



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 33 за 2022 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Р.С. Соломатин

О моделировании
формирования
нестационарного
турбулентного пограничного
слоя в рамках SA-IDDES
подхода

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Соломатин Р.С. О моделировании формирования нестационарного турбулентного пограничного слоя в рамках SA-IDDES подхода // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 33. 34 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-33>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-33>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Р.С. Соломатин

**О моделировании формирования
нестационарного турбулентного
пограничного слоя
в рамках SA-IDDES подхода**

Москва — 2022

Соломатин Р.С.^{1,2}

О моделировании формирования нестационарного турбулентного пограничного слоя в рамках SA-IDDES подхода

Рассматривается математическая модель и численный алгоритм для моделирования нестационарных турбулентных течений газа. Применяется IDDES подход на основе модели турбулентности Спаларта-Аллмараса (SA). Исследуется быстродействие расчетного алгоритма, базирующегося на комбинированном методе LU-SGS–GMRES, а также диссипативные свойства численной схемы в зависимости от метода дискретизации конвективных потоков с целью выбора оптимальной схемы для проведения моделирования в рамках вихререзающего подхода IDDES. На примере численного решения задачи по математическому моделированию нестационарного турбулентного пограничного слоя в прямоугольном периодическом канале для сверхзвукового потока выполняется верификация и валидация реализации IDDES подхода и исследуются свойства гибридных схем интегрирования по времени.

Ключевые слова: модель турбулентности Спаларта-Аллмараса, LU-SGS–GMRES алгоритм, IDDES подход, гибридная схема интегрирования по времени, пограничный турбулентный слой

Roman Sergeevich Solomatin

About modelling of unsteady turbulent boundary layer formation within SA-IDDES approach

A mathematical model and numerical algorithm for unsteady turbulent flows is considered. The IDDES approach based on the turbulence model of Spalart and Allmaras (SA) is applied. Performance of the computational algorithm, based on the LU-SGS–GMRES combined method, and scheme dissipation properties regarding convective fluxes discretization is investigated in order to choose optimal scheme for vortex-resolving IDDES modelling. Numerical solution of the unsteady turbulent boundary layer formation in rectangular periodic channel for supersonic flow is carried out to perform verification and validation of the IDDES approach realization and to study features of hybrid time marching schemes.

Key words: Spalart-Allmaras turbulence model, LU-SGS–GMRES algorithm, IDDES approach, hybrid time marching scheme, turbulent boundary layer

Работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН по теме № 0580-2021-0005 "Математическое моделирование динамических процессов в деформируемых и реагирующих средах с использованием многопроцессорных вычислительных систем" (№ 121031300050-6).

Автор выражает благодарность администрации МСЦ РАН за возможность проведения расчетов на многопроцессорных системах.

¹ ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, 117218 Москва, Нахимовский просп., 36, к. 1

² ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 125047 Москва, Миусская пл., 4

Введение

В последние десятилетия основным способом решения задач внутренней газодинамики, возникающих при разработке двигательных и энергетических установок, является математическое моделирование, что делает разработку высокоточных газодинамических моделей актуальной задачей современной науки.

Основным требованием к современным моделям является учет турбулентных явлений (вязкости, теплопроводности и диффузии) ввиду того, что именно турбулентные режимы течения газа реализуются в природе, а развитие математических моделей идет по пути создания «цифровых двойников», то есть максимального приближения к реальным условиям.

Однако моделирование турбулентных процессов является чрезвычайно сложной задачей, ввиду того что турбулентность имеет стохастическую природу, принципиально трехмерный и нестационарный характер, а также включает широкий спектр пространственно-временных масштабов.

В настоящее время разработано несколько основных подходов к моделированию турбулентности, каждый из которых обладает недостатками, так или иначе ограничивающими его область применения. Первым из подходов является прямое численное моделирование (DNS), предусматривающее решение уравнений Навье-Стокса с разрешением всех пространственно-временных масштабов. Главным его недостатком является исключительная вычислительная трудоемкость. Оценки показывают, что применение DNS требует увеличения вычислительных затрат $\sim Re^{11/4}$, где Re – характерное число Рейнольдса [1], что делает данный подход совершенно неприменимым к решению практических задач с характерными числами Рейнольдса порядка 10^6 . Единственная область применения прямого численного моделирования на сегодняшний день – фундаментальные расчеты, направленные на изучение законов турбулентности [2]. Решение же прикладных задач пока остается в будущем.

В противовес чрезвычайно трудоемкому подходу DNS был разработан подход, основывающийся на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS) [3]. В рамках данного подхода весь спектр турбулентных масштабов наоборот моделируется, что делает его наименее требовательным к вычислительным ресурсам. Однако с его использованием возможно получение только средних макрохарактеристик течения, что делает его применимым, когда достаточно получения либо стационарной картины решения, либо нестационарной невысокого качества (URANS). Также важной особенностью RANS подхода является необходимость использования полуэмпирической модели турбулентности, отвечающей за вычисление турбулентных характеристик потока. Сложность здесь заключается в отсутствии универсальной модели, пригодной для решения широкого спектра задач. Кроме

того, крупномасштабные турбулентные структуры, зависящие от конкретной геометрии, в принципе не могут быть описаны в рамках полуэмпирических моделей. Поэтому для решения каждой конкретной задачи необходимо подбирать наиболее подходящую модель турбулентности. В настоящее время общепринятым является решение о том, что для задач внешнего и внутреннего обтекания наилучшим образом подходят модели Ментера (Shear Stress Transport или SST модель) [4] и модель Спаларта-Аллмараса (SA модель) [5], однако и они не лишены недостатков.

В 80-х годах прошлого века появился метод моделирования крупных вихрей (Large Eddies Simulation, LES) [7], представляющий промежуточное звено между DNS и RANS. Главной особенностью данного подхода является замена осреднения характеристик реального турбулентного потока по времени (переход от уравнений Навье-Стокса к уравнениям Рейнольдса) «фильтрацией» данных характеристик от коротковолновых неоднородностей, то есть их пространственным осреднением по областям с размерами порядка размера фильтра. Применение LES подхода позволяет моделировать только мелкомасштабную часть турбулентного спектра (меньше размера фильтра), разрешая крупномасштабные структуры, не подчиняющиеся единым законам, что дает данному подходу преимущество над RANS. Однако метод крупных вихрей также является сильно трудоемким, и его применимость ограничивается доступными вычислительными ресурсами, требования к которым хоть и слабее, чем для DNS, в области отрывных течений, но приближаются к ним вблизи стенок.

Попытки максимизировать преимущества и минимизировать недостатки описанных выше подходов привели к созданию семейства гибридных методов моделирования отсоединенных вихрей (DES) [1]. Устройство классического DES подхода основывается на простом утверждении, что вблизи стенок он должен работать как RANS, а вдали от них как LES. Кроме этого, утверждается, что RANS модель турбулентности может быть использована в качестве подсеточной модели в LES зоне. Классический метод отсоединенных вихрей также обладает несколькими критическими недостатками, такими как зависимость от геометрии сетки и излишнее падение турбулентной вязкости вдали от стенок, что побудило создание более совершенных модификаций, таких как DDES [8] и IDDES [9]. Модификация IDDES будет рассмотрена далее в работе.

Несмотря на разнообразие подходов, описанных выше, необходимость производить расчеты на больших геометриях (внешнее обтекание самолета) и при больших числах Рейнольдса диктует использование RANS подхода для большинства прикладных расчетов вплоть до настоящего времени. LES, и тем более DNS используются в основном для фундаментальных исследований. Однако с ростом доступных вычислительных мощностей и требований к моделям, повышается количество расчетов с использованием гибридных

подходов, позволяющих получать нестационарное решение с разрешением турбулентных структур.

В настоящей работе была выполнена алгоритмическая и программная реализация IDDES подхода к моделированию турбулентности с использованием SA модели в рамках программного комплекса для моделирования пространственных течений вязкого, теплопроводного, многокомпонентного газа. Выбор модели турбулентности Спаларта-Аллмараса обусловлен рассмотрением в работе пристеночных течений, для описания которых модель хорошо приспособлена. Результаты работы касаются верификации и валидации численной реализации IDDES подхода на решении задачи о развитии нестационарного турбулентного пограничного слоя в периодическом канале для сверхзвукового потока.

1. Математическая модель

1.1. Система уравнений для вязкого многокомпонентного сжимаемого газа

Система уравнений Навье-Стокса для описания трехмерного течения вязкого, сжимаемого, теплопроводного, многокомпонентного газа может быть записана в следующем виде относительно вектора консервативных переменных:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{U}) = 0, \\ \frac{\partial (\rho \vec{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + p) \vec{U}) = \nabla \cdot [\vec{U} \cdot \boldsymbol{\tau} + \vec{\zeta}] \end{cases}, \quad (1.1.1)$$

где ρ_i – плотность i -го компонента, $\rho = \sum \rho_i$ – плотность смеси, p – давление, $\vec{U} = (U_x, U_y, U_z)$ – вектор скорости, $\boldsymbol{\tau}$ – тензор вязких напряжений, $E = C_v T + 0.5(U_x^2 + U_y^2 + U_z^2)$ – удельная полная энергия газа, $\vec{\zeta}$ – вектор плотности теплового потока.

К данной системе уравнений может быть применена процедура осреднения по Рейнольдсу в случае несжимаемой жидкости и по Фавру при учете сжимаемости [3]. Тогда система (1.1.1) перейдет в систему уравнений Рейнольдса (знаки осреднения опущены):

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{U}) = 0, \\ \frac{\partial (\rho \vec{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_m + \boldsymbol{\tau}_t), \\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + p) \vec{U}) = \nabla \cdot [\vec{U} \cdot (\boldsymbol{\tau}_m + \boldsymbol{\tau}_t) + (\vec{\zeta}_m + \vec{\zeta}_t)] \end{cases} \quad (1.1.2)$$

где $\boldsymbol{\tau}_m, \boldsymbol{\tau}_t$ – молекулярная и турбулентная составляющие тензора вязких напряжений, $\vec{\zeta}_m, \vec{\zeta}_t$ – молекулярная и турбулентная составляющие вектора плотности теплового потока. Основные характеристики газа связываются уравнением состояния. Газ считается идеальным.

$$\rho = \frac{pm}{RT}, \quad (1.1.3)$$

где m – молекулярная масса газовой смеси, T – температура, R – универсальная газовая постоянная.

Молекулярные составляющие тензора напряжений и вектора плотности теплового потока в (1.1.2) определяются с помощью реологического закона Ньютона и закона теплопроводности Фурье:

$$\boldsymbol{\tau}_m = 2\mu(T) \left(\boldsymbol{S} - \frac{1}{3} \boldsymbol{I} \nabla \cdot \vec{U} \right), \quad \vec{\zeta}_m = -\lambda(T) \nabla T, \quad (1.1.4)$$

где $\boldsymbol{S} = 0.5 \left(\nabla \vec{U} + [\nabla \vec{U}]^t \right)$ – тензор скоростей деформаций, \boldsymbol{I} – единичный тензор, $\mu(T), \lambda(T)$ – коэффициенты молекулярной динамической вязкости и теплопроводности, зависящие от температуры.

Система уравнений (1.1.2) замыкается уравнениями модели турбулентности, задающими связь турбулентных составляющих тензора напряжений $\boldsymbol{\tau}_t$ и вектора плотности теплового потока $\vec{\zeta}_t$ с параметрами течения. В данной работе используется модель Спаларта-Аллмараса (SA) [5], которая является линейной, что означает, что могут быть применены гипотеза Буссинеска для определения $\boldsymbol{\tau}_t$ и закон Фурье для определения турбулентного теплового потока аналогично молекулярному.

$$\boldsymbol{\tau}_t = 2\mu_t \left(\boldsymbol{S} - \frac{1}{3} \boldsymbol{I} \nabla \cdot \vec{U} \right) + \frac{2}{3} k \boldsymbol{I}, \quad \vec{\zeta}_t = -\lambda_t \nabla T, \quad (1.1.5)$$

где μ_t – коэффициент турбулентной динамической вязкости, $k = 0.5 \left(\overline{U_x'^2} + \overline{U_y'^2} + \overline{U_z'^2} \right)$ – кинетическая энергия турбулентности, U_i' –

пульсационные составляющие скорости, λ_t – коэффициент турбулентной теплопроводности.

Оригинальная SA модель состоит из одного уравнения для переноса модифицированной турбулентной вязкости. В данной работе применяется классическая модель [5] с поправкой, предотвращающей отрицательные значения модифицированной завихренности \tilde{S} , введенной авторами модели в работе [6].

