



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 26 за 2022 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Ю.А. Повещенко, М.Н. Колева,
О.Р. Рагимли, В.О. Подрыга,
П.И. Рагимли

О сходимости разностных
схем метода опорных
операторов для ротационных
операций векторного анализа
на тетраэдрических сетках

Статья доступна по лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: О сходимости разностных схем метода опорных операторов для ротационных операций векторного анализа на тетраэдрических сетках / Ю.А. Повещенко [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 26. 19 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2022-26>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-26>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

**Ю.А. Повещенко, М.Н. Колева, О.Р. Рагимли,
В.О. Подрыга, П.И. Рагимли**

**О сходимости разностных схем
метода опорных операторов
для ротационных операций
векторного анализа
на тетраэдрических сетках**

Москва — 2022

Повещенко Ю.А., Колева М.Н., Рагимли О.Р., Подрыга В.О., Рагимли П.И.

О сходимости разностных схем метода опорных операторов для ротационных операций векторного анализа на тетраэдрических сетках

Предложен один подход к описанию метрических свойств нерегулярной сетки для дискретизации повторных ротационных операций векторного анализа (rot rot) применительно к моделированию магнитных и электрических полей. На основе метода опорных операторов и используемой сеточной метрики построены интегрально-согласованные операции векторного анализа rot, div, grad, необходимые для получения оценок сходимости разностных схем для повторных ротационных операций, а также решения физических задач с разрывной магнитной вязкостью, диэлектрической проницаемостью или тепловым сопротивлением среды. На гладких решениях модельной магнитостатической задачи на тетраэдрической сетке с первым порядком точности в среднеквадратичном смысле доказана сходимость построенных разностных схем с нулевым собственным значением спектральной задачи. На нерегулярную тетраэдрическую сетку не накладывается при этом никаких ограничений, кроме ее невырожденности.

Ключевые слова: самогравитация, магнитогидродинамические силы, метод опорных операторов, математическое моделирование.

Poveshchenko Yu.A., Koleva M.N., Rahimly O.R., Podryga V.O., Rahimly P.I.

On convergence of difference schemes of support operator method for rotational operations of vector analysis on tetrahedral meshes

One approach to the description of the metric properties of an irregular grid is proposed for discretizing repeated rotational operations of vector analysis (rot rot) as applied to modeling the magnetic and electric fields. On the basis of the support operator method and the used grid metric, integrally consistent vector analysis operations rot, div, grad are constructed that are necessary to obtain convergence estimates for difference schemes for repeated rotational operations, as well as solving physical problems with discontinuous magnetic viscosity, dielectric permeability or thermal resistance of a medium. On smooth solutions of the model magnetostatic problem on a tetrahedral grid with first order of accuracy in the mean-square sense, the convergence of the constructed difference schemes with zero eigenvalue of the spectral problem is proved. At the same time, no restrictions are imposed on an irregular tetrahedral mesh, except for its non-degeneracy.

Keywords: self-gravitation, magnetohydrodynamic forces, support operator method, mathematical modeling.

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного фонда Болгарии, проект № 20-51-18004.

Funding: Work was funded by Russian Foundation for Basic Research (RFBR) and National Science Foundation of Bulgaria (NSFB), project number 20-51-18004.

1. Введение

Метод опорных операторов (МОО) [1-3] при построении разностных схем используется для согласованной в смысле некоторых интегральных тождеств аппроксимации сопряженных операций векторного анализа (div , grad , rot и т.п.) и их комбинаций, необходимых для численного моделирования задач математической физики. МОО позволил построить разностные схемы на нерегулярных сетках для многих уравнений из этого класса, в том числе и нелинейных, в частности, с выполнением принципа полной консервативности [4]. Вопросы исследования и обоснования этих схем менее разработаны. В данной работе на классических решениях модельной магнитостатической задачи на тетраэдрических нерегулярных сетках доказана сходимость разностных схем МОО для повторных ротационных операций векторного анализа (rot rot) с нулевым собственным значением спектральной задачи. Все уравнения линейны, и более того – с постоянными коэффициентами. Такой выбор объясняется стремлением выделить проблемы, связанные исключительно с нерегулярностью сетки, и показать общность подходов к их решению. Сходимость доказывается на геометрическом уровне, т.е. в зависимости от степени согласования геометрии сетки и ее метрических свойств с шаблонными функционалами, определяющими конкретный вид разностной схемы. При этом предполагается достаточная гладкость решения исходной дифференциальной задачи.

Рассматриваемые разностные схемы, вообще говоря, не аппроксимируют уравнений в локальном смысле, поэтому доказательство сходимости возможно после анализа структуры погрешности аппроксимации. Исследование этого вопроса приводит к расщеплению пространства векторных сеточных функций в ортогональную прямую сумму подпространств потенциальных и вихревых. Применительно к разностной схеме МОО для магнитостатической задачи разностный ротор ошибки вычисления циркуляций равен нулю. Следовательно, эта ошибка есть разностный градиент некоторой сеточной функции $\text{grad } \xi$. Норма циркуляционной ошибки $\text{grad } \xi$ определяется энергией метрического оператора сетки G [5]. Действие метрического оператора G на площади граней ячеек \vec{S} , в свою очередь, согласовано с размерами ячеек (расположением центров тяжести ячеек, граней и ребер). Вводится разложение пространства сеточных векторных функций в ортогональную прямую сумму подпространств потенциальных и вихревых полей таким образом, что ошибка вычисления циркуляций является потенциальной функцией.

Таким образом, в настоящей работе на достаточно гладких решениях дифференциальной задачи на тетраэдрических сетках с первым порядком точности в среднеквадратичном смысле доказана сходимость разностных схем МОО для повторных ротационных операций (rot rot) с нулевым собственным

значением спектральной задачи. На тетраэдрическую сетку не накладывается никаких ограничений, кроме ее невырожденности.

