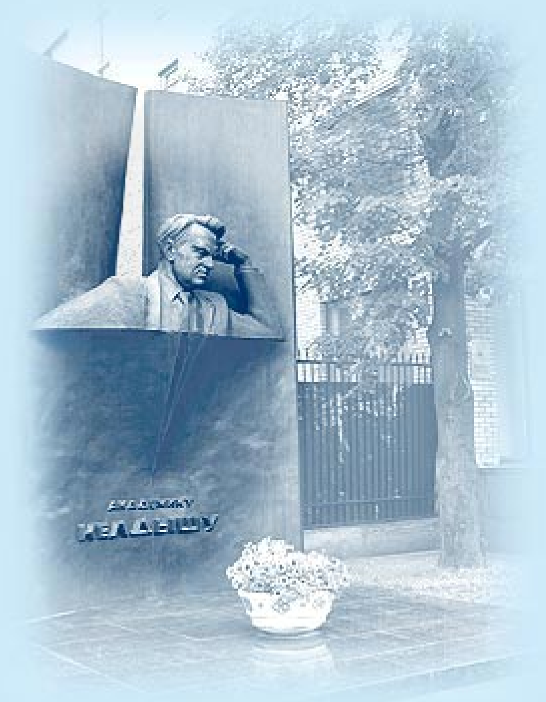
[ИПМ им.М.В.Келдыша РАН](https://keldysh.ru) • [Электронная библиотека](https://library.keldysh.ru)

[Препринты ИПМ](https://library.keldysh.ru/preprints) • [Препринт № 29 за 2022 г.](https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-29)



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Н.Н. Фимин, А.Г. Никифоров

Энергетическая и гидродинамическая подстановки для уравнения Власова-Пуассона и их астрофизические следствия

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Фимин Н.Н., Никифоров А.Г. Энергетическая и гидродинамическая подстановки для уравнения Власова-Пуассона и их астрофизические следствия // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 29. 22 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2022-29
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-29

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

Н.Н. Фимин, А.Г. Никифоров

ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ПОДСТАНОВКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА-ПУАССОНА И ИХ АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ

Москва - 2022

Н.Н. Фимин, А.Г. Никифоров

Энергетическая и гидродинамическая подстановки для уравнения Власова-Пуассона и их астрофизические следствия

Аннотация. В настоящей работе рассмотрены примеры использования уравнений Власова-Пуассона в самосогласованном гравитационном потенциале космологического генезиса и рассмотрен случай, приводящий к образованию когерентных псевдохаотически распределенных «стенок» космологической структуры.

Ключевые слова: уравнение Власова-Пуассона, крупномасштабные структуры, когерентные системы.

Fimin N.N., Nikiforov A.G.

Study of stationary solutions of the Vlasov equation for the case of a gravitational field

This preprint discribes the system of Vlasov-Poisson equations in the self-consistent gravitational potential of cosmological genesis, and shows a case that leads to the formation of coherent pseudochaotically distributed «walls» of the cosmological structure.

Key words: Vlasov-Poisson equation, large-scale structures, coherent systems

Оглавление

1. Введение

Нынешнее представление о Вселенной, по-видимому, указывает на то, что она однородна в больших масштабах для красных смещений z, превышающих $z \simeq 10^3$. Однако существование неоднородностей, таких как галактики и скопления галактик, требует для своего объяснения наличия определенного физического механизма. Одним из способов изучения структурообразования является рассмотрение процесса, связанного с динамикой формирования, пронизывающего всю Вселенную, космического субстрата (или жидкости). Из некоторых первоначальных неоднородностей, возможно зародившихся в первичную инфляционную эпоху, необходимо исследовать, как силы гравитации превращаются в комковатые структуры в небольших масштабах, которые мы наблюдаем сегодня, а именно – в групповое распределение галактик или сверхскопление галактик на малых красных смещениях ($z \simeq 1$).

Динамическая устойчивость самогравитирующих систем является важной проблемой астрофизики. Эта проблема была впервые рассмотрена Джинсом, который изучал линейную динамическую устойчивость бесконечного однородного газа с преобладанием столкновений, описываемого уравнениями Эйлера. Он обнаружил, что эта система становится неустойчивой, если длина волны возмущения превышает критическое значение $\lambda_c = u_s\sqrt{\frac{\pi}{G\rho}}$ (где u_s – скорость звука), называемое сейчас длиной Джинса. В этом случае возмущение экспоненциально быстро растет без осцилляций. Напротив, для малых длин волн $\lambda < \lambda_c$ возмущение колеблется без затухания и ведет себя как звуковая волна, модифицированная гравитацией. Как известно, подход Джинса с самого начала страдает математической непоследовательностью. Действительно, бесконечная однородная гравитирующая система не может находиться в статическом равновесии, поскольку нет градиентов давления, уравновешивающих гравитационную силу. Джинс устранил это противоречие, предположив, что уравнение Пуассона описывает только связь между возмущенным гравитационным потенциалом и возмущенной плотностью. Тем не менее, рассмотрение задач по типу джинсовской неустойчивости можно использовать в определенных ситуациях: когда мы работаем в сопутствующей системе отсчета, где расширение Вселенной вносит своего рода «нейтрализующий фон» в уравнение Пуассона. В этом случае бесконечная однородная самогравитирующая среда может находиться в статическом равновесии. Следовательно, механизм неустойчивости Джинса важен для понимания образования галактик из однородной ранней Вселенной и динамической устойчивости бесконечной однородной бесконтактной звездной системы, описываемой уравнением Власова. В некотором смысле отсутствие столкновений подразумевает отсутствие давления, так что аналогия с длиной Джинса в этом случае, повидимому, отсутствует. Однако у бесстолкновительных частиц есть скорости, и эти скорости необязательно представляются в виде одной уникальной $\mathbf{v}$ в каждой позиции $\mathbf{x}$, как для идеализированной жидкости. Вместо этого есть распределение случайных скоростей в каждой точке; в дальнейшем будем считать это распределение близким к изотропному. Бесстолкновительную систему можно описать, как жидкость с нулевым давлением, когда жидкость очень холодная, так что результирующий поток почти ламинарный. В таком случае предполагается, что в каждой точке существует уникальная скорость и что все частицы имеют одинаковую массу m, а уравнение неразрывности и уравнение Эйлера заменяются уравнением Лиувилля.

