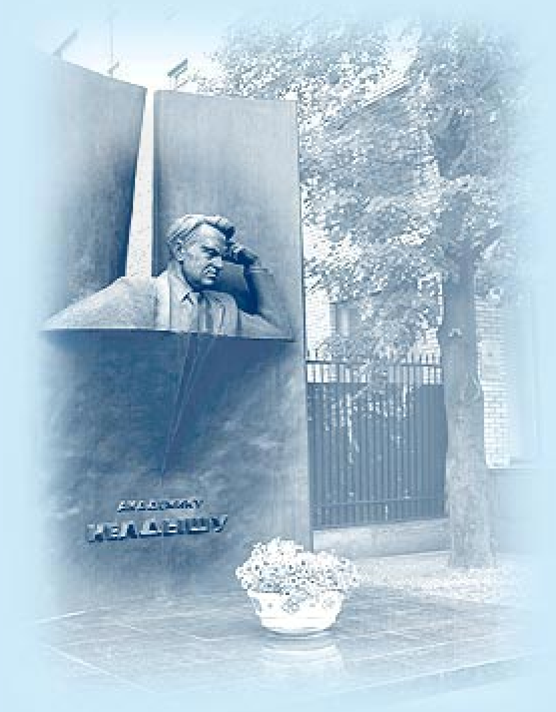
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 25 за 2022 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)



А.В. Колесниченко

Джинсовская неустойчивость астрофизической самогравитирующей среды при наличии высокого радиационного давления и диффузионного переноса излучения

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. Джинсовская неустойчивость астрофизической самогравитирующей среды при наличии высокого радиационного давления и диффузионного переноса излучения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 25. 32 с. **https://doi.org/10.20948/prepr-2022-25**
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-25

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Колесниченко

Джинсовская неустойчивость астрофизической самогравитирующей среды при наличии высокого радиационного давления и диффузионного переноса излучения

Москва — 2022

Колесниченко А. В.

Джинсовская неустойчивость астрофизической самогравитирующей среды при наличии высокого радиационного давления и диффузионного переноса излучения.

Аннотация. В рамках проблемы моделирования эволюции протозвездного диска обсуждается влияние излучения на джинсовскую гравитационную неустойчивость для самогравитирующей оптически толстой (для собственного инфракрасного излучения) газопылевой среды, с учетом влияния на критическую длину возмущающей волны радиационного давления и диффузионного лучистого переноса. Рассмотрены два приближения радиационной диффузии: случай идеального теплового равновесия, когда температуры вещества и излучения одинаковы; случай временной зависимости поля излучения, когда имеет место энергетическая развязка между излучением и веществом. При использовании анализа нормального режима выведены дисперсионные соотношения, позволяющие получить модификации критерия гравитационной неустойчивости Джинса под влиянием радиационного давления и диффузии излучения. В частности, показано, что в отличие от локального термодинамического равновесия системы, когда акустическая скорость газа совпадает с изотермической скоростью звука, в случае различия температур излучения и газа возмущающая волна распространяется с адиабатической скоростью звука в газе. Полученные результаты направлены на решение проблемы гравитационной неустойчивости отдельных массивных протозвездных дисков или самогравитирующих радиационных сред, характеризующихся большими оптическими глубинами для собственного инфракрасного излучения, трансформированного пылью.

Ключевые слова*:* самогравитирующие среды, критерий неустойчивости Джинса, радиационное давление, чернотельное излучение, диффузионный перенос излучения.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko

Jeans instability of an astrophysical self-gravitating medium in the presence of high radiation pressure and diffusion transfer of radiation.

Annotation. Within the framework of the problem of modeling the evolution of a protostellar disk, the influence of radiation on the Jeans gravitational instability for a self-gravitating optically thick (for intrinsic infrared radiation) gas-dust medium is discussed, taking into account the influence of radiation pressure and diffusion transfer of radiation on the critical wavelength of the perturbing wave. Two approximations of radiative diffusion are considered: 1. the case of ideal radiative equilibrium, when the temperatures of matter and radiation are the same; 2. the case of the time dependence of the radiation field, when there is an energy decoupling between radiation and matter. Using the analysis of the normal regime, dispersion relations are derived that allow one to obtain modifications of the Jeans gravitational instability criterion under the influence of radiation pressure and radiation diffusion. In particular, it is shown that, in contrast to local radiation equilibrium, when the acoustic velocity of the gas coincides with the isothermal speed of sound, in the case of a difference in the temperatures of radiation and gas, the perturbing wave propagates with the adiabatic speed of sound in the gas. The results obtained are aimed at solving the problem of gravitational instability of individual massive protostellar disks or self-gravitating radiation media characterized by large optical depths for their own infrared radiation transformed by dust.

Key words: self-gravitating media, Jeans instability criterion, radiation pressure, black-body radiation, diffusion transfer of radiation.

Введение

Заключительным этапом эволюции маломассивного протозвездного объекта является звезда типа T Tau, окруженная газопылевым диском. Изучение этих дисков вызывает особый интерес, поскольку в них, по современным представлениям, происходит образование планетных систем, подобных Солнечной системе. При этом критерии гравитационной неустойчивости в горячем газе имеют ключевое значение в понимании процессов эволюции подобных околозвездных дисков. Именно гравитационная неустойчивость Джинса играет главную роль в процессе фрагментации дискового вещества. В частности, экзопланетные диски формируются из самогравитирующих околозвездных дисков в результате потери ими гравитационной устойчивости. Однако полной ясности в том, какие физико-механические свойства подобной звездной системы доминируют при их формировании, до сих пор нет. Большинство обнаруженных на сегодня экзопланетных дисков вокруг галактических звезд заметно отличаются от протопланетного диска Солнца. По этой причине теория, которая используется для описания эволюции Солнечной системы, является, по-видимому, одной из многих, и для адекватного моделирования эволюции экзопланетных дисков она должна быть частично видоизменена и дополнена.

Классическая теория гравитационной неустойчивости Джинса предполагает, что среда однородна и изотропна и характеризуется баротропным уравнением состояния (Jeans, 1902). Существенное усовершенствование этой теории при учете различных предположений о вращении системы и магнитном поле было выполнено Чандрасекхаром (Chandrasekhar, 1961). В дальнейшем многочисленные исследователи обсуждали гравитационную неустойчивость в линейном и нелинейном приближениях для вращающихся газа и плазмы в разных аспектах относительной ориентации магнитного поля, оси вращения и вектора распространения волны возмущения, а также с учетом влияния разнообразных физических процессов и явлений (см., например, Bhatia, 1967; Aggarwal, Talwar, 1969; Sharma, 1974; Fridman, Polyachenko, 1984; Sharma, Singh, 1988; Bora, Nayyar, 1991; Хоперсков, Храпов, 1999; Jacobs, Shukla, 2005; Borah, Sen, 2007; Dhiman, Dadwal, 2011, 2012; Shaikh и др., 2008; Фридман, Хоперсков, 2011; Kaothekar, Chhajlani, 2012; Prajapati и др., 2012; Argal и др., 2014; Joshi, Pensia, 2017; Kumar и др., 2017; Pensia и др., 2018; Колесниченко, 2020).

Существует также относительно небольшое число работ, в которых при различных предположениях относительно направления магнитного поля и режимов распространения волны возмущения было исследовано влияние взвешенных пылевых частиц и процессов лучевой теплопроводности на магнитогравитационную нестабильность вращающейся плазмы (см., например, Chhajlani, Vaghela, 1987; Tsintsadze и др., 2008; Prajapati, Chhajlani, 2011; Prajapati, Bhakta, 2015; Sharma, Patidar, 2017; Kumar и др., 2018). Во всех перечисленных публикациях показано, что критерий неустойчивости Джинса сохраняется с некоторыми модификациями, связанными с учетом влияния различных параметров.

И совсем немного на сегодняшний день имеется в литературе работ, в которых исследуется неустойчивость самогравитирующих астрофизических объектов в приближении чернотельного излучения (см., например, Vranješ, Čadež, 1990; Vranješ, 1990; Vaghela, Shrivastava, 1994; Prajapati, Chhajlani, 2011; Kumar и др., 2017; Kolesnichenko, 2020, 2021). Обычно температура газа в околозвездных дисках растет с приближением к аккрецирующему объекту. С ростом температуры увеличивается значимость давления излучения в эволюции диска по сравнению с газовым давлением. Наиболее ранняя работа, посвященная эволюции самогравитирующих радиационных сред с преобладанием давления излучения, была проведена в публикациях (Silk, 1967;1968), а затем дополнена в работах (Peebles, Yu, 1970; Weinberg, 1971; Hu, Sugiyama, 1996; Dodelson, 2003) в контексте затухания акустических волн первичных флуктуаций под действием радиационной диффузии. Однако в этих работах не рассматривалась модификация критерия Джинса, когда давление излучения динамически доминирует, и не обсуждалась физика медленных диффузионных мод. Кроме того, в этих и во многих цитируемых выше работах по проблеме неустойчивости радиационно-доминирующей области астрофизического объекта рассматривались только изоэнтропические волновые возмущения, при которых энтропия каждого элемента массы на всем его пути сохраняется. В этом случае мелкомасштабные эйлеровы вариации давления $\delta P / P$, плотности $\delta\rho / \rho$ и температуры $\delta T / T$ в линеаризованном уравнении сохранения энергии определялись, как правило, на основе известных адиабатических соотношений Эддингтона–Чандрасекхара (см. Тассуль, 1982). И хотя для большинства астрофизических приложений эти соотношения представляют собой достаточно разумное приближение, во многих более реалистических ситуациях необходимо учитывать отклонение от изоэнтропичности, при которой элементы массы приобретают или теряют тепло (например, в звездах верхней части главной последовательности, в которых давление излучения преобладает над газовым давлением). В этом случае относительно простые адиабатические соотношения Эддингтона–Чандрасекхара более не применимы и следует использовать другие соотношения (Cox, Giuli, 1968; Cox, 1976), усложненные за счет учета вектора потока энергии, обусловленного всеми возможными механизмами переноса (излучением, теплопроводностью, конвекцией, нейтринными потерями, потерями массы и т.п.).

