\sqrt{(mc)^2+(W')^2}}$, тогда получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi x_i) = 3H_0$$
$$r\varphi' + 3\varphi = 3H_0$$

Решаем дифференцированное уравнение, и получим:

$$\varphi = H_0\rho + \frac{C_2(m,t)}{r^3}, \tag{38}$$

здесь C_2 не зависит r.

Таким образом мы получили систему типа Гурса:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H_0\rho = 0 \\ \frac{cW'}{r\sqrt{(mc)^2+(W')^2}} = H_0\rho + \frac{C_2(m,t)}{r^3} \\ \frac{\partial S}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + (W')^2} + m\left(\frac{r^2}{6}(4\pi g \int m\,\rho dmdr) - \frac{C_1(t)}{r}\right) = 0 \end{cases}$$

(39)

В нерелятивистской системе $\varphi = \frac{cW'}{r\sqrt{(mc)^2+(W')^2}} \approx \frac{m}{r}W'$, тогда подставим W' в уравнение (38):

$$\frac{m}{r}W' = H_0\rho + \frac{C_2(m,t)}{r^3}$$
$$W = \frac{H_0\rho r^2}{2m} + \frac{C_2(m,t)}{mr} \tag{40}$$

Дальше подставим уравнение (40) в третье уравнение системы, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{H_0\rho r^2}{2m} + \frac{C_2(m,t)}{mr}\right) + \frac{1}{2m}\left(\frac{H_0\rho r}{m} + \frac{C_2(m,t)}{mr^2}\right)^2 + m\left(\frac{r^2}{6}(4\pi g \int m\,\rho dmdr) - \frac{C_1(t)}{r}\right) = 0 \tag{41}$$

Так как в уравнении (41) нет второго члена с$\frac{1}{r^4}$, получаем: $C_2 = 0$. Также $C_1 = 0$.

Собираем коэффициенты при $\frac{1}{r^2}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{H_0\rho r^2}{2m}\right) + \frac{H_0^2\rho^2 r^2}{2m^3} + \frac{2\pi g m r^2}{3}\int m\,\rho dmdr = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(H_0\rho) + \frac{H_0^2\rho^2}{m^2} + \frac{4\pi g m^2}{3}\int m\,\rho dmdr = 0$$

Обозначаем $\eta = \frac{4\pi g m^2}{3}\int m\,\rho dmdr$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}(H_0\rho) + \frac{H_0^2\rho^2}{m^2} + \eta = 0 \tag{42}$$

После этого, если H_0 зависит только от времени, можно перейти к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} + 3H_0\rho = 0 \\ \frac{d}{dt}(H_0\rho) + \frac{H_0^2\rho^2}{m^2} + \eta = 0 \end{cases} \qquad (43)$$

Мы получили систему уравнений на постоянную Хаббла и плотность.

Нерелятивистский аналог космологических решений

Нерелятивистский случай соответствует действию [5-7]:

$$S = \int \left[\frac{mv^2}{2} - e\varphi - mU\right] f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, m, e) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{v} dm de dt +$$
$$+ \frac{1}{8\pi}\int (\nabla\varphi)^2 d\boldsymbol{x} dt - \frac{1}{8\pi\gamma}\int (\nabla U)^2 d\boldsymbol{x} dt + \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int U dx dt \qquad (47)$$

Варьируя по φ и по U,получаем дважды уравнения Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi \int ef(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, m, e) d\boldsymbol{v} dm de$$
$$\Delta U = 4\pi\gamma \int mf(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, m, e) d\boldsymbol{v} dm de - \frac{1}{2}c^2\Lambda \qquad (48)$$

Действие для одной частицы следует при выборе $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, m, e) = \delta(e-q)\delta(m-M)\delta\big(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}(t)\big)\delta\big(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{y}'(t)\big)$. Здесь M, q, y(t) это масса, заряд и координата одной частицы. Рассмотрим для такой функции распределения первое слагаемое в (12), получим стандартное действие:

$$S_1 = \int \left[\frac{M(y')^2}{2} - q\varphi(\boldsymbol{y}, t) - MU(\boldsymbol{y}, t)\right] dt$$