С тех пор как появилась работа Джинса, в космологии очень подробно изучались однородные распределения материи. Однако ньютоновские космологические модели Милна и МакКри также используют однородное распределение материи, и они кажутся естественным средством для дальнейшего изучения гравитационной неустойчивости джинсовского типа. В результате работы МакКри, предположения, на которых основаны эти модели, можно использовать в качестве руководства для моделей стационарной теории. Отличие этого подхода от Власова-Пуассона состоит в том, что в уравнении Лиувилля частица движется во внешнем поле шара Милна, поэтому структуры возникают только сферически-симметричные. При использовании уравнения Власова-Гельфанда частица движется в самосогласованном поле и структуры могут отклоняться от сферически-симметричных [1].

В этой статье представлен обзор использования уравнений Власова-

Пуассона в гравитационном контексте. Такая система уравнений может быть использована для описания динамической эволюции самогравитирующих астрофизических систем, таких как шаровые скопления или галактики. В процессе работы авторами были исследованы сценарии формирования близких к условно-равновесным вторичных структур (в общем случае отличных от устойчивых до определенных предельных значений параметров квазистационарных) на поверхности 2–мерной стенки (в условиях ячеистого строения системы частиц, обусловленного крупномасштабной «псевдокристаллизацией» системы гравитационно-связанных субструктур) на основе решений системы уравнений Власова-Пуассона, и предложены критерии появления ветвления решений системы, приводящего к деформации вторичных структур. По результатам работы доказана лемма для случая гравитационного поля и уточнены результаты, полученные в статье [2].

2. Динамика самогравитирующей системы

Возникновение плоских и квазиодномерных структур в космологических моделях точки зрения многочастичной динамики гравитационно взаимодействующих «элементарных» субстуктур (представляющих собой звёзды, звездные скопления, галактики и пр.) описываются в современной научной литературе особой совокупностью эволюционных явлений, протекающих (с различными характерными временами) на существенно различающихся масштабах, однако подчиняющихся общим положениям кинетического формализма (в частности, бесстолкновительной кинетики Власова). В астрофизическом контексте изучения происхождения систем войдов, стенок («блинов» Зельдовича) [3]-[4] и одномерных филаментов естественным является сценарий введения иерархии описания процессов на основе 1) кинетического подхода (использующего самосогласованное поле Власова-Пуассона) - до уровня постэлементарных состояний относительного равновесия (в которые «корпускулярные» субструктуры типа звезд и т. п. формируют принципиально упорядоченные, обладающие свойствами квазипериодичности системы), и 2) турбулентной гидродинамики, где задействованы большие совокупности (в общем случае деформированных для сохранения непрерывности плотности) континуальных квазистационарных состояний, образующих крупномасштабные когерентные гидродинамические структуры.

Пусть $f_i(\mathbf{x},\mathbf{v})$ – функции распределения i -го сорта частиц по скоростям $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ и пространству $x\in\mathbb{R}^3$. Пусть $f_i(x,\mathbf{v})$ удовлетворяют системе уравнений Власова-Пуассона:

$$\begin{cases} \left(\mathbf{v}, \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}\right) - \dfrac{1}{m_i}\left(\nabla u, \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}}\right) = 0, \\ \Delta u = \sum_i 4\pi G m_i \int f_i(\mathbf{x},\mathbf{v}) d\mathbf{v}; \end{cases} \tag{1}$$

где m_i – масса i-го сорта частиц ($1\le i\le k$ и обычно $k=1$ или 2), $u(x)$ – гравитационный потенциал [2].

Пусть функции распределения f_i зависят только от интеграла энергии $f_i = g_i(m_i\mathbf{v}^2/2 + m_i u(\mathbf{x}))$, где $g_i(E)$ – некоторые неотрицательные функции. В этом случае верхнее из уравнений (1) удовлетворяется, а нижнее дает нелинейное эллиптическое уравнение

$$\Delta U = \psi(u), \tag{2}$$

где функция $\psi(u)$ определяется равенством

$$\psi(u) = \sum 4\pi G m_i \int g_i(m_i\mathbf{v}^2/2 + m_i u) d\mathbf{v}. \tag{3}$$

где $m_i u$, $u = GM/r$ и G – гравитационная энергия, потенциал и постоянная соответственно.

В работе [2] показано, что свойства функции $\psi(u)$ во многих задачах обеспечивают единственность решения, путем доказательства следующей леммы.