Вопрос о неустойчивости самогравитирующего газового облака, с учетом чернотельного излучения в неизоэнтропическом случае, почти не обсуждался в литературе. Насколько известно автору, лишь в немногих публикациях (см., например, Blaes, Socrates, 2001, 2003; Kaneko и др., 2005; Kaneko, Morita, 2006; Колесниченко, 2022a) было исследовано распространение одномерных малоамплитудных возмущений в излучающей и рассеивающей серой среде идеального газа с учетом диффузионного переноса излучения.

В связи со сказанным представляется вполне оправданным появление работы, целью которой является исследование того, как классический критерий гравитационной неустойчивости Джинса модифицируется для оптически толстых (для собственного инфракрасного излучения) астрофизических дисков в случае неизоэнтропичности возмущений совокупных структурных параметров вещества и черного излучения и при наличии динамически значимого давления излучения и радиационной диффузии, которая является немаловажным источником затухания акустических волн. Кроме того, сами акустические волны могут быть нестабильными из-за динамического воздействия нестационарной радиации, связанной с временной эволюцией поля излучения.

Таким образом, представленная статья мотивирована проблемой эволюции самогравитирующих протозвездных дисков, строение которых характеризуется высокой плотностью энергии излучения и высокой плотностью вещества, а также оптическими глубинами для собственного инфракрасного излучения, переработанного пылью (Pier, Krolik, 1992; Thompson и др., 2005; Chang и др., 2007). В каждом из подобных протозвездных дисков гравитационное давление может быть сравнимо с радиационным давлением, а связанная с ним плотность энергии фотонов соперничает только с плотностью энергии турбулентности и, возможно, с вкладами космических лучей и магнитных полей (Blaes, Socrates, 2001, 2003). Кроме этого, проведенный здесь анализ может представлять некоторый интерес для исследования джинсовской неустойчивости отдельных массивных звезд на ранней стадии их образования, а также самогравитирующих астрофизических сред, радиационное давление в которых, связанное с воздействием излучения, доминирует над давлением вещества.

1. Газодинамические уравнения идеального совершенного газа с учетом переноса излучения

Рассмотрим некоторую область протозвездного диска как идеализированную астрофизическую среду, для которой возможно моделировать только физику взаимодействия излучения и вещества, без учета сложности реального диска. В этом случае система уравнений радиационной гидродинамики для идеального совершенного газа в нерелятивистском приближении, состоящая из трех уравнений гидродинамики, уравнения Пуассона и двух моментных уравнений излучения, имеет следующий вид (Hsieh, Spiegel, 1976; Buchler, 1979; Kaneko и др., 1984; Mihalas, Mihalas, 1984)

$$\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$\rho\frac{\mathcal{D}\mathbf{v}}{\mathcal{D}t} = -\nabla P_g + \frac{\kappa_F\rho}{c}\boldsymbol{\mathcal{F}}_r + \rho\nabla\Phi, \tag{2}$$

$$\rho T_g\frac{\mathcal{D}s_g}{\mathcal{D}t} = \rho\left[\frac{\mathcal{D}e_g}{\mathcal{D}t} + P_g\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] = \kappa\rho\left(c\rho e_r - 4\pi\mathcal{S}_r\right), \tag{3}$$

$$\rho T_r\frac{\mathcal{D}s_r}{\mathcal{D}t} = \rho\left[\frac{\mathcal{D}e_r}{\mathcal{D}t} + P_r\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] = -\nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{F}}_r - \hat{\mathbf{P}}_r : \nabla\mathbf{v} + \kappa\rho\left(4\pi\mathcal{S}_r - c\rho e_r\right), \tag{4}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\mathcal{D}\boldsymbol{\mathcal{F}}_r}{\mathcal{D}t} + \nabla\cdot\mathbf{P}_r = -\frac{1}{c}\kappa\rho\boldsymbol{\mathcal{F}}_r, \tag{5}$$

$$\Delta\Phi = -4\pi G\rho. \tag{6}$$

Здесь $\mathcal{D}/\mathcal{D}t = \partial/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla$; $\rho(\mathbf{r},t)$ – массовая плотность; $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ – гидродинамическая скорость потока; c – скорость света; $T_g(\mathbf{r},t)$ – температура вещества (газа); $e_g(\mathbf{r},t) = C_{Vg}T_g = P_g/(\gamma-1)\rho$ – удельная (на единицу массы) внутренняя энергия газа; $P_g(\mathbf{r},t) = (\mathcal{R}/\bar{\mu})\rho T_g$ – давление газа; $\gamma = C_{Pg}/C_{Vg}$ – показатель адиабаты (отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении $C_{Pg} = \frac{\gamma}{\gamma-1}(\mathcal{R}/\bar{\mu})$ и постоянном объеме $C_{Vg} = \frac{1}{\gamma-1}(\mathcal{R}/\bar{\mu})$), для совершенного газа $\gamma = 5/3$; $s_g(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\gamma-1}(\mathcal{R}/\bar{\mu})\ln\left(P_g/\rho^{\gamma}\right) + const$ –удельная энтропия газа; $\Phi(\mathbf{r},t)$ – ньютоновский гравитационный потенциал, являющейся решением уравнения Пуассона (6); G – гравитационная постоянная; $\mathcal{F}_r(\mathbf{r},t)$ – интегральный поток энергии излучения; $e_r(\mathbf{r},t) = aT_r^4/\rho$ – удельная энергия излучения; $T_r(\mathbf{r},t)$ – температура поля излучения; $s_r(\boldsymbol{r},t) = 4aT_r^3/3\rho$ – удельная энтропия излучения; $\mathbf{P}_r(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{P}}_r + P_r\mathbf{I}$ – интегральный тензор анизотропного давления излучения (в приближении Эддингтона $\mathbf{P}_r = \mathbf{f}_E\rho e_r$, где тензор $\mathbf{f}_E = f_E\mathbf{I}$ (здесь f_E – фактор Эддингтона, равный $f_E = 1/3$ в случае оптически толстой среды, а для оптически тонкой среды $f_E = 1$); $P_r(\mathbf{r},t)$ – давление излучения; $\hat{\mathbf{P}}_r(\mathbf{r},t)$ – бесследовый тензор радиационного давления; $\mathcal{S}_r(\mathbf{r},t)$ – интегральная функция источника излучения; κ – коэффициент усредненной непрозрачности Росселанда (коэффициент поглощения излучения веществом), который в общем случае может быть функцией плотности и температуры газа, а также плотности энергии излучения). Более подробное описание поля излучения, когда учитывается различие между рассеянием излучения и чистой поглощающей непрозрачностью, рассматривается, например, в работах (Blaes, Socrates, 2003; Kaneko и др., 2006).

Отметим также, что в случае приближения Эддингтона эффектом фотонной вязкости можно пренебречь (см., например, Agol, Krolik 1998). Кроме этого, рассматривая далее излучение, захваченное пылевой непрозрачностью[1)], мы тем не менее в уравнениях (1-6) будем пренебрегать двухфазностью астрофизической среды, предполагая идеальную столкновительную и энергетическую связь между газом и пылью (более общий случай рассмотрен в работах (Sharma, Patidar, 2017; Kumar и др., 2018; Колесниченко, 2022b).

[1)] Излучение перерабатывается газом и пылью, поскольку взаимодействие между фотонами можно считать полностью отсутствующим (см. Ландау, Лифшиц, 1976).

Полная плотность энергии излучения $u_r(\mathbf{r},t) \equiv \rho e_r$, поток $\mathcal{F}_r(\mathbf{r},t)$ и тензор давления $P_r(\boldsymbol{r},t)$ излучения определяются через угловые моменты от удельной спектральной интенсивности излучения $I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{n},t)$ соотношениями

$$u_r = \frac{1}{c}\int_0^\infty d\nu \oint d\Omega\, I_\nu\,, \quad \mathcal{F}_r = \int_0^\infty d\nu \oint d\Omega\, I_\nu \mathbf{n}\,, \quad \mathbf{P}_r = \frac{1}{c}\int_0^\infty d\nu \oint d\Omega\, I_\nu \mathbf{n}\mathbf{n}\,, \tag{7}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор в направлении распространения излучения, которому соответствует элемент телесного угла $d\Omega$.

