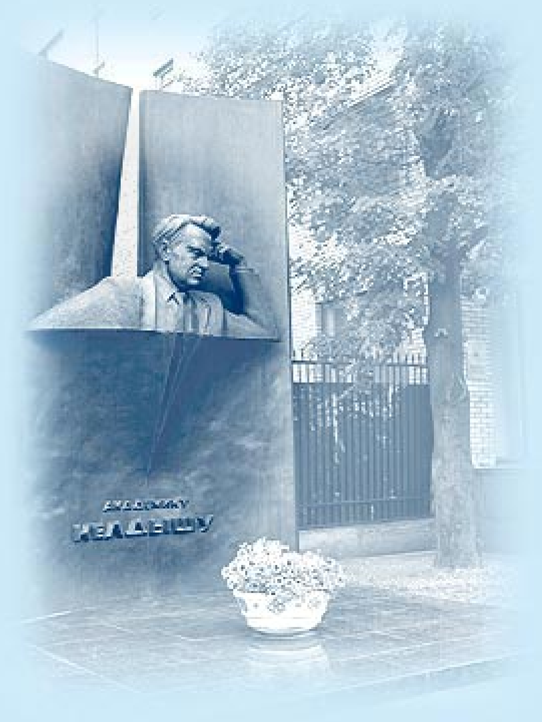
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 44 за 2022 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)



А.В. Колесниченко

Джинсовская гравитационная неустойчивость намагниченной вращающейся бесстолкновительной анизотропной плазмы при использовании обобщенных законов двойной политропы

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. Джинсовская гравитационная неустойчивость намагниченной вращающейся бесстолкновительной анизотропной плазмы при использовании обобщенных законов двойной политропы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 44. 27 с. **https://doi.org/10.20948/prepr-2022-44**
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-44

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Колесниченко

Джинсовская гравитационная неустойчивость намагниченной вращающейся бесстолкновительной анизотропной плазмы при использовании обобщенных законов двойной политропы

Москва — 2022

Колесниченко А. В.

Джинсовская гравитационная неустойчивость намагниченной вращающейся бесстолкновительной анизотропной плазмы при использовании обобщенных законов двойной политропы.

Аннотация. Проблема гравитационной неустойчивости астрофизической намагниченной вращающейся плазмы с анизотропным тензором давления исследована на основе квазигидродинамических уравнений Чу–Голдбергера−Лоу (ЧГЛ), модифицированных за счет использования обобщенных законов двойной политропной теории. При использовании общей формы дисперсионного соотношения, полученного методом нормальных мод, обсуждается распространение колебательных магнитогидродинамических волн возмущения малой амплитуды в бесконечной однородной плазменной среде для поперечного, продольного и наклонного направлений по отношению к вектору магнитного поля. Проанализирован ряд модифицированных критериев гравитационной неустойчивости Джинса, полученных для изотропных МГД и анизотропных ЧГЛ уравнений разреженной плазмы и отличающихся различными ориентациями векторов распространения возмущающей волны, магнитного поля и оси вращения гидромагнитной жидкости. Установлено, что скорость роста неустойчивости сильно зависит от различных политропных индексов. Показано, что вращение и анизотропное давление не только изменяют классический критерий гравитационной неустойчивости астрофизической намагниченной плазмы, но и вызывают новые неустойчивые области.

Ключевые слова*:* анизотропная разреженная плазма, гравитационный критерий неустойчивости Джинса, уравнения Чу–Голдбергера−Лоу, модифицированные новыми законами политропы.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko

Jeans gravitational instability of a magnetized rotating collision-less anisotropic plasma using generalized laws of double polytropy.

Annotation. The problem of gravitational instability of an astrophysical magnetized rotating plasma with an anisotropic pressure tensor is investigated on the basis of the quasi-hydrodynamic Chew-Goldberger-Low (CGL) equations, modified by using generalized laws of dual polytropic theory. Using a general form of the dispersion relation obtained by the normal mode method, we discuss the propagation of oscillating magnetohydrodynamic waves of small amplitude perturbation in an infinite homogeneous plasma medium for the transverse, longitudinal and inclined directions with respect to the magnetic field vector. A number of modified Jeans gravitational instability criteria obtained for isotropic MHD and anisotropic CGL equations of rarefied plasma and distinguished by different orientations of the vectors of propagation of the disturbing wave, magnetic field, and rotation axis of the hydromagnetic fluid are analyzed. It is shown that rotation and anisotropic pressure not only change the classical criterion of gravitational instability of astrophysical magnetized plasma, but also cause new unstable regions.

Key words: anisotropic rarefied plasma, Jeans gravitational criterion for instability, Chu-Goldberger-Low equations modified by new laws of polytropy.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема неустойчивости гравитирующей разреженной плазмы в магнитном поле имеет важное астрофизическое значение. В последние годы широко изучаются магнитогравитационные волновые неустойчивости в плазмы без столкновений при наличии в ней анизотропии давления относительно направления магнитного поля. Анизотропия давления или температуры является внутренней характеристикой бесстолкновительной плазмы в сильном магнитном поле и может обнаруживаться в галактических спиральных рукавах, при образовании намагниченных звезд, в звездном ветре, на Солнце и в короне, в планетарных магнитосферах и т.д. Например, гиротропное давление имеет тенденцию развиваться в солнечном ветре, в магнитооболочке и магнитохвосте Земли соответственно, что доказывают прямые измерения космической плазмы в доступных для космических аппаратов областях. Изучение пронизанной сильным магнитным полем разреженной плазмы важно также при исследовании плазменных струй и термоядерного синтеза в тороидально равновесных токамаках, в которых плазма является диссипативной вблизи оси, а вблизи края изделия наблюдается режим без столкновений.