Дополнительно задается связь коэффициентов вязкости с коэффициентами теплопроводности, которая носит название аналогии Рейнольдса:

$$\lambda = \frac{C_p \mu}{Pr}. \quad (1.1.6)$$

Данное отношение используется как для молекулярных коэффициентов переноса, так и для турбулентных. Число Прандтля Pr и его турбулентный аналог Pr_t полагаются постоянными.

На твердых стенках для системы уравнений Рейнольдса ставятся условия прилипания и непроницаемости для скорости

$$\vec{U} = 0 \quad (1.1.7)$$

и условия первого $T = T_w$ или второго $\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \zeta_w$ рода по температуре.

В случае дозвуковых течений обычно используются условие массового расхода на входной границе и заданное давление на выходной. Для сверхзвуковых течений на входе задаются параметры потока, а на выходе значения экстраполируются из расчетной области.

1.2. Усовершенствованный метод моделирования отсоединенных вихрей с отложенным переходом (IDDES)

Система уравнений, на которой базируется метод моделирования крупных вихрей, может быть получена из системы уравнений Навье-Стокса (1.1.1) путем представления каждой величины как суммы крупно- и мелкомасштабной составляющих и применения процедуры фильтрации. После этого величина раскладывается на разрешаемую и моделируемую (подсеточную) составляющие соответственно. После проведения данных операций уравнения принимают следующую форму [7]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \bar{U}) = 0, \\ \frac{\partial (\rho \bar{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{U} \bar{U}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_m + \boldsymbol{\tau}_{SGS}), \\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{U} H) = \nabla \cdot [\bar{U} \cdot (\boldsymbol{\tau}_m + \boldsymbol{\tau}_{SGS}) + (\vec{\zeta}_m + \vec{\zeta}_{SGS})], \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Несмотря на кажущееся незначительное отличие от уравнений Рейнольдса (1.1.2) в обозначении дополнительных слагаемых в уравнениях импульса и энергии: “SGS” (sub-grid scale) вместо индекса “t” (turbulent) в системе (1.1.2), в нем кроется различие подходов RANS и LES, которое проявляется при замыкании системы.

Несмотря на то, что подсеточные модели также базируются на применении гипотезы Буссинеска и закона Фурье, методы определения турбулентной и подсеточной вязкости в большинстве случаев отличаются. Однако в определенных случаях модель турбулентности может быть преобразована в подсеточный аналог и использована в рамках LES подхода. На данном принципе основано семейство гибридных методов отсоединенных вихрей, один из которых применен в настоящей работе.

Важнейшим параметром, определяющим работу SA модели, является характерный линейный масштаб. В SA-RANS линейным масштабом является расстояние до стенки d_w . В то же время, характерным масштабом, на который опираются подсеточные модели метода LES, является размер фильтра Δ . Например, в качестве размера фильтра могут выступать либо средний $\Delta = \sqrt[3]{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}$, либо максимальный $\Delta = \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ шаг сетки в рассматриваемой точке.

Замена характерного линейного масштаба в SA модели турбулентности на размер фильтра в LES (умноженного на калибровочную константу) дает ее подсеточный аналог [1]:

$$\frac{d\tilde{\nu}_{SGS}}{dt} = P^v - D^v + \frac{1}{\sigma} \left\{ \nabla \cdot [(v + \tilde{\nu}_{SGS}) \nabla \tilde{\nu}_{SGS}] + c_{b2} [(\nabla \tilde{\nu}_{SGS}) \cdot (\nabla \tilde{\nu}_{SGS})] \right\}, \quad (1.2.2)$$

где $\tilde{\nu}_{SGS}$ – модифицированная подсеточная вязкость, а в формулы для вычисления P^v и D^v (см. [5]) вместо d_w подставляется $C_{LES} \Delta$. Остальные обозначения совпадают с обозначениями оригинальной модели.

На переключении между характерными линейными масштабами RANS и LES построено семейство гибридных методов отсоединенных вихрей DES. В настоящей работе будет применен подход SA-IDDES [9].

В соответствии с [9] характерный линейный масштаб для метода IDDES определяется как

$$l_{IDDES} = \tilde{f}_d (1 + f_e) l_{RANS} + (1 - \tilde{f}_d) l_{LES}, \quad (1.2.3)$$

где $l_{RANS} = d_w$, $l_{LES} = \Psi C_{DES} \Delta$. Ψ – функция, предотвращающая резкое падение турбулентной вязкости в области низких чисел Рейнольдса (см. [9]).

Также в IDDES используется более сложное выражение для характерного размера фильтра Δ . Здесь он зависит не только от шагов сетки, но и от расстояния от рассматриваемой точки до ближайшей стенки d_w и определяется как

$$\Delta = \min \left[\max (C_w d_w, C_w h_{\max}, h_{wn}), h_{\max} \right], \quad (1.2.4)$$

где h_{\max} – максимальный шаг сетки в рассматриваемой точке, h_{wn} – шаг сетки по нормали к стенке, $C_w = 0.15$ – эмпирическая константа.

Эмпирические функции \tilde{f}_d и f_e в (1.2.3) предназначены для правильной координации работы RANS и LES ветвей IDDES. В присоединенном пограничном слое при наличии нестационарных структур IDDES работает как LES с пристеночным моделированием, то есть как RANS в тонкой области вблизи стенки и как LES в остальной области.

Функция \tilde{f}_d отвечает за переход между RANS и LES областями:

$$\tilde{f}_d = \max \left\{ (1 - f_{dt}), f_B \right\}, \quad (1.2.5)$$

где функция f_{dt} определяет местоположение перехода на основе характеристик потока, а функция f_B – на основе характеристик расчетной сетки.

$$f_{dt} = 1 - \tanh \left[(20r_{dt})^3 \right], \quad r_{dt} = \frac{v_t}{\kappa^2 d_w^2 \max \left\{ \left[0.5 (S^2 + \Omega^2) \right]^{1/2}, 10^{-10} \right\}} \quad (1.2.6)$$

$$f_B = \min \left\{ 2 \exp(-9\alpha^2), 1 \right\}, \quad \alpha = 0.25 - d_w / h_{\max}.$$

Функция f_e в свою очередь служит для компенсации резкого снижения уровня турбулентной вязкости в зоне перехода и определяется выражением

$$f_e = \max (f_{e1} - 1, 0) \Psi f_{e2}, \quad (1.2.7)$$

где

$$f_{e1} = \begin{cases} 2 \exp(-11.09\alpha^2), & \alpha \geq 0 \\ 2 \exp(-9.0\alpha^2), & \alpha < 0 \end{cases}, \quad f_{e2} = 1 - \max (f_t, f_l), \quad (1.2.8)$$

$$f_l = \tanh \left[(c_l^2 r_{dl})^{10} \right], \quad f_t = \tanh \left[(c_t^2 r_{dt})^3 \right],$$

а величина r_{dl} представляет ламинарный аналог величины r_{dt} . Константы входящие в формулы для f_l и f_t равняются соответственно $c_l = 3.55, c_t = 1.63$ [9].

1.3. Общая формулировка математической модели

Добавим уравнение модели турбулентности в систему (1.1.2), а также введем дополнительные слагаемые в выражения для вязких потоков массы и энергии для учета межкомпонентной диффузии. Получим модифицированную систему (1.1.2) в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{U}) = \nabla \cdot (\rho \vec{I}_i), \\ \frac{\partial (\rho \vec{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_m + \boldsymbol{\tau}_{DES}), \\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + p) \vec{U}) = \nabla \cdot [\vec{U} \cdot (\boldsymbol{\tau}_m + \boldsymbol{\tau}_{DES}) + (\vec{\zeta}_m + \vec{\zeta}_{DES})] + \nabla \cdot \left(\rho \sum_i H_i \vec{I}_i \right), \\ \frac{\partial \tilde{\nu}_{DES}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\nu}_{DES} \vec{U}) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\sigma} (\nu + \tilde{\nu}_{DES}) \nabla \tilde{\nu}_{DES} \right) + P^v - D^v + \frac{c_{b2}}{\sigma} [(\nabla \tilde{\nu}_{DES}) \cdot (\nabla \tilde{\nu}_{DES})] \end{array} \right. ,$$

(1.3.1)

где $\vec{I}_i = (I_{i,x}, I_{i,y}, I_{i,z})$ – вектор диффузионного потока i -го компонента по направлениям, H_i – удельная энтальпия компонента, $\tilde{\nu}_{DES} = \mu_{DES} f_{v1} / \rho$, μ_{DES} – турбулентная вязкость в зоне RANS и подсеточная вязкость в зоне LES.

Молекулярная вязкость вычисляется по формуле Сазерленда:

$$\mu = \mu_0 \frac{T_0 + C}{T + C} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2}, \quad (1.3.2)$$

где μ_0 – вязкость вещества при контрольной температуре T_0 , C – постоянная Сазерленда, T – температура.

Так как перенос вязкости привязан к переносу массы, конвективные потоки для последнего уравнения в системе (1.3.1) вычисляются по формуле:

$$F_{\tilde{\nu}} = \frac{\tilde{\nu}}{\rho} F_m, \quad (1.3.3)$$

где F_m – поток массы через грань, $\tilde{\nu} / \rho$ – аппроксимированное на грань значение из той ячейки, в которой поток массы через грань положительный. Отдельное граничное условие для конвективного потока модифицированной турбулентной вязкости на стенках не ставится, поскольку там уже стоят условия непротекания.

На гранях, имеющих тип стенки, ставится условие обращения модифицированной турбулентной вязкости в ноль. На границе типа «вход» устанавливается условие первого рода, а на границе типа «выход» значение вязкости экстраполируется из внутренних точек области.

Диффузионный поток i -го компонента в направлении x_j вычисляется по закону Фика:

$$I_{i,x_j} = -D \frac{\partial n_i}{\partial x_j}, \quad (1.3.4)$$

где $n_i = \rho_i / \rho$ – концентрация компонента, D – коэффициент диффузии, определяемый из коэффициентов молекулярной и турбулентной вязкости через число Шмидта и его турбулентный аналог

$$D = \frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_{DES}}{Sc_t}. \quad (1.3.5)$$

Как и ламинарное и турбулентное числа Прандтля, числа Шмидта полагаются постоянными.

2. Численный метод

Пространственная дискретизация системы уравнений (1.3.1) основана на методе конечных объёмов. Расчетная область разделяется на произвольные непересекающиеся многогранники, каждая грань которых является плоской и характеризуется площадью и единичной внешней нормалью. Для произвольной i -й расчетной ячейки после интегрирования (1.3.1) по времени получаем

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} V_i + \iiint_{V_i} \left(\frac{\partial (\vec{F}_x - \vec{G}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\vec{F}_y - \vec{G}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\vec{F}_z - \vec{G}_z)}{\partial z} \right) dx dy dz = \vec{S}_i V_i, \quad (2.1.1)$$

где \vec{q} – вектор переменных в консервативной форме, \vec{F}_{x_i} – вектора конвективных потоков, \vec{G}_{x_i} – вектора вязких потоков, \vec{S} – вектор источников, V_i – объем ячейки.

Переход к поверхностному интегралу позволяет переписать это уравнение в виде:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} V_i + \sum_{\sigma} \iint_{S_{\sigma}} (\vec{F} - \vec{G}) \cdot \vec{n}_{\sigma} ds = \vec{S}_i V_i, \quad (2.1.2)$$

где σ обозначает грань ячейки, \vec{n}_{σ} – вектор единичной внешней нормали к грани σ , $\vec{F} = \{\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z\}$, $\vec{G} = \{\vec{G}_x, \vec{G}_y, \vec{G}_z\}$.

Значения конвективных потоков \vec{F} и вязких потоков \vec{G} являются интерполированными значениями из центра ячеек на грань σ . Для интерполяции используется основанная на MUSCL (monotonic upwind scheme for conservation laws) подходе схема Ван Лира [10, 11], имеющая 3-й порядок точности на равномерных сетках и обобщенная на неравномерные сетки. Для повышения устойчивости расчета при интерполяции могут быть использованы ограничители потока MINMOD [12] или van Albada 2 [13]. Ряд расчетов проведен с использованием процедуры коррекции потока. В этом случае значение на грани вычисляется в соответствии с интерполяционной схемой, и после этого корректируется с применением функции median [14], выбирающей из трех значений то, что лежит между двумя другими, для обеспечения невозникновения новых экстремумов.

$$q_\sigma = \text{median}(q_\sigma, q_i, q_{\sigma(i)}), \quad (2.1.3)$$

где $\sigma(i)$ – номер ячейки соседней с i -ой по грани σ .