2. Локальное термодинамическое равновесие

В случае ЛТР, когда излучение в каждой точке находится в равновесии с веществом при температуре $T_r = T_g = T(\mathbf{r},t)$, суммирование уравнений (3) и (4) приводит к уравнениям для полной энтропии $s(\mathbf{r},t) = s_g + s_r$ и полной энергии $e(\mathbf{r},t) = e_g + e_r$ газа и излучения

$$\rho T \frac{\mathcal{D}s}{\mathcal{D}t} = -\nabla \cdot \mathcal{F}_r - \hat{\mathbf{P}}_r : \nabla \mathbf{v}. \tag{8}$$

$$\rho\left[\frac{\mathcal{D}e}{\mathcal{D}t} + P\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] = -\nabla \cdot \mathcal{F}_r - \hat{\mathbf{P}}_r : \nabla \mathbf{v}, \tag{9}$$

где $P = P_g + P_r = P_g + f_E\, u_r$ – полное давление в системе.

При ЛТР равновесная интенсивность излучения I_ν^{eq} описывается не зависящей от направления $\mathbf{n}$ термодинамической формулой Планка

$$I_\nu^{eq}(\boldsymbol{r},t) = \mathcal{B}_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp(h\nu/\mathrm{k}T) - 1}. \tag{10}$$

Поскольку имеют место соотношения

$$\oint d\Omega = 4\pi, \quad \oint \mathbf{n}\, d\Omega = 0, \quad \oint \mathbf{n}\mathbf{n}\, d\Omega = \tfrac{4}{3}\pi \mathbf{I},$$

то в этом случае для интегральных плотности энергии $u_r(\mathbf{r},t)=\rho e_r(\mathbf{r},t)$, потока $\mathcal{F}_r(\mathbf{r},t)$ и давления $P_r(\mathbf{r},t)$ излучения справедливы следующие представления

$$u_r^{eq}(\mathbf{r},t)=\frac{4\pi}{c}\mathcal{B}(T)=aT^4,\quad \mathcal{F}_r^{eq}(\mathbf{r},t)=0\quad P_r^{eq}(\mathbf{r},t)=\frac{4\pi}{3c}\mathcal{B}(T)=\frac{a}{3}T^4. \tag{11}$$

Здесь $\mathcal{B}(T)=\dfrac{ac}{4\pi}T^4$ – интегрированная по всем частотам функция Планка;

$$a=\frac{8\pi^5 \mathrm{k}^4}{15c^3h^2}=7{,}565\times 10^{-15}\,\text{г /см сек}^2\,\text{град}^4$$

– постоянная давления излучения. Кроме этого, для черного излучения удельные энтропия $s_r(\mathbf{r},t)$ и теплоемкость $C_{Vr}(\mathbf{r},t)$ при постоянном давлении определяются выражениями (Ландау, Лифшиц, 1976)

$$s_r(\mathbf{r},t)=(4/3)aT^3/\rho+const,\quad C_{Vr}(\mathbf{r},t)=4aT^3/\rho; \tag{12}$$

функция источника $\mathcal{S}_r(\mathbf{r},t)$ принимает вид:

$$\mathcal{S}_r^{eq}(\mathbf{r},t)=\mathcal{B}(T)=acT^4/4\pi, \tag{13}$$

в результате чего слагаемые $\kappa\rho\left(c\rho e_r-4\pi\mathcal{S}_r\right)$ в уравнениях (3) и (4) исчезают.

2.1. Диффузионное приближение

При строгом тепловом равновесии вещества и излучения поток излучения в любом направлении отсутствует, $\mathcal{F}_r^{eq}(\mathbf{r},t)=0$. Можно, однако, показать, что соотношения (10) и (11) все же могут быть использованы (с высокой точностью) даже в присутствии небольшого отличия от нуля потока $\mathcal{F}_r^{eq}$, если градиент интенсивности излучения мал (см. Франк-Каменецкий, 1959).

С этой целью рассмотрим уравнение для $\mathcal{F}_\nu=\oint I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{n},t)\mathbf{n}\,d\Omega$ –спектрального потока излучения

$$\frac{1}{c}\frac{\mathcal{D}\mathcal{F}_\nu}{\mathcal{D}t}+\oint \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\nabla I_\nu)d\Omega=-\kappa_\nu\rho\mathcal{F}_\nu, \tag{14}$$

которое является первым угловым моментом уравнения переноса излучения в случае, когда поле излучения лишь слегка анизотропно. Здесь $\kappa_\nu(\mathbf{r},\mathbf{n},t)$ – коэффициент поглощения (непрозрачность) излучения в интервале частот $(\nu,\nu+d\nu)$, определенный так, что величина $\kappa_\nu \rho I_\nu d\nu d\Omega$ представляет собой соответствующую энергию, поглощенную в единице объема среды в единицу времени из пучка излучения данной интенсивности $I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{n},t)$. Если теперь предположить, что излучение является квазистационарным в каждый момент времени, то уравнение (14) сводится к виду

$$\oint \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\nabla I_\nu)d\Omega = -\kappa_\nu \rho \mathcal{F}_\nu . \tag{15}$$

Для слегка анизотропного поля излучения можно оценить левую часть этого уравнения следующим образом

$$\oint \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\nabla I_\nu)d\Omega \simeq \nabla I_\nu^{eq}\oint \mathbf{n}\mathbf{n}\,d\Omega = \frac{c}{3}\nabla u_\nu^{eq} = \frac{4\pi}{3}\nabla \mathcal{B}_\nu, \tag{16}$$

где использовано первое соотношение (11). В результате уравнение (15) принимает вид $\mathcal{F}_\nu^{eq} = -(c/3\kappa_\nu\rho)\nabla u_\nu^{eq}$, или после интегрирования по всем частотам ν

$$\mathcal{F}_r(\mathbf{r},t) = -\frac{c}{3\rho}\int_0^\infty (1/\kappa_\nu)\nabla u_\nu^{eq} d\nu \ . \tag{17}$$

Если теперь ввести усредненную по Росселанду непрозрачность κ

$$\frac{1}{\kappa} = \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{du_\nu^{eq}}{dT}d\nu \Big/ \int_0^\infty \frac{du_\nu^{eq}}{dT}d\nu = \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{du_\nu^{eq}}{dT}d\nu \Big/ \frac{du_r^{eq}}{dT}, \tag{18}$$

то интегральный поток излучения (17) можно записать в виде следующего закона лучистой теплопроводности:

$$\mathcal{F}_r = -\frac{c}{3\rho}\int_0^\infty (1/\kappa_\nu)\nabla u_\nu^{eq} d\nu = -\frac{c}{3\rho\kappa}\nabla u_r^{eq} = -\lambda_r \nabla T, \tag{19}$$

где $\lambda_r = \frac{4}{3}\left(ac/\rho\kappa\right)T^3$ – коэффициент лучистой теплопроводности.

2.2. Балансовое уравнение для полной энтропии

Известно, что закон лучистой теплопроводности можно использовать и для нестационарного поля излучения при наличии источников энергии[2)]. В этом случае уравнение (8) для полной энтропии

$$s(\mathbf{r},t) = \frac{4aT^3}{3\rho} + \frac{(\mathcal{R}/\bar{\mu})}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T}{\rho^{\gamma-1}}\right) = \frac{C_{Vr}}{3} + C_{Pg}\ln\left(\frac{T}{P_g^{(\gamma-1)/\gamma}}\right) \tag{20}$$

совершенного газа и черного излучения с постоянными теплоемкостями принимает вид:

$$\rho T\frac{\mathcal{D}s}{\mathcal{D}t} = \rho\left[\frac{\mathcal{D}e}{\mathcal{D}t} + P\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] = \lambda_r\nabla^2 T\,. \tag{21}$$

Этому уравнению можно придать следующие, удобные для астрофизических приложений, две эквивалентные формы:

$$T\frac{\mathcal{D}s}{\mathcal{D}t} = \frac{P}{\rho}\left[\left(\frac{\beta+12(1-\beta)(\gamma-1)}{(\gamma-1)}\right)\frac{\mathcal{D}\ln T}{\mathcal{D}t} - (4-3\beta)\frac{\mathcal{D}\ln\rho}{\mathcal{D}t}\right]$$

$$= C_{V\Sigma}\rho T^2\left[\frac{\mathcal{D}\ln T}{\mathcal{D}t} - (\Gamma_3-1)\frac{\mathcal{D}\ln\rho}{\mathcal{D}t}\right] = \lambda_r\nabla^2 T \tag{22}$$

и

$$T\frac{\mathcal{D}s}{\mathcal{D}t} = \frac{P}{\rho}\left[\left(\frac{\beta+12(1-\beta)(\gamma-1)}{(\gamma-1)(4-3\beta)}\right)\left(\frac{\mathcal{D}\ln P}{\mathcal{D}t} - \beta\frac{\mathcal{D}\ln\rho}{\mathcal{D}t}\right) - (4-3\beta)\frac{\mathcal{D}\ln\rho}{\mathcal{D}t}\right] =$$

---

[2]) В диффузионном приближения существенное изменение плотности энергии излучения (за счет нестационарности) и источников энергии имеет место только в тех областях среды, где пробег излучения больше всех характерных длин рассматриваемого явления, например, у самой поверхности звезды (Франк-Каменецкий, 1959).

$$= \frac{1}{\Gamma_3 - 1} \frac{\mathcal{D} \ln P}{\mathcal{D}t} - \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3 - 1} \frac{\mathcal{D} \ln \rho}{\mathcal{D}t} = \lambda_r \nabla^2 T \, . \qquad (23)$$

Здесь величины Γ_1 и Γ_3 (обобщенные показатели адиабаты для смеси газа и черного излучения) определяются соотношениями (Chandrasekhar, 1961)

$$\Gamma_1 := \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_S = \beta + \frac{(4 - 3\beta)^2 (\gamma - 1)}{\beta + 12(\gamma - 1)(1 - \beta)} , \qquad (24)$$

$$\Gamma_3 := 1 + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_S = 1 + \frac{(4 - 3\beta)(\gamma - 1)}{\beta + 12(\gamma - 1)(1 - \beta)} = \frac{\Gamma_1 - \beta}{4 - 3\beta} , \qquad (25)$$

в которых параметр

$$\beta := P_g / (P_g + P_r) \qquad (26)$$

характеризует долю газа в полном давлении смеси.