Для бесконечного межзвездного самогравитирующего однородного облака Джинс (1902) [1] получил критерий гравитационной неустойчивости, согласно которому газовая среда становится неустойчивой к колебательным возмущениям длины волны, превышающей некоторую критическую длину, известную как длина Джинса. В последующих многочисленных публикациях этот результат был распространен на намагниченную плазму как на базе уравнений МГД для идеальной плазмы (см, например, [2-18]), так и при использовании одножидкостных гидромагнитных уравнений Чу−Голдбергера−Лоу (ЧГЛ) [19] с анизотропным тензором давления при использовании двойного адиабатического уравнения состояния [20-27]. В частности, с использованием уравнений ЧГЛ были исследованы различные неустойчивости в межпланетной космической плазме, например, в магнитосфере и плазмосфере планеты, в звездных аккреционных дисках с учетом тока Холла, пульсирующего тензора вязких и лучистых напряжений, эффектов радиационной теплопроводности, неоднородности магнитного поля и т.п.

Важно при этом подчеркнуть, что возможность гидродинамического описания намагниченной плазмы без столкновений (выведенных из кинетического уравнения Больцмана-Власова [28, 29]) объясняется тем, что сильное магнитное поле, симметризуя распределение скоростей в ортогональной ему плоскости, по характеру действия на заряженные частицы вполне аналогично столкновениям. По этой причине гидродинамическое приближение оказывается возможным в силу существования механизма передачи давления дрейфовым током, текущим в космической плазме. Отличие от классической бесстолкновительной МГД состоит здесь в том, что в приближении Чу−Голдбергера−Лоу квазигидродинамическое уравнение движения модифицируется заменой шарового тензора $\overleftrightarrow{\boldsymbol{P}} = p\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}$ со скалярным давлением p на тензор теплового давления

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{P}} = p_{\perp}\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} + (p_{\|} - p_{\perp})\boldsymbol{nn}, \tag{1}$$

который состоит из компонент $p_{\|}$ и $p_{\perp}$, параллельных и перпендикулярных к направлению магнитного поля соответственно (здесь $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{H} / |\boldsymbol{H}|$ − единичный вектор, направленный вдоль магнитного поля, а $\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}$ − единичный тензор). Компоненты диагонализированного тензора давления (1) подчиняются следующим законам двойной политропы: $p_{\|} \propto \rho^3 / H^2$, $p_{\perp} \propto \rho H$, которые являются обобщениями обычного уравнения состояния. Смысл этих соотношений может быть истолкован следующим образом: при сжатии плазмы в направлении магнитного поля величины $p_\perp$ и H не изменяются; величины $p_\parallel$ и ρ оказываются связанными адиабатическим законом с показателем адиабаты $\gamma = 3$ в соответствии с тем, что увеличивается энергия одной продольной степени свободы; при сжатии плазмы в направлении перпендикулярном к магнитному полю, давление $p_\parallel$ остается постоянным: согласно условию «вмороженности» магнитного поля в бесконечно проводящей плазме, $H \propto \rho$, следовательно, второе уравнение состояния может быть интерпретировано как адиабата с $\gamma = 2$, что свидетельствует об увеличении энергии двух степеней свободы в плоскости, перпендикулярной H [30].

В цитируемых выше исследованиях плазма считалась либо столкновительной, либо полностью бесстолкновительной, при моделировании которой использовались уравнения МГД или уравнения ЧГЛ соответственно. Вместе с тем в целом ряде случаев существуют такие астрофизические и лабораторные ситуации (например, переходные зоны в структуре плазменных астрофизических объектов), моделирование которых на основе одного из этих уравнений обладает известными ограничениями, приводящими к аналитическим результатам, заметно расходящимися с реальностью. Это затруднение отчасти было устранено Барбарой Абрахам-Шраунер в работе [31], в которой ею была предложена модель анизотропной плазмы с новыми политропными законами, включающая в себя как жидкостные МГД уравнения для идеальной плазмы, так и жидкостные уравнения ЧГЛ для бесстолкновительной анизотропной плазмы.