Пусть \bar{q}_i^n – решение на n -ом слое, Δt – шаг по времени, $\vec{F}_\sigma, \vec{G}_\sigma$ – нормальные потоки через грань σ . Тогда, переходя к разностной аппроксимации производной по времени, получим систему разностных уравнений:

$$\bar{q}_i^{n+1} = \bar{q}_i^n - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_\sigma s_\sigma (\vec{F}_\sigma - \vec{G}_\sigma) + \bar{S}^n \Delta t, \quad (2.1.4)$$

где $\vec{F}_\sigma = F_{k,\sigma} n_k, \vec{G}_\sigma = G_{k,\sigma} n_k$.

Для преодоления ограничений на временной шаг, связанный с использованием явной схемы, применяется гибридная явно-неявная схема, разработанная И. Меншовым и Й. Накамура [15]. Для её реализации в каждой расчетной ячейке вводится параметр гибридности $\omega \in [0,1]$, а также промежуточный временной слой, обозначаемый ω_i , значения на котором вычисляются как

$$\bar{q}_i^{\omega_i} = \bar{q}_i^n + (1 - \omega_i) (\bar{q}_i^{n+1} - \bar{q}_i^n). \quad (2.1.5)$$

В явном случае ($\omega_i = 1$) данная схема обращается в схему предиктор-корректор, имеющую второй порядок точности по времени. В гибридном режиме схема имеет минимальную численную диссипацию при выполнении принципа невозрастания максимума

$$\begin{aligned}\vec{q}_i^* &= \vec{q}_i^{\omega_i} - \frac{\Delta t}{2V_i} \omega_i \sum_{\sigma} (\vec{F}_{\sigma}^{\omega_i} - \vec{G}_{\sigma}^{\omega_i}) s_{\sigma} + \omega_i \frac{\Delta t}{2} \vec{S}_i^{\omega_i}, \\ \vec{q}_i^{n+1} &= \vec{q}_i^n - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{\sigma} (\vec{F}_{\sigma}^* - \vec{G}_{\sigma}^*) s_{\sigma} + \Delta t \vec{S}_i^*.\end{aligned}\tag{2.1.6}$$

Также в программном комплексе реализована возможность использования неявной схемы Кранка-Николсон (К-Н) для получения второго порядка аппроксимации по времени. Схема (2.1.6) преобразуется в схему К-Н путем использования $\omega_i = 0.5$ и отключения работы предиктора. Однако использование схемы К-Н вблизи стенок, где шаг по критерию устойчивости является очень малым, может приводить к ухудшению сходимости. Для предотвращения этого, вблизи стенок схема переходит в неявную схему первого порядка, то есть в неявную схему Эйлера. Для этого перехода используется дополнительная функция θ . Классический вид схемы К-Н

$$V_i \frac{\vec{q}_i^{n+1} - \vec{q}_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \vec{R}(\vec{q}_i^{n+1}) + \frac{1}{2} \vec{R}(\vec{q}_i^n) = 0,\tag{2.1.7}$$

где $\vec{R}(\vec{q})$ – вектор невязки, преобразуется как

$$V_i \frac{\vec{q}_i^{n+1} - \vec{q}_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (1 + \theta) \vec{R}(\vec{q}_i^{n+1}) + \frac{1}{2} (1 - \theta) \vec{R}(\vec{q}_i^n) = 0,\tag{2.1.8}$$

где

$$\theta = \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \left(\frac{d_w - d_t}{0.2 d_t} \right) \right),\tag{2.1.9}$$

здесь d_w – расстояние от стенки, константа d_t используется для регулировки расстояния от стенки, на котором осуществляется переход на схему К-Н [16].

В качестве основного алгоритма решения системы уравнений (2.1.6) используется комбинированный метод LU-SGS–GMRES [17]. Матрица, получаемая в результате приближенной факторизации уравнений методом LU-SGS (Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel), используется в качестве предобуславливателя для метода наименьших невязок GMRES с целью повышения скорости сходимости. Однако в то же время использование GMRES повышает требование к расходу памяти, а следовательно, эффективность использования комбинированного метода зависит от конкретной задачи.

Преимущество метода LU-SGS состоит в том, что его использование позволяет избежать хранения и операции обращения разреженных матриц большой размерности, что позволяет существенно сократить расход памяти вычислительных систем и повысить производительность. Кроме того, используемые модификации позволяют полностью избежать операции обращения матриц. Формулировка метода LU-SGS в терминах приращения

вектора консервативных переменных может быть представлена в следующем виде [18, 19]:

$$\begin{cases} \delta \vec{q}_i^{s,*} = -\frac{1}{\left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau} + 1\right) + d_i} \left[\vec{R}_i^s + \sum_{\sigma(i); \sigma(i) < i} \vec{G}_\sigma \left(\delta \vec{q}_{\sigma(i)}^{s,*} \right) \right], \\ \delta \vec{q}_i^s = \delta \vec{q}_i^{s,*} - \frac{1}{\left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau} + 1\right) + d_i} \left[\sum_{\sigma(i); \sigma(i) > i} \vec{G}_\sigma \left(\delta \vec{q}_{\sigma(i)}^s \right) \right], \end{cases} \quad (2.1.10)$$

$$\vec{G}_\sigma \left(\delta \vec{q}^s \right) = 0.5 \frac{\Delta t}{V_i} s_\sigma \left(1 - \omega_{\sigma(i)} \right) \left[\mathbf{T}_{\sigma(i)}^{-1} \delta \vec{f}_{\sigma(i)}^s - \left(\rho_\sigma - 2\vec{v}_\sigma \right) \delta \vec{q}_{\sigma(i)}^s \right],$$

где $\Delta \tau$ – итерационный параметр внутри шага по времени, называемый «псевдовремя», \mathbf{T} – матрица перехода к локальному ортонормированному базису на грани ячейки, ρ_σ – спектральный радиус матрицы Якоби, а \vec{v}_σ – вектор диагональных элементов матрицы, мажорирующей Якобиан, \vec{R}_i – вектор невязки

$$\vec{R}_i^s = \vec{R} \left(\vec{q}_i^{n+1,s} \right) = \vec{q}_i^{n+1,s} - \vec{q}_i^n + \frac{\Delta t}{V_i} \sum_\sigma s_\sigma \left(\vec{F}_\sigma^{\omega,s} - \vec{G}_\sigma^{\omega,s} \right) + S_i^{\omega,s} \Delta t, \quad (2.1.11)$$

где s – номер итерации,

$$d_i = 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta \tau} (1 - \omega_i) \sum_\sigma s_\sigma (\rho_\sigma - 2\vec{v}_\sigma). \quad (2.1.12)$$

Символ δ обозначает итерационную невязку – разность векторов консервативных переменных и потоков на соседних итерациях:

$$\begin{aligned} \delta \vec{q}_i^s &= \vec{q}_i^{n+1,s+1} - \vec{q}_i^{n+1,s} \\ \delta \vec{f}_{\sigma(i)}^s &= \vec{f}_1 \left(\vec{q}_{\sigma(i)}^{n+1,s+1} \right) - \vec{f}_1 \left(\vec{q}_{\sigma(i)}^{n+1,s} \right) \end{aligned}$$

где $\vec{f}_1(\vec{q})$ – функция одномерного потока через грань.

При использовании схемы интегрирования по времени К-Н система (2.1.10) преобразуется в соответствии с (2.1.8).

В качестве основного метода для вычисления невязки потоков в (2.1.1) используется метод Годунова [20], основанный на точном решении задачи Римана для интерполированных на грань значений. Вместе с тем, использовался также гибридный численный поток, вычисляемый по формуле

$$f = \varphi f_R + (1 - \varphi) f_{CD}, \quad (2.1.13)$$

где f_R – поток, вычисляемый по методу Русанова, f_{CD} – поток, вычисляемый по методу центральных разностей, $\varphi \in [0,1]$ – коэффициент гибридизации потока. Критерий динамического определения коэффициента φ основан на градиенте давления [21]:

$$\varphi = \min[\max[\varphi_{\min}, \varphi(\text{grad}(P))], 1.0], \quad (2.1.14)$$

где φ_{\min} – минимальное значение коэффициента гибридизации, которое обеспечивает устойчивый расчет. Величина $\varphi(\text{grad}(P))$ в свою очередь определяется как:

$$\begin{aligned} \varphi(\text{grad}(P)) &= k_\varphi \max(\varphi_i, \varphi_j), \\ \varphi_i &= \frac{\left| \sum_{\sigma(i)} (p_{\sigma,j} - p_{\sigma,i}) \right|}{\sum_{\sigma(i)} (p_{\sigma,i} + p_{\sigma,j})}, \\ \varphi_j &= \frac{\left| \sum_{\sigma(j)} (p_{\sigma,i} - p_{\sigma,j}) \right|}{\sum_{\sigma(j)} (p_{\sigma,i} + p_{\sigma,j})}, \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

где i и j – ячейки, разделяемые гранью σ так, что нормаль к грани направлена из ячейки i в ячейку j , $\sigma(i)$ и $\sigma(j)$ – наборы граней ячеек i и j соответственно, k_φ – константа схемы, регулирующая скорость роста диссипации в области больших градиентов.

Вязкие потоки, в свою очередь, определяются с помощью обобщенного метода центральных разностей.

Для ускорения сходимости на шаге был реализован алгоритм сглаживания невязки [22]. Данный алгоритм основан на использовании сглаживающего оператора Лапласа.

$$\bar{R}_i = R_i + \varepsilon \sum_j (\bar{R}_j - \bar{R}_i), \quad (2.1.16)$$

где R_i – несглаженная невязка в i -й ячейке, \bar{R} – сглаженная невязка, ε – параметр сглаживания.

Суммирование выполняется по соседям i -й ячейки. Уравнение (2.1.16) может быть решено с помощью метода Якоби

$$\bar{R}_i^m = \frac{R_i + \varepsilon \sum_{j=1}^N \bar{R}_j^{m-1}}{1 + \varepsilon N}, \quad (2.1.17)$$

где m – итерация сглаживания невязки, N – количество соседей ячейки.

3. Результаты

Реализованные алгоритмы были использованы для проведения вычислительных экспериментов по сравнению устойчивости, быстродействия и уровня численной вязкости для выбора схемы, оптимальной для проведения расчетов с использованием вихререзающего подхода IDDES. Для исследования численных схем было выбрано две тестовых задачи: формирование стационарного турбулентного слоя на плоской пластине [23], а также модельный тест, рассматривающий взаимодействие ударной волны с неоднородной средой (Shu-Osher [24]). С использованием гибридной явно-неявной схемы и гибридной схемы К-Н была решена задача о формировании нестационарного турбулентного пограничного слоя в канале с сверхзвуковым потоком газа. Проведено сравнение результатов расчетов по обеим схемам.

3.1. Сравнение быстродействия схем LU-SGS и GMRES+LU-SGS в задаче о турбулентном пограничном слое

Как было отмечено в предыдущей главе, применение комбинированного метода GMRES-LU-SGS позволяет увеличить скорость сходимости, однако повышает расходы по памяти и усложняет алгоритм с вычислительной точки зрения. Для определения того, насколько оправданно использование более трудоемкого метода с точки зрения общей производительности, была проведена серия расчетов задачи о формировании стационарного пограничного слоя на плоской пластине.

На пластине задавались условия прилипания и адиабатической стенки, на входной границе выставлялось условие массового расхода, на выходной – фиксированное давление. Верхняя граница расчетной области была достаточно отдалена от пластины для исключения ее влияния на решение. Расчетная сетка и параметры потока брались из [23]. Задача решалась с использованием RANS подхода, валидация которого представлена в [25].

Задача решалась с использованием численных методов LU-SGS, GMRES+LU-SGS с различной размерностью пространства Крылова, а также с применением алгоритма сглаживания невязки. Критерием быстродействия считалось количество итераций, за которое относительная невязка достигала заданного значения и общее время выполнения расчета. Конвективные потоки рассчитывались по методу Годунова, при интерполяции на грань использовался ограничитель потока MINMOD. Все расчеты выполнялись в однопроцессорном режиме.