Варьируя, как обычно, в механике, получаем уравнение Ньютона:

$$M\boldsymbol{y}'' + M\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{y}} + q\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{y}} = 0$$

Переходим к уравнению Лиувилля для соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (возвращаемся к (e, m) для заряда и массы и к x вместо y для координаты):

$$\begin{cases} \dot{x} = \boldsymbol{v} \\ \dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{m}}\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{x}} \end{cases}$$

тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\boldsymbol{v}, \frac{\partial f}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{m}}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0 \qquad (49)$$

Система (14) - (15) и есть система уравнений Власова-Пуассона-Пуассона с лямбда-членом [38].

Получим точное гидродинамическое следствие этой системы, предполагая гидродинамический вид функции распределения [4-11]: $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, e, m) = \rho(t, \boldsymbol{x}, e, m)\delta\big(v - w(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, e, m)\big)$. Слово "точное" означает, что если мы возьмем вместо этого распределения максвелловское, то получим приближенное следствие. Тогда:

$$\begin{cases}\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\boldsymbol{w})=0\\ \frac{\partial w_k}{\partial t}+w_i\frac{\partial w_k}{\partial x_i}+\frac{\partial U}{\partial \mathrm{x}_k}+\frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{m}}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{x}_k}=0\\ \Delta\varphi=-4\pi\int e\rho dmde\\ \Delta U=4\pi\gamma\int m\rho dmde-\frac{1}{2}c^2\Lambda\end{cases} \qquad (50)$$

Такую систему можно назвать системой Власова-Лэмба-Пуассона-Пуассона. Пусть скорость имеет вид градиента некоторой функции W: $w_k(t,\boldsymbol{x},e,m)=\frac{\partial W(t,\boldsymbol{x},e,m)}{\partial x^k}$.

Тогда получаем систему, которая является также точным следствием уравнения Власова-Пуассона–Пуассона (14-15), где появляется уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\begin{cases}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\Delta W+\frac{\partial\rho}{\partial x^k}\frac{\partial W}{\partial x^k}=0\\ \frac{\partial W}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial \mathrm{x}^i}\right)^2+U+\frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{m}}\varphi=0\\ \Delta\varphi=-4\pi\int e\rho dmde\\ \Delta U=4\pi\gamma\int m\rho dmde-\frac{c^2\Lambda}{2}\end{cases} \qquad (51)$$

Перепишем эту систему уравнений для изотропного случая, когда функции $\rho=\rho(t,r,e,m), W= W(t,r,e,m)$, $U=U(r,t)$, $\varphi=\varphi(r,t)$. Получаем систему:

$$\begin{cases}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\left(\frac{3W'}{r}+r\left(\frac{W'}{r}\right)'\right)+\rho'W'=0\\ \frac{\partial W}{\partial t}+\frac{1}{2}(W')^2+U+\frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{m}}\varphi=0\\ \frac{3\varphi'}{r}+r\left(\frac{\varphi'}{r}\right)'=-4\pi\int e\rho dmde\\ \frac{3U'}{r}+r\left(\frac{U'}{r}\right)'=4\pi\gamma\int m\rho dmde-\frac{c^2\Lambda}{2}\end{cases}$$

Предположим теперь, что плотность не зависит от пространственной координаты: $\rho(t,m,e)$ (однородность по пространству). Такие решения называются космологическими решениями, так как на очень больших масштабах предполагается, что плотность от пространственной координаты вообще не зависит[1-4].

Тогда последнее уравнение дает решение

$$U=-\frac{a(t)}{r}+\frac{b(t)}{6}r^2,$$

Где $b(t)=4\pi\gamma\int m\rho dmde-\frac{c^2\Lambda}{2}$.

Аналогично

$$\varphi(r,t) = -\frac{c(t)}{r} + \frac{d(t)}{6}r^2,$$

где $d(t) = -4\pi \int e\rho dmde$.