Новые политропные законы для давления, являющиеся обобщением принятых в исходной теории ЧГЛ, имеют вид:

$$p_\parallel \propto \rho^\beta / H^\alpha, \quad p_\perp \propto \rho^\varepsilon H^\nu. \tag{2}$$

Из этих соотношений, при использовании конкретизированных значений индексов политропы, могут быть получены известные уравнения состояния, соответствующие различным видам разреженной плазмы; в случае

(i) если $\alpha = 2$, $\beta = 3$ и $\varepsilon = \nu = 1$, то получаются уравнения состояния для ЧГЛ, которые применимы к бесстолкновительной плазме;

(ii) если $\alpha = \nu = 0$ и $\varepsilon = \beta = 5/3$, то получаются уравнения состояния для МГД, которые применимы к идеальной плазменной среде с преобладанием столкновений;

(iii) если $\alpha = \nu = 0$ и $\varepsilon = \beta = 1$, то получаются изотермические уравнения состояния для обоих давлений, применимые к ионно-акустическим модам;

(iv) если $\alpha = 0$ и $\beta = \varepsilon = \nu = 1$, то получается изотермическое уравнение для параллельного давления, действующего вблизи Солнца [32].

Модифицированные новыми политропическими законами уравнения ЧГЛ успешно использовались в целом ряде публикаций астрофизической направленности для изучения малоамплитудных гидромагнитных волн возмущения и нахождения новых критериев нестабильности в анизотропной плазме различного вида (в частности, в плотной квантовой холловской плазме, ультрарелятивистской плазме и т.п. (см., например, [33-38])).

Однако подобные исследования проводились, как правило, раздельно для самогравитирующей и для вращающейся анизотропной бесстолкновительной плазмы, модифицированной за счет использования двухполитропного приближения. Именно по этой причине в данной работе проблема неустойчивости астрофизической самогравитирующей, вращающейся плазмы с анизотропным тензором давления, пронизанной сильным магнитным полем, исследована в рамках модифицированного набора уравнений ЧГЛ. В соответствии с общим дисперсионным соотношением здесь обсуждаются различные частные случаи видоизмененных критерией неустойчивости Джинса. При этом показано, в частности, что наличие равномерного вращения плазмы уменьшает критическое волновое число и оказывает стабилизирующее влияние на критерий гравитационной неустойчивости при поперечном распространении возмущающей волны. Однако в случае продольного распространения волны возмущения вращение не оказывает влияния на критерий неустойчивости. Наличие магнитного поля также оказывает стабилизирующее влияние на критерий неустойчивости рассматриваемой системы, причем чем сильнее поле, тем большая длина волны необходима для нестабильности.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ

Рассмотрим намагниченную бесстолкновительную астрофизическую плазменную систему с анизотропным тензором давления, которая, вращаясь с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}\,(\Omega_x, 0, \Omega_z)$, находится под влиянием постоянного сильного магнитного поля $\boldsymbol{H}$. В этом случае исходные уравнения звездной гидродинамики, записанные при отсутствии некоторых диссипативных эффектов, состоят из следующих модифицированных уравнений ЧГЛ в одножидкостном приближении (к которым добавляется эффект силы Лоренца), уравнения Пуассона и уравнения индукции Фарадея (в идеальном пределе):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\right)\rho+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0, \tag{3}$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{V}=-\nabla\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{P}}-\rho\nabla\phi+\frac{1}{4\pi}\left(\nabla\times\boldsymbol{H}\right)\times\boldsymbol{H}+2\rho\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{\Omega}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=\nabla\times\left(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H}\right), \tag{5}$$

$$\nabla^2\phi=4\pi G\rho, \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\right)\frac{p_{\parallel}H^{\alpha}}{\rho^{\beta}}=0, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\right)\frac{p_{\perp}}{\rho^{\varepsilon}H^{\nu}}=0. \tag{8}$$

Здесь $\boldsymbol{H}$ − полоидальное магнитное поле, направленное вдоль оси $\boldsymbol{i}_z$, $\boldsymbol{H} = H_0 \boldsymbol{i}_z$; $\rho(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r},t)$ − массовая плотность и скорость потока, ϕ − гравитационный потенциал. Остальные символы имеют свои обычные значения. Заметим, что $p_\perp(\boldsymbol{r},t)$ и $p_\parallel(\boldsymbol{r},t)$ в (1) в принципе должны быть суммированы по электронам и ионам (с отдельными давлениями для каждого вида частиц), в то время как ρ и $\boldsymbol{V}$ (3)-(4) являются плотностью и скоростью потока ионов. Для простоты в этой работе мы ограничимся только ионным давлением (т.е. $p_\parallel = p_{i\parallel}$ и $p_\perp = p_{i\perp}$), что оправдано в пределе холодных электронов [39]. Мы также будем пренебрегать неидеальными поправками к уравнению индукции (5) (например, членом Холла), что вполне уместно в случае пренебрежения эффектами конечного ларморовского радиуса.

2. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Далее для будем предполагать, что в начальном равновесном состоянии пространственно неограниченная анизотропная плазма является однородной. Одновременно будем считать, что магнитное поле, плотность плазмы, анизотропные газовые давления и скорость вращения невозмущенной среды являются постоянными величинами. В этом случае в линеаризованных уравнениях можно пренебречь всеми пространственными производными. Кроме этого, будем считать, что затухание малых возмущений из-за омических потерь пренебрежимо мало. При получении линеаризованных уравнений ограничимся также возмущениями только первого порядка по каждой из физических переменных. Представим теперь физические переменные в виде:

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho(\boldsymbol{r},t),\ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_0(=0) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t),\ \overleftrightarrow{\boldsymbol{P}} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{P}}_0 + \delta\overleftrightarrow{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{r},t),$$

$$\boldsymbol{H} = H_0 \boldsymbol{i}_z + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r},t),\ \phi = \phi_0 + \delta\phi(\boldsymbol{r},t),$$