Когда $P_g \gg P_r$, то $\beta \simeq 1$ и все обобщенные показатели адиабаты для смеси «газ + излучение» совпадают с показателем адиабаты совершенного газа $\Gamma_1 = \Gamma_3 = \gamma$, а если присутствует одно лишь излучение абсолютно черного тела $(P_g \ll P_r)$, то они равны 4/3. Таким образом, для рассматриваемой астрофизической системы обобщенные показатели адиабаты принимают промежуточные значения от 4/3 до 5/3.

Для полной удельной теплоемкости газа и излучения имеем

$$C_{V\Sigma} = C_{Vg} + C_{Vr} = \frac{(\mathcal{R}/\bar{\mu})}{\gamma - 1} + \frac{4aT^3}{\rho} = \frac{1}{\rho T} \left(\frac{P_g}{\gamma - 1} + 12 P_r \right) =$$

$$= \frac{C_{Vg}}{\beta} \frac{(\gamma - 1)(4 - 3\beta)^2}{\Gamma_1 - \beta} = \frac{C_{Vg}}{\beta} \left[\beta + 12(1 - \beta)(\gamma - 1) \right] . \qquad (27)$$

Уравнения (22) и (23), записанные в изоэнтропическом случае, также позволяют найти выражения для полных удельных теплоемкостей (при постоянном объеме и при постоянном давлении) смеси материи и излучения

$$C_{V\Sigma} = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_V = \frac{(\mathcal{R}/\bar{\mu})}{\beta}\left(\frac{\beta + 12(1-\beta)(\gamma-1)}{(\gamma-1)}\right), \tag{28}$$

$$C_{P\Sigma} = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P = C_{Vg}\,\frac{\Gamma_1(\gamma-1)(4-3\beta)^2}{\beta^2(\Gamma_1-\beta)} =$$

$$= \frac{C_{Vg}}{\beta^2}\left[\beta^2 + (\gamma-1)(4-3\beta)^2 + 12\beta(\gamma-1)(1-\beta)\right]. \tag{29}$$

Из формул (28) и (29) следует, что отношение полных удельных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме и обобщенная формула Майера для смеси совершенного газа и черного излучения имеют вид:

$$C_{P\Sigma} / C_{V\Sigma} = \Gamma_1 / \beta, \quad C_{P\Sigma} - C_{V\Sigma} = (\mathcal{R}/\bar{\mu})\left(\frac{4-3\beta}{\beta}\right)^2. \tag{30}$$

3. Влияние черного излучения на джинсовскую неустойчивость

3.1. Линеаризованные уравнения радиационной газодинамики в диффузионном приближении

Для изучения мелкомасштабных возмущений линеаризуем систему уравнений (1), (2), (6) и (9), записанную в приближении оптически толстой среды. С этой целью представим газодинамические переменные в виде сумм невозмущенных ρ_0, T_0, P_0 $\mathbf{v}_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = 0$, $\Phi_0 \cong 0$ (далее используется так называемое «мошенничество» Джинса) и возмущенных $\delta\rho$, δT, $\delta P, \delta\mathbf{v}$, $\delta\mathcal{F}$, $\delta\Phi$ [3] вели-

[3] Через δ обозначены эйлеровы вариации, которые коммутируют с операторами градиента ∇ и временной производной $\partial / \partial t$.

чин. Невозмущенные величины описывают, по предположению, некоторое равновесное состояние системы, а возмущенные − суть малые пульсации параметров, слабо нарушающие невозмущенное состояние. Для состояния равновесия излучения будем предполагать однородное и изотропное поле излучения, когда средняя непрозрачность $\kappa = const$. Кроме этого, будем (для простоты) считать, что характерная длина волны возмущения мала по сравнению с характерным пространственным изменением как структурных гидродинамических параметров P_0, T_0, ρ_0, так и других характерных длин задачи (т.е. ограничимся так называемым приближением коротковолновой акустики). В этом случае в линеаризованных уравнениях можно пренебречь всеми пространственными производными. Далее индекс «0» у невозмущенных величин будем опускать.

С учетом сделанных упрощающих предположений дифференциальные уравнения (1), (2), (6) и (9) при выполнении всех необходимых разложений и удержании членов первого порядка относительно малых возмущений принимают следующий линеаризованный вид:

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \delta\mathbf{v} = 0, \tag{31}$$

$$\rho \frac{\partial\, \delta\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla \delta P - \nabla \delta \Phi = 0, \tag{32}$$

$$\frac{\partial\, \delta P}{\partial t} = \Gamma_1 \frac{P}{\rho} \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + (\Gamma_3 - 1)\lambda_r \nabla^2 \delta T, \tag{33}$$

$$\Delta \delta \Phi = -4\pi G \delta\rho. \tag{34}$$

Здесь энергетическое уравнение (9) записано в форме (23). К уравнениям (31)-(34) необходимо добавить линеаризованное уравнение состояния смеси (вещество + излучение). С учетом формулы (26), характеризующей долю вещества в полном давлении системы, эйлерову вариацию полного давления можно преобразовать к виду

$$\delta P = \delta P_g + \delta P_r = \frac{\mathcal{R}T}{\bar{\mu}}\delta\rho + \left\{\frac{\mathcal{R}\rho}{\bar{\mu}} + \tfrac{4}{3}aT^3\right\}\delta T = \beta P\left\{\frac{\delta\rho}{\rho} + \frac{(4-3\beta)}{\beta}\frac{\delta T}{T}\right\}. \quad (35)$$

Поскольку уравнения (31)-(35), описывающие эволюцию малых неизоэнтропических возмущений параметров радиационной среды с черным излучением на фоне ее равновесного состояния, являются линейными однородными уравнениями в частных производных, то к ним применим метод нормальных колебаний (метод мод). Рассмотрим далее плоскую волну возмущения однородного фона и будем предполагать, что волны возмущения эволюционируют во времени по закону $\sim \exp(\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$, где ω – частота гармонических колебаний (частота мод), $\mathbf{k}$ – волновой вектор, $|\mathbf{k}| = \sqrt{\mathrm{k}_x^2 + \mathrm{k}_y^2 + \mathrm{k}_z^2}$ – волновое число.

Комбинируя записанное для возмущений уравнение (33) и соотношение (35), получим ключевую для дальнейшего связь между термодинамическими возмущениями (пульсациями) полного давления среды δP и плотности $\delta\rho$:

$$\delta P = \left[\left(\omega\, c_{gr}^2 + \mathcal{A}\right)/\left(\omega + \mathcal{B}\right)\right]\delta\rho. \quad (36)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\mathcal{A} := (\Gamma_3 - 1)\beta\frac{\lambda_r\, T}{\rho\,(4-3\beta)}\mathbf{k}^2, \quad \mathcal{B} := (\Gamma_3 - 1)\frac{\lambda_r\, T}{P\,(4-3\beta)}\mathbf{k}^2, \quad (37)$$

$$c_{GR} := \sqrt{\left.\frac{\partial P}{\partial\rho}\right|_s} = \sqrt{\frac{P}{\rho}\Gamma_1} = \sqrt{(\mathcal{R}/\bar{\mu})T\left[1 + \frac{(4-3\beta)^2(\gamma-1)}{\beta\left[\beta + 12(\gamma-1)(1-\beta)\right]}\right]} \quad (38)$$

– невозмущенная адиабатическая скорость звука вещества и черного излучения. Заметим, что в случае, когда параметр $\beta \to 1$, выражение для скорости c_{GR} совпадает с классическим выражением для адиабатической скорости звука в газе, $c_{GR}\big|_{\beta\to 1} \to c_{gs} := (\partial P_g / \partial\rho)\big|_{s_g} = \sqrt{\gamma P_g / \rho}$.