Из первого уравнения системы, уравнения неразрывности, получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho = 0,$$

где $H(m,e,t)$- постоянная Хаббла, и обычно полагают, что она зависит только от времени. Слово «постоянная» употребляется по традиции со времен Хаббла, т.к. она меняется медленно. Но именно ее зависимость от времени и других параметров (как масса или аналоги зарядов какой-то другой материи, которую сейчас принято называть темной или темной энергии) имеет особую актуальность в связи с ускоренным расширением Вселенной. Получаем уравнение на W:

$$3\psi + r\psi' = 3H(t,m,e),$$

где $\psi(r,t) = \frac{W'(t,r,m,e)}{r}$.

Решая уравнение относительно ψ, получаем:

$$\psi = H + \frac{B(m,e,t)}{r^3}$$

Значит, $W' = Hr + \frac{B}{r^2}$ и $W = \frac{Hr^2}{2} - \frac{B}{r}$

Подставляя все во второе уравнение, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Hr^2}{2} - \frac{B}{r}\right) + \frac{1}{2}\left(Hr + \frac{B}{r^2}\right)^2 - \frac{a(t)}{r} + \frac{b(t)}{6}r^2 + \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{m}}\left(-\frac{c(t)}{r} + \frac{d(t)}{6}r^2\right) = 0$$

Из второго слагаемого находим $B(m,e,t) = 0$.

Собирая коэффициенты при r^{-1} получаем: $a(\mathrm{t}) + \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{M}}c(\mathrm{t}) = 0$.

Собирая коэффициенты при r^2получаемуравнение на H:

$$\frac{\partial}{\partial t}H + H^2 + \frac{b(t)}{3} + \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{m}}\frac{d(t)}{3} = 0$$

Получаем систему уравнений на плотность$\rho(m,t)$и постоянную Хаббла $H(t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}H + H^2 + \frac{4\pi\gamma \int m\rho dmde}{3} - \frac{c^2\Lambda}{6} - \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{m}}\frac{4\pi \int e\rho dmde}{3} = 0 \end{cases} .$$

(52)

Таким образом получается еще одна возможность объяснить загадочное ускоренное расширение вселенной [39-40] наряду с лямбда-членом. Из уравнений хорошо видно, что они работают в одинаково правильном направлении, создавая недостающее отталкивание.

В случае заряженных частиц это равенство нулю последнего слагаемого в левой части означает нейтральность. Обозначим $\eta(t) = \frac{4\pi\gamma \int m\rho dmde}{3} -$

$\frac{e}{m}\frac{4\pi\int e\rho dmde}{3}$. После этого, если H зависит только от времени, можно перейти к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta}{dt} + 3H\eta = 0, \\ \dfrac{dH}{dt} + H^2 + \eta - \dfrac{c^2\Lambda}{6} = 0. \end{cases}$$

Фазовые траектории этой системы были исследованы в [38].

Мы видим, что нам несколько раз пришлось решить уравнение Пуассона $\Delta u = const$, что показывает не только эквивалентность введения лямбда члена с какой-то субстанцией типа заряда е, удовлетворяющей этому уравнению, но и обосновывает потенциал Гурзадяна $\mathrm{U(r)} = -\frac{\gamma}{\mathrm{r}} + \mathrm{ar}^2$ как альтернативное объяснение темной энергии [35-37]. Было бы хорошо объяснить расширенное ускорение без введения дополнительных предположений типа лямбда-члена или квадратичного потенциала, и насколько уравнение Эйнштейна (2) предоставляет такую возможность обоими слагаемыми в правой части – это предмет дальнейших рассмотрений.

Мы получили нерелятивистский аналог уравнений Фридмана, обобщающий решение Милна–Мак Кри [33,34] в различных направлениях: ввели лямбда-член, обосновали их модель, выведя из системы Власова-Пуассона, ввели отталкивание субстанции по аналогии с кулоновским, перешли к уравнению Гамильтона-Якоби, поставили вопрос о зависимости постоянной Хаббла от массы и заряда субстанции.