где слагаемые с индексом «0» описывают невозмущенные значения, а величины $\boldsymbol{h}\left[h_x(\boldsymbol{r},t), h_y(\boldsymbol{r},t), h_z(\boldsymbol{r},t)\right]$, $\boldsymbol{v}\left[v_x(\boldsymbol{r},t), v_y(\boldsymbol{r},t), v_z(\boldsymbol{r},t)\right]$, $\delta\rho$, $\delta\phi$ и $\delta\overleftrightarrow{\boldsymbol{P}}$ представляют возмущения первого порядка от равновесных значений магнитного поля, скорости жидкости, массовой плотности жидкости, гравитационного потенциала и тензора давления соответственно. Тогда, при выполнении всех необходимых разложений, удержании членов только первого порядка относительно малых возмущений и с учетом сделанных выше упрощающих предположений, уравнения (1) и (3)-(8), принимают следующий линеаризованный вид:

$$\delta\overleftrightarrow{\boldsymbol{P}} = \delta p_{\perp}\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} + (\delta p_{\parallel} - \delta p_{\perp})\boldsymbol{nn} + (p_{\parallel} - p_{\perp})(\boldsymbol{n}\delta\boldsymbol{n} + \delta\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n}), \tag{9}$$

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} = -\rho_0 \nabla\cdot\boldsymbol{v}, \tag{10}$$

$$\rho_0\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nabla\cdot\delta\overleftrightarrow{\boldsymbol{P}} - \rho_0\nabla\delta\phi + \frac{1}{4\pi}(\nabla\times\boldsymbol{h})\times\boldsymbol{H}_0 + 2\rho_0(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}), \tag{11}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{h}}{\partial t} = (\boldsymbol{H}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{v} - \boldsymbol{H}_0(\nabla\cdot\boldsymbol{v}), \quad \nabla\cdot\boldsymbol{h} = 0, \tag{12}$$

$$\nabla^2\delta\phi = (4\pi G)\delta\rho, \tag{13}$$

$$\frac{\delta p_{\parallel}}{p_{\parallel}} = \beta\frac{\delta\rho}{\rho_0} - \alpha\frac{h_z}{H_0}, \tag{14}$$

$$\frac{\delta p_{\perp}}{p_{\perp}} = \varepsilon\frac{\delta\rho}{\rho_0} + \nu\frac{h_z}{H_0}, \tag{15}$$

где

$$\delta\boldsymbol{n} = \left(\boldsymbol{h} - \boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{h}\right)/H_0. \quad \boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{i}_z. \tag{16}$$

Будем теперь предполагать, что все возмущенные величины $\delta f(\boldsymbol{r},t)$ изменяются по закону гармонических колебаний

$$\delta f(\boldsymbol{r},t) \sim \delta f \exp\left(\omega t + \mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right). \tag{17}$$

Здесь δf – независимая от времени и пространства малая амплитуда пульсаций; $\boldsymbol{k} = k_x\boldsymbol{i}_x + k_z\boldsymbol{i}_z$ – волновой вектор , а k_x и k_z – волновые числа соответственно в x и z направлениях, так что $k^2 = k_x^2 + k_z^2$; ω – комплексная частота гармонических колебаний. Очевидно, что если частота ω имеет ненулевую действительную часть, то имеется растущий режим и система будет неустойчивой. В случае, когда частота ω является чисто мнимой, система представляет собой стабильную конфигурацию.

С учетом предположения (17) линеаризованная система дифференциальных уравнений (10), (12)-(15) перейдет в следующую систему алгебраических уравнений:

$$\omega = -\mathrm{i}\,\rho_0 \frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{\omega}, \tag{18}$$

$$\frac{\boldsymbol{h}}{H_0} = \mathrm{i}\left[k_z\frac{\boldsymbol{v}}{\omega} - \boldsymbol{i}_z\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{\omega}\right], \quad \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{h} = 0, \tag{19}$$

$$k^2\delta\phi = -\mathrm{i}(4\pi G\rho_0)\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{\omega}, \tag{20}$$

$$\frac{\delta p_{\parallel}}{p_{\parallel}} = (\alpha-\beta)\,\mathrm{i}\frac{k_x v_x}{\omega} - \mathrm{i}\,\beta\frac{k_z v_z}{\omega}, \quad \frac{\delta p_{\perp}}{p_{\perp}} = -\mathrm{i}(\varepsilon+\nu)\frac{k_x v_x}{\omega} - \mathrm{i}\,\varepsilon\frac{k_z v_z}{\omega}. \tag{21}$$

Уравнение для дивергенции $\nabla\cdot\delta\overleftrightarrow{\boldsymbol{P}}$, входящей в линеаризованное уравнение движения (11), принимает тогда вид:

$$\nabla\cdot\delta\overleftrightarrow{\boldsymbol{P}} = \left[\mathrm{i}\,\delta p_{\perp}k_x + \mathrm{i}\frac{(p_{\parallel}-p_{\perp})}{H_0}h_x k_z\right]\boldsymbol{i}_x + \left[\mathrm{i}\frac{(p_{\parallel}-p_{\perp})}{H_0}h_y k_z\right]\boldsymbol{i}_y +$$

$$+\left[\mathrm{i}\delta p_{\|}k_z+\frac{(p_{\|}-p_{\perp})}{H_0}\mathrm{i}h_x k_x\right]\boldsymbol{i}_z, \tag{22}$$