2. Метрические сетки метода опорных операторов с ковариантным представлением скалярного произведения

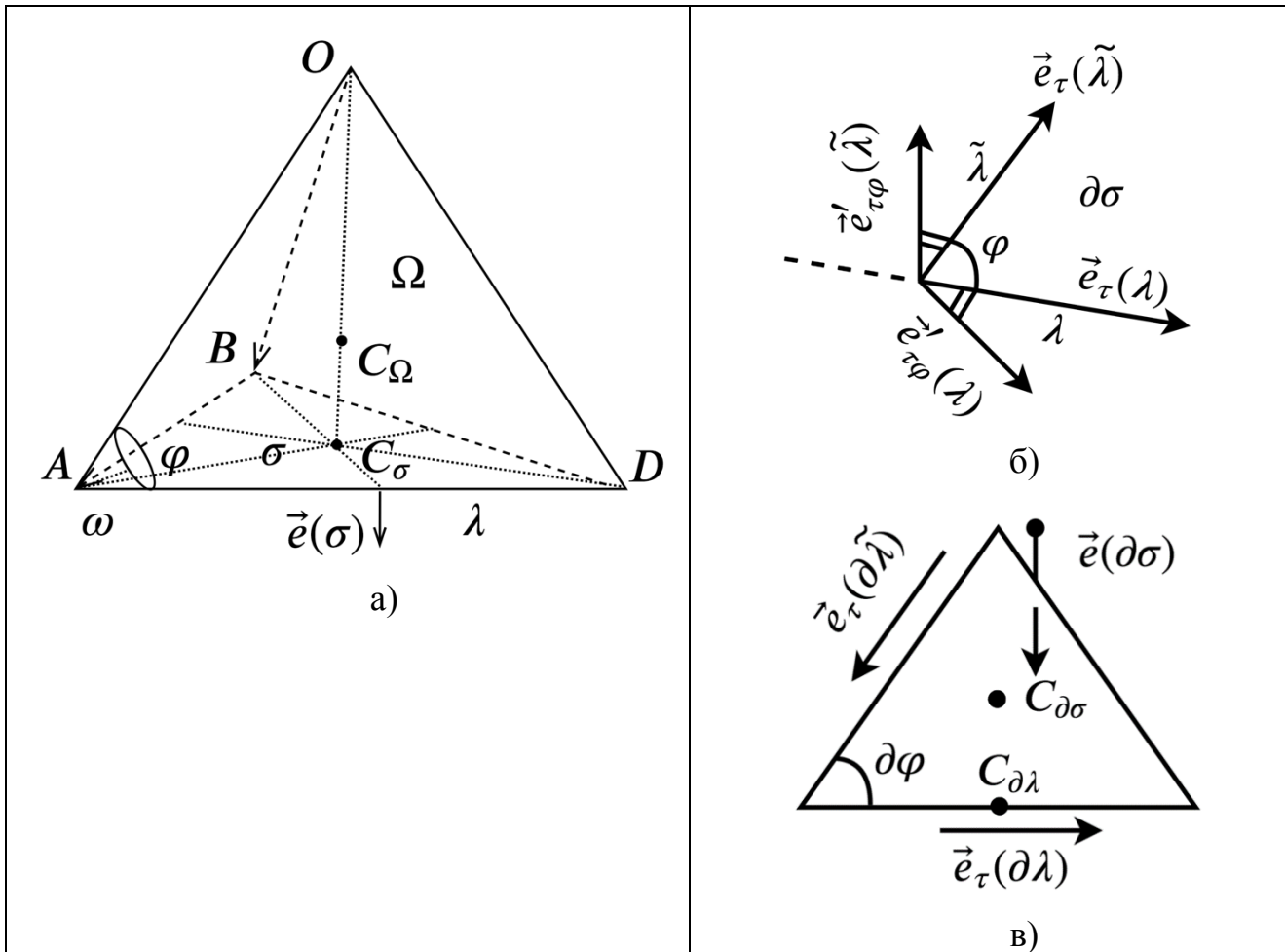


Рис. 1. Ячейки сетки: а) объемная тетраэдрическая ячейка сетки; б) к расчету поверхностной аппроксимации вектора Пойнтинга; в) расчет циркуляции магнитного поля на элементе контура граничной грани $C_{\partial\sigma}C_{\partial\lambda}$, $s_{\sigma}(\lambda) = -1$, $s_{\partial\sigma} = -1$, ячейка $\partial\Omega$ находится под гранью $\partial\sigma$.

Сетки такого типа [1, 5] состоят из ячеек (Ω), образованных узлами (ω) и гранями (σ) (см. Рис. 1а). Узлам $\omega(\Omega)$, образующим ячейку Ω , соответствуют базисы $\varphi(\Omega)$ в этой ячейке, состоящие из единичных нормалей $\vec{e}(\sigma)$ к граням σ , образующим базис. Метрическая калибровка разностной сетки состоит в выборе объемов базисов $V_{\varphi} > 0$ с естественным условием нормировки $\sum_{\varphi(\Omega)} V_{\varphi} = V_{\Omega}$. Компоненты напряженности магнитного поля будем относить к

сетке $(\sigma).(\varphi)$, состоящей из граней σ с нормальными к ним $\vec{e}(\sigma)$, упорядоченными в систему локальных базисов (φ) .

Введем также сеточное скалярное произведение $(h_1, h_2)_\sigma = \sum_{\sigma} V_\sigma h_1(\sigma) h_2(\sigma)$ с весом $V_\sigma = \sum_{\varphi(\sigma)} V_\varphi > 0$, понимаемым как пригранный объем. Скалярное произведение $\int_O (\vec{h}, \vec{g}) dV$ в области O аппроксимируется на сетке $(\sigma).(\varphi)$ ковариантным представлением сеточного скалярного произведения

$$(\vec{h}, \vec{g}')_\sigma = \sum_{\varphi} V_\varphi \sum_{\sigma(\varphi), \tilde{\sigma}(\varphi)} Gr'_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) h'(\tilde{\sigma}) g'(\sigma).$$

Здесь $\vec{h}(\sigma) = 1/V_\sigma \sum_{\varphi(\sigma)} V_\varphi \sum_{\tilde{\sigma}(\varphi)} Gr'_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) h'(\tilde{\sigma})$, или в операторной форме $\vec{h} = G h'$.

Таким образом, на сетке $(\sigma).(\varphi)$ введен самосопряженный положительно определенный метрический сеточный оператор $G: (\sigma) \rightarrow (\sigma)$, $G = G^* > 0$, задаваемый семейством базисных матриц Грамма $Gr'_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) = (\vec{e}'_\varphi(\sigma), \vec{e}'_\varphi(\tilde{\sigma}))$. В этих матрицах $\vec{e}'_\varphi(\sigma)$ – взаимные (контравариантные) в локальных базисах φ вектора по отношению к исходным (ковариантным) нормальным $\vec{e}(\sigma)$ к граням σ . Этот оператор переводит сеточный аналог ковариантного представления $h'(\sigma)$, называемый сопряженным представлением векторного поля \vec{h} , в сеточное контравариантное представление $\vec{h}(\sigma)$, понимаемое нами как представление в среднем. Вообще базисы φ создаются системой исходных (ковариантных) ортов \vec{e} . Базисный объем (см. [1]) дается формулой $V_\varphi = \frac{1}{6} |\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|$ для треугольных $2d$ ячеек Ω (\vec{e}_1 и \vec{e}_2 – стороны треугольника, образующие базис φ).