Точки Лагранжа и особенности движения

Ускоренное расширение Вселенной, отмеченное Нобелевской премией по физике в 2011 году, вызывает пристальное внимание. Общепринятым объяснением сейчас является добавление лямбда-члена Эйнштейна в релятивистское действие. И хорошо известно, что в нерелятивистской теории это соответствует добавлению отталкивающего квадратичного потенциала [1-3, 35-43]. Здесь исследуем точки Лагранжа в зависимости от такого потенциала.

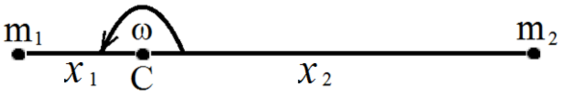


Рис. 1

Рассмотрим круговую задачу двух тел (рис.1). Две массы m_1 и m_2, находящиеся на расстоянии r друг от друга, притягиваются центральной силой по закону $F = m_1 m_2 f(r)$ и вращаются с угловой скоростью ω относительно точки C. Из уравнения баланса сил притяжения и центробежных сил

$$m_1\omega^2 x_1 = m_1 m_2 f(a), \quad m_2\omega^2 x_2 = m_1 m_2 f(a), \quad a = x_1 + x_2 \tag{53}$$

находим $m_1x_1 = m_2x_2$, то есть точка C $-$ центр масс. Отсюда

$$x_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}a, \quad x_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}a, \quad \omega^2 = \frac{m_2}{x_1}f(a) = \frac{m_1+m_2}{a}f(a)$$

(54)

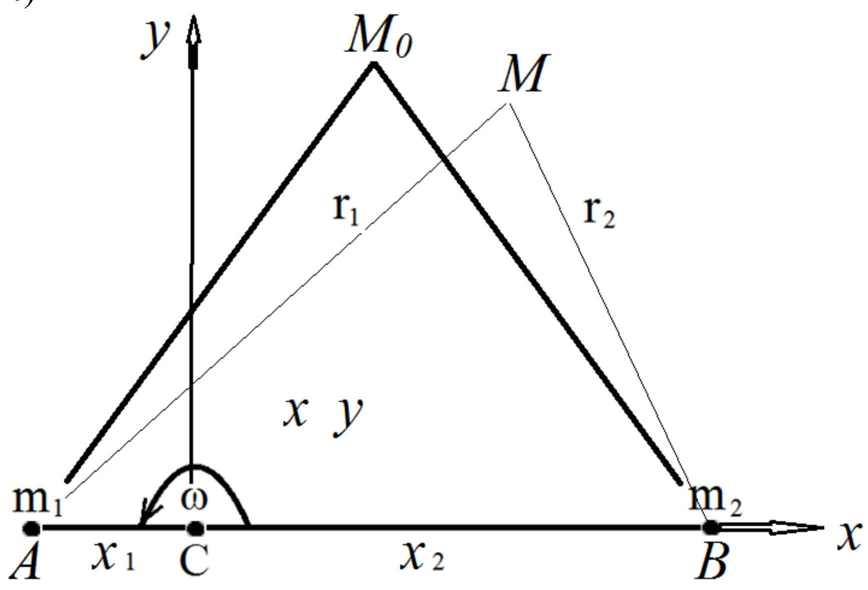


Рис. 2.

Взаимодействия по закону тяготения Ньютона с добавлением линейной силы.