или, с учетом (19) и (21), записанной покомпонентно:

$$\left(\nabla\cdot\delta\overleftrightarrow{\boldsymbol{P}}\right)_x=\left[(\varepsilon+\nu)p_{\perp}k_x^2-(p_{\|}-p_{\perp})k_z^2\right]\frac{v_x}{\omega}+(\varepsilon p_{\perp})k_x k_z\frac{v_z}{\omega},$$

$$\left(\nabla\cdot\delta\overleftrightarrow{\boldsymbol{P}}\right)_y=-(p_{\|}-p_{\perp})k_z^2\frac{v_y}{\omega},$$

$$\left(\nabla\cdot\delta\overleftrightarrow{\boldsymbol{P}}\right)_z=(\beta p_{\|})k_z^2\frac{v_z}{\omega}+\left[(\beta-\alpha)p_{\|}-(p_{\|}-p_{\perp})\right]k_z k_x\frac{v_x}{\omega}. \tag{23}$$

При подстановке соотношений (18), (20) и (21) в линеаризованное уравнение движения (11) получим следующие три уравнения относительно компонент пульсаций v_x, v_y, v_z:

$$\left\{\omega^2+\left(J_{\perp}^2+S_{\|}^2\right)k_x^2+\Lambda^2k^2\right\}v_x-\left(2\Omega_z\omega\right)v_y+\left(J_{\perp}^2k_xk_z\right)v_z=0,$$

$$2\Omega_z v_x+\left(\omega+\Lambda^2k_z^2/\omega\right)v_y-2\Omega_z=0,$$

$$\left[J_{\|}^2-(\alpha+1)S_{\|}^2+S_{\perp}^2)\right]k_xk_zv_x+(2\Omega_x\omega)v_y+\left(\omega^2+J_{\|}^2k_z^2\right)v_z=0. \tag{24}$$

Здесь фигурируют новые символы, имеющие следующие значения:

$$J_{\|}^2=\beta S_{\|}^2-4\pi G\rho/k^2,\quad J_{\perp}^2=\varepsilon S_{\perp}^2-4\pi G\rho/k^2, \tag{25}$$

$$\Lambda^2=S_{\perp}^2-S_{\|}^2+c_a^2, \tag{26}$$

где $S_{\perp}=\sqrt{p_{\perp}/\rho}$ и $S_{\|}=\sqrt{p_{\|}/\rho}$ – скорости звука соответственно в перпендикулярном и параллельном направлении к магнитному полю; $c_a=H/\sqrt{4\pi\rho}$ – альфвеновская скорость звука.

Система однородных линейных уравнений (24) для пульсаций скорости является исходной для дальнейшего анализа динамики малых возмущений в модели разреженной плазмы с анизотропным тензором давления. Эта система имеет решение, отличное от тривиального, только в том случае, когда определитель матрицы коэффициентов системы равен нулю,

$$\begin{vmatrix} \omega^2+\left(J_\perp^2+S_\parallel^2\right)k_x^2+\Lambda^2k^2, & -2\Omega_z\omega, & J_\perp^2k_xk_z \\ 2\Omega_z, & \omega+\Lambda^2k_z^2/\omega, & -2\Omega_x \\ \left[J_\parallel^2-(\alpha+1)S_\parallel^2+S_\perp^2)\right]k_xk_z, & 2\Omega_x\omega, & \omega^2+J_\parallel^2k_z^2 \end{vmatrix}=0.$$

Опуская несложные выкладки, сразу приведем получаемое при этом общее дисперсионное соотношение

$$\left\{\omega^2+\left[J_\perp^2+(\nu-1)S_\perp^2+S_\parallel^2\right]k_x^2+\Lambda^2k^2\right\}\times$$
$$\times\left\{\left[\omega+(\Lambda^2/\omega)k_z^2\right]\left(\omega^2+J_\parallel^2k_z^2\right)+4\Omega_x^2\omega\right\}+$$
$$+4\Omega_z\omega\left\{\Omega_x\left[J_\parallel^2+S_\perp^2-(\alpha+1)S_\parallel^2\right]k_xk_z+\Omega_z\left(\omega^2+k_z^2J_\parallel^2\right)\right\}+$$
$$+J_\perp^2\left\{4\Omega_x\Omega_z\omega-\left[\omega+(\Lambda^2/\omega)k_z^2\right]\times\left[J_\parallel^2+S_\perp^2-(\alpha+1)S_\parallel^2\right]k_xk_z\right\}k_xk_z=0, \quad (27)$$

которое лежит в основе исследования магнитогидродинамических волн и свойств неустойчивости в намагниченной, бесстолкновительной, самогравитирующей и вращающейся анизотропной плазме при учете обобщенных законов двойной политропы. Это сложное дисперсионное соотношение, представляющее собой алгебраическое уравнение шестого порядка по параметру ω, может быть существенно упрощено при рассмотрении по отдельности поперечных, продольных и косых волновых мод.

3. ПОПЕРЕЧНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ ВОЗМУЩЕНИЯ

В случае поперечного распространения колебательной волны возмущения, когда $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{H}$, дисперсионное соотношение (29) принимает более простой вид

$$\left(\omega^2 + 4\Omega_x^2\right)\left\{\omega^2 + \left[J_\perp^2 + (\nu - 1)S_\perp^2 + S_\parallel^2 + \Lambda^2\right]k^2\right\} +$$

$$+ 4\Omega_z\left(\Omega_x + \omega^2\Omega_z\right) = 0. \quad (28)$$

Проанализируем это соотношение для двух расположений оси вращения $\boldsymbol{\Omega}$ системы – вдоль и поперек магнитного поля.

Ось вращения параллельна магнитному полю, $\boldsymbol{\Omega} \parallel \boldsymbol{H}$

Подставляя координаты $\Omega_x = 0$ и $\Omega_z = \Omega$ вектора угловой скорости вращения в уравнение (28), в результате получим простое алгебраическое уравнение

$$\omega^2 + \left[(\varepsilon + \nu)S_\perp^2 + c_a^2\right]k^2 + 4\Omega^2 - 4\pi G\rho = 0, \quad (29)$$

описывающее гравитационные моды, зависящие от политропных индексов и комбинированных эффектов вращения, самогравитации и магнитного поля. Условие существования положительного действительного корня уравнения (29), соответствующее неустойчивости моды самогравитирующей плазменной системы с анизотропным давлением, имеет вид $\omega^2 > 0$. Отсюда получаем модифицированный критерий Джинса

$$k^2 < \frac{4\pi G\rho - 4\Omega^2}{(\varepsilon + \nu)(p_\perp / \rho) + c_a^2}. \quad (30)$$

Из этого неравенства можно сделать следующий вывод: в случае поперечного распространения волны возмущения, направленной перпендикулярно к оси вращения плазменного облака ($\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{\Omega}$), вращение и магнитное поле стабилизируют гравитационную неустойчивость. Для бесстолкновительной вращающейся плазмы ЧГЛ, когда политропные индексы равны $\nu = \varepsilon = 1$, критерий (30) приобретает вид:

$$k^2 < 4\frac{\pi G\rho - \Omega^2}{2(p_\perp / \rho) + c_a^2}, \qquad (30a)$$

а для МГД плазмы ($\nu = 0$, $\varepsilon = 5/3$) получим критерий

$$k^2 < 4\frac{\pi G\rho - \Omega^2}{c_s^2 + c_a^2}. \qquad (30b)$$

Здесь $c_s = \sqrt{\tfrac{5}{3} p_g / \rho}$ – адиабатическая скорость звука в идеальной плазме. Применительно к ионно-акустическим модам ($\nu = 0$, $\varepsilon = 1$), когда справедливы изотермические уравнения состояния для обоих давлений, имеет место следующий критерий неустойчивости разреженной плазмы

$$k^2 < 4\frac{\pi G\rho - \Omega^2}{(p_\perp / \rho) + c_a^2}. \qquad (30c)$$

Ось вращения перпендикулярна к магнитному полю, $\boldsymbol{\Omega} \perp \boldsymbol{H}$

В этом случае дисперсионное соотношение (28) приводит к двум модам распространения возмущающей волны

$$\left(\omega^2 + 4\Omega^2\right)\left\{\omega^2 + \left[(\varepsilon + \nu)S_\perp^2 + c_a^2\right]k^2 - 4\pi G\rho\right\} = 0. \qquad (31)$$

Первый сомножитель (31), приравниваемый к нулю $\omega^2 + 4\Omega^2 = 0$, описывает стабильный затухающий режим, связанный с наличием вращения плазменной системы.

Приравниваемый к нулю второй сомножитель приводит к уравнению

$$\omega^2+\left[(\varepsilon+\nu)S_{\perp}^2+c_a^2\right]k^2-4\pi G\rho=0\,, \tag{32}$$

из которого видно, что на этот гравитационный режим влияют политропные индексы, самогравитация и магнитное поле. В этом случае критерий нестабильности задается выражением

$$k^2<\frac{4\pi G\rho}{(\varepsilon+\nu)(p_{\perp}/\rho)+c_a^2}\,. \tag{33}$$

Таким образом, в случае продольного распространения волны возмущения, направленной перпендикулярно $\boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{\Omega}$ к оси вращения плазменного облака, вращение не влияет на состояние неустойчивости плазмы который зависит от самогравитации и значений политропных индексов ε и ν, играющих важную роль в определении критического волнового числа Джинса[1)]

Критическое волновое число Джинса в рассматриваемом общем случае задается выражением

$$k_{cr}=2\rho\sqrt{\pi G/\left[(\varepsilon+\nu)p_{\perp}+H^2/4\pi\right]}\,, \tag{34}$$