Расчеты проводились до достижения относительной невязкой значения 0.001, однако анализировалось не только общее время, но и время достижения невязкой значений 0.1 и 0.01. На Рис. 1 представлены графики относительной

невязки для расчетов с различными параметрами. Буквами RS (Residual Smoothing) обозначается применение алгоритма сглаживания невязки. После идут параметры алгоритма в формате (n_{iter}, ε) , то есть RS(2; 0.5) означает две итерации сглаживания невязки с параметром $\varepsilon = 0.5$.

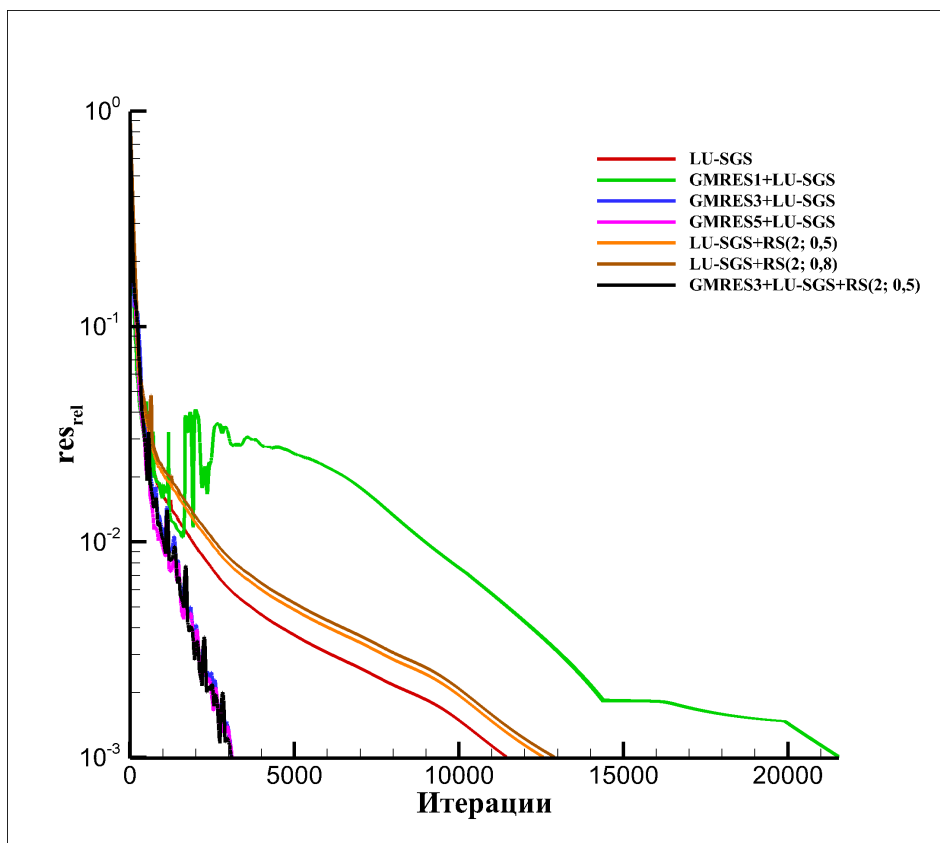


Рис. 1. Профили относительной невязки для различных схем до значения 0.001

Результаты расчетов были сведены в таблицу, представленную далее. В таблице представлена информация о времени расчета и количестве итераций, необходимых для достижения определенных значений относительной невязки.

Таблица 1.

Время выполнения расчетов и необходимое количество итераций

Используемая схема	$res_{rel} = 0.1$		$res_{rel} = 0.01$		$res_{rel} = 0.001$	
	N_{iter}	t_{calc} [сек]	N_{iter}	t_{calc} [сек]	N_{iter}	t_{calc} [сек]
LU-SGS	165	7.65	1912	83.5	11472	483.4
GMRES1+LU-SGS	154	12.8	8966	662	21555	1494
GMRES3+LU-SGS	262	31.9	1071	130.6	3084	376.7
GMRES5+LU-SGS	195	34.8	953	164.7	3105	534.6
LU-SGS+RS(2; 0.5)	216	10.6	2450	110.2	12589	574.5
LU-SGS+RS(2; 0.8)	231	11	2595	121.1	12928	601.8
GMRES3+LU-SGS+RS(2; 0.5)	242	32.5	1026	137.3	3080	399.3

По результатам исследования можно сделать следующие выводы. Использование комбинированного метода GMRES+LU-SGS позволяет повысить скорость сходимости, однако его применение оправданно, только если необходима сходимость по относительной невязке на три и более порядков. В остальных случаях возрастающая трудоемкость каждой расчетной итерации «компенсирует» уменьшение их количества. Использование метода GMRES+LU-SGS с размерностью пространства Крылова 1 является нецелесообразным, так как данная схема показывает наихудшую скорость сходимости. Однако, с другой стороны, использование слишком большой размерности пространства Крылова существенно увеличивает вычислительные затраты, но не приводит к пропорциональному сокращению количества итераций.

Использование в данной задаче алгоритма сглаживания невязки также не приводит к существенному приросту быстродействия так как для схемы LU-SGS профиль невязки является гладким и необходимости в этом нет, а для комбинированного метода GMRES+LU-SGS небольшое сокращение количества итераций не компенсирует возрастающую трудоемкость и не приводит к ускорению.

3.2. Тест Shu-Osher о взаимодействии ударной волны с неоднородной средой

Данный тест является классическим для исследования точности, устойчивости и диссипативных свойств численных схем. Постановка является одномерной, что позволяет проводить параметрические серии расчетов.

Рассматривается область $X \in [-5, 5]$. В соответствии с [24] в области выставляются следующие граничные условия, соответствующие взаимодействию ударной волны с числом Маха $M = 3$ со средой, имеющей синусоидальное распределение плотности:

$$\begin{cases} \rho = 3.857143, & u = 2.629369, & P = 10.33333 & \text{для } x < -4 \\ \rho = 1 + 0.2 \sin 5x, & u = 0.0, & P = 1 & \text{для } x \geq -4 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

На правой границе устанавливается граничное условие стенки, на левой – сверхзвуковое входное условие с параметрами, соответствующими $x < -4$.

Решение рассматривалось в момент времени $t = 1.8$ мс. Сначала на очень подробной равномерной сетке, состоящей из 400 тыс. ячеек, был проведен контрольный расчет схемой первого порядка по пространству и времени. Конвективные потоки считались по методу Годунова.

Далее было проведено сравнение полученного решения с решением, представленным в [24] для определения местоположения и величины физических осцилляций на профиле плотности. Условия задачи предполагают возникновение осцилляций за ударной волной, и, ввиду отсутствия аналитического решения, данный анализ необходим для дальнейшего

выявления «паразитных» осцилляций, порождённых неустойчивостью схемы. Результат сравнения приводится на Рис. 2.

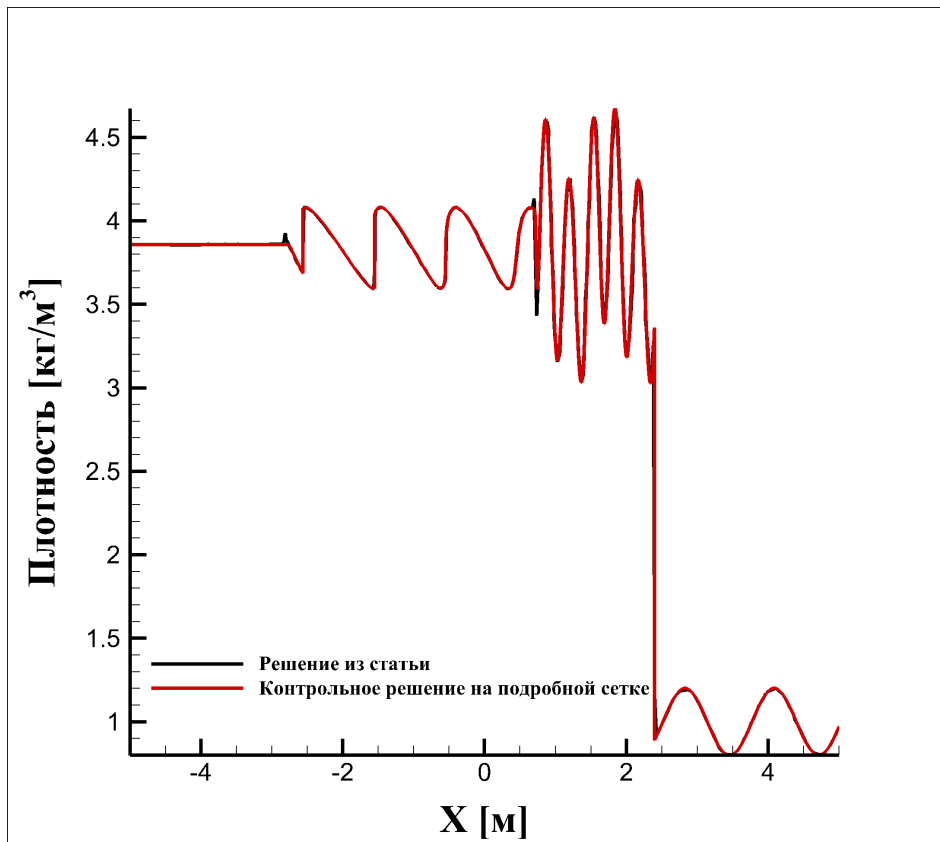


Рис. 2. Профили плотности для контрольного расчета и расчета из [24]

Можно видеть, что результат контрольного расчета хорошо совпадает с профилем из статьи [24], далее будем рассматривать его как точное решение.

Все последующие вычисления проводились на равномерной сетке, состоящей из 400 ячеек, с использованием различных схем расчета конвективных потоков и ограничителей. В расчетах использовалась гибридная явно-неявная схема. Шаг по времени составлял $dt = 1$ мкс, что соответствовало явной схеме и второму порядку аппроксимации по времени.

На Рис. 3 представлены профили плотности и давления для расчетов с использованием метода Годунова для расчета конвективных потоков.

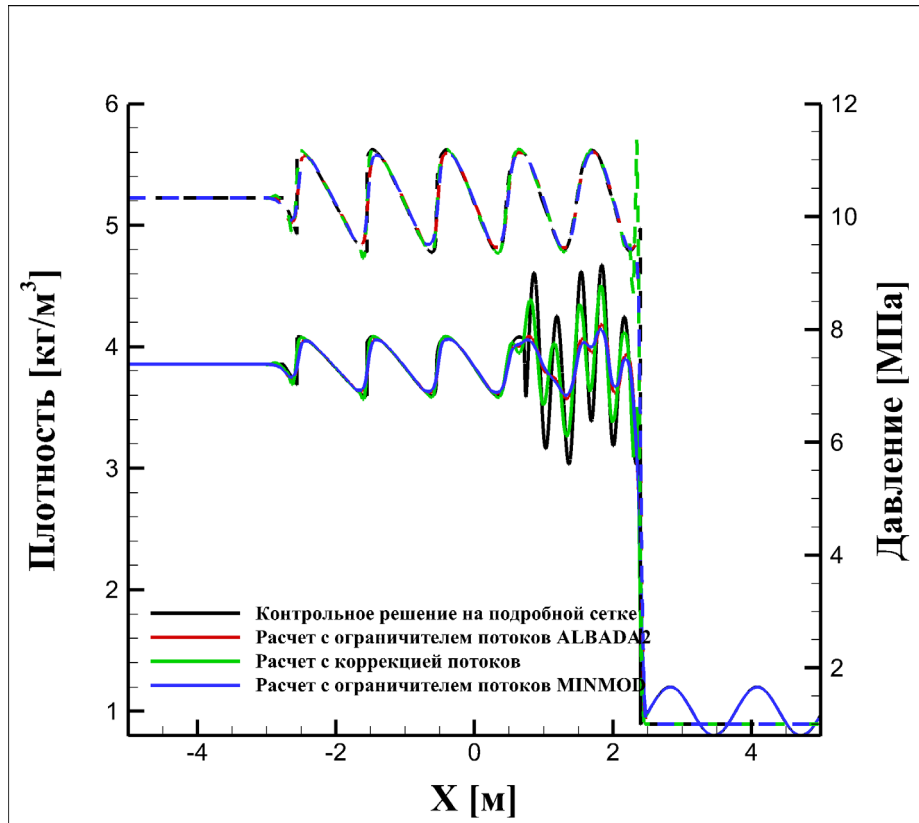


Рис. 3. Профили плотности (сплошные линии) и давления (пунктирные линии) для расчетов с использованием метода Годунова

Как можно видеть на Рис. 3, использование ограничителей при интерполяции на грань приводит к существенному размазыванию и уменьшению амплитуды физических осцилляций, в то время как расчет с коррекцией потока (2.1.3) показывает достаточно низкий уровень схемной вязкости. В то же время расчет с коррекцией потока (2.1.3) приводит к возникновению осцилляций по давлению за ударной волной, которые, однако, не приводят в дальнейшем к развитию неустойчивости за ударной волной.