Рассмотрим случай взаимодействия масс, в котором сила взаимодействия имеет вид

$$F = m_1 m_2 f(r), \quad f(r) = -\frac{\gamma}{r^2} + \vartheta r$$

Этот закон отличается от классического наличием линейной по расстоянию силы отталкивания с коэффициентом ϑ, который связан с Лямбдой Эйнштейна. Построим функцию Лагранжа (рис. 2). Равносторонний треугольник AM_0B со сторонами длины a. В вершине равностороннего треугольника AM_0B малая масса находится в равновесии в вершине M_0. В окрестности равновесия в точке M движение малой массы описывается уравнениями Лагранжа, с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \omega(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - V,$$

$$\omega^2 = \frac{m_1 + m_2}{a}\left(\frac{\gamma}{a^2} - \vartheta a\right), \quad V = -m_1\left(\frac{\gamma}{r_1} + \frac{1}{2}\vartheta {r_1}^2\right) - m_2\left(\frac{\gamma}{r_2} + \vartheta {r_2}^2\right).$$

При $\vartheta = 0$ получаем классический случай.

Безразмерная форма уравнений получается заменами

$$x = aX, \quad y = aY, \quad \dot{x} = a\dot{X}\omega, \quad \dot{y} = a\dot{Y}\omega, \quad \vartheta = \frac{\gamma}{a^3}\theta, \quad r_1 = aR_1, \quad r_2 = aR_2.$$

При этом преобразовании равносторонний треугольник AM_0Bпереходит в треугольник с единичными сторонами. Заметим, что θ –это безразмерная Лямбда Эйнштейна.

Безразмерная функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) + \left(X\dot{Y} - Y\dot{X}\right) + \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) - V_1,$$
$$V_1 = -\left(\frac{1-\mu}{R_1} + \frac{\mu}{R_2}\right) - K\left[\left(\frac{1-\mu}{R_1} + \frac{\mu}{R_2}\right) + (1-\mu)R_1 + \mu R_2\right],$$
$$K = \frac{\theta}{1-\theta}.$$

Координаты вершины равностороннего треугольника $X = \frac{1}{2} - \mu, \quad Y = \frac{\sqrt{3}}{2}$определяют точку равновесия системы.

Делаем замену $X = \frac{1}{2} - \mu + q_1, \quad Y = \frac{\sqrt{3}}{2} + q_2$ и находим гамильтониан движения системы в окрестности точки равновесия.

Функция Гамильтона линейного приближения

$$H = \frac{1}{8}\left(4{p_1}^2 + 8p_1q_2 + 4{p_2}^2 - 8p_2q_1 + {q_1}^2 + 6\sqrt{3}(2\mu - 1)q_1q_2 - 5{q_2}^2\right) + \frac{1}{8}K\left(-3{q_1}^2 + 6\sqrt{3}(2\mu - 1)q_1q_2 - 9{q_2}^2\right)$$

Линейные уравнения Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

имеют две пары собственных значений $\lambda_2 = -\lambda_1, \quad \lambda_4 = -\lambda_3$, отличающихся знаком. Квадраты их можно привести к следующему удобному для анализа виду

$${\lambda_1}^2 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{(1-3K)^2 - 27m(1+K)^2} - (1-3K)\right),$$
$${\lambda_3}^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(1-3K)^2 - 27m(1+K)^2} - (1-3K)\right),$$
$$K = \frac{\theta}{1-\theta}, \quad m = \mu - \mu^2.$$

При выполнении условия

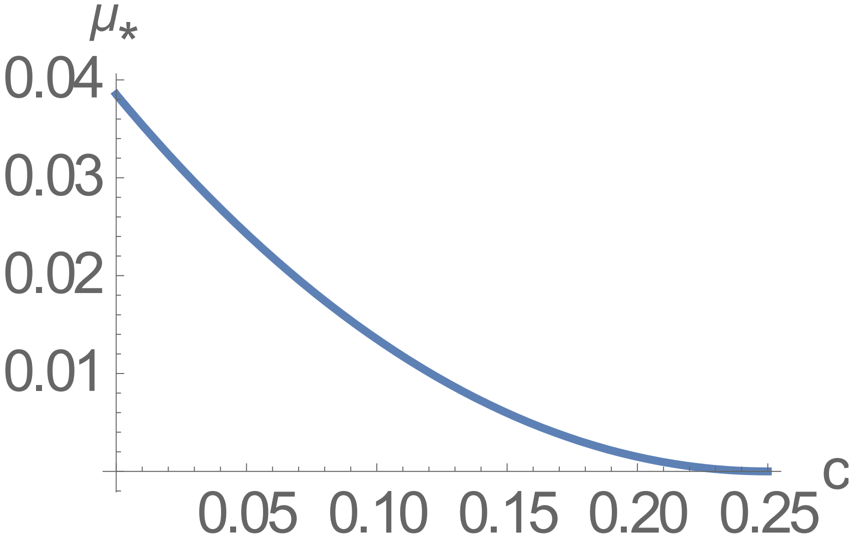
$$m < m_*(K) = \frac{1}{27}\left(\frac{1-3K}{1+K}\right)^2, \quad K < 1/3$$