Из уравнений (31) и (34) следуют еще два соотношения для возмущений скорости и плотности

$$\omega\,\delta\rho + i\rho(\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{k}^2\delta\Phi = 4\pi G\delta\rho. \tag{39}$$

Используя (34), (35) и (39) при преобразовании уравнения (18) для пульсаций скорости $\delta\mathbf{v}$, в результате получим:

$$\omega\delta\mathbf{v} + i\frac{\mathbf{k}}{\mathrm{k}^2}\Omega_T^2\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right) = 0. \tag{40}$$

Наконец, взяв дивергенцию от уравнения (32) и учитывая соотношение (34), найдем еще одно соотношение для возмущений плотности

$$\left(\omega^2 + \Omega_T^2\right)\frac{\delta\rho}{\rho} = 0. \tag{41}$$

При написании алгебраических уравнений (40) и (41) были использованы обозначения:

$$\Omega_T^2 := \frac{\Omega_I^2 + \omega\Omega_J^2}{\omega + \mathcal{B}}, \quad \Omega_I^2 := \mathcal{A}\mathbf{k}^2 - (4\pi G\rho)\mathcal{B}, \quad \Omega_J^2 := c_{GR}^2\mathbf{k}^2 - 4\pi G\rho. \tag{42}$$

3.2. Дисперсионные соотношения в среде с черным излучением

Полученная система уравнений однородных линейных уравнений (39)-(41) для пульсаций скорости и плотности является исходной для дальнейшего анализа динамики малых возмущений в модели газа с чернотельной радиацией. Она имеет решение, отличное от тривиального, только в том случае, когда определитель системы равен нулю. Опуская несложные выкладки, сразу приведем получаемое при этом общее дисперсионное соотношение

$$\omega^3\left(\omega^2+\frac{\Omega_I^2+\omega\Omega_J^2}{\omega+\mathcal{B}}\right)=0, \tag{43}$$

которое описывает связанное поведение вещества и поля излучения в равновесном случае. Это соотношение состоит из двух сомножителей, приравнивание каждого из которых к нулю приводит к двум независимым режимам распространения волны возмущения. Первое решение $\omega=0$ уравнения (43) описывает минимально устойчивый режим распространения волны возмущения (так называемый энтропийный режим). Другие корни уравнения (46) являются решениями алгебраического кубического уравнения

$$\omega^2(\omega+\mathcal{B})+\Omega_I^2+\omega\Omega_J^2=0,$$

которое с учетом обозначений (42) принимает вид

$$\omega^3+\omega^2\mathcal{B}+\omega\left(\mathbf{k}^2c_{GR}^2-4\pi G\rho\right)+\left(\mathbf{k}^2c_{gs}'^2-4\pi G\rho\right)\mathcal{B}=0. \tag{44}$$

При написании дисперсионного соотношения (44) использованы преобразованные с учетом (24), (25) и (28) формулы для величин $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}:=\frac{(\Gamma_3-1)\lambda_r T}{(4-3\beta)}\frac{\mathbf{k}^2}{P}=\frac{C_{Vg}}{C_{V\Sigma}}(\gamma-1)\frac{\lambda_r\mathbf{k}^2}{\left(\mathcal{R}/\bar{\mu}\right)\rho}=$$

$$=\frac{\lambda_r\mathrm{k}^2}{\rho C_{V\Sigma}}=\frac{C_{Vr}}{C_{V\Sigma}}\left(\frac{c\mathbf{k}^2}{3\rho\kappa}\right)=\left(1+\frac{u_g}{4u_r}\right)^{-1}\frac{c\mathbf{k}^2}{3\rho\kappa}=\left(1+\frac{1}{12(\gamma-1)}\frac{P_g}{P_r}\right)^{-1}\frac{c\mathbf{k}^2}{3\rho\kappa} \tag{45}$$

– так называемая скорость диффузии излучения (по шкале $|\mathbf{k}|^{-1}$),

$$\mathcal{A}:=\frac{(\Gamma_3-1)}{(4-3\beta)}\beta\frac{\lambda_r T}{\rho}\mathbf{k}^2=\frac{\Gamma_1}{\beta C_{P\Sigma}}\frac{\lambda_r P_g}{\rho\rho}\mathbf{k}^2=$$

$$=\frac{1}{C_{V\Sigma}}\frac{\lambda_r c_{gs}'^2}{\rho}\mathbf{k}^2=\frac{C_{Vr}}{C_{V\Sigma}}\left(\frac{c\mathbf{k}^2}{3\rho\kappa}\right)c_{gs}'^2, \tag{46}$$

– величина, связанная с $\mathcal{B}$ соотношением $\mathcal{A}=\mathcal{B}\mathrm{c}_{gs}'^2$. Здесь

$$c_{gs}'=\sqrt{(\partial P_g/\partial\rho)\big|_T}=\sqrt{(\mathcal{R}/\bar{\mu})T}=\sqrt{\beta P/\rho}=c_{gs}/\sqrt{\gamma} \tag{47}$$

– изотермическая скорость звука газовой составляющей протозвездного диска.

Сразу отметим, что в пределе медленной диффузии, когда преобладает газовое давления в системе (при этом справедливы пределы $\beta\to 1$, $u_r/u_g\to 0$, $c_{GR}^2\big|_{\beta\to 1}\to c_{gs}^2=\gamma P_g/\rho$), $\mathcal{B}=\left(1+\frac{u_g}{4u_r}\right)^{-1}\frac{c\mathbf{k}^2}{3\rho\kappa}\to 0$), уравнение (44) сводится к классическому уравнению Джинса $\omega^3+\left(\mathbf{k}^2c_{GR}^2-4\pi G\rho\right)\omega=0$, которое включает энтропийный режим $\omega=0$ и явно содержит адиабатическую скорость c_{gs}^2 звука газа. Из этого уравнения следует дисперсионное соотношение

$$\omega^2+\left(\mathbf{k}^2c_{gs}^2-4\pi G\rho\right)\cong 0, \tag{48}$$

из которого вытекает классический критерий неустойчивости Джинса для газа[4)]

$$\mathbf{k}^2\le 4\pi G\rho/c_{gs}^2=\mathrm{k}_{\mathrm{J}}^2, \tag{49}$$

[4)] Напомним, что для неустойчивых волн возмущения частота $\omega>0$, тогда как устойчивость соответствует условию $\omega<0$. Эти два класса разделяет случай нейтральной устойчивости $\omega=0$, что соответствует модам с критической длиной волны возмущения. Критическая длина волны возмущения $\lambda_{cr}=2\pi/\mathrm{k}_{cr}$ (для идеального газа: $\mathrm{k}_{cr}^2=\omega_{cr}^2/c_{gs}^2$, $\omega_{cr}^2=4\pi G\rho$) является размером мельчайших «капель» рассматриваемой среды, которые могут удерживаться вместе собственным гравитационным притяжением.

где k_J – классическое волновое число Джинса, $k_J^2 := 4\pi G\rho / c_{gs}^2$.

Из неравенства (49) можно сделать вывод, что лучистая теплопроводность не влияет на стандартный классический критерий Джинса в радиационной газовой среде в случае медленной диффузии излучения. Другими словами, в оптически толстой для инфракрасного излучения среде при медленной диффузии излучения адиабатичность волны возмущения не нарушается.

В противоположном пределе, когда доминирует радиационное давление в системе, имеем: 1) $\mathcal{B} \to c\mathbf{k}^2 / 3\kappa\rho$ (здесь $\tau = \kappa\rho|\mathbf{k}|^{-1}$ – оптическая глубина по шкале $\sim |\mathbf{k}|^{-1}$); 2) полная адиабатическая скорость звука c_{GR} вещества и черного излучения переходит в адиабатическую радиационную скорость звука c_{rs}, которая в этом случае много больше термической скорости звука c'_{gs} в веществе

$$c_{GR}^2 \equiv \Gamma_1 P/\rho \to c_{rs}^2 \equiv (4/3) P_r \rho^{-1} \gg c_{gs}'^2 = \gamma P_g \rho^{-1}. \tag{50}$$

В результате дисперсионное соотношение для акустических волн в оптически толстой среде с радиационным давлением и в предположении быстрой диффузии излучения принимает вид:

$$\omega^3 + \omega^2 \frac{c\mathbf{k}^2}{3\rho\kappa} + \omega\left(\mathbf{k}^2 c_{rs}^2 - 4\pi G\rho\right) + \left(\mathbf{k}^2 c_{gs}'^2 - 4\pi G\rho\right)\frac{c\mathbf{k}^2}{3\rho\kappa} = 0. \tag{51}$$

Для того чтобы точнее охарактеризовать проблему гравитационной неустойчивости в случае быстрой диффузии излучения, введем безразмерные параметры, с помощью которых обезразмерим уравнение (51). Следующие три безразмерных параметра влияют на характер эволюции волны возмущения: $\vartheta_T = \mathbf{k}^2 c_{gs}'^2 / 4\pi G\rho$ – изотермическое число Джинса, определяющее роль газового давления в поддержании среды в масштабе $|\mathbf{k}|^{-1}$; $\vartheta_{rs} = \mathbf{k}^2 c_{rs}^2 / 4\pi G\rho$ –

адиабатическое число Джинса, определяющее роль радиационного давления в распространении волны возмущения; $\mathcal{B}_{rs} = \dfrac{c\mathbf{k}^2}{3\rho\kappa}\dfrac{1}{\sqrt{4\pi G\rho}}$ – безразмерное число, характеризующее скорость диффузии равновесного излучения (при $\mathcal{B}_{rs} \gg 1$ имеет место быстрая диффузия излучения, а при $\mathcal{B}_{rs} \ll 1$ – медленная).

Используя безразмерную частоту $\varpi = \omega / \sqrt{4\pi G\rho}$, перепишем уравнение (51) в виде

$$\varpi^3 + \varpi^2 \mathcal{B}_{rs} + \varpi(\vartheta_{rs} - 1) + (\vartheta_T - 1)\mathcal{B}_{rs} = 0. \qquad (52)$$

Точное решение этого алгебраического уравнения третьей степени может быть найдено методом Кардана. Однако подобное решение не приводит, к сожалению, к наглядным формулам для различных показателей роста. По этой причине нахождение критерия неустойчивости может быть выполнено при некотором упрощении уравнения (52), связанном с оценкой численных значений безразмерных параметров, соответствующих той или иной области протозвездного диска.