Лемма 1 . Пусть в формуле $\psi(u)$ $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^d$. Пусть $g_i(E)$ – неотрицательные непрерывно-дифференцируемые функции, такие, что

$$g_i(E)E^{d/2+1} \to 0 \text{ при } E \to +\infty. \tag{4}$$

Тогда при $d \geq 2$ имеет место неравенство

$$\frac{d\psi}{du} \geq 0. \tag{5}$$

При $d = 1$ неравенство неверно [2].

Рассмотрим потенциал $\psi(u)$ для плоского случая

$$\psi(u) = \sum 4\pi G m_i \int g_i(m_i v^2/2 + m_i U) dv, \tag{6}$$

где $m_i U$ есть гравитационная энергия, $U = GM/r$, G – гравитационная постоянная.

$$d = 2 : \psi(u) = \sum 4\pi G m_i \int g_i(E_i) d\mathbf{v} = \sum 4\pi G m_i \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} g_i(E_i) v dv. \tag{7}$$

Для случая $d = 2$ переходим к полярной системе координат $\mathbf{v} = \{v, \varphi\}$; якобиан перехода $v \equiv |\mathbf{v}| = v^{d-1}$. Появляется коэффициент $2\pi = 2^{d-1}\pi = B(d)|_{d=2}$.

$$d = 3 : \psi(u) = \sum 4\pi G m_i \int g_i(E_i) d\mathbf{v} =$$

$$= \sum 4\pi G m_i \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta \int_0^{\infty} g_i(E_i) v^2 dv. \tag{8}$$

В случае $d = 3$ осуществляется переход к сферической системе координат $\mathbf{v} = \{v, \theta, \varphi\}$, при этом якобиан перехода $v^2 \sin(\theta) = v^{d-1} \sin(\theta)$. Появляется коэффициент $2\pi \cdot 2 = 2^{d-1}\pi = B(d)|_{d=3}$.

Обозначим $\tilde{\psi}_i(u) \equiv \frac{d\psi_i(u)}{dU} = \int g_i'(E_i) \cdot (dE_i/dU) d\mathbf{v}$, причем $\psi(u) = \sum_i 4\pi G m_i \psi_i(E_i)$ (далее учитываем, что $dE_i/dU = m_i$).

$$\tilde{\psi}_i(u) = B(d)\int_0^\infty g_i'(E_i)\cdot(E_i)_u'\cdot v^{d-1}dv =$$

$$= B(d)m_i\int_0^\infty \frac{2v^{d-1}}{m_i v}dg_i(m_i v^2/2+m_iU) = 2B(d)v^{d-2}g_i\left(\frac{m_iv^2}{2}+m_iU\right)\Bigg|_{v=0}^{v=\infty} +$$

$$+2B(d)\int_0^\infty g_i(m_iv^2/2+m_iU)dv^{d-2} =$$

$$= 2B(d)v^{d-2}g_i\left(\frac{m_iv^2}{2}+m_iU\right)\Bigg|_{v=0}^{v=\infty} + B(d)\int_0^\infty (d-2)g_i(m_iv^2/2+m_iU)v^{d-3}dv.$$

Рассмотрим случай при $d=2$ в условиях леммы

$$\frac{d\psi}{du} = 8\pi GB(2)\sum m_i g_i(\frac{m_i\mathbf{v}^2}{2}+m_iU) \geq 0. \tag{9}$$

При $d>2$ получаем. Первое слагаемое, как видим, зануляется из-за вводимого свойства в лемме, что вполне естественно, поскольку в функции распределения количество частиц с бесконечно большой энергией должно стремиться к нулю.

$$\frac{d\psi}{du} = 4\pi GB(d)(d-2)\sum\int m_ig_i(m_iv^2/2+m_iU)v^{d-3}dv \geq 0. \tag{10}$$

Рассмотрим случай при $d=1$, рассмотрим функцию $g_i(E) = a_i\delta(E-E_i)$, $a_i>0$. Подставим её в (3) и дифференцируем по u, получаем следующее уравнение

$$\psi(u) = \sum 4\pi Gm_i\int g_i(E)d\mathbf{v} = \sum 4\pi Gm_i\int a_i\delta(E-E_i)dv, \tag{11}$$

$$\frac{d\psi}{du} = 4\pi GB(d)(d-2)\sum\psi_i(u), \tag{12}$$

где $\psi_i(u) = m_ia_i(\frac{2}{m_i}(E_i-m_iu))^{\frac{d-4}{2}}$ при $u < E_i/m_i$ и равняется нулю при $u > E_i/m_i$. Это выражение отрицательно при $d<2$ и неотрицательно при

$d \geq 2$. Таким образом, имеет место равенство $\frac{d\psi}{du} \geq 0$, таким образом лемма доказана.

3. О стационарных решениях уравнения Власова-Пуассона

Уравнение Власова-Пуассона, как выяснили, является одним из способов изучения системы гравитирующих частиц, при условии, что масштаб рассматриваемой конфигурации меньше горизонта частиц.

Задача состоит в том, чтобы исследовать стационарное решение уравнения Лиувилля, представленное как функция интегралов движения частиц; предположим, что основной сохраняющийся интеграл — это только энергия. Нас будет интересовать при таком предположении появление в системе периодических решений при ветвлении решений в некоторых критических точках. Последнее, очевидно, направлено на покрытие паутинной структуры Вселенной, включая квазипериодические пустоты.

Пусть $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ — функция распределения массивных частиц по скоростям $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ и по координатам $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Предположим, что $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ являются решениями уравнения Власова–Пуассона [5].