которое для МГД-уравнений и для набора уравнений ЧГЛ равно соответственно

$$k_{cr}=2\rho\sqrt{\pi G/\left[5p_{\perp}/3+H^2/4\pi\right]} \tag{34a}$$

и

$$k_{cr}=2\rho\sqrt{\pi G/\left[2p_{\perp}+H^2/4\pi\right]}\,. \tag{34b}$$

---

[1]) Напомним, что для неустойчивых волн возмущения частота $\omega>0$, тогда как устойчивость соответствует условию $\omega<0$. Эти два класса разделяет случай нейтральной устойчивости $\omega=0$, что соответствует модам с критической длиной волны возмущения. Критическая длина волны возмущения $\lambda_{cr}=2\pi/\mathrm{k}_{cr}$ (для идеального газа: $\mathrm{k}_{cr}^2=\omega_{cr}^2/c_{gs}^2$, $\omega_{cr}^2=4\pi G\rho$) является размером мельчайших «капель» рассматриваемой среды, которые могут удерживаться вместе собственным гравитационным притяжением.

Из этих выражений следует, что критическое волновое число Джинса для МГД-уравнений больше по сравнению с набором уравнений ЧГЛ.

4. ПРОДОЛЬНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ ВОЗМУЩЕНИЯ

В случае продольного распространения мелкомасштабной волны возмущения (когда $k_x = 0,\ k_z = k$) дисперсионное соотношение (29) принимает более простой вид:

$$\omega\left(\omega+\frac{\Lambda^2}{\omega}k^2\right)\left\{\left[\omega+\frac{\Lambda^2}{\omega}k^2\right]\left(\omega^2+J_{\|}^2k^2\right)+4\Omega_x^2\omega\right\}+4\Omega_z^2\omega\left(\omega^2+k^2J_{\|}^2\right)=0. \quad (35)$$

Проанализируем также это соотношение для двух расположений оси вращения плазменной системы – вдоль и поперек магнитного поля.

Ось вращения параллельна магнитному полю, $\boldsymbol{\Omega} \| \boldsymbol{H}$

Подставляя в (35) величины $\Omega_x = 0$ и $\Omega_z = \Omega$, в результате получим следующее дисперсионное соотношение

$$\left(\omega^2+\beta S_{\|}^2k^2-4\pi G\rho\right)\left\{\left[\omega+\frac{\Lambda^2}{\omega}k^2\right]^2+4\Omega^2\right\}=0. \quad (36)$$

Это уравнение описывает распространение в направлении магнитного поля продольной волны возмущения для бесстолкновительной плазмы с анизотропным тензором давления и с модифицированными политропными индексами, ось вращения которой параллельна магнитному полю. Уравнение (36) содержит два независимых сомножителя, первый из которых описывает гравитационный режим, на который влияет политропный индекс β, в то время второй сомножитель не зависит от политропных индексов, но зависит от комбинированного эффекта, связанного с вращением, и действия магнитным полем.

Приравненный к нулю первый сомножитель

$$\omega^2+\beta S_{\parallel}^2\, k^2-4\pi G\rho=0 \tag{37}$$

приводит к следующему критерию гравитационной неустойчивости моды

$$k^2<\frac{4\pi G\rho}{\beta(p_{\parallel}/\rho)}, \tag{38}$$

который зависит от самогравитации и значения политропного индекса β, играющего важную роль в определении критического волнового числа Джинса.

Критическое волновое число Джинса в этом случае задается выражением

$$k_{cr}=2\rho\sqrt{\pi G/\beta p_{\parallel}}\,, \tag{39}$$

которое для МГД-уравнений и для набора уравнений ЧГЛ приводит соответственно к критериям

$$k_{cr}=2\rho\sqrt{3\pi G/5p_{\parallel}} \text{ и } k_{cr}=2\rho\sqrt{\pi G/3p_{\parallel}}\,. \tag{39a,b}$$

Из этих выражений следует, что критическое волновое число Джинса для МГД-уравнений больше по сравнению с набором уравнений ЧГЛ.

Приравняем теперь к нулю $\left[\omega+\Lambda^2k^2/\omega\right]^2+4\Omega^2=0$ второй сомножитель алгебраического уравнения (36). В результате получим

$$\omega^4+2\left[2\Omega^2+\Lambda^2k^2\right]\omega^2+\Lambda^4k^4=0, \tag{40}$$

Это дисперсионное соотношение описывает гравитационный режим, включающий в себя влияние магнитного поля, анизотропного давления и вращения, но индексы политропы на него не влияют. Уравнение (40) можно записать в виде биквадратного уравнения для фазовой скорости (так называемых шланговых мод)

$$v_\phi^4 + 2\left[2\Omega^2/k^2 + \Lambda^2\right]v_\phi^2 + \Lambda^4 = 0. \tag{41}$$

Это уравнение является дисперсионным уравнением для волн Альфвена с фазовой скоростью $v_\phi = \omega/k$, модулированной вращением и анизотропным давлением в различных направлениях. В случае отсутствия вращения оно сводится к простому уравнению $\left(v_\phi^2 + \Lambda^2\right)^2 = 0$, которое имеет решение

$$(v_\phi)_{f,s} = \pm\sqrt{S_\|^2 - S_\perp^2 - c_a^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{\rho}}\sqrt{p_\|^2 - p_\perp^2 - H^2/4\pi}\,. \tag{42}$$