Далее на Рис. 4 приводятся результаты расчетов с вычислением конвективных потоков с помощью гибридного метода (2.1.13) - (2.1.15) с параметрами $\varphi_{\min} = 0.2$; $k_{\varphi} = 50$. Кроме расчетов с использованием ограничителей потока ALBADA2 и MINMOD, а также расчета с коррекцией потока (2.1.3) на рисунке представлен расчет с использованием ограничителя ALBADA2 только в узкой области в окрестности ударной волны и отключением вне данной области.

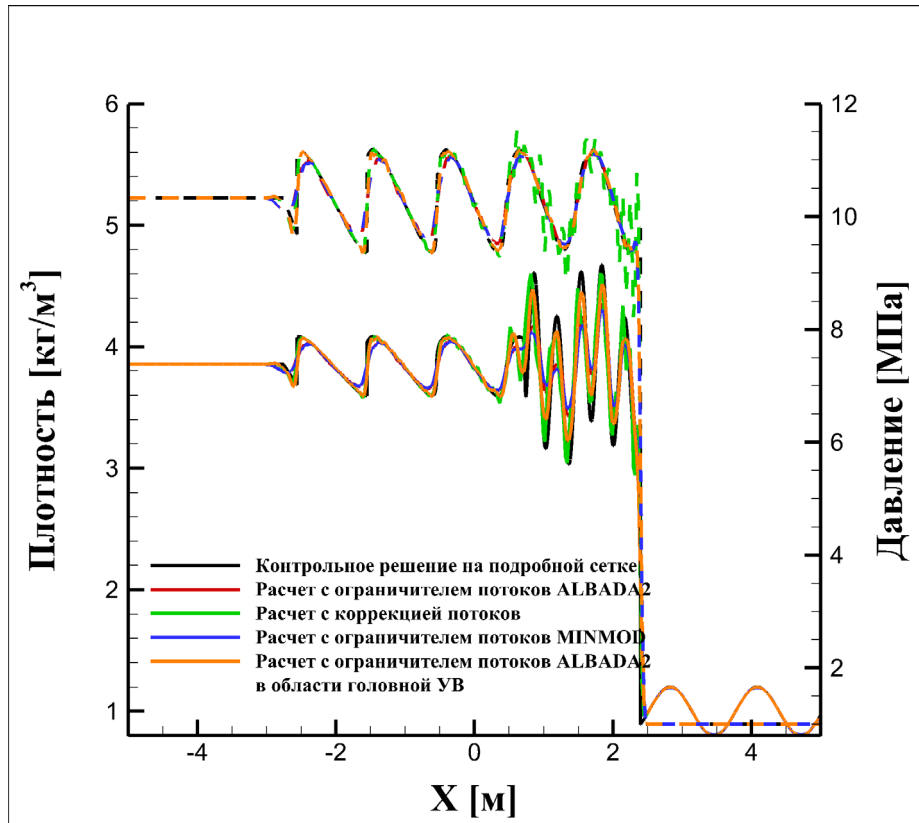


Рис. 4. Профили плотности (сплошные линии) и давления (пунктирные линии) для расчета с использованием гибридного потока

Из рисунка видно, что наилучшие диссипативные свойства показывают расчет с коррекцией потока (2.1.3) и расчет с использованием ограничителя в окрестности ударной волны. Однако в случае расчета с коррекцией потока (2.1.3) неустойчивость, возникающая за фронтом ударной волны, развивается и на профиле давления возникают высокочастотные осцилляции. Применение же ограничителя на фронте ударной волны приводит к предотвращению возникновения неустойчивости, но тем не менее за ударной волной на распределении плотности возникают небольшие осцилляции.

Наконец, на Рис. 5 представлено сравнение профилей плотности для расчета по методу Годунова с коррекцией потока (2.1.3) и расчета с использованием гибридного метода расчета потока и ограничителя в окрестности фронта ударной волны.

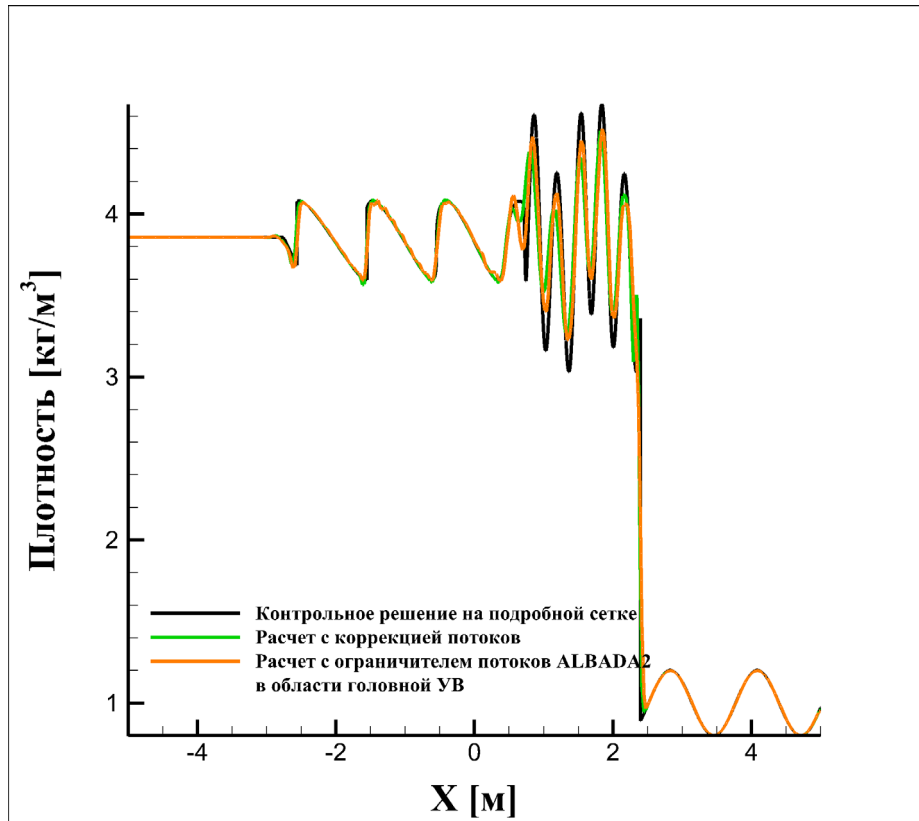


Рис. 5. Профили плотности для расчетов с использованием метода Годунова и гибридного метода расчета потоков

Можно видеть, что расчет с использованием метода Годунова не уступает расчету с гибридным потоком в точности, но при этом, как было показано выше, за ударной волной является более устойчивым. Исходя из этого, для решения задач о моделировании нестационарного пограничного слоя в периодическом канале для расчета конвективных потоков было решено использовать метод Годунова с интерполяцией и коррекцией потока (2.1.3). Стоит отметить, что для течения в периодическом канале использование вышеуказанной схемы возможно ввиду отсутствия в расчетной области сильных разрывов.

3.3. Моделирование нестационарного сверхзвукового периодического пограничного слоя в прямоугольном канале

В качестве геометрии канала был выбран изолятор модельной камеры сгорания Барроуса-Куркова [27], высота и ширина которого 8.9 см и 5 см соответственно. Длина расчетной области была выбрана 10 см.

Параметры потока соответствовали параметрам на входе в изолятор для задачи о смешении нереагирующих компонентов в камере сгорания [27].

Боковые стенки канала считались адиабатическими, на входной и выходной границах устанавливались периодические граничные условия.

Для компенсации трения на стенках используется объемный источник в форме градиента давления. Для данной постановки величина градиента составила -55 кПа/м при числе Рейнольдса в канале $Re_\tau \approx 10000$.

Размеры расчетной сетки составили примерно 3 млн ячеек с размером пристеночной ячейки $5 \cdot 10^{-6}$ м, что соответствует $y^+ = 2$.

В качестве начальных условий использовался RANS-профиль с наложенными на поперечные компоненты скорости синусоидальными возмущениями.

$$\begin{aligned} v' &= u_0 \cdot \sin\left(4.0 \frac{2\pi x}{H}\right) \cdot \sin\left(15.0 \frac{2\pi y}{H}\right) \cdot \sin\left(15.0 \frac{2\pi z}{H}\right), \\ w' &= u_0 \cdot \sin\left(4.0 \frac{2\pi x}{H}\right) \cdot \cos\left(15.0 \frac{2\pi y}{H}\right) \cdot \cos\left(15.0 \frac{2\pi z}{H}\right), \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

где $u_0 = 300$ м/с, $H = 0.089$ м – высота канала.

Задача была решена как с использованием гибридной явно-неявной схемы интегрирования по времени, так и с использованием гибридной схемы К-Н. В обоих случаях для решения применялся метод LU-SGS со сглаживанием невязки. На каждом расчетном шаге по времени выполнялось две итерации сглаживания невязки с параметром $\varepsilon = 0.5$. Шаг по времени для обеих схем был установлен 100 нс. При этом шаге обеспечивался переход на явную схему на расстоянии ~ 2.0 мм от стенки в случае расчета по гибридной явно-неявной схеме. Гибридная схема К-Н настраивалась так, чтобы на расстоянии 0.5 мм от стенки происходил переход на неявную схему Эйлера (2.1.9). Переход из RANS области расчета в LES в свою очередь происходил на расстоянии ~ 1 мм от стенки. На Рис. 6 приводятся графики функций ω для гибридной явно-неявной схемы интегрирования по времени (2.1.5), θ для схемы К-Н (2.1.9) и функции \tilde{f}_d , отвечающей за переход из RANS области в LES (1.2.5).

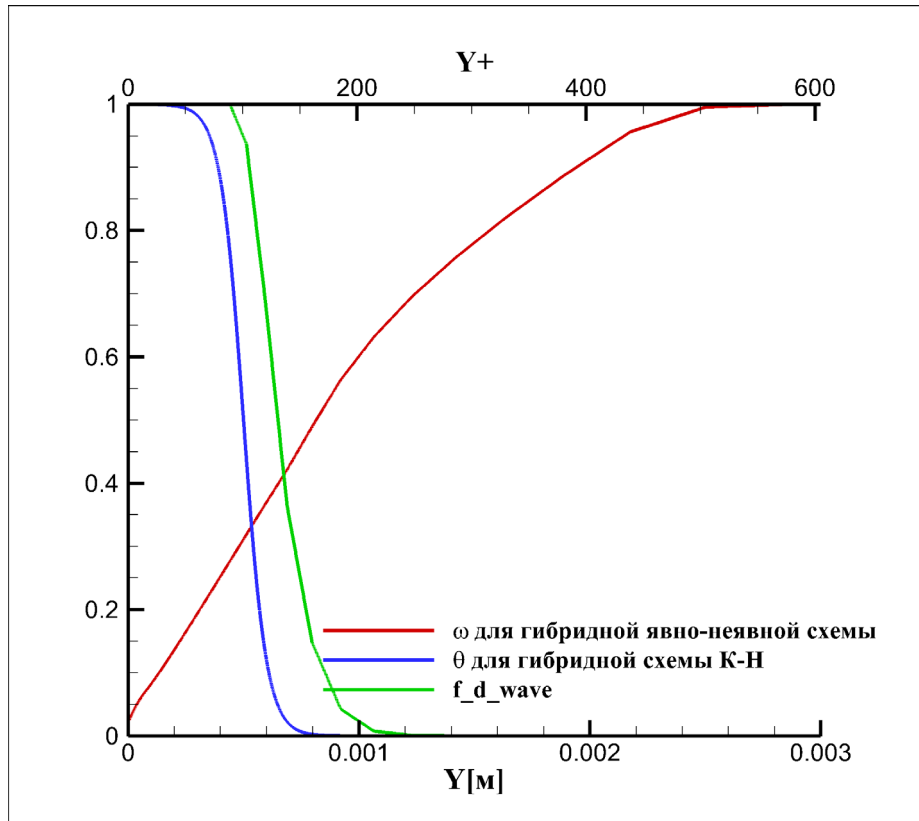


Рис. 6. Профили параметров гибридации

Расчет с применением гибридной явной-неявной схемы выполнялся до момента времени 6.15 мс, что соответствует примерно 110 продувкам канала.