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \varphi}{\mathbf{x}}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \\ \Delta\varphi(\mathbf{x}, t) = 4\pi G m \textstyle\int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v},\end{gathered} \tag{13}$$

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}', \mathbf{v}, t) d\mathbf{x}' d\mathbf{v},$$

где $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \phi_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{-Gm}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla_{\mathbf{x}} \int \phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}', \mathbf{v}, t) d\mathbf{x}' d\mathbf{v},$$

где $\varphi(\mathbf{x})$ — самосогласованный гравитационный потенциал в точке $\mathbf{x}$, $F(\mathbf{x})$ — самосогласованная сила, $\phi_N(r)$ — нормированный потенциал ньютоновского притяжения между частицами, G — гравитационная постоянная. Нас интересуют решения системы (13) в области $\mathbf{x} \in D$, где D — произвольная область с гладкой границей.

Пусть функции распределения f зависят только от интеграла энергии: $f = g(m\mathbf{v}^2/2 + m\phi(\mathbf{x}))$, где $g(E)(\geq 0) \in C^1$. В этом случае для уравнения (13) выполняется уравнение Лиувилля, из этого следует, что левая часть уравнения является следствием скобок Пуассона, см.(28), а уравнение Пуассона для гравитационного потенциала имеет следующий вид:

$$\Delta\varphi = F(\varphi),\ F(\varphi) = 4\pi G m \int g(m\mathbf{v}^2/2 + m\varphi(\mathbf{x}))\mathbf{dv}. \tag{14}$$

Для этого случая должна выполняться лемма 1. Пусть в определении правой части $F(\varphi)$ зависит от скоростей $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$, тогда функция $g_i(E) \in C^1(D)$ удовлетворяет условиям $g_i(E) \cdot E^{d/2+1} \to 0$ (при $d = 1, 2$ и при $d = 1$ функции $g_i(E)$ монотонно убывают), при $d = 2$ выполняется неравенство $dF/d\varphi \geq\ 0$.

Согласно [6] краевая задача Дирихле ($\varphi|_{\partial D} = 0$) для этого нелинейного эллиптического уравнения (в области D с гладкой границей ∂D) относится к классу некорректно поставленных в смысле Куранта (имеет более одного решения для d-мерного пространства: $D \subset R^d$, $d = 1, 2, 3$). Следует отметить, что в этом случае аналогичная задача для системы заряженных частиц для размерности области $d = 1, 2$ оказывается поставленной корректно, из-за условия леммы для аргумента $E \sim \mathbf{v}^2$, стремящегося к бесконечности.

Действительно, гравитационное взаимодействие в системе частиц приводит к множественности решений уравнений для потенциала, причем для случаев $d = 1, 2$ эти решения определяют решения уравнения Власова с конечной массой конструкции, а для случая $d = 3$ такие решения расходятся.

Чтобы исключить множественность решений уравнений гравитационного потенциала для уравнения Лиувилля–Гельфанда [7], рассмотрим представление стационарной функции распределения через распределение Максвелла–Больцмана во внешнее гравитационное поле $g(E) = \int_{R^d} n(\varphi(\mathbf{x}))f(\mathbf{v})d\mathbf{v}$. Условиями такого представления являются максимально возможная статистическая независимость в представлении стационарной функции распределения

$$f(\mathbf{v}) = C_1(d;\theta,m)\prod_{i=1}^{d}\bar{f}(v_i^2),\ C_1(d;\theta,m) = (m/(2\pi\theta))^{d/2}, \tag{15}$$

$$\bar{f}(v_i^2) = \exp\left(-mv_i^2/(2\theta)\right).$$

Разделение переменных при подстановке в стационарное уравнение (13) дает кинетическую температуру θ в виде константы разделения, так что

$$n(\mathbf{x}) = C_2\exp\left(-m\varphi(\mathbf{x})/\theta\right),\ (C_2 \equiv n_0)$$

возможное движение потока (с массовой скоростью $\mathbf{V}_0$), как обычно, учитывается заменой $\mathbf{v} \to (\mathbf{v} - \mathbf{V}_0)$. Таким образом, гравитационный потенциал (14) можно записать в явном виде

$$\Delta\varphi = 4\pi GmC_2\exp\left(-\frac{m\varphi}{\theta}\right), \tag{16}$$

заменяя $\varphi = -\Phi\theta/m$, получаем,

$$\Delta\Phi + \lambda\exp\left(\Phi\right) = 0, \tag{17}$$

где $\lambda \equiv 4\pi Gn_0\frac{m^2}{\theta}$.

Нужно обратить внимание на плоскостные и нитевидные структуры, которые обладают свойством бесконечно развиваться, при этом сохранять массу постоянной. Покажем, что можно провести классификацию решений нелинейного эллиптического уравнения (14), приведенных к виду (17). Для случая $d = 1$ рассмотрим формальную задачу Дирихле на отрезке $x \in [-1,1]$, для которой существует критический параметр $\lambda_{crit} = \lambda_{crit}^{(1)} \approx 0.88$, такой что при $0 < \lambda < \lambda_{crit}$. Имеются два строго положительных убывающих решения (класса C^2 $([-1,1])$) по мере приближения аргумента к границе области — устойчивое минимальное Φ_λ^{min} и неустойчивое Φ_λ^{uns} [8]. Последняя имеет неограниченно возрастающую скорость при $\lambda \to 0$ $(\forall x \in [-1,1])$, что физически означает неограниченный рост температуры среды или уменьшение массы конструкции. При $\lambda \to \lambda_{crit}^{(1)} - 0$ оба решения сливаются в одно, которое не может быть продолжено в область $\lambda > \lambda_0$.