Аналогично для четырехугольной $2D$ ячейки Ω $V_\varphi = \frac{1}{4} |\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|$. В случае $3D$ призм эти значения V_φ умножаются на половины толщин призматических ячеек Ω , содержащих соответствующие трехмерные базисы φ . Для тетраэдрических ячеек Ω выбирается $V_\varphi = \frac{1}{4} V_\Omega$, где $\varphi \in \Omega$. Наконец, для гексаэдрических ячеек Ω , близких к объемным параллелепипедам, полагаем $V_\varphi = \frac{1}{8} V_\Omega$, где $\varphi \in \Omega$.

Все сказанное в разделе 2 непосредственно обобщается на случай неединичных нормалей $\vec{e}(\sigma)$ к граням σ .

Определим теперь разностную дивергенцию $DIV : (\sigma) \rightarrow (\Omega)$ по формуле:

$$DIV \vec{g} = \frac{1}{V_{\Omega}} \sum_{\sigma \in \Omega} s_{\sigma}(\Omega) g'(\sigma) S(\sigma). \quad (2.1)$$

Здесь $S(\sigma)$ – удельная площадь грани; т.е. площадь грани σ , деленная на длину орта $\vec{e}(\sigma)$, равную $\sqrt{(\vec{e}(\sigma), \vec{e}(\sigma))}$. $s_{\sigma}(\Omega)$ – знаковая функция, равная единице, если нормаль $\vec{e}(\sigma)$ для ячейки Ω внешняя, и минус единице – наоборот.

Введем скалярное произведение в ячейках

$$(F_1, F_2)_{\Omega} = \sum_{\Omega} V_{\Omega} F_{1\Omega} F_{2\Omega}.$$

Для области O , ограниченной поверхностью Σ , моделируя интегральное соотношение

$$\int_O grad F \vec{h} dV + \int_O F div \vec{h} dV = \int_{\Sigma} F \vec{h} d\vec{S},$$

определим разностный оператор $GRAD : (\Omega) \rightarrow (\sigma)$ из тождества

$$(\overline{GRADF}, \vec{h}')_{\sigma} + (F, DIV \vec{h})_{\Omega} = \sum_{\partial\sigma} s_{\partial\sigma} F_{\partial\sigma} \vec{h}'(\partial\sigma) S(\partial\sigma). \quad (2.2)$$

Здесь для граничной грани $\partial\sigma$: $S(\partial\sigma)$ – ее удельная площадь. $s_{\partial\sigma}$ – единица, если нормаль $\vec{e}(\partial\sigma)$ – внешняя к области O . Наконец, $F_{\partial\sigma}$ – сеточная функция F на граничной грани $\partial\sigma$. Подчеркнем, что F и $\vec{h} = G\vec{h}'$ здесь, вообще говоря, – любые сеточные функции. Отсюда на грани σ имеем

$$\overline{GRADF} = \frac{\Delta F}{h'}, \quad h' = \frac{V_{\sigma}}{S(\sigma)},$$

где

$$\Delta F = - \sum_{\Omega(\sigma)} s_{\sigma}(\Omega) F_{\Omega} + s_{\partial\sigma} F_{\partial\Omega}.$$

Второе слагаемое в приращении ΔF через грань σ существует, если эта грань граничная.

3. Дискретная магнитогидродинамическая эволюция электромагнитной энергии

3.1. Сетки метода опорных операторов для описания электромагнитных процессов

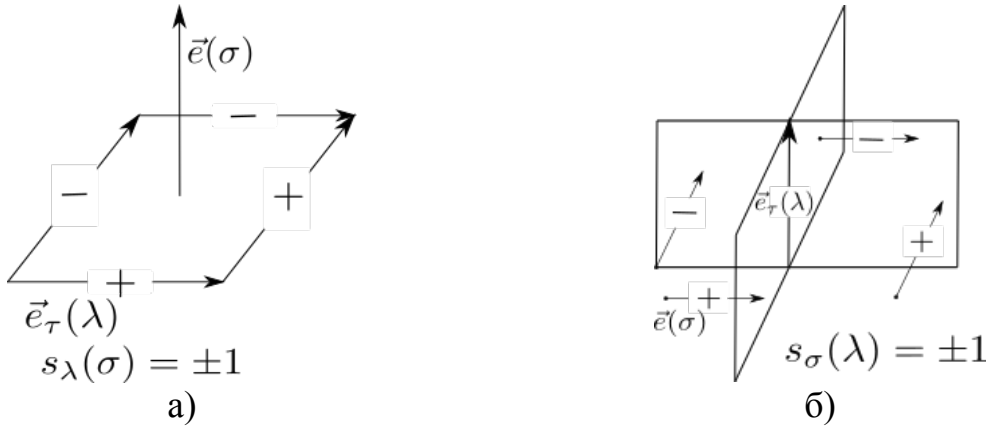


Рис. 2. Циркуляционное согласование граней и ребер сетки

Каждому ориентированному ребру λ с ортом $\vec{e}_\tau(\lambda)$ поставим в соответствие его удельную длину $h_\tau(\lambda) > 0$, т.е. длину ребра λ , деленную на длину орта $\vec{e}_\tau(\lambda)$. Также каждому поверхностному базису $\partial\varphi$ поставим в соответствие его часть площади $\vec{S}_{\partial\varphi}$ граничной грани, так что $\vec{S}_{\partial\sigma} = \sum_{\partial\varphi(\partial\sigma)} \vec{S}_{\partial\varphi}$. На граничных ребрах $\partial\lambda$ определим также величины $S_{\partial\lambda} = \sum_{\partial\varphi(\partial\lambda)} S_{\partial\varphi}$ и $h'_\Sigma(\partial\lambda) = S_{\partial\lambda} / h_\tau(\partial\lambda)$. Аналогично п. 2 рассмотрим сетку $(\lambda).(\varphi)$, состоящую из ребер λ с тангенциалами к ним $\vec{e}_\tau(\lambda)$, упорядоченными в систему локальных базисов (φ) . К этой сетке с метрическим оператором G_τ в дальнейшем будем относить компоненты напряженности электрического поля \vec{e} . Для сетки $(\lambda).(\varphi)$ введем скалярное произведение: $(e_1, e_2)_\lambda = \sum_\lambda V_\lambda e_1(\lambda) e_2(\lambda)$ с весом $V_\lambda = \sum_{\varphi(\lambda)} V_\varphi > 0$, понимаемым как приреберный объем. Скалярное произведение $\int_O (\vec{e}, \vec{b}) dV$ в области O аппроксимируется как

$$(\vec{e}, \vec{b})_\lambda = \sum_\varphi V_\varphi \sum_{\tilde{\lambda}(\varphi), \lambda(\varphi)} Gr'_{\tau\varphi}(\lambda, \tilde{\lambda}) e'(\tilde{\lambda}) b'(\lambda).$$