В частности, в пределе быстрой диффузии излучения в оптически толстой среде, когда $\mathcal{B}_{rs} \gg 1,\quad \vartheta_T,$ и ϑ_{rs}, уравнение (52) принимает вид

$$\omega^2 + \left(\mathbf{k}^2 c'^2_{gs} - 4\pi G\rho\right) \cong 0. \qquad (53)$$

Для того чтобы это уравнение имело действительный корень, необходимо выполнение неравенства $\mathbf{k}^2 c'^2_{gs} - 4\pi G\rho < 0.$ Отсюда следует модифицированный изотермический критерий неустойчивости для газа,

$$\mathrm{k}^2 \leq 4\pi G\rho / c'^2_{gs} = \mathrm{k}_\mathrm{J}^2 / \gamma, \qquad (53)$$

где k_J – классическое волновое число Джинса, $\mathrm{k}_\mathrm{J}^2 := 4\pi G\rho / c_{gs}^2$.

Из неравенства (53), представляющего собой модификацию критерия Джинса, можно сделать вывод, что в случае быстрой диффузии излучения диффузия теплового излучения влияет на стандартный критерий Джинса в радиационной газовой среде, приводя к замене адиабатической скорости звука c_{gs} на изотермическую c'_{gs}. Другими словами, быстрая диффузия обеспечивает изотермичность волны возмущения в радиационной среде.

4. Влияние динамики излучения на гравитационную неустойчивость. Уравнения радиационной акустики

С целью получения уравнений радиационной акустики в случае отсутствия равновесия между веществом и излучением, линеаризуем записанные для оптически толстой среды базовые уравнения радиационной гидродинамики (1)-(6). В качестве начального состояния газа примем равновесное состояние, при котором $\rho_0 = const$, $P_{g0} = const$, $\mathbf{v}_0 = 0$ и все производные по времени исчезают. Для начального состояния излучения примем ЛТР, при котором $T_g \cong T_r = T$ и справедливы соотношения

$$\frac{c}{4\pi} u_{r0} - \mathcal{S}_{r0} \equiv \frac{c}{4\pi} a T_0^4 - \mathcal{B}(T) = 0, \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}_{r0} = 0, \quad P_{r0} = f_E\, u_{r0} = \frac{1}{3} u_{r0}, \tag{54}$$

где $u_{r0} = aT_0^4$; фактор Эддингтона считается постоянным, $f_E = 1/3$. Кроме этого, будем считать, что средняя непрозрачность Росселанда κ также постоянна. Далее индекс «0» у невозмущенных величин будем опускать.

С учетом сделанных упрощающих предположений дифференциальные уравнения радиационной гидродинамики (1)-(6) при выполнении необходимых разложений и удержании только членов первого порядка относительно малых возмущений, а также при использовании «мошенничества» Джинса принимают следующий линеаризованный вид

$$\partial \delta\rho / \partial t + \rho \nabla \cdot \delta\mathbf{v} = 0, \tag{55}$$

$$\rho\partial\,\delta\mathbf{v}/\partial t+\nabla\delta P_g-\rho\nabla\delta\Phi-\kappa\rho c^{-1}\delta\mathcal{F}_r=0\,, \tag{56}$$

$$\partial\,\delta u_g\;/\,\partial t+\gamma u_g\nabla\cdot\delta\mathbf{v}-\kappa\rho c\left(\,\delta u_r-\delta u_B\right)=0\,, \tag{57}$$

$$\nabla^2\delta\Phi=-4\pi\,G\,\delta\rho\,, \tag{58}$$

$$\partial\,\delta u_r\;/\,\partial t+\nabla\cdot\delta\mathcal{F}_r+(4/3)u_r\nabla\cdot\delta\mathbf{v}+\kappa\rho c\left(\,\delta u_r-\delta u_B\right)=0\,, \tag{59}$$

$$\partial\,\delta\mathcal{F}_r\;/\,\partial t+c^2\nabla\,\delta u_r+c\kappa\rho\,\delta\mathcal{F}_r=0\;. \tag{60}$$

К этим уравнениям необходимо добавить выражения для вариации функции источника

$$\delta u_B=\frac{4\pi}{c}\delta\mathcal{B}(T)=4aT^3\delta T\;. \tag{61}$$

Заметим, что уравнения (55)-(60) для вариаций параметров состояния системы (с учетом динамики поля излучения), в отличие от уравнений (31)-(34), позволяют моделировать энергетическую развязку между излучением и веществом. Эти уравнения, описывающие эволюцию малых возмущений структурных параметров среды с неравновесным излучением на фоне ее равновесного состояния, являются линейными однородными уравнениями в частных производных, следовательно, к ним применим метод нормальных колебаний. Далее рассмотрим плоскую волну возмущения однородного фона и будем предполагать, что возмущения эволюционируют во времени по закону $\sim\exp(\omega t+i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$, где ω – частота гармонических колебаний, а $\mathbf{k}$ – волновое число, т.е. все величины $\delta\rho$, $\delta\mathbf{v}$, $\delta\mathcal{F}_r$, δu_g и δu_r зависят только от $\mathbf{r}$ и t. В этом случае система уравнений (55)-(60) принимает вид:

$$-\omega\delta\rho+i\rho\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{v}=0, \tag{62}$$

$$-\omega\,\delta\mathbf{v}+i\,\mathbf{k}\frac{\delta P_g}{\rho}-i\,\mathbf{k}\,\delta\Phi-\frac{\kappa}{c}\delta\mathcal{F}_r=0, \tag{63}$$

$$-\omega\delta u_g + i\gamma u_g\,\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{v} + \kappa\rho c\left(\delta u_r - 4aT^3\delta T\right) = 0\,, \tag{64}$$

$$-\mathbf{k}^2\,\delta\Phi + 4\pi G\,\delta\rho = 0\,, \tag{65}$$

$$-\omega\delta u_r + i\tfrac{4}{3}u_r\,\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{v} + i\,\mathbf{k}\cdot\delta\mathcal{F}_r\,\kappa\rho c\left(\delta u_r - 4aT^3\delta T\right) = 0\,, \tag{66}$$

$$-\omega\delta\mathcal{F}_r + \frac{c^2}{3}i\,\mathbf{k}\,\delta u_r + \kappa\rho c\,\delta\mathcal{F}_r = 0\,. \tag{67}$$

Эта система однородных линейных уравнений имеет решение, отличное от тривиального, только в том случае, когда определитель системы равен нулю. Опуская несложные выкладки, сразу напишем основное дисперсионное соотношение, которое в общем случае неравновесного излучения принимает вид:

$$\omega^5 + \omega_p(\Gamma+2)\,\omega^4 + \omega_p^2\left[(\Gamma+1) + \frac{c_F^2\,\mathbf{k}^2}{\omega_p^2} + \frac{(c_{rs}^2 + c_{gs}^2)\mathbf{k}^2 - 4\pi G\rho}{\omega_p^2}\right]\omega^3 +$$

$$+\omega_p\left[\Gamma c_F^2\mathbf{k}^2 + 2\left(\frac{2\Gamma}{3\gamma}+1\right)c_{gs}^2\mathbf{k}^2 + (3\gamma+\Gamma-2)\,c_{rs}^2\mathbf{k}^2 - (\Gamma+2)4\pi G\rho\right]\omega^2 +$$

$$+\omega_p^2\left[\gamma c_{gs}'^2\mathbf{k}^2\left(\frac{c_F^2\mathbf{k}^2}{\omega_p^2} + \frac{4\Gamma}{3\gamma}+1\right) + \left(3\gamma+\Gamma-3\right)c_{rs}^2\mathbf{k}^2 - \left(1+\Gamma+\frac{c_F^2\mathbf{k}^2}{\omega_p^2}\right)4\pi G\rho\right]\omega -$$

$$+\omega_p\Gamma\left(c_{gs}'^2\mathbf{k}^2 - 4\pi G\rho\right)c_F^2\,\mathbf{k}^2 = 0\,. \tag{68}$$

Здесь введены следующие параметры:

$c_{gs}{=}\sqrt{(\partial P_g/\partial\rho)_{s_g}} = \sqrt{\gamma(P_g/\rho)} = \sqrt{\gamma}c'_{gs}$, $c'_{gs}{=}\sqrt{P_g/\rho}$ – соответственно адиабатическая и изотермическая скорость звука в газе; $c_F{=}\sqrt{c^2/3}$ скорость радиационной волны; $\omega_p = \kappa\rho c$ – частота, характеризующая затухание потока энергии излучения (эта величина связана с длинной свободного пробега фотона $l_p = 1/\kappa\rho$ и со средним временем пробега фотона $t_p = l_p/c = 1/\omega_p$, которое является временным масштабом, характеризующим затухание потока энергии излучения); $\Gamma = 4\frac{u_r}{u_g} = 12(\gamma-1)\frac{P_r}{P_g} = \left(\frac{C_{Vr}}{C_{Vg}}\right)$ – отношение удельных теплоемкостей излучения $C_{Vr} = T\left(\frac{\partial s_r}{\partial T}\right)_V = \frac{4aT^3}{\rho}$ и вещества $C_{Vg} = \frac{1}{\gamma-1}(\mathcal{R}/\bar{\mu})$ при постоянном объеме; $c_{rs}^2 = \left(\frac{\partial P_r}{\partial \rho}\right)_{S_r} = \frac{4}{9}\frac{u_r}{\rho}$ – квадрат радиационной скорости звука (при этом введенная ранее результирующая скорость звука для смеси вещества и излучения, равная $c_{RG} = \sqrt{c_{rs}^2 + c_{gs}^2}$, связана с обменом импульсами между газом и излучением); величина $\frac{c_F^2\mathbf{k}^2}{\omega_p^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{(\kappa\rho|\mathbf{k}|^{-1})^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{\tau_p^2}$ является обратной квадрату оптической глубины среды $\tau = \kappa\rho|\mathbf{k}|^{-1}$по шкале $\sim|\mathbf{k}|^{-1}$.