Для случая $d = 2$ при $\lambda \in (0, \lambda_{crit}^{(2)} = 2)$ существует пара решений Φ_λ^{min} и Φ_λ^{uns}, но сингулярное (неминимальное) решение неограниченно растет только при совместном стремлении $\lambda \to 0+$ и $r \to 0$; при $\lambda \to \lambda_{crit}^{(2)}$ эти решения также сливаются в одно, что не может быть продолжено при дальнейшем возрастании значения $\lambda \to 2+$ (см.[9; 10]). Общая масса частиц при $d = 2$ определяется как

$$M_2[\lambda_{crit}] = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} C_2 \frac{4}{(1+r^2)^2} r d\vartheta dr < \infty,$$

где потенциал определяется в точке $\lambda_{crit} = 2$. Использование для оценок суммарной массы минимальных и неминимальных решений при произвольных значениях параметра ($\forall \lambda \in (0, 2)$) дает ту же конечную асимптотику. В двумерном случае был использован явный вид решений уравнения Лиувилля и вырождение двух решений в одно в критической точке

$$\Phi_\lambda^{min/uns} = \ln\left(\frac{8\xi_{min/uns}}{(1+\lambda\xi_{min/uns} r^2)}\right), \ \xi_{min/uns} = \frac{4 - \lambda \pm \sqrt{16 - 8\lambda}}{\lambda^2}. \qquad (18)$$

Для цилиндрической конструкции решения уравнения Лиувилля с краевыми условиями ($c_1 = \pm 1/\sqrt{2\lambda}, c_2 = 0$) и условием нормировки в секущей (нормальной граничной) плоскости $M_2[\lambda] < \infty$ имеют другую асимптотику при $r \to 0$: неминимальное решение в этом случае неограниченно растет, поэтому мы исключаем его из рассмотрения опять-таки дополнительным условием в центре. Для минимального решения получаем $M_2[\lambda] = 8\pi/\lambda$ и для $\forall \lambda \in (0, 2]$

$$\Phi_\lambda^{min}(r) = \ln \frac{32 - 8\lambda - 8\sqrt{16 - 8\lambda}}{(\lambda + r^2(4 - \lambda - \sqrt{16 - 8\lambda}))^2}. \qquad (19)$$

Таким образом, цилиндрические двумерные конструкции в каждом нормальном сечении имеют конечную массу, что согласуется с условиями, поставленными леммой. При условии, что имеется конечная длина, конечная полная масса, образующаяся за счет регулярного решения уравнения Лиувилля–Гельфанда, выбирается по условию исключения особого решения в центре.

Для случая $d = 3$ существует критическое значение параметра $\lambda_{crit}^{(3)} \approx 3.32$, такое, что на плоскости $(\lambda, ||\Phi_\lambda||)$ выделяются 4 области со значениями параметра λ : 1) область $\lambda \in (0, \lambda_{crit})$, где имеется конечное число C^2-гладких решений, 2) при $\lambda = 2$ число решений бесконечно, 3) при $\lambda = \lambda^{(3)}$ с существует только одно решение , 4) при $\lambda > \lambda^{(3)}$ с решений не существует (в заданном множестве альтернатив только одно минимальное (правильное) из каждого множества будет устойчивым решением) [11].

В трехмерном случае полная масса системы гравитирующих частиц:

$$\begin{aligned} M_3 = \int C_2 \exp{(-m\varphi/\theta)} d\mathbf{r} > \\ \lim_{\varphi_0 \to 0} C_2 \int_{r_0}^{r_{max}\to\infty} \exp{(m\varphi_0/\theta)} 4\pi r^2 dr \to +\infty \ (\forall r_0 > 0). \end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, трехмерные структуры, описываемые решением задачи Дирихле для уравнения Лиувилля-Гельфанда ограниченной массы, не могут существовать в трехмерном евклидовом пространстве. Из этого можно сделать вывод, что трехмерные структуры могут существовать, когда интеграл масс сходится, что требует либо компактности носителя, либо соответствующей скорости убывания радиального решения на бесконечности. Однако в этом случае, в соответствии с [12], для случая $d = 3$ (в отличие от случаев $n = 1, 2$) уравнение Лиувилля–Гельфанда не допускает устойчивых C^2-гладких решений вне компактного множества $\mathbb{R}^d$. Следовательно, в рамках модели Лиувилля-Гельфанда не исключаются трехмерные (компактные) структуры.

Напомним, что для заданной области $D \subset R^d$ (возможно, неограниченной) решение $\Phi \in C^2(D)$ уравнения $\Delta\Phi + \exp\Phi = 0$ называется устойчивым вне компакта $K \subset D$, если

$$\forall \xi \in C^1(D \backslash K) \quad Q_u(\xi) = \int_{D \backslash K} |\nabla \xi|^2 - e^{\Phi} \xi^2 \geq 0.$$

В частности, когда K — пустое множество, говорят, что решение Φ устойчиво в D.

4. Гидродинамическая подстановка для уравнения Власова

Пусть имеется вектор $\mathbf{p}_0 = |AD|$ - импульс начального потока вещества в нити сверхскопления Ланиакеи. В точке А происходит бифуркация – раздвоение потока, например, поток натыкается на черную дыру, скорость убегания атомов потока превышена на данном прицельном радиусе от черной дыры, происходит разделение потока на два.