собственные числа являются чисто мнимыми и равновесие устойчиво в линейном приближении.

Выраженные через исходные параметры условия устойчивости принимают вид

$$\mu < \mu_*(\theta) = \frac{1}{18}\left(9 - \sqrt{-192\theta^2 + 96\theta + 69}\right) = \frac{2(1-4\theta)^2}{3\left(\sqrt{-192\theta^2 + 96\theta + 69} + 9\right)}, \quad \theta < \frac{1}{4}\,. \tag{55}$$

Зависимость $\mu_*(c)$ представлена на графике.



Если же это условие не выполняется, то одно из собственных чисел имеет положительную действительную часть, откуда следует экспоненциальная неустойчивость. Из неустойчивости в линейном приближении по теореме Ляпунова следует неустойчивость точной нелинейной задачи.

При условии (3) возможна устойчивость нелинейной задачи и, как показывают исследования классического случая, следует устойчивость нелинейной задачи за исключением конечного числа значений параметров $\mu,\ c$.

Заключение

Таким образом, мы получили уравнения гравитации в замкнутой форме из принципа наименьшего действия в форме уравнения Власова (ср. [5-15]). Проясняется смысл уравнений типа Власова: это единственный пока способ получить и уравнение гравитации и уравнения электродинамики из принципа наименьшего действия. А также единственный пока способ замкнуть систему уравнений гравитации и электродинамики с помощью принципа наименьшего действия, используя функцию распределения объектов (электронов, ионов, звёзд в галактиках, галактик в супергалактиках или Вселенной) по скоростям и пространству. Соответствующие уравнения гидродинамического уровня (например, уравнения магнитной гидродинамики) также естественно получать из уравнений типа Власова гидродинамической подстановкой (пока единственный способ связи с классическим действием и для этих уравнений). Представляет значительный интерес исследовать различные классы решений полученных уравнений, как это делалось в [27-31]. Особый интерес должно представлять асимптотическое поведение решений уравнений Власова, и тут могла бы помочь его аналогия с уравнением Лиувилля [30-32]. Мы показали также, что полученные уравнения типа Власова должны быть применены к объяснению эволюции Вселенной, так как именно из уравнения Власова-

Пуассона следуют нерелятивистские аналоги решений Фридмана, решения Милна-МакКри [33,34]. При этом они являются точным следствием уравнения Власова-Пуассона, поэтому получаются без эвристических предположений работ [33,34] и обосновывают и обобщают их. Эти решения позволили выяснить роль Лямбда-члена, его эквивалентность потенциалу Гурзадяна $U(r)=-\gamma r \;+ar^2$ и эквивалентность этого любой однородной субстанции, связанной с решением уравнения Пуассона $\Delta u = const$. Правая часть уравнения Эйнштейна дает надежду на объяснение ускоренного расширения Вселенной без этих дополнительных предположений. В последнем параграфе получена зависимость границы устойчивых положений равновесия малой массы в треугольной точке либрации. Параметр для устойчивых положений меняется в определенных пределах. Было бы полезно распространить результаты о точках либрации на релятивистский случай.

Список литературы

1. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007.

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988.

3.Вейнберг С. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975, 696 стр.

4.Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука. 1986.

5.Веденяпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тождество Лагранжа и форма Годунова // Теоретическая и математическая физика. - 2012. Т. 170. № 3. С. 468–480.