Здесь $\vec{e}(\lambda) = 1/V_\lambda \sum_{\varphi(\lambda)} V_\varphi \sum_{\tilde{\lambda}(\varphi)} Gr'_{\tau\varphi}(\lambda, \tilde{\lambda}) e'(\tilde{\lambda})$. Или в операторной форме $\vec{e} = G_\tau e'$. Таким образом, на сетке $(\lambda).(\varphi)$ введен самосопряженный

положительно определенный метрический сеточный оператор $G_\tau : (\lambda) \rightarrow (\lambda)$, $G_\tau = G_\tau^* > 0$, задаваемый семейством базисных матриц Грамма $G_{r_{\tau\varphi}}'(\lambda, \tilde{\lambda}) = (\vec{e}'_{\tau\varphi}(\lambda), \vec{e}'_{\tau\varphi}(\tilde{\lambda}))$. В этих матрицах $\vec{e}'_{\tau\varphi}(\lambda)$ – взаимные (контравариантные) в локальных базисах φ орты по отношению к исходным (ковариантным) тангенциалам $\vec{e}_\tau(\lambda)$ к ребрам λ . Индексом τ здесь и далее помечаются величины, отнесенные к сетке $(\lambda).(\varphi)$.

Теперь определим разностный оператор ротор, действующий на компоненты напряженности электрического поля \vec{e} , как $ROD : (\lambda) \rightarrow (\sigma)$ по формуле (см. Рис. 2а), аппроксимирующей теорему Стокса:

$$(ROD \vec{e})' = 1/S(\sigma) \sum_{\lambda(\sigma)} s_\lambda(\sigma) e'(\lambda) h_\tau(\lambda). \quad (3.1)$$

Здесь $S(\sigma)$ – удельная площадь грани σ , знаковые функции $s_\lambda(\sigma) = \pm 1$ и $s_\sigma(\lambda) = \pm 1$ ($s_\lambda(\sigma) = s_\sigma(\lambda)$) определены, как указано на Рис. 2. Аналогично Рис. 2 будем считать граничную знаковую функцию $s_{\partial\lambda(\partial\varphi)} = +1$, если вращение в направлении от орта $\vec{e}_\tau(\partial\lambda)$ к его дополняющему (в поверхностном базисе $\partial\varphi(\partial\sigma)$) дает направление внешней нормали к области O . В противном случае $s_{\partial\lambda(\partial\varphi)} = -1$.

Наряду с сеточными компонентами магнитного поля $\vec{h}'(\sigma)$ и $\vec{h}(\sigma)$ на гранях сетки $(\sigma).(\varphi)$ в области O определим также поверхностное тангенциальное магнитное поле \vec{h}_τ с компонентами $\vec{h}'_\tau(\partial\lambda)$ (аналогично электрическому полю $e'(\partial\lambda)$), заданное на граничных ребрах $\partial\lambda$.

Далее для области O с поверхностью Σ воспользуемся интегральным соотношением

$$\int_O \vec{e} \operatorname{rot} \vec{h} dV - \int_O \vec{h} \operatorname{rot} \vec{e} dV = \int_\Sigma [\vec{h}_\tau \times \vec{e}] d\vec{s} \quad (3.2)$$

и определим разностный оператор ротор, действующий на компоненты напряженности магнитного поля \vec{h} , как $ROG : ((\sigma) \cup (\partial\lambda)) \rightarrow (\lambda)$ из разностного аналога этого соотношения

$$\left(e', \overline{ROG \vec{h}} \right)_\lambda - \left(\vec{h}, (ROD \vec{e})' \right)_\sigma = \sum_{\partial\lambda} e'(\partial\lambda) h_\tau(\partial\lambda) (\vec{h} d\vec{h})_\Sigma(\partial\lambda). \quad (3.3)$$

Элемент поверхностной магнитной циркуляции, поперечной к ребру $\partial\lambda$ (см. Рис. 1б), определяется из аппроксимации смешанного произведения векторов $[\vec{h}_\tau \times \vec{e}] d\vec{s}$ как

$$\left(\vec{h}d\vec{h}\right)_{\Sigma}(\partial\lambda) = -1/h_{\tau}(\partial\lambda) \sum_{\partial\varphi(\partial\lambda)} \frac{s_{\partial\lambda(\partial\varphi)} \cdot S_{\partial\varphi}}{\sqrt{\det \|Gr_{\tau\partial\varphi}\|}} \vec{h}'_{\tau}(\partial\tilde{\lambda}) \Big|_{\partial\tilde{\lambda}(\partial\varphi) \neq \partial\lambda}. \quad (3.4)$$

Здесь определитель матрицы Грамма $Gr_{\tau\partial\varphi}$ в поверхностном базисе $\partial\varphi$, состоящем из ортов $\vec{e}_{\tau}(\partial\lambda)$ и $\vec{e}_{\tau}(\partial\tilde{\lambda})$, определяется как

$$\begin{aligned} \det \|Gr_{\tau\partial\varphi}\| &= \\ &= (\vec{e}_{\tau}(\partial\lambda), \vec{e}_{\tau}(\partial\lambda)) \cdot (\vec{e}_{\tau}(\partial\tilde{\lambda}), \vec{e}_{\tau}(\partial\tilde{\lambda})) \cdot \sin^2 \overline{e_{\tau}(\partial\lambda) e_{\tau}(\partial\tilde{\lambda})} \Big|_{\partial\lambda(\partial\varphi) \neq \partial\tilde{\lambda}(\partial\varphi)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Также здесь использовано

$$\left[\vec{e}'_{\tau\varphi}(\lambda) \times \vec{e}'_{\tau\varphi}(\tilde{\lambda}) \right] = \sin(\pi - \varphi) / \left\{ |\vec{e}_{\tau}(\lambda)| \cdot |\vec{e}_{\tau}(\tilde{\lambda})| \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \right\} = 1 / \sqrt{\det \|Gr_{\tau\partial\varphi}\|}$$

при $\varphi = \overline{e_{\tau}(\partial\lambda) e_{\tau}(\partial\tilde{\lambda})}$.

Наконец, искомый оператор ROG , сопряженный базовому оператору ROD , определится из выше приведенного разностного аналога интегрального соотношения как

$$\overline{ROG\vec{h}} = 1/S'_{\tau} \left[\sum_{\sigma(\lambda)} s_{\sigma}(\lambda) \vec{h}(\sigma) h'(\sigma) + (\vec{h}d\vec{h})_{\Sigma}(\partial\lambda) \right], \quad S'_{\tau} = V_{\lambda} / h_{\tau}. \quad (3.6)$$

На граничных ребрах $\partial\lambda = \{\partial_1\lambda | \partial_0\lambda\}$ задается поверхностная магнитная циркуляция $(\vec{h}d\vec{h})_{\Sigma}(\partial_1\lambda)$ – первая краевая задача (замыкающая контур вокруг ребра $\partial_1\lambda$ в операторе ROG), или поверхностная электрическая циркуляция $e'(\partial_0\lambda) \cdot h_{\tau}(\partial_0\lambda)$ вдоль ребра $\partial_0\lambda$ (замыкающая контуры граней $\sigma(\partial_0\lambda)$ в операторе ROD). Оператор $ROD ROG : (\sigma) \rightarrow (\sigma)$, такой что $ROD ROG = (ROD ROG)^* \geq 0$, оказывается при этом самосопряженным и неотрицательным согласно (3.3). Аналогичными свойствами самосопряженности и неотрицательности обладает оператор $ROG ROD : (\lambda) \rightarrow (\lambda)$. Очевидны также свойства операторов $DIV ROD \vec{e} = 0$ в ячейках сетки Ω , аппроксимирующих континуальные операции векторного анализа $div rot \vec{e} = 0$.