Должен выполняться закон сохранения импульса

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \tag{21}$$

где $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ – векторы импульсов начального и вторичных потоков. Законы сохранения совершенно не обязательно сохраняются симметрично: вторичные потоки приобретают импульсы $\mathbf{p}_1 = |AB|$ и $\mathbf{p}_2 = |A\text{C}|$, причем углы α и β не обязаны быть одинаковыми.

Проекция вторичных импульсов на ось ординат должна быть нулевой (мы направили ось абсцисс по направлению первичного вектор $\mathbf{p}_0$). Таким образом:

$$\mathbf{p}_1 \sin \alpha - \mathbf{p}_2 \sin \beta = 0, \tag{22}$$

по теореме косинусов для $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_0$ можно получить следующую формулу:

$$\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_0^2 - 2\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1 \cos \alpha = \mathbf{p}_2^2. \tag{23}$$

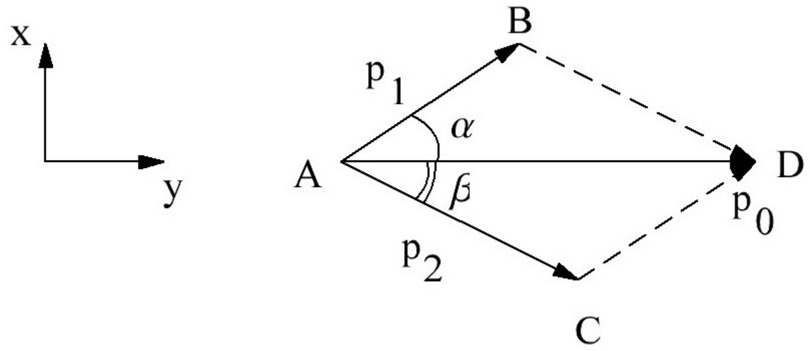


Рис. 1: Импульсная диаграмма

С учетом всех уравнений получаем систему от переменных $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, α, β

$$\begin{cases} \mathbf{p}_1 \sin\alpha - \mathbf{p}_2 \sin\beta = 0, \\ \mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_0^2 - 2\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1 \cos\alpha = \mathbf{p}_2^2, \\ \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_0^2 - 2\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2 \cos\alpha = \mathbf{p}_1^2. \end{cases} \tag{24}$$

Выражения для импульсов получаются как зависимость импульсов от углов бифуркации, в предположении, что углы α и β зафиксированы:

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{p}_0 \sin\beta}{\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta}, \tag{25}$$

$$\mathbf{p}_2 = \frac{\mathbf{p}_0 \sin\alpha}{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}. \tag{26}$$

Пусть $m_0 = \lambda \cdot m + (1-\lambda)\cdot m = m_1 + m_2$, тогда

$$\begin{aligned} & m_0 = \lambda \cdot m + (1-\lambda)\cdot m = m_1 + m_2, \\ & m_0\mathbf{v}_0^2 = m_1 \cdot \mathbf{v}_1^2 + m_2 \cdot \mathbf{v}_2^2, \\ & m_0 v_{0x} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}, \\ & m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = 0, \end{aligned} \tag{27}$$

таким образом, учитывая (22), находим значение для $\mathbf{v}_2$

$$\mathbf{v}_2(\mathbf{v}_1,\alpha,\beta)=\frac{m_1\mathbf{v}_1\sin\alpha}{m_2\sin\beta}=\frac{\lambda m\mathbf{v}_1\sin\alpha}{(1-\lambda m)\sin\beta}.$$

Часто цитируется, что уравнение Власова является гамильтоновой системой. Верно, но постановка такой задачи вообще неясна. Используем классические скобки Пуассона, определенные для любых скалярных полей $A(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ и $B(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ формулой

$$\{A,B\}=\frac{\partial A}{\partial\mathbf{q}}\frac{\partial B}{\partial\mathbf{p}}-\frac{\partial B}{\partial\mathbf{q}}\frac{\partial A}{\partial\mathbf{p}}. \tag{28}$$

Тогда уравнение Власова можно переписать в следующем виде

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}}{m}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{q}}-m\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{q}}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{p}}=\frac{\partial f}{\partial t}+\{f,H\}=0, \tag{29}$$

где

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p})=\frac{\mathbf{p}^2}{2m}+m\varphi, \tag{30}$$

$(\Delta\varphi=4\pi G\rho(\mathbf{q},t))$.

Гамильтоновы канонические уравнения

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt}=\frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial\mathbf{p}},\ \frac{d\mathbf{p}}{dt}=-\frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial\mathbf{q}}. \tag{31}$$

Подставим следующее выражение в уравнение Власова (29)

$$f(\mathbf{x},\mathbf{p},t)=\rho_0(\mathbf{x},t)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{P}_0(\mathbf{x},t))=\rho_1(\mathbf{x},t)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{P}_1(\mathbf{x},t))+\rho_2(\mathbf{x},t)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{P}_2(\mathbf{x},t)),$$

где $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ будут определяться выражениями (25) и (26) соответственно.