На Рис. 7 - Рис. 8 показано распределение мгновенной продольной скорости [км/с] и отношения турбулентной вязкости к ламинарной в плоскостях $X = 0.05$ и $Z = 0.025$. На Рис. 9 приводится распределение Q -критерия в центральной продольной и трех поперечных плоскостях для визуализации вихревой структуры, а Рис. 10 в свою очередь демонстрирует вихревую структуру как изоповерхность $Q=1$ с раскраской по мгновенной продольной скорости.

$$Q = \frac{1}{2} (\|\mathbf{\Omega}\|^2 - \|\mathbf{S}\|^2), \quad (3.3.2)$$

где $\mathbf{\Omega}$, \mathbf{S} – тензора завихренности и скоростей деформации соответственно.

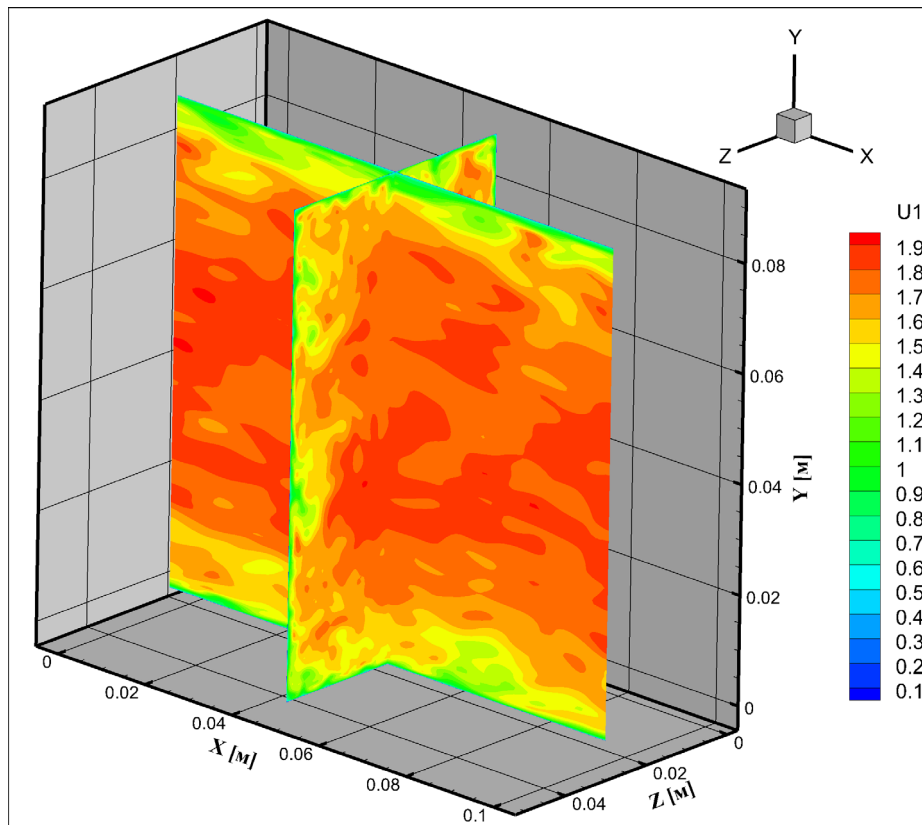


Рис. 7. Распределение мгновенной продольной скорости [км/с] в расчете с использованием гибридной явно-неявной схемы интегрирования

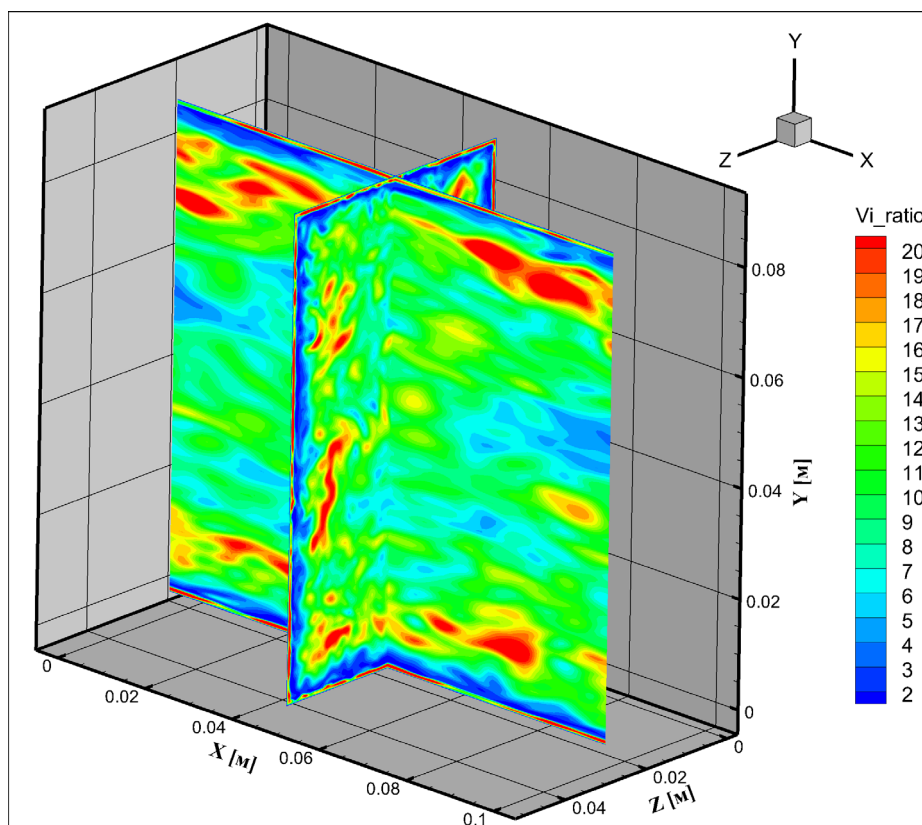


Рис. 8. Распределение мгновенного отношения турбулентной вязкости к ламинарной в расчете с использованием гибридной явно-неявной схемы интегрирования

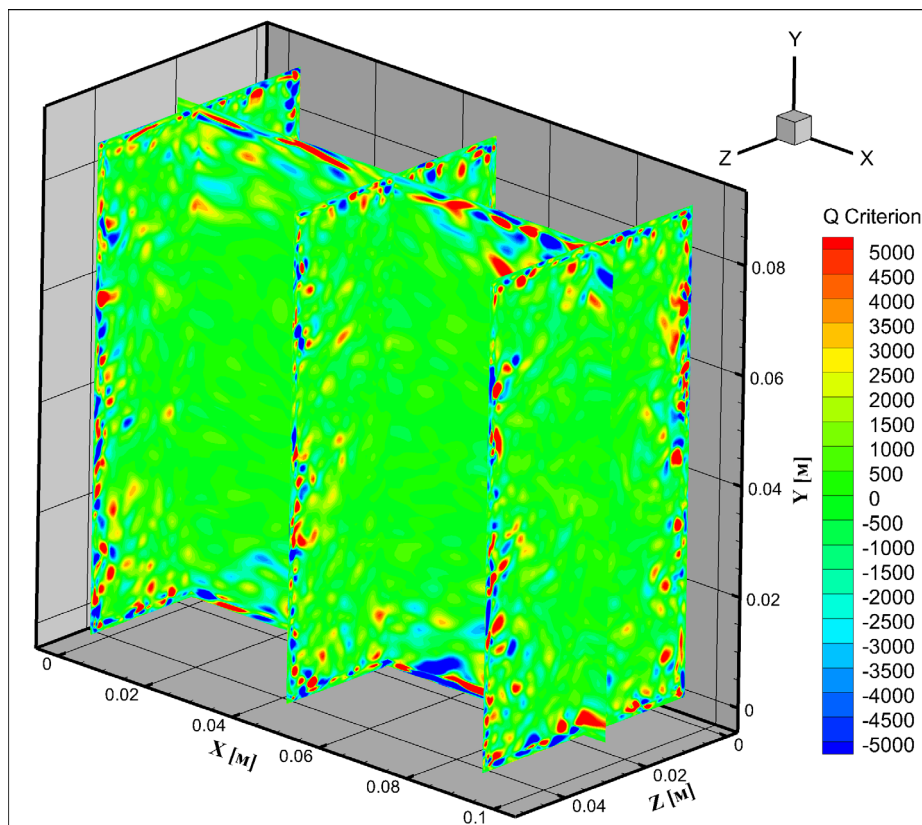


Рис. 9. Визуализация вихревой структуры как распределения Q-критерия в расчете с использованием гибридной явно-неявной схемы интегрирования

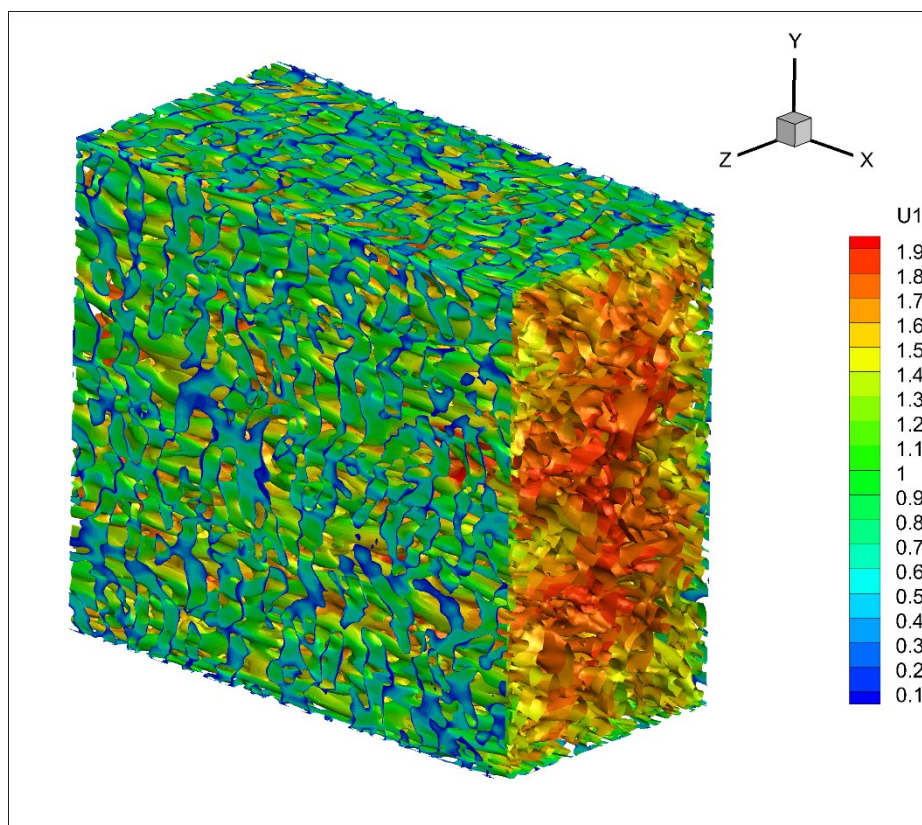


Рис. 10. Визуализация вихревой структуры с помощью Q-критерия в расчете с использованием гибридной явно-неявной схемы интегрирования. Продольная скорость в [км/с].

Расчет с использованием гибридной схемы К-Н проводился до момента времени 5.6 мс, что соответствовало примерно 100 продувкам канала. Для данного расчета также были построены распределения мгновенной продольной скорости, отношения турбулентной вязкости к ламинарной и визуализация вихревой структуры как распределение Q-критерия, которые представлены на Рис. 11 - Рис. 13 соответственно.