В отличие от изотропного случая ($p_\|^2 = p_\perp^2$), фазовая скорость альфвеновских волн определяется не только магнитным полем, но и анизотропным давлением плазмы. Если справедливо неравенство $p_\|^2 - p_\perp^2 - H^2/4\pi < 0$, то имеет место распространяющаяся волна Альфвена, представляющая собой колебания упругих силовых нитей линий магнитного поля. Если $p_\|^2 - p_\perp^2 - H^2/4\pi = 0$, то получается неподвижная мода (резонансный режим, $\omega = 0$), что объясняется абсолютно неупругим возмущением силовых линий магнитного поля. Если справедливо неравенство

$$p_\|^2 > p_\perp^2 + H^2/4\pi, \tag{43}$$

то имеет место нераспространяющийся, неустойчивый режим. Эта неустойчивость называется шланговой (firehose) неустойчивостью. Физический механизм этой неустойчивости связан с «вмороженностью» силовых линий магнитного поля в бесконечно проводящую плазму. Поскольку в этом случае частицы плазмы привязаны к силовым линиям, то при искривлении силовой линии возникает центробежная сила, пропорциональная энергии продольного движения частиц и стремящаяся увеличить искривление. Если продольное давление велико, то эта сила оказывается больше, чем возвращающие силы, связанные с натяжением силовых линий. В результате силовая линия будет еще больше искривляться по аналогии с поведением шланга, по которому подаётся сильная струя воды.

Таким образом в однородной анизотропной плазме магнитогидродинамическая сдвиговая альфвеновская волна может стать неустойчивой при выполнении условия (43). Заметим, что неустойчивость подобного типа возможна в плазме солнечного ветра [31].

Ось вращения перпендикулярна к магнитному полю, $\boldsymbol{\Omega} \perp \boldsymbol{H}$

Подставляя $\Omega_x = \Omega$ и $\Omega_z = 0$ в соотношение (35), в результате получим следующее дисперсионное уравнение

$$\omega\left(\omega + \frac{\Lambda^2}{\omega}k^2\right)\left\{\left[\omega + \frac{\Lambda^2}{\omega}k^2\right]\left(\omega^2 + J_{\|}^2 k^2\right) + 4\Omega^2\omega\right\} = 0, \qquad (44)$$

или

$$\omega^6 + \omega^4\left[2k^2\Lambda^2 + J_{\|}^2 k^2 + 4\Omega^2\right] +$$

$$+\omega^2\left[k^4\Lambda^4 + 2J_{\|}^2 k^4\Lambda^2 + 4\Omega^2 k^2\Lambda^2\right] + k^6\Lambda^4 J_{\|}^2 = 0\ . \qquad (44a)$$

Это уравнение описывает гравитационные режимы, зависящие от политропного индекса β и включающие эффекты магнитного поля и вращения. Критерий гравитационной неустойчивости плазменной анизотропной системы, вытекающий из уравнения (44), в случае положительности параметра $\Lambda^2 > 0$, зависит от постоянного члена; когда $k^2 J_{\|}^2 < 0$ он имеет вид:

$$k^2 < 4\pi G\rho / \beta(p_{\|}/\rho), \qquad (45)$$

что совпадает с критерием (38), полученным для случая продольного распространения волны возмущения, когда ось вращения системы параллельна магнитному полю.

Заметим, что в случае справедливости неравенств

$$\Lambda^2 = S_\perp^2 - S_\parallel^2 + c_a^2 > 0, \quad J_\parallel^2 k^2 = \beta S_\parallel^2 k^2 - 4\pi G\rho > 0$$

уравнение (44) имеет мнимые корни, что является необходимым условием устойчивости системы.

5. НАКЛОННОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ ВОЗМУЩЕНИЯ

При рассмотрении поперечных и параллельных волн возмущения обращался в нуль последний член в общем дисперсионном соотношении (29), который может играть значительную роль при анализе наклонного распространения возмущенной волны и неустойчивости плазменной системы.

Пусть волна возмущения распространяется с волновым вектором

$$\boldsymbol{k} = k\sin\theta\,\boldsymbol{i}_x + k\cos\theta\,\boldsymbol{i}_z, \tag{46}$$

где θ – угол распространения. Тогда, предполагая для простоты отсутствие вращения ($\boldsymbol{\Omega} = 0$), перепишем дисперсионное соотношение (29) в виде:

$$\left(v_\phi^2 + \Lambda^2\cos^2\theta\right)\left\{\left[v_\phi^2 + \left(\boldsymbol{J}_\perp^2 + (\nu-1)S_\perp^2 + S_\parallel^2\right)\sin^2\theta + \Lambda^2\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left(v_\phi^2 + \boldsymbol{J}_\parallel^2\cos^2\theta\right) + \boldsymbol{J}_\perp^2\left[(\alpha+1)S_\parallel^2 - \boldsymbol{J}_\parallel^2 - S_\perp^2\right]\sin^2\theta\cos^2\theta\right\} = 0, \tag{47}$$

где $v_\phi = \omega / k$ – фазовая скорость волновых мод.

Это уравнение содержит два независимых сомножителя, первый из