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial\rho_1(\mathbf{x},t)}{\partial t}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{P}_1(\mathbf{x},t))-\rho_1(\mathbf{x},t)(\nabla\delta,\frac{\partial\mathbf{P}_1(\mathbf{x},t)}{\partial t})+$$

$$+\frac{\partial\rho_2(\mathbf{x},t)}{\partial t}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{P}_2(\mathbf{x},t))-\rho_2(\mathbf{x},t)(\nabla\delta,\frac{\partial\mathbf{P}_2(\mathbf{x},t)}{\partial t}) \tag{32}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \rho_1(\mathbf{x},t)}{\partial x}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}_1(\mathbf{x},t)) - \rho_1(\mathbf{x},t)(\nabla\delta, \frac{\partial \mathbf{P}_1(\mathbf{x},t)}{\partial x})+$$

$$+\frac{\partial \rho_2(\mathbf{x},t)}{\partial x}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}_2(\mathbf{x},t)) - \rho_2(\mathbf{x},t)(\nabla\delta, \frac{\partial \mathbf{P}_2(\mathbf{x},t)}{\partial x}) \tag{33}$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \rho_1(\mathbf{x},t)\frac{\partial \delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}_1)}{\partial p} + \rho_2(\mathbf{x},t)\frac{\partial \delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}_2)}{\partial p}. \tag{34}$$

Собирая элементы перед дельта-функцией и ее производной и учитывая, что мы рассматриваем гамильтонову систему, получаем гидродинамическое следствие для системы уравнений Власова-Пуассона:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\rho_i \mathbf{V}_i) = 0,\\
&\frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial t} + \frac{\mathbf{P}_i^2}{2m} + m\varphi = 0,\\
&\Delta\varphi = 4\pi G\rho(\mathbf{q},t),
\end{aligned} \tag{35}$$

где $\mathbf{V} \equiv \left.\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\right|_{\mathbf{p}=\mathbf{P}}$ — обобщенная скорость, $\mathbf{F}_i = -\frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{P}_i)}{\partial \mathbf{x}}$ — компоненты обобщенной силы.

Также рассмотрим общую автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in R^n, t \in R^1, \tag{36}$$

эволюция которой описывается обобщенным уравнением Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}_n(\mathbf{v}f) = 0, \tag{37}$$

где $f(\mathbf{x}, t)$ – функция распределения изображающих точек в n-мерном фазовом пространстве, которая описывает вероятность нахождения точки траектории динамической системы в окрестности точки пространства R^n в момент времени t. Вектор координат $\mathbf{x}$ представим как упорядоченную пару $(\mathbf{q}, \mathbf{p})^T$,

$\mathbf{q} \in R^n$, $\mathbf{p} \in R^{n-m}$, тогда уравнение (36) запишется как

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \tag{38}$$

Найдем решение для обобщенного уравнения Лиувилля, записанного в явной форме

$$\Omega(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial q_i}(w_i f) + \sum_{j=1}^{n-m} \frac{\partial}{\partial p_j}(g_j f) = 0, \tag{39}$$

используя гидродинамическую подстановку: $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \rho(\mathbf{q}, t)\delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}(\mathbf{q}, t))$, где $\rho(\mathbf{q}, t)$ – плотность изображающих точек на гиперповерхности, $\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, t)$ – уравнение гиперповерхности размерности $(n - m)$ в момент времени t. При подстановке такого вида представления $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ в уравнение (39) получается редуцированная система уравнений Эйлера гидродинамического типа, которая состоит из уравнений неразрывности и движения точек [13]

$$\Omega_0(\rho) \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial q_k}(\rho V_k) = 0, \tag{40}$$

$$\Omega_j(P_j) \equiv \frac{\partial P_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} V_k \frac{\partial P_j}{\partial q_k} = G_j, \quad j = 1, \ldots, n - m, \tag{41}$$

где $V_k(\mathbf{q}, t) \equiv v_k(\mathbf{q}, \mathbf{P}(\mathbf{q}, t))$, $G_j(\mathbf{q}, t) \equiv g_j(\mathbf{q}, \mathbf{P}(\mathbf{q}, t))$.

Система уравнений (41), которая имеет одинаковые коэффициенты V_k перед производными импульсов, принадлежит классу систем с одинаковой главной частью, рассмотренных в [14], и является эквивалентной уравнению для производящей функции, совпадающему по виду с уравнением Лиувилля классического вида,

$$\Xi(\Phi) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} V_i \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{n-m} G_j \frac{\partial \Phi}{\partial P_j} = 0. \tag{42}$$

В отличие от исходного уравнения (39), в левой части дифференцируются по x и p не моментные ядра $\mathbf{w}f$, $\mathbf{g}f$, а новая неизвестная функция Φ [15]. С точки зрения возможности реализации симметрии решения в моментном представлении можно рассмотреть применение сопряженной гидродинамической подстановки в уравнение (42) («подстановка 2-го уровня»): $\Phi(t,\mathbf{q},\mathbf{P}) = \rho^{[2]}(\mathbf{P},t)\delta(\mathbf{q}-\mathbf{Q}(\mathbf{P},t))$, тогда получаем следующие выражения:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \rho^{[2]}}{\partial t}\delta((\mathbf{q}-\mathbf{Q}(\mathbf{P},t))) - \rho^{[2]}\left(\nabla\delta, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_j} = \rho^{[2]}\frac{\partial \delta}{\partial q_j},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P_i} = \frac{\partial \rho^{[2]}}{\partial P_i}\delta((\mathbf{q}-\mathbf{Q}(\mathbf{P},t))) - \rho^{[2]}\left(\nabla\delta, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial P_i}\right).$$