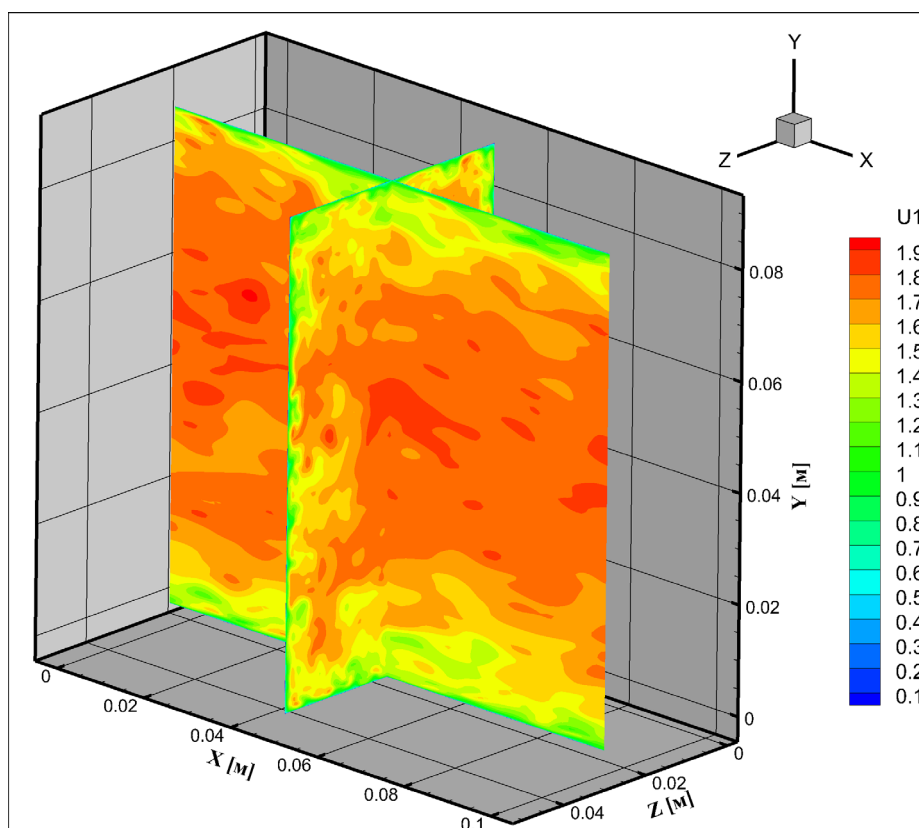


Рис. 11. Распределение мгновенной продольной скорости [км/с] в расчете с использованием гибридной схемы интегрирования К-Н

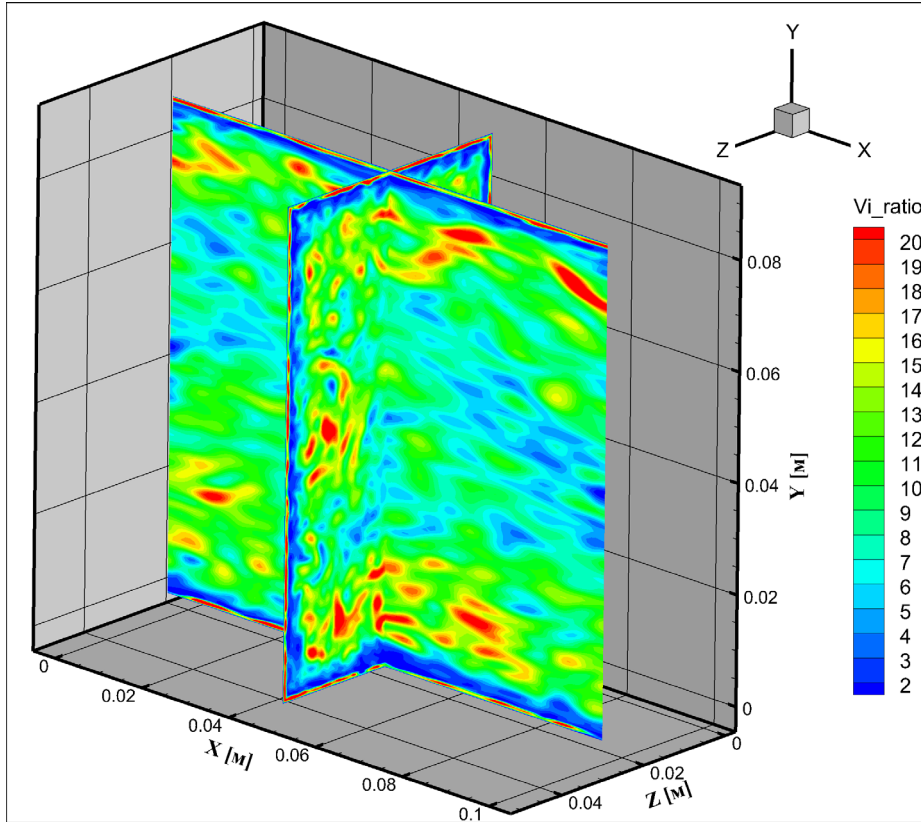


Рис. 12. Распределение мгновенного отношения турбулентной вязкости к ламинарной в расчете с использованием гибридной схемы интегрирования К-Н

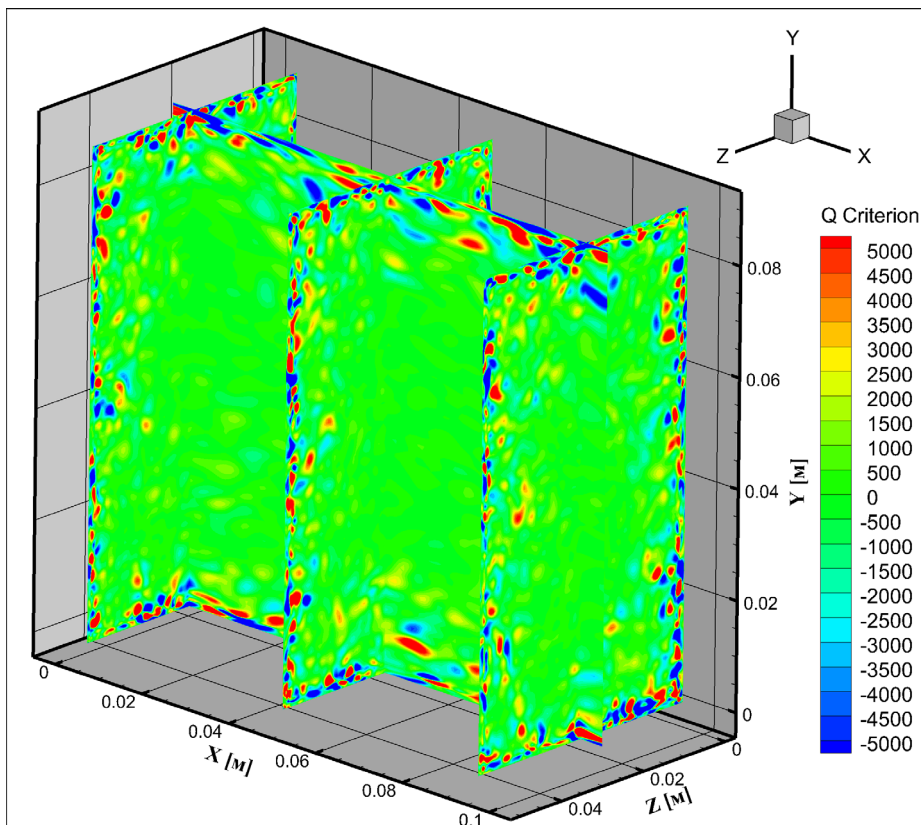


Рис. 13. Визуализация вихревой структуры как распределение Q-критерия в расчете с использованием гибридной схемы интегрирования К-Н

Оба расчета показывают очень близкие результаты в ядре течения в канале, так как и в том и в другом случае схема имеет 2-ой порядок аппроксимации по времени. Для обоих расчетов было выполнено осреднение параметров по времени за период ~ 1 мс. Для оценки качества решения были построены профили осредненной продольной скорости, а также безразмерные профили скорости в переменных «закона стенки» которые сравнивались с профилями, построенными для RANS решения. На Рис. 14 – Рис. 15 приводятся результаты сравнения профилей для нижней и боковой стенок канала.

Преимущество схемы К-Н состоит в обеспечении 2-го порядка аппроксимации в неявной области, что позволяет повысить шаг интегрирования не теряя точности. Однако стоит отметить, что при проведении расчетов сходимость по относительной невязке на 2 порядка для гибридной явно-неявной схемы достигалась за 20 итераций, а для гибридной схемы К-Н за 60 итераций. Это делает использование гибридной явно-неявной схемы более эффективным.

На основе качественного сравнения Рис. 8 и Рис. 12, а также Рис. 9 и Рис. 13 можно отметить, что использование гибридной схемы К-Н позволяет получить более развитую вихревую структуру вблизи стенок канала. Данное различие может быть объяснено тем, что в случае расчета по гибридной схеме К-Н переход в зону LES осуществляется в области работы схемы 2-го порядка, в то время как при расчете гибридной явно-неявной схемой переход происходит в области $\omega < 1$, где работает схема 1-го порядка (см. Рис. 6).

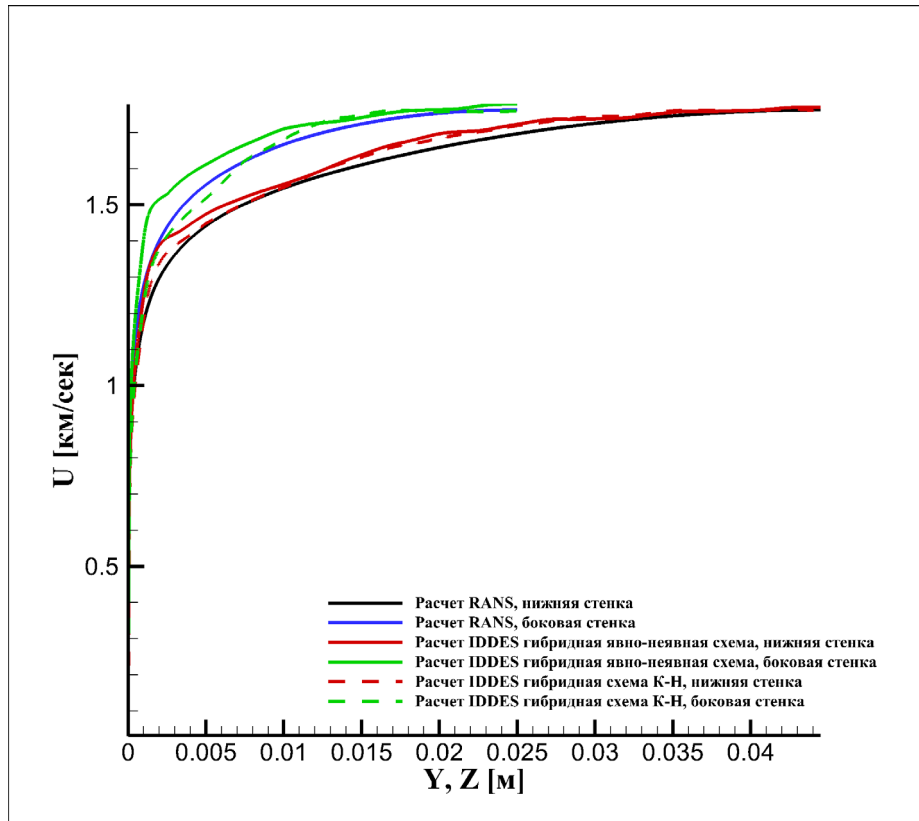


Рис. 14. Профили продольной и осредненной продольной скорости для решений, полученных в рамках RANS и IDDES подходов соответственно

По результатам сравнения можно отметить хорошее соответствие профилей скорости между решениями, полученными при использовании RANS и IDDES подходов, что говорит о правильном функционировании IDDES модели. По Рис. 14 можно отметить, что вблизи стенки (до 5 мм) расчет по гибридной схеме К-Н показывает скорость ниже, чем расчет по гибридной явно-неявной схеме, что является более близким к профилю, полученному в расчете с использованием RANS. Безразмерные профили скорости в переменных «закона стенки» для решений, полученных с использованием IDDES подхода и гибридных схем интегрирования по времени, представленные на Рис. 15 также хорошо соответствуют автомодельному профилю и профилю RANS решения.

На Рис. 16 показано сравнение осреднённых профилей отношения турбулентной вязкости к ламинарной для расчетов по двум схемам. По рисунку видно, что гибридная явно-неявная схема и гибридная схема К-Н показали практически идентичный результат.

Учитывая приведенные выше результаты, можно заключить, что реализованные алгоритмы гибридного подхода к моделированию турбулентности IDDES работают правильно и позволяют получать результаты, удовлетворительно коррелирующие с контрольными данными.