6.Веденяпин В.В., Негматов М.-Б. А., Фимин Н.Н. Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия. Изв. РАН. Сер.матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.

7.Веденяпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса. СМФН, 2013, том 47, С. 5–17.

8.Vedenyapin V., Sinitsyn A., Dulov E. Kinetic Boltzmann, Vlasov and Related Equations (Elsevier Insights, 2011).

9.Веденяпин В.В. Уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 188. 20 с.

10.Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M. The system of Vlasov–Maxwell–Einstein-type equations and its nonrelativistic and weak relativistic limits // International Journal of Modern Physics D, 2020. V. 29. № 1. 23 p.

11.Vedenyapin, V., Fimin, N., Chechetkin, V. The properties of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and its applications to cosmological models // European Physical Journal Plus. 2020. № 400. 14 с.

12.Cercigniani C., Kremer G.M. The relativistic Boltzmann Equation: theory and applications. Boston, Basel, Berlin: Birghause, 2002.

13.Choquet–Bruhat Y., Damour T. Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York: Oxford University Press. 2015.

14. Rein G., Rendall A.D. Global existence of solutions of the spherically symmetric Vlasov-Einstein system with small initial data, Commun. Math.Phys. 150, 561-583, (1992).

15.Kandrup H.E., Morrison P.J. Hamiltonian structure of the Vlasov–Einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters // Ann. Phys. 1993. V. 225. P. 114–166.

16.Madelung E., Quantentheorie in hydrodynamischer form (Quantum theory in hydrodynamic form), Z Phys, 40 (1926), 322–326.

17.Аржаных И.С., Поле импульсов, Наука, Ташкент, 1965, 231 с.;англ.пер.: Arzhanykh I.S., Momentum fields, Nat. Lending Lib., Boston Spa, Yorkshire, 1971, 222 pp.

18.Долматов К. И., Поле импульсов аналитической динамики, Дисс. … канд. физ.-матем. наук, Ташкент, 1950, 84 с.

19.Козлов В. В. Гидродинамика гамильтоновых систем//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех., 1983, № 6, 10–22; англ. пер.: Kozlov V. V. The hydrodynamics of Hamiltonian systems// Moscow Univ. Mech. Bull., 38:6 (1983), 9–23.

20.Козлов В. В., Общая теория вихрей, Изд-воУдмуртского ун-та, Ижевск, 1998, 239с.

21. Козлов В. В, Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике, Изд-во Удмуртского гос. ун-та, Ижевск, 1995, 429 с.; англ. пер.: V. V. Kozlov, Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics, Ergeb. Math.Grenzgeb. (3), 31, Springer-Verlag, Berlin, 1996, xii+378 pp.

22. Веденяпин В.В., Аджиев С.З., Казанцева В.В. Энтропия по Больцмана и Пуанкаре, экстремали Больцмана и метод Гамильтона–Якоби в негамильтоновой ситуации // СМФН. 2018. Т. 64. № 1. С. 37–59.

23. Веденяпин В. В., Фимин Н. Н. Метод Гамильтона–Якоби для негамильтоновых систем. Нелинейная динам., 11:2 (2015), 279–286.

24. Веденяпин В. В., Фимин Н. Н., Метод Гамильтона–Якоби в негамильтоновой ситуации и гидродинамическая подстановка. Докл. РАН, 461:2 (2015), 136–139; англ. пер.: VedenyapinV. V., Fimin N. N. The Hamilton–Jacobi method in the non-Hamiltonian situation and the hydrodynamic substitution. Dokl. Math., 91:2 (2015), 154–157.

25. Веденяпин В. В., Негматов М. А., О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона–Якоби. Докл. РАН, 449:5 (2013), 521–526; англ. пер.: Vedenyapin V. V., Negmatov M. A. On the topology of steady-state solutions of hydrodynamic and vortex consequences of the Vlasov equation and the Hamilton–Jacobi method. Dokl.Math., 87:2 (2013), 240–244.