На основе дисперсионного уравнения (68) возможно изучение гидродинамических линейных волн, возникающих при малоамплитудных начальных флуктуациях с волновым числом $\mathbf{k}$ в излучающей среде с учетом эффектов гравитационной неустойчивости. Поскольку аналитическое решение уравнения (68) в общем случае затруднительно, то строгий количественный анализ на его основе возможен только с помощью численных методов. Вместе с тем некоторые критерии неустойчивости радиационной среды могут быть найдены при упрощении уравнения (68), связанном с предварительной оценкой численных значений параметров, характеризующих ту или иную область протозвездного диска.

Проиллюстрируем возможность такого подхода на простом примере определения условий возникновения джинсовской неустойчивости в случае большой оптической глубины $\tau \cong \kappa\rho|\mathbf{k}|^{-1}$ дисковой среды. В этом случае для третьего и пятого членов уравнения (68) справедлива оценка

$c_F^2\mathbf{k}^2/\omega_p^2 = 1/3\tau^2 \ll 1 \ll \Gamma$. Кроме того, для нерелятивистской среды в четвертом члене уравнения (68) справедливы оценки $c_F^2\,\mathbf{k}^2 \gg c_{rs}^2\,\mathbf{k}^2, c_{gs}'^2\,\mathbf{k}^2$ и $4\pi G\rho$. Используя этот порядок величин и разделив (68) на $(n_p\Gamma)^2$, получим (при учете $c_F^2\,\mathbf{k}^2/\omega_p = c\mathbf{k}^2/3\kappa\rho = \omega_{diff}$ – частота диффузии излучения) следующее дисперсионное соотношение:

$$\frac{\omega^5}{(\omega_{th})^2} + \frac{\omega^4}{\omega_{th}} + \omega^3 + \frac{c\mathbf{k}^2}{3\kappa\rho}\omega^2 + \left[\left(\frac{4}{3}c_{gs}'^2 + c_{rs}^2\right)\mathbf{k}^2 - 4\pi G\rho\right]\omega +$$
$$+\left(c_{gs}'^2\mathbf{k}^2 - 4\pi G\rho\right)\frac{1}{\Gamma}\frac{c\,\mathbf{k}^2}{3\kappa\rho} \cong 0. \qquad (69)$$

Здесь

$$\omega_{th} = \Gamma\omega_p = 4\frac{u_r}{u_g}\kappa\rho c \qquad (70\ )$$

– характерная частота теплообмена (обмена энергией между веществом и полем излучения) (Blaes, Socrates, 2003).

Из сопоставления этого уравнения с уравнением (44) видно, что последние четыре члена (69) качественно идентичны членам (44) в пределе с преобладанием давления излучения $\Gamma \simeq 1$. Следовательно, появление первых двух членов в уравнении (69) связано с вовлеченностью в анализ переноса неравновесного излучения дополнительного уравнения (60) для зависящего от времени потока излучения $\mathcal{F}_r(t)$. При этом значимость этих членов определятся величиной частоты ω_{th} затухания потока энергии.

Когда частота велика $(\omega_{th} \gg 1)$, первые два члена в уравнении (69) могут быть опущены. В результате получим уравнение

$$\omega^3 + \frac{c\mathbf{k}^2}{3\rho\kappa}\omega^2 + \left[\left(\frac{4}{3}c_{gs}'^2 + c_{rs}^2\right)\mathbf{k}^2 - 4\pi G\rho\right]\omega + \left(c_{gs}'^2\mathbf{k}^2 - 4\pi G\rho\right)\frac{1}{\Gamma}\frac{c\mathbf{k}^2}{3\rho\kappa} = 0, \quad (71)$$

аналогичное уравнению (51), которое было проанализировано в Разд. 3.

Если частота диффузии излучения $\omega_{diff} \cong c\mathbf{k}^2/3\kappa\rho$ мала (т.е. преобладает газовое давление в системе), то уравнение (71) принимает вид

$$\omega\left\{\omega^2 + \left[\left(\frac{4}{3}c_{gs}'^2 + c_{rs}^2\right)\mathbf{k}^2 - 4\pi G\rho\right]\right\} \simeq 0\,. \qquad (72)$$

Отсюда следует модифицированный критерий неустойчивости Джинса

$$\mathbf{k}^2 < \frac{4\pi G\rho}{(4/3)c_{gs}'^2 + c_{rs}^2}\,. \qquad (73)$$

При этом можно показать, что для больших значениях параметра $\Gamma = 4u_r / u_g$, выражение $(4/3)c_{gs}'^2 + c_{rs}^2$ сводятся к адиабатической скорости звука для излучения c_{rs}^2, а для малых величин Γ переходит в c_{gs}^2. Таким образом, для диска с большой оптической глубиной и в случае медленной диффузии, критерий неустойчивости (53) сохраняется для малых Γ (но уже в случае отсутствия равновесия между веществом и излучением, когда нет энергетической связи между ними), а для больших Γ видоизменяется и принимает вид

$$\mathbf{k}^2 < 4\pi G\rho / c_{rs}^2 \qquad (74)$$

Таким образом, в оптически толстом пределе с медленной диффузией давление неравновесного излучения способствует устойчивости системы к гравитационному коллапсу.

В противоположном случае, когда $\omega_p \to 0$, $c_f^2\,|\mathbf{k}|^2/\omega_p^2 \gg \Gamma$, 1, $\Gamma c_f^2\,|\mathbf{k}|^2$, уравнение (68) сводится к

$$\omega^3 - \left(c_{gs}^2\mathbf{k}^2 - 4\pi G\rho\right)\omega \cong 0. \qquad (75)$$

Отсюда следует, что, в отличие от критерия неустойчивости (53) (полученного в Гл.3 для случая быстрой диффузии, $\mathcal{B} = \Gamma\omega_{diff} \gg 1$) и согласно которому скорость акустической моды газа равна изотермической скорости звука c'_{gs}), в случае, когда энергетическая связь между излучением и газом незначительна, акустические моды распространяются с адиабатической скоростью звука c_{gs}, т.е. имеет место классический газовый критерий Джинса. Этот эффект отсутствует в случае совершенной энергетической связи, рассмотренной в Гл.3.

Более полное численное исследование дисперсионного уравнения (68) предполагается рассмотреть в других публикациях автора.

Заключение

В работе рассмотрены основные режимы радиационных гидродинамических линейных волн, возникающих из одномерных малоамплитудных возмущений в радиационной среде с учетом гравитационных эффектов. Уравнения радиационной акустики выводятся из уравнений гидродинамики, уравнения Пуассона и двух моментных уравнений излучения, используемых в приближении Эддингтона. Получены дисперсионные соотношения, позволяющие получить модификации критерия гравитационной неустойчивости Джинса под влиянием радиационного давления и диффузии излучения. Рассмотрены два приближения радиационной диффузии: случай идеального теплового равновесия, когда температуры вещества и излучения одинаковы; случай временной зависимости поля излучения, когда имеет место энергетическая развязка между излучением и веществом. Показано, что в отличие от ЛТР системы, когда скорость волны возмущения совпадает с изотермической скоростью звука, в случае различия температур излучения и газа возмущающая волна распространяется с адиабатической скоростью звука в газе. Полученные результаты направлены на решение проблемы гравитационной неустойчивости отдельных массивных протозвездных дисков или самогравитирующих радиационных сред, характеризующихся большими оптическими глубинами для собственного инфракрасного излучения, трансформированного пылью.

Работа выполнена в рамках Госзадания ИПМ им. М.В. Келдыша, а также частично поддержана грантом Минобрнауки России № 075-15-2020-780

Список литературы

Колесниченко А.В. Вывод в рамках неэкстенсивной кинетики критерия гравитационной неустойчивости Джинса для допланетного вращающегося облака с учетом радиации и магнитного поля // Mathematica Montisnigri. 2020. V. XLVII. P. 176-200.

Колесниченко А.В. Роль черного излучения в модификации критериев неустойчивости Джинса для экзопланетного пылевого плазменного диска при учете магнитной вязкости и лучевого теплообмена // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2022b. № 3. 40 с.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая механика. М.: Наука. 1976. 588 с.

Тассуль Ж:Л. Теория вращающихся звезд. М.: Мир. 1982. 472 с.

Франк-Каменецкий Д.А. Физические процессы внутри звезд.М.: Физ.мат. изд-во. 1959.

Фридман А.М., Хоперсков А.В. Физика галактических дисков. М.: Физматлит. 2011. 640 с.

Хоперсков А. В., Храпов С. С. Неустойчивость тепловой, вязкой и акустических мод в тонких аккреционных дисках // Астрономический журнал. 1999. Т. 76. № 4. С. 256-269.

Agol E., Krolik, J. Photon Damping of Waves in Accretion Disks// The Astrophysical Journal, V. 507 №1, P. 304-315 (1998)..