3.2. Метрическое обоснование аппроксимаций интегрально-согласованных операций rot на тетраэдрических сетках

Исследуем аппроксимацию формулы (3.6) для оператора $\overline{ROG\vec{h}}$, полученную из интегрального тождества (3.3).

В частности, на тетраэдрических сетках определим вид магнитного циркуляционного контура вокруг ребра λ и его замкнутость (на граничных гранях $\partial\sigma$ с учетом аппроксимации вектора Пойнтинга). Это необходимо как для обоснования сходимости разностных схем для повторных операций векторного анализа (rot rot) [1], так и для корректной записи циркуляционных балансов для потоков напряженностей электрического поля в уравнениях Максвелла [5].

Рассмотрим контур магнитной циркуляции вокруг ребра λ с примыкающими к нему тетраэдрами (см. Рис. 1а). Центрами ячеек, граней и ребер (для тетраэдра это центры тяжести) обозначим

$$\vec{c}_\Omega = \frac{1}{4} \sum_{\omega(\Omega)} \vec{r}_\omega, \quad \vec{c}_\sigma = \frac{1}{3} \sum_{\omega(\sigma)} \vec{r}_\omega \quad \text{и} \quad \vec{c}_\lambda = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\lambda)} \vec{r}_\omega.$$

Здесь \vec{r}_ω – радиус-вектора узлов сетки соответствующих вершин тетраэдра. Выбирая начало координат в вершине O (Рис. 1а), например, будем иметь

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC}_\Omega &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}), \quad \overrightarrow{OC}_\sigma = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}), \\ \overrightarrow{OC}_\lambda &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}), \quad \overrightarrow{C}_\Omega \overrightarrow{C}_\sigma = \overrightarrow{C}_\sigma - \overrightarrow{C}_\Omega. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} S'_\tau \overline{ROG\vec{h}} - (\vec{h} d\vec{h})_\Sigma(\partial\lambda) &= \sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) \vec{h}(\sigma) h'(\sigma) = \sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) (G\vec{h}')(\sigma) h'(\sigma) = \\ &= \sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) \frac{1}{V_\sigma} \sum_{\varphi(\sigma)} V_\varphi \sum_{\tilde{\sigma}(\varphi)} G r'_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) h'(\tilde{\sigma}) \frac{V_\sigma}{S(\sigma)} = \\ &= \sum_{\sigma(\lambda)} \frac{s_\sigma(\lambda)}{S(\sigma)} \sum_{\Omega(\sigma)} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} V_\varphi \vec{e}'_\varphi(\sigma) \cdot \vec{h}_\varphi = \\ &= \sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) \sum_{\Omega(\sigma)} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} h_{\Omega \perp \sigma} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} \vec{e}'_{1\varphi}(\sigma) \cdot \vec{h}_\varphi. \end{aligned}$$

Здесь $\vec{h}_\varphi = \sum_{\tilde{\sigma}(\varphi)} h'(\tilde{\sigma}) \vec{e}'_\varphi(\tilde{\sigma})$. $h_{\Omega \perp \sigma}$ – высота в тетраэдрической ячейке Ω , опущенная на грань σ . Под $\vec{e}'_{1\varphi}(\sigma)$ понимается взаимный (контравариантный) в локальном базисе φ вектор по отношению к исходной (ковариантной) единичной нормали к грани $\vec{e}_1(\sigma)$. Очевидно также тождество (см. Рис. 1а)

$$\frac{1}{12} h_{\Omega \perp \sigma} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} \vec{e}'_{1\varphi}(\sigma) = s_\sigma(\Omega) \overrightarrow{C}_\Omega \overrightarrow{C}_\sigma.$$

В силу этого, вводя аппроксимацию циркуляции магнитного поля на элементе контура, соединяющего центры тяжести ячейки Ω и грани σ ,

$$s_{\sigma}(\Omega) \left(\int_{C_{\Omega}}^{C_{\sigma}} \vec{h} d\vec{e} \right)_{\Delta} = \frac{1}{12} h_{\Omega \perp \sigma} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} \vec{e}'_{1\varphi}(\sigma) \vec{h}_{\varphi},$$

будем иметь

$$S'_{\tau} \overline{ROG\vec{h}} - (\vec{h} d\vec{h})_{\Sigma}(\partial\lambda) = \sum_{\sigma(\lambda)} s_{\sigma}(\lambda) \sum_{\Omega(\sigma)} s_{\sigma}(\Omega) \cdot \left(\int_{C_{\Omega}}^{C_{\sigma}} \vec{h} d\vec{e} \right)_{\Delta}.$$

Изучим теперь согласованную с вектором Пойнтинга (см. (3.4)) аппроксимацию циркуляции магнитного поля на элементе контура поверхностной грани $\partial\sigma$, соединяющего центры тяжести этой грани и середины ребра $\partial\lambda(\partial\sigma)$ (см. Рис. 1в). Очевидно тождество (см. также (3.4))

$$s_{\sigma}(\lambda) s_{\partial\sigma} \overline{C_{\partial\sigma} C_{\partial\lambda}} = -1/h_{\tau}(\partial\lambda) \sum_{\partial\varphi(\partial\lambda) \in \partial\sigma} \frac{s_{\partial\lambda(\partial\varphi)} \cdot S_{\partial\varphi}}{\sqrt{\det \|Gr_{\tau\partial\varphi}\|}} \vec{e}_{\tau}(\partial\tilde{\lambda}) \Big|_{\partial\tilde{\lambda}(\partial\varphi) \neq \partial\lambda}.$$

Здесь вектор $\overline{C_{\partial\sigma} C_{\partial\lambda}}$ отложен от центра тяжести $C_{\partial\sigma}$ треугольной граничной грани $\partial\sigma$ к середине $C_{\partial\lambda}$ граничного ребра $\partial\lambda(\partial\sigma)$. $\partial\varphi$ – поверхностные базисы внутри грани $\partial\sigma$. $S_{\partial\varphi} = \frac{1}{3} S_{\partial\sigma \supset \partial\varphi}$, $S_{\partial\sigma \supset \partial\varphi}$ – площадь треугольной грани $\partial\sigma$, содержащей поверхностный базис $\partial\varphi$. Аналогично $s_{\sigma}(\Omega)$ введена граничная знаковая функция $s_{\partial\sigma}$ равная единице, если нормаль $\vec{e}(\partial\sigma)$ – внешняя к аппроксимации области O , и минус единице – наоборот.