Также, собирая множители при δ-функции и ее производных, находим:

$$\frac{\rho^{[2]}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-m} G_i^{[2]} = 0,$$

$$-\rho^{[2]}\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} - \rho^{[2]}\sum_{i=1}^{n-m} G_i^2 \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial P_i} + \rho^{[2]}\mathbf{V}^{[2]} = 0,$$

$$\mathbf{G}^{[2]} = \mathbf{G}(\mathbf{Q},\mathbf{P}), \quad \mathbf{V}^{[2]} = \mathbf{V}(\mathbf{Q},\mathbf{P}).$$

Таким образом можно получить гидродинамические уравнения для «бездивергентной среды»:

$$\sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial G_i^{[2]}}{\partial P_i} = 0, \quad \frac{\partial Q_k}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n-m} G_l^{[2]}\frac{\partial Q_k^{[2]}}{\partial P_l} = V_k^{[2]}, \quad k = \overline{1,m}, \tag{43}$$

где $V_k^{[2]}(\mathbf{Q},t) \equiv V_k^{[2]}(\mathbf{Q}(\mathbf{P},t),\mathbf{P})$, $G_j^{[2]}(\mathbf{Q},t) \equiv G_j^{[2]}(\mathbf{Q}(\mathbf{P},t),\mathbf{P})$.

Следовательно, исследование произвольной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, как и гидродинамических следствий уравнений Лиувилля и Власова, можно привести к анализу уравнений движения несжимаемой «фазовой жидкости».

5. Заключение

Основной задачей авторов является описание неравновесной динамики статистического ансамбля гравитационно взаимодействующих частиц, в условиях применимости нерелятивистского формализма одночастичных функций распределения, пребывающего в состоянии, близком к условно-равновесному (в окрестности обобщенных точек либрации многочастичной системы либо в условиях существенного влияния на динамику системы модифицированного закона гравитации с учетом космологического лямбда-члена), для которого уравнение Власова допускает «энергетическую подстановку» [2] для одночастичной функции распределения. В качестве основного физического предположения, обусловливающего правомерность математического формализма в данном пункте, было принято предположение, что кинетика массивных частиц рассматривается в 3- и 2-мерном случае. При этом возникают определенные ограничения на геометрические размеры области, в которой расположена система частиц [16] (решения нелинейного уравнения Лиувилля-Гельфанда, описывающего межчастичный потенциал в стационарном варианте граничной задачи для системы Власова-Пуассона, для случая размерности $d = 3$ приводят к «проблеме бесконечной массы» [11], а устойчивость регулярного решения Гельфанда возможна лишь в односвязной компактной области). Для случая размерности системы $d = 2$ получены результаты, свидетельствующие о возникновении решений уравнения Власова типа «страт», приводящих к формированию когерентных псевдохаотически распределенных «стенок» космологической структуры.

Список литературы

[1] McCrea W.H., Milne E.A. Newtonian universes and the curvature of space // The quarterly journal of mathematics. 1934. № 1. P. 73—80.

[2] Веденяпин В.В. О классификации стационарных решений уравнения Власова на торе и граничная задача // Доклады Академии наук. Российская академия наук, 1992. Т. 323. № 6. С. 1004—1006.

[3] Зельдович Я.Б. Теория крупномасштабной структуры Вселенной // Крупномасштабная структура Вселенной. М.: Мир. 1981. С. 452—465.

[4] Шандарин С.Ф., Дорошкевич А.Г., Зельдович Я.Б. Крупномасштабная структура Вселенной // Успехи физических наук. 1983. Т. 139. № 1. С. 83—134.

[5] Andreasson H. The Einstein-Vlasov system/kinetic theory // Living Reviews in Relativity. 2011. V. 14. № 1. P. 1—55.

[6] Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics, vol 2: Partial Differential Equations (1962).

[7] Gelfand I. Some problems in theory of quasilinear equations // AMS Trans. 1963. V. Ser.2, № 29. P. 295.

[8] Weston V. On the asymptotic solution of a partial differential equation with an exponential nonlinearity // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 1978. V. 9, № 6. P. 1030—1053.

[9] Moseley J.L. A two-dimensional Dirichlet problem with an exponential nonlinearity // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 1983. V. 14, № 5. P. 934—946.

[10] Bandle C. Isoperimetric inequalities for a nonlinear eigenvalue problem // Proceedings of the American Mathematical Society. 1976. V. 56, № 1. P. 243—246.

[11] Gurzadyan V., Fimin N., Chechetkin V. On the origin of cosmic web // The European Physical Journal Plus. 2022. V. 137, № 1. P. 1—8.

[12] E.N. Dancer, A. Farina // Proc. Amer. Math. Soc. 2009. V. 137, №. 1333.

[13] Веденяпин В., Фимин Н. Метод Гамильтона–Якоби в негамильтоновой ситуации и гидродинамическая подстановка // Доклады Академии наук. Т. 461. 2015. С. 136.

[14] Saltykow N. Etude sur les integrales d'un systeme des equations differentielles aux derivees partielles de plusieurs fonctions inconnues // Journal de Mathematiques pures et appliquees. 1897. V. 3. P. 423—428.

[15] Фимин Н.Н., Чечеткин В.М. Применение гидродинамической подстановки для систем уравнений с одинаковой главной частью // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2018. Т. 14, № 1. С. 53—61.

[16] Dupaigne L. Stable solutions of elliptic partial differential equations. CRC press, 2011.