26. Веденяпин В. В., Фимин Н. Н. Уравнение Лиувилля, гидродинамическая подстановка и уравнение Гамильтона–Якоби. Докл. РАН,

446:2 (2012), 142–144; англ. пер.: Vedenyapin V. V., Fimin N. N. The Liouville equation, the hydrodynamic substitution, and the Hamilton-Jacobi equation. Dokl. Math., 86:2 (2012), 697–699.

27.Веденяпин В. В. Краевая задача для стационарных уравнений Власова. Докл. АНСССР, 290:4, 777–780; англ. пер.: Vedenyapin V. V. Boundary value problems for the steady-state Vlasov equation. Soviet Math. Dokl., 34:2 (1987), 335–338.

28. Веденяпин В. В. О классификации стационарных решений уравнения Власова на торе и граничная задача. Докл. АНСССР, 323:6 (1992), 1004–1006; англ. пер.: Vedenyapin V. V. On the classification of steady-state solutions of Vlasov's equation on the torus, and a boundary value problem. Russian Acad. Sci. Dokl. Math., 45:2 (1992), 459–462.

29. Архипов Ю.Ю., Веденяпин В. В. О классификации и устойчивости стационарных решений уравнения Власова на торе и в граничной задаче// Избранные вопросы математической физики и анализа, Сборник статей. К семидесятилетию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова, Тр. МИАН, 203, Наука, М., 1994, 13–20; англ. пер.: Arkhipov Yu. Yu., Vedenyapin V. V. On the classification and stability of steady-state solutions of Vlasov's equation on a torus and in a boundary value problem// Proc. Steklov Inst. Math., 203 (1995),

30.Веденяпин В. В. Временные средние и экстремали по Больцману. Докл. РАН, 422:2 (2008), 161–163; англ. пер.: Vedenyapin V. V. Time averages and Boltzmann extremals. Dokl.Math., 78:2 (2008), 686–688.

31. Аджиев С.З., Веденяпин В.В. Временные средние и экстремали Больцмана для марковских цепей, дискретного уравнения Лиувилля и круговой модели Каца // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 11. С. 2063–2074.

32. Vedenyapin, V.V., Adzhiev, S.Z., Kazantseva, V.V. Boltzmann and Poincaré Entropy, Boltzmann Extremals, and Hamilton–Jacobi Method for Non-Hamiltonian Situation. Journal of Mathematical Sciences (United States), 2022, 260(4), стр. 434–455.

33. Milne E.A. Relativity, Gravitation and World–Structure (Oxford Univ. Press, 1935).

34. McCrea W.H., Milne E.A. Quart. J. Math. 5, 73 (1934).

35. Gurzadyan V.G., The cosmological constant in the McCree-Miln Cosmological Scheme. Observatory 105, 42 (1985).

36.Gurzadyan V.G., On the common nature of Dark Energy and Dark Matter. Eur. Phys. J. Plus **134**, 14 (2019).

37.Gurzadyan V.G., Stepanyan A. The cosmological constant derived via galaxy groups and clusters. Eur. Phys. J. C **79**, 169 (2019).

38. V.V. Vedenyapin, N.N. Fimin, V.M. Chechetkin, The generalized Friedman model as a self–similar solution of Vlasov–Poisson equations system // European Physical Journal Plus, **136**, № 670 (2021).

39. Веденяпин В.В., Воронина М.Ю., Русское А.А. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия. Доклады РАН, 2020, том 495, с. 9–13.

40. Лукаш В. Н., Рубаков В. А. Темная энергия: мифы и реальность // Успехи физических наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 301–308.

41. Зельдович Я. Б. "Теория расширяющейся Вселенной, созданная А.А. Фридманом" УФН 80 357–390 (1963)

42. Gurzadyan V.G., The cosmological constant in the McCree-Miln Cosmological Scheme. Observatory 105, 42 (1985).

43. Чернин А. Д. Темная энергия и всемирное антитяготение // Успехи физических наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 267–300.