В силу этого, вводя аппроксимации циркуляции магнитного поля на элементе контура $\overline{C_{\partial\sigma} C_{\partial\lambda}}$ как

$$s_{\sigma}(\lambda) s_{\partial\sigma} \left(\int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \vec{h} d\vec{e} \right)_{\Delta} = \frac{-1}{h_{\tau}(\partial\lambda)} \sum_{\partial\varphi(\partial\lambda) \in \partial\sigma} \frac{s_{\partial\lambda(\partial\varphi)} \cdot S_{\partial\varphi}}{\sqrt{\det \|Gr_{\tau\partial\varphi}\|}} \vec{h}'_{\tau}(\partial\tilde{\lambda}) \Big|_{\partial\tilde{\lambda}(\partial\varphi) \neq \partial\lambda},$$

будем иметь

$$\begin{aligned}
S'_\tau \overline{ROG\vec{h}} &= \sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) \sum_{\Omega(\sigma)} s_\sigma(\Omega) \left(\int_{C_\Omega}^{C_\sigma} \vec{h} d\vec{e} \right)_\Delta + \\
&+ \sum_{\partial\sigma(\partial\lambda)} s_\sigma(\lambda) s_{\partial\sigma} \left(\int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \vec{h} d\vec{e} \right)_\Delta.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Видим, что аппроксимация операции $S'_\tau \overline{ROG\vec{h}}(\lambda)$ (см. (3.6)) состоит из циркуляций магнитного поля на замкнутом контуре вокруг ребра λ , соединяющем центры тяжести ячеек и граней, либо, если грань $\partial\sigma$ оказывается граничной, то соединяющем центр тяжести такой грани с серединой ребра $\partial\lambda(\partial\sigma)$. Очевидно, также $\overline{ROG\vec{h}} \equiv 0$ при $\vec{h} = const$ в силу замкнутости рассмотренного выше контура вокруг ребра λ .

4. Сходимость разностных схем метода опорных операторов для ротационных операций векторного анализа на тетраэдрических сетках

4.1. Постановка задачи

На достаточно гладких решениях рассмотрим аппроксимацию разностными схемами метода опорных операторов модельную задачу

$$rot \vec{H} = \vec{f}(\vec{r}), \tag{4.1}$$

$$\vec{H} = rot \vec{E} \tag{4.2}$$

с соленоидальным магнитным полем ($div \vec{H} = 0$), для которого с необходимостью [6] существует некоторое поле \vec{E} , в том числе выполнено (4.2). Предполагаются также явно заданными некоторое распределение плотностей токов $\vec{f}(\vec{r})$, так что выполнено (4.1), и граничные тангенциальные компоненты магнитного поля $\vec{H}_\tau|_\Sigma$. Очевидно, “электрическое” поле \vec{E} определяется с точностью до константы, и однородная спектральная задача (с $\vec{f}(\vec{r}) = 0$ и $\vec{H}_\tau|_\Sigma = 0$) обладает нулевым собственным значением.

Для соленоидальности функции \vec{f} (т.е. $div \vec{f} = 0$) необходимо и достаточно [6] существование функции \vec{F} , т.ч. $\vec{f} = rot \vec{F}$. Для уравнений (4.1)-(4.2) рассмотрим краевую задачу с заданными на границе Σ области O тангенциальными компонентами магнитного поля

$$\overrightarrow{H}_\tau \Big|_\Sigma = \overrightarrow{F}_\tau \Big|_\Sigma. \quad (4.3)$$

Также, очевидно, для любого замкнутого контура Γ , ограничивающего поверхности Σ_Γ , будет выполнено

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{H} d\vec{h} = \int_{\Sigma_\Gamma} \overrightarrow{f} d\vec{S}.$$

Разностная схема метода опорных операторов будет иметь вид

$$V_\lambda \overline{ROG\vec{h}} = f_\lambda, \quad (4.4)$$

$$\vec{h}' = (ROD\vec{e})'. \quad (4.5)$$

Здесь и далее при исследовании сходимости разностной схемы (4.4), (4.5) удельные длины ребер $h_\tau(\lambda)$ и площадей граней $S(\sigma)$ считаются единичными (см. (2.1), (3.1)).

Электрический поток f_λ через площадку $\vec{S}_\lambda = \bigcup_{(\Omega(\lambda), \sigma(\lambda) \in \Omega)} \vec{S}_{\Omega\sigma\lambda}$,

пронизываемую вектором $\vec{e}_\tau(\lambda)$, представим в виде

$$\begin{aligned} f_\lambda &= \sum_{\Omega(\lambda)} \sum_{\sigma(\lambda) \in \Omega} \int_{\vec{S}_{\Omega\sigma\lambda}} \overrightarrow{f}(\vec{r}) d\vec{S} = \\ &= \sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) \sum_{\Omega(\sigma)} s_\sigma(\Omega) \left(\int_{C_\Omega}^{C_\sigma} \overrightarrow{F} d\vec{e} \right) + \sum_{\partial\sigma(\partial\lambda)} s_\sigma(\lambda) s_{\partial\sigma} \left(\int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \overrightarrow{F} d\vec{e} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь $\vec{S}_{\Omega\sigma\lambda}$ – вектор площади треугольника, соединяющего центры тяжести ячейки C_Ω , грани C_σ и ребра C_λ , ориентированный в сторону вектора $\vec{e}_\tau(\lambda)$ (см. Рис. 1а). Равенство (4.6) получено с использованием теоремы Стокса для объединенного контура из треугольников \vec{S}_λ вокруг ребра λ .