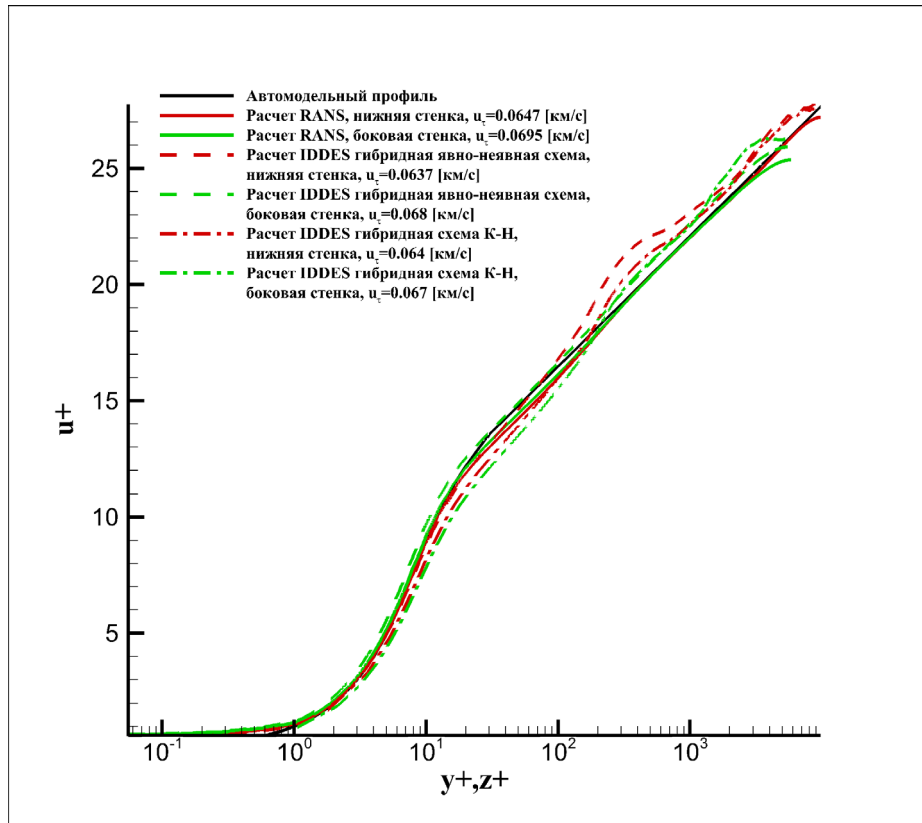


Рис. 15. Безразмерный профиль скорости в переменных «закона стенки» для решений, полученных в рамках RANS и IDDES подходов

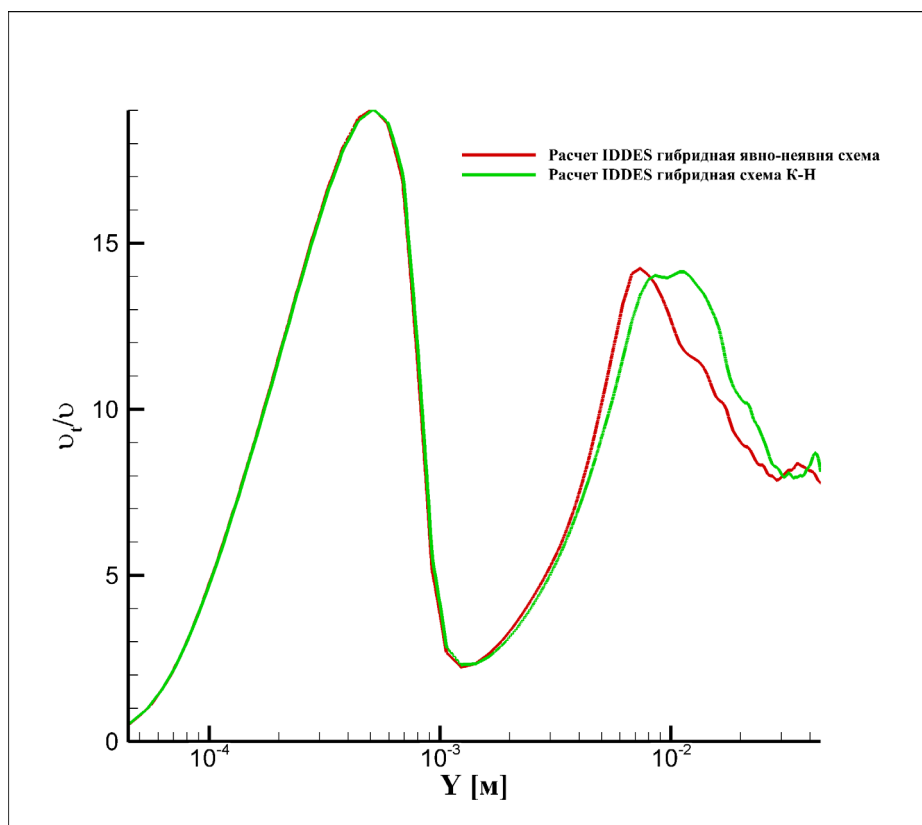


Рис. 16. Профили отношения турбулентной вязкости к ламинарной для расчетов течения в периодическом канале в рамках IDDES подхода

В целом, реализованная модель может применяться для моделирования турбулентных течений в областях с более сложной геометрией.

Заключение

Для моделирования нестационарных турбулентных течений вязкого сжимаемого многокомпонентного газа разработан и реализован в виде программного кода вычислительный алгоритм, основанный на использовании гибридного подхода IDDES и модели турбулентности Спаларта-Аллмараса (SA). В основе вычислительного алгоритма лежит комбинированный LU-SGS–GMRES метод. Произведен анализ быстродействия данного метода на решении задачи о формировании стационарного пограничного слоя на плоской пластине. Исследованы свойства устойчивости и диссипативности для разных методов дискретизации конвективных потоков. Выполнена верификация и валидация разработанных вычислительных алгоритмов путем решения модельной задачи по моделированию развития нестационарного пограничного слоя в периодическом канале с сверхзвуковым потоком газа. Выполнено сравнение результатов расчетов задачи с использованием гибридной явно-неявной схемы интегрирования по времени и гибридной схемы К-Н. Полученные в результате расчетов осредненные профили скорости хорошо согласуются с результатами расчетов с использованием RANS подхода и «профилем стенки».

Список литературы

1. Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Травин А.К., М.Л. Шур Современные подходы к моделированию турбулентности // Учебное пособие. Издательство Политехнического Института, Санкт-Петербург. 2016. 234 С.
2. Ishihara T., Kaneda Y., and Hunt J.C.R. Thin Shear Layers in High Reynolds Number Turbulence – DNS Results // Springer 91. 2013. Pp 895-929. [doi:10.1007/s10494-013-9499-z](https://doi.org/10.1007/s10494-013-9499-z)
3. Рейнольдс О. Динамическая теория движения несжимаемой жидкости и определение критерия // Проблемы турбулентности. - М.;Л.:ОНТИ. 1936. С. 135-227.
4. Menter F.R., Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // AIAA Journal. Vol. 32. № 8. 1994. Pp. 1598-1605. [doi:10.2514/3.12149](https://doi.org/10.2514/3.12149).
5. Spalart P.R., and Allmaras S.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper 1992-0439. 23 p., [doi:10.2514/6.1992-439](https://doi.org/10.2514/6.1992-439)
6. Allmaras, S.R., Johnson F.T., and Spalart P.R. Modifications and Clarifications for the Implementation of the Spalart-Allmaras Turbulence Model // ICCFD7-1902. 7th International Conference on Computational Fluid Dynamics, Big Island, Hawaii, 9-13 July 2012. 11 p.
7. Garnier, E., Adams N., and Sagaut P. Large eddy simulation for compressible flows // Springer. 2009. 276 p.
8. Spalart P. R., Deck S., Shur M. L., Squires K. D., Strelets M. Kh., Travin A. A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities // Theor. Comput. Fluid Dyn. 20(3). 2006. Pp. 181-195. [doi:10.1007/s0016-006-0015-0](https://doi.org/10.1007/s0016-006-0015-0)
9. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.Kh., and Travin A. A hybrid RANS-LESS approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities. International Journal of Heat and Fluid Flow 29. 2008. Pp. 1638-1649. [doi:10.1016/j.ijheatfluidflow.2008.07.001](https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2008.07.001)
10. Anderson W.K., Thomas J.L. and Van Leer B. Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations. AIAA Journal, vol. 24, № 9. 1986. Pp. 1453–1460. [doi:10.2514/3.9465](https://doi.org/10.2514/3.9465)
11. Van Leer, B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V – A second-order sequel to Godunov’s method // Journal of Computational Physics. V. 32. 1974. Pp. 101-136. [doi:10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1)
12. Roe, P.L. Characteristic-based schemes for the Euler equations // Annu. Rev. Fluid Mech., 18. 1986. Pp. 337–365. [doi:10.1146/annurev.fl.18.010186.002005](https://doi.org/10.1146/annurev.fl.18.010186.002005)
13. Kermani, M.J., Gerber A.G. and Stockie J.M. Thermodynamically Based Moisture Prediction Using Roe's Scheme // 4th Conference of Iranian AeroSpace Society, Amir Kabir University of Technology, Tehran, Iran, January 27–29. 2003.

14. Huynh H.T. Accurate upwind methods for the Euler equations // SIAM J. Numer. Anal. – 1995. – V. 32, No.5. – P. 1565–1619. [doi:10.1137/0732071](https://doi.org/10.1137/0732071)
15. Menshov, I. and Nakamura Y. Hybrid explicit-implicit, unconditionally stable scheme for unsteady compressible flows // AIAA Journal, 42(3), 2004, pp. 551-559. [doi:10.2514/1.9109](https://doi.org/10.2514/1.9109)
16. Edwards, J.R., Boles J.A., and Baurle R.A. LES / RANS simulation of a supersonic reacting wall jet // AIAA Paper 2010-0370, LF99-10036. 2010. 20 p. [doi:10.2514/6.2010-370](https://doi.org/10.2514/6.2010-370)
17. Luo H., Baum J.D., Lohner R. An accurate, fast, matrix-free implicit method for computing unsteady flows on unstructured grids // Computers and Fluids 30, 2001, pp. 137-159, 2000. [doi:10.1016/S0045-7930\(00\)00011-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7930(00)00011-6)
18. Men'shov I.S., Nakamura Y. Implementation of the LU–SGS method for an arbitrary finite volume discretization // Proc. of 9th Conference on CFD, Tokyo, 1995, p. 123.
19. Men'shov I.S., Nakamura Y. On implicit Godunov's method with exactly linearized numerical flux // Computers & Fluids 29, 2000, pp. 595-616. [doi:10.1016/S0045-7930\(99\)00020-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7930(99)00020-1)
20. Годунов С.К., и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики // М.: Наука. 1976. 400 С.
21. Дерюгин Ю.Н., Емельянова Я.В., Жучков Р.Н., Уткина А.А. Применение схемы с гибридной диссипацией в решении задач вычислительной аэроакустики // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2018, Т. 58, № 9, С. 1426-1434. [doi:10.2514/6.1986-103](https://doi.org/10.2514/6.1986-103)
22. Jameson, A.; Baker, T.J.; Weatherill, N.P.: Calculation of Inviscid Transonic Flow over a Complete Aircraft. AIAA Paper 86-0103, 198
23. NRARC Alliance Verification and Validation Archive // [электронный ресурс]. URL: <https://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/archive.html>
24. Shu C.-W. and Osher S. Efficient Implementation of Essentially Non-oscillatory Shock-Capturing Schemes, II // J. Comput. Phys. 83. 1989. Pp. 32-78. [doi:10.1016/0021-9991\(89\)90222-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(89)90222-2)
25. Соломатин Р.С., Семенов И.В., Меньшов И.С. К расчету турбулентных течений на основе модели Спаларта-Аллмараса с применением LU-SGS–GMRES алгоритма // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, препринт № 119. 2018. 30 С. <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-119>
26. Spalding, D.B. A single formula for the law of the wall // J. Appl. Mech. Vol. 28. 1961. Pp. 455-457.
27. Burrows, M.C., and Kurkov A.P. Supersonic Combustion of Hydrogen in a Vitiated Air Stream Using Stepped-wall Injection // NASA-TM-67840. 1971. 15 p.

Оглавление

Введение.....	3
1. Математическая модель	5
1.1. Система уравнений для вязкого многокомпонентного сжимаемого газа .	5
1.2. Усовершенствованный метод моделирования отсоединенных вихрей с отложенным переходом (IDDES)	7
1.3. Общая формулировка математической модели	10
2. Численный метод	11
3. Результаты	16
3.1. Сравнение быстродействия схем LU-SGS и GMRES+LU-SGS в задаче о турбулентном пограничном слое	16
3.2. Тест Shu-Osher о взаимодействии ударной волны с неоднородной средой	18
3.3. Моделирование нестационарного сверхзвукового периодического пограничного слоя в прямоугольном канале	22
Заключение.....	32
Список литературы.....	33