Aggrawal M., Talwar S.P. Magnetothermal instability in a rotating gravitating fluid, Mon. Not. R. Astron. Soc. 1969. V. 146. P. 235-242.

Argal S., Tiwari A., Sharma P.K. Jeans instability of a rotating self-gravitating visco-elastic fluid // Europhys. Lett. 2014. V. 108, P. 35003.

Bhatia P.K. Gravitational Instability of a Rotating Anisotropic Plasma // Physics of Fluids 1967. V. 10. № 8. P. 1652-1653.

Blaes O., Socrates A. Local dynamical instabilities in magnetized, radiation pressure supported accretion disks //The Astrophysical Journa. 2001, V. 553. № 2. P. 987-998.

Blaes O., Socrates A. Local Radiative Hydrodynamic and Magnetohydrodynamic Instabilities in Optically Thick Media // The Astrophysical Journal, 2003. V. 596. № 1. P.509-537.

Bora M.P., Nayyar N.K. Gravitational instability of a heat-conducting plasma // Astrophys Space Sci.1991. V. 179. P. 313-320.

Borah A.C., Sen A. K. Gravitational instability of partially ionized molecular clouds // Journal of Plasma Physics. 2007. V. 73. № 6. P. 831-838.

Buchler J.R. Radiation hydrodynamics in the fluid frame// J.Quant.Spectrosc. Radiat.Transfer/ 1979. V.22. P. 293-300.

Chandrasekhar S. Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon Press. 1961. 588 p.

Chang P., Quataert E., Murray N. From Thin to Thick: The Impact of X-Ray Irradiation on Accretion Disks in Active Galactic Nuclei // The Astrophysical Journal. 2007. V. 662. № 1. P. 94-101.

Chhajlani R.K., Vaghela D.S. Gravitational stability of finitely conducting two-component plasma through porous medium // Astrophysics and Space Science, 1987. V. 139. P. 337-352.

Cogley A.C., Vincent W.G. Application to radiative acoustics of Whitham's method for the analysis of non-equilibrium wave phenomena // J. Fluid Mech. 1969. V. 39. № 4. P. 641-866.

Cox J.P. Theory of stellar pulsation. Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1979. 378 p.

Cox J.P., Giuli R.T. Principles of Stellar Structure. New York: Gordon and Dreach, 1968. 568 p.

Dhiman J.S., Dadwal R. The gravitational instability of a non-uniformly rotating heat conducting medium in the presence of non-uniform magnetic field // Astrophysics and Space Science. 2011. V. 332. № 2. P. 373-378.

Dhiman J.S., Dadwal R. On the Jeans Criterion of a Stratified Heat Conducting Gaseous Medium in the Presence of Non-Uniform Rotation and Magnetic Field // J. Astrophys. Astr. (Indian Academy of Sciences). 2012. V. 33. P. 363-373.

Dodelson S. Modern Cosmology .Amsterdam (Netherlands): Academic Press. 2003. 440 p.

Fridman A.M., Polyachenko V.L. Physics of gravitating system. N.Y.: Springer-Verlag. 1984. V.1. 468 p., V.2. 358 p.

Jacobs G., Shukla P.K. Stability of molecular clouds in partially ionized self-gravitating space plasmas // Journal of plasma physics. 2005. V. 71. № 04**.** P. 487-493.

Jeans J.H. The stability of spherical nebulae // Philosophical Transactions of the Royal Society. 1902. V. 199. P. 1-53.

Joshi H., Pensia, R.K. Effect of rotation on Jeans instability of magnetized radiative quantum plasma // Physics of Plasmas. 2017. V. 24. № 3. P. 032113.

Hsieh S.-H., Spiegel E.A. The equations of photohydrodynamis// The Astrophysical Journal. 1976. V. 207. P.244-252.

Hu W., Sugiyama N. Small-Scale Cosmological Perturbations: an Analytic Approach // Astrophysical Journal. 1996. V. 471. P.542-570.

Kaneko N., Tamazawa S., Ono, Y. Linear waves in a radiating and scattering grey medium. Astrophysics and Space Science, 1976. V.42. №2. P. 441-461

Kaneko N, Morita K., Satoh T., Hayasaki K. Small-Amplitude Disturbances in a Radiating and Scattering Grey Medium II. Solutions of Given Realwave Number k //Astrophysics and Space Science. 2005. V. 299. P. 263-306.

Kaneko N., Morita K. Small-Amplitude Disturbances in a Radiating and Scattering Grey Medium III. Gravitational Effects on the Solutions of Given Real Wave Number k // Astrophys Space Sci. 2006. V. 305. P. 349-376.

Kaothekar S., Chhajlani R.K. Effect of Radiative Heat-Loss Function and Finite Larmor Radius Corrections on Jeans Instability of Viscous Thermally Conducting Self-Gravitating Astrophysical Plasma // ISRN Astronomy and Astrophysics. 2012. V. 2012. P. 420938 (1-14).

Kolesnichenko A.V. Jeans Instability of a Protoplanetary Gas Cloud with Radiation in Nonextensive Tsallis Kinetics // Solar System Research. 2020. V. 54. №. 2. P. 137-149.

Kolesnichenko A.V. Jeans Instability of a Protoplanetary Circular Disk Taking into Account the Magnetic Field and Radiation in Nonextensive Tsallis Kinetics // Solar System Research. 2021. V. 55. № 2. P. 132-149.

Kumar A., Sutar D.L., Pensia R.K., Sharma S. Effect of fine dust particles and finite electron inertia of rotating magnetized plasma // AIP Conf. Proc. 2018. V.1953. № 1. P. 060036 (1-4).

Kumar A., Sutar D. L., Pensia R K. Jeans instability of a monatomic gas in the presence of thermal radiation // Journal of Physics: Conf. Series. 2017. V. 836. P. 012012 (1-3).

***Mihalas* D., *Mihalas* B. W**. On the Propagation of Acoustic Waves in a Radiative Fluid //. The Astrophysical Journal. 1984. V. 283. P. 469-.

Pensia R.K., Sutar D.L., Sharma S. Analysis of Jeans instability of optically thick quantum plasma under the effect of modified Ohms law // AIP Conf. Proc. 2018. V. 1953. № 1. P. 060044 (1-4).

Pier E.A., Krolik J.H. Radiation-pressure-supported obscuring tori around active galactic nuclei // Astrophysical Journal. 1992. V. 399. № 1. P. L23-L26.

Peebles P.J.E., Yu J.T. Primeval Adiabatic Perturbation in an Expanding Universe // Astrophysical Journal. 1970. V.162. P 815-836.

Prajapati R.P., Chhajlani R. K. Gravitational Instability of Dusty Plasma with Radiative Process // Dusty / Complex Plasma: Fundamental and Interdisciplinary Proceedings, Volume 1397. AIP Conference Proceedings. 2011. V. 1397. P. 267-268.

Prajapati R.P., Sharma P.K., Sanghvi R.K., Chhajlani R.K. Jeans instability of self-gravitating magnetized strongly coupled plasma // Journal of Physics: Conference Series. 2012. V. 365, P. 012040 (1-4).

Prajapati R.P., Bhakta S. Influence of dust charge fluctuation and polarization force on radiative condensation instability of magnetized gravitating dusty plasma // Physics Letters A. 2015. V. 379. № 42. P. 2723-2729.

Silk J. Fluctuations in the Primordial Fireball // Nature. 1967. V. 215. № 5106. P. 1155-1156.

Silk J. Cosmic Black-Body Radiation and Galaxy Formation // The Astrophysical Journal. 1968. V. 151. P. 459-471.

Shaikh S., Khan A., Bhatia P.K. Jeans’ gravitational instability of a thermally conducting plasma. // Physics Letters A. 2008. V. 372. № 9. P. 1451-1457.

Sharma R.C. Gravitational instability of a rotating plasma // Astrophysics and Space Science. 1974. V. 29. P. L1-L4.

Sharma R.C., Patidar A. Effect of ion radiative cooling on Jeans instability of partially ionized dusty plasma with dust charge fluctuation // Physics of plasmas. 2017. V. 24. P. 013705 (1-13).

Sharma R.C., Singh B. Gravitational instability of a rotating and partially-ionized plasma in the presence of variable magnetic field // Astrophys. Space Sci. 1988. V. 143. P.233-239.

Thompson T.A., Quataert E., Murray N. Radiation Pressure-supported Starburst Disks and Active Galactic Nucleus Fueling // The Astrophysical Journal. 2005. V. 630. № 1. P. 167-185.

Tsintsadze N.L., Chaudhary R., Shah H.A., Murtaza G. Jeans instability in a magneto-radiative dusty plasma // Journal of Plasma Physics. 2008. V. 74 № 06. P. 847-853.

Vaghela D.S., Shrivastava H.S.P. Magnetogravitational instability of a rotating homogeneous gas cloud with radiation // Czechoslovak Journal of Physics. 1994. V. 44. № 10. P. 905-911.

Vranješ J. Gravitational instability of a quasi-homogeneous plasma cloud with radiation // Astrophysics and Space Science. 1990. V. 173. № 2. P. 293-298.

Vranješ J., Čadež, V. Gravitational instability of a homogeneous gas cloud with radiation // Astrophysics and Space Science. 1990. V. 164. № 2. P. 329-331.

Weinberg S. Entropy Generation and the Survival of Protogalaxies in an Expanding Universe // Astrophysical Journal. 1971. V. 168. P.175-194.

Оглавление