В силу рассуждений п. 3.2 (см. также (3.6), (3.7)) можем считать

$$f_\lambda = V_\lambda \overline{ROGF}, \quad (4.7)$$

полагая

$$\overline{F}(\sigma) h'(\sigma) = \sum_{\Omega(\sigma)} s_\sigma(\Omega) \left(\int_{C_\Omega}^{C_\sigma} \overrightarrow{F} d\vec{e} \right), \quad (4.8)$$

$$(\vec{F}d\vec{h})_{\Sigma}(\partial\lambda) = \sum_{\partial\sigma(\partial\lambda)} s_{\sigma}(\lambda) s_{\partial\sigma} \left(\int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \vec{F}d\vec{e} \right). \quad (4.9)$$

В силу условия (4.3) при исследовании сходимости разностной схемы (4.4), (4.5) будем также вместо (3.4) считать

$$(\vec{h}d\vec{h})_{\Sigma}(\partial\lambda) = \sum_{\partial\sigma(\partial\lambda)} s_{\sigma}(\lambda) s_{\partial\sigma} \left(\int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \vec{H}d\vec{e} \right), \quad (4.10)$$

$$\int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \vec{H}d\vec{e} = \int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \vec{F}d\vec{e}. \quad (4.11)$$

4.2. Разрешимость разностной задачи

Исследуем условия разрешимости задачи (4.4), (4.5), (4.11). Введем операцию внутренней ротации $RNG : (\sigma) \rightarrow (\lambda)$ как

$$S'_{\tau} \overline{RNG\vec{h}} = \sum_{\sigma(\lambda)} s_{\sigma}(\lambda) \vec{h}(\sigma) h'(\sigma) = S'_{\tau} \overline{ROG\vec{h}} - (\vec{h}d\vec{h})_{\Sigma}(\partial\lambda),$$

$$S'_{\tau}(\lambda) = V_{\lambda} / h_{\tau}(\lambda), \quad h'(\sigma) = V_{\sigma} / S(\sigma).$$

Очевидно, в силу (3.3)

$$(e', \overline{RNG\vec{h}})_{\lambda} = (\vec{h}, (ROD\vec{e})'_{\sigma}).$$

Однородная система уравнений, соответствующая задаче (4.4), (4.5), (4.11), имеет вид

$$V_{\lambda} \overline{RNG\vec{h}} = 0, \quad \vec{h}' = (ROD\vec{e})'. \quad (4.12)$$

$$(e', \overline{RNG\vec{h}})_{\lambda} = (\vec{h}, (ROD\vec{e})'_{\sigma}) = (G(ROD\vec{e})', (ROD\vec{e})'_{\sigma}) \geq 0.$$

Отсюда видим, что оператор однородной системы $RNG ROD : (\lambda) \rightarrow (\lambda)$ является самосопряженным и неотрицательным. Т.е. решение сопряженной однородной системы обладает свойством $(ROD\vec{e})' = 0$ (например, $\vec{e} = const$). Условие ортогональности с правой частью в (4.4) согласно (3.6) имеет вид

$$\sum_{\lambda} e'(\lambda) [f_{\lambda} - (\vec{h}d\vec{h})_{\Sigma}(\partial\lambda)] = 0,$$

или с учетом (4.7) - (4.11)

$$(\overline{e'}, \overline{RGN\vec{F}})_\lambda = (\overline{F}, (\overline{RODe'})'_\sigma) = 0.$$

Итак, поскольку $(\overline{RODe'})'_\sigma = 0$, то для любого \overline{F} в соленоидальном представлении $\overline{f} = \text{rot}\overline{F}$ в соответствии с (4.8) выполнено условие ортогональности решения однородной сопряженной системы уравнений (4.12) и правой части (4.4) при условии (4.11). Это и является условием разрешимости задачи (4.4), (4.5), (4.11) по матричной теореме Фредгольма [7].

4.3. Точность разностной схемы

Рассмотрим теперь вопрос о точности разностной схемы (4.4), (4.5), (4.11). Интегрируя (4.1) по площадке \overline{S}_λ вокруг ребра λ , находим

$$V_\lambda \overline{ROGH} = f_\lambda,$$

где

$$\overline{H}(\sigma)h'(\sigma) = \sum_{\Omega(\sigma)} s_\sigma(\Omega) \left(\int_{C_\Omega} \overline{H}d\vec{e} \right), \quad (4.13)$$

$$(\overline{H}d\vec{h})_\Sigma(\partial\lambda) = \sum_{\partial\sigma(\partial\lambda)} s_\sigma(\lambda) s_{\partial\sigma} \left(\int_{C_{\partial\sigma}} \overline{H}d\vec{e} \right),$$

и, вычитая из этого уравнения (4.4), получаем

$$V_\lambda \overline{RGN(\overline{H} - \vec{h})} = 0. \quad (4.14)$$

Условия (4.14) означают, что в ячейке Ω существует сеточная функция ξ_Ω , такая, что

$$\overline{H} - \vec{h} = \overline{GRAD\xi} = \frac{\Delta\xi}{h'},$$

и постоянная на граничных гранях $\partial\sigma$, т.е. $\xi_{\partial\sigma} = \text{const}$. Эту константу будем считать равной нулю, $\text{const}=0$. Получим уравнение, которому удовлетворяет функция ξ . Имеем

$$G^{-1}\overline{GRAD\xi} = H' - h', \quad GH' = \overline{H}.$$

Суммируя это равенство по граням ячейки Ω , с учетом $\text{DIV}\vec{h}=0$ (см. (4.5)), получим

$$\text{DIV}\overline{GRAD\xi} = \text{DIV}\overline{H},$$

в силу (2.2) с учетом $\xi_{\partial\sigma} = 0$ имеем

$$(G(\overline{GRAD \xi})', (\overline{GRAD \xi})')_{\sigma} = (G(\overline{GRAD \xi})', H')_{\sigma} \geq 0.$$

Из тождества (2.2) при $\xi_{\partial\sigma} = 0$ для любой разностной соленоидальной функции \overline{RODE} (т.е. $\overline{DIV RODE} = 0$) в силу ее ортогональности к $\overline{GRAD \xi}$ будем иметь

$$\|\overline{GRAD \xi}\|_{\sigma}^2 = (G(\overline{GRAD \xi})', H' - (\overline{RODE})')_{\sigma} \leq \|\overline{GRAD \xi}\|_{\sigma} \cdot \|H - \overline{RODE}\|_{\sigma}.$$

Здесь применительно к (3.1), определяющему $(\overline{RODE})'$, имеем

$$E'(\lambda) h_{\tau}(\lambda) = \int_{\lambda} \overline{E} d\overline{e}, \quad (4.15)$$

и интегралы от точного решения \overline{E} (см. (4.2)) берутся вдоль ориентированных по $\overline{e}_{\tau}(\lambda)$ ребер λ . Под нормами сеточных векторов на гранях σ здесь понимаются $\|X\|_{\sigma} = \sqrt{(GX', X')_{\sigma}}$, а также $\|X\|_{*} = \sqrt{(X, X)_{*}}$, $(X, Y)_{*} = \sum_{\sigma} X(\sigma) \cdot Y(\sigma)$.

Границы спектра самосопряженного положительно определенного оператора $V_{\sigma}G : (\sigma) \rightarrow (\sigma)$, состоящего из матриц Грамма $Gr'_{\phi}(\sigma, \tilde{\sigma})$ во взаимных базисах (см. п.2), при условии невырожденности тетраэдрической сетки, можно оценить как

$$0 < \frac{\gamma_1}{h} (X, X)_{*} \leq (V_{\sigma}G X, X)_{*} \leq \frac{\gamma_2}{h} (X, X)_{*}.$$

Соответствующая оценка для обратного оператора имеет вид

$$0 < \frac{h}{\gamma_2} (X, X)_{*} \leq ((V_{\sigma}G)^{-1} X, X)_{*} \leq \frac{h}{\gamma_1} (X, X)_{*}.$$

Здесь γ_1 и γ_2 являются ограниченными ($O(1)$), не стремящимися к нулю величинами, не зависящими от шага сетки $h > 0$.

Сетку считаем невырожденной, если:

1. Существует параметр $h > 0$, характеризующий подробность разбиения расчетной области O и имеющий смысл линейных размеров элементов сетки.
2. Неудельные размеры элементов сетки (ячеек Ω , граней σ , ребер λ) равномерно оцениваются для всего семейства сеток:

$$a_1 h^3 \leq V_{\Omega} \leq a_2 h^3, \quad b_1 h^2 \leq S(\sigma) \leq b_2 h^2, \quad c_1 h \leq h_{\tau}(\lambda) \leq c_2 h.$$

3. Отношение неударных площадей граней $S(\sigma)$, а также длин ребер $h_\tau(\lambda)$, входящих в один базис φ , равномерно по h не стремится к нулю и ограничено сверху числом $O(1)$.
4. Среди двухгранных и плоских углов ячеек Ω нет очень острых и очень тупых, т.е. все они равномерно по h заключены в пределах от Θ до $\pi - \Theta$ с не стремящимся к нулю углом $\Theta = O(1)$.

Далее получим

$$\begin{aligned} \|\text{GRAD} \xi\|_\sigma^2 &\leq \|H - \text{RODE} \bar{E}\|_\sigma^2 = \\ &= ((H' - (\text{RODE} \bar{E})'), (V_\sigma G)(H' - (\text{RODE} \bar{E})'))_* \leq \frac{h}{\gamma_1} \|(V_\sigma G)(H' - (\text{RODE} \bar{E})')\|_*^2. \end{aligned}$$

На грани σ согласно (4.13) имеем

$$[(V_\sigma G)H'](\sigma) = \bar{H}(\sigma)h'(\sigma) = \sum_{\Omega(\sigma)} s_\sigma(\Omega) [\bar{H}_{C\sigma} \cdot \overline{C_\Omega C_\sigma} + O(h^2)].$$

Здесь $\bar{H}_{C\sigma}$ – магнитное поле решения задачи (4.1), (4.2), (4.11) в центре тяжести C_σ грани σ (см. Рис. 1а).

Согласно (3.1) и (4.15) на грани σ оценим

$$\begin{aligned} (\text{RODE} \bar{E})'(\tilde{\sigma}) &= \frac{1}{S(\tilde{\sigma})} \sum_{\lambda(\tilde{\sigma})} s_\lambda(\tilde{\sigma}) \int_{\lambda} \bar{E} d\vec{e} = \frac{1}{S(\tilde{\sigma})} \int_{\tilde{\sigma}} \text{rot} \bar{E} d\vec{S} = \\ &= \frac{1}{S(\tilde{\sigma})} \int_{\tilde{\sigma}} \bar{H} d\vec{S} = [\bar{H}_{C\sigma} + O(h)] \vec{e}(\tilde{\sigma}). \end{aligned}$$

Последний интеграл берется по ориентированной площади грани $S(\tilde{\sigma})\vec{e}(\tilde{\sigma})$ из шаблона оператора $V_\sigma G$ на грани σ . $S(\tilde{\sigma})$ – удельная площадь грани $\tilde{\sigma}$. Очевидно, на грани σ

$$\begin{aligned} [(V_\sigma G)\bar{e}]'(\sigma) &= \sum_{\Omega(\sigma)} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} \sum_{\tilde{\sigma}(\varphi)} V_\varphi G r'_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) \bar{e}(\tilde{\sigma}) = \sum_{\Omega(\sigma)} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} V_\varphi \bar{e}'_\varphi(\sigma) = \\ &= \sum_{\Omega(\sigma)} s_\sigma(\Omega) \cdot \overline{C_\Omega C_\sigma}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} [(V_\sigma G)(\text{RODE} \bar{E})'](\sigma) &= \sum_{\Omega(\sigma)} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} \sum_{\tilde{\sigma}(\varphi)} V_\varphi G r'_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) [\bar{H}_{C\sigma} + O(h)] \bar{e}(\tilde{\sigma}) = \\ &= \bar{H}_{C\sigma} \sum_{\Omega(\sigma)} s_\sigma(\Omega) \overline{C_\Omega C_\sigma} + O(h^2). \end{aligned}$$

Видим, что

$$[(V_\sigma G)(H' - (RO\vec{D}\vec{E})')](\sigma) = O(h^2),$$

т.е.

$$\|H - \hbar\|_\sigma^2 \leq \frac{h}{\gamma_1} \sum_\sigma O(h^4) = O(h^2),$$

т.к. всего слагаемых в суммировании \sum_σ содержится $O(h^{-3})$.

Окончательно получили оценку

$$\|H - \hbar\|_\sigma = O(h),$$

которая показывает сходимость рассматриваемой разностной задачи (4.4), (4.5), (4.11) к континуальной (4.1), (4.2) с граничным условием $\vec{H}_\tau|_\Sigma$ с первым порядком точности на гладких решениях.

5. Заключение

На классических решениях модельной магнитостатической задачи на тетраэдрических сетках с первым порядком точности в среднеквадратичном смысле доказана сходимость разностных схем метода опорных операторов для повторных ротационных операций векторного анализа с нулевым собственным значением спектральной задачи. Сходимость доказана в сеточно-зависимых нормах, связанных с энергией метрического оператора нерегулярной тетраэдрической сетки, на которую не накладывается никаких ограничений, кроме ее невырожденности.

Библиографический список

1. Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: ЗАО «Критерий», 1996.
2. Shashkov M. Conservative finite-difference methods on general grids. Boca Raton, FL: CRC Press, 1996.
3. Lipnikov K., Manzini G., Shashkov M. Mimetic finite difference method // Journal of Computational Physics. 2013. V. 257, Part B. P. 1163–1227.
4. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
5. Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Шарова Ю.С. Интегрально-согласованные методы расчета самогравитирующих и магнитогидродинамических явлений // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 160. 21 с. DOI:10.20948/prepr-2018-160
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973.
7. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.

Оглавление

1. Введение.....	3
2. Метрические сетки метода опорных операторов с ковариантным представлением скалярного произведения.....	4
3. Дискретная магнитогидродинамическая эволюция электромагнитной энергии.....	7
4. Сходимость разностных схем метода опорных операторов для ротационных операций векторного анализа на тетраэдрических сетках.....	12
5. Заключение.....	18
Библиографический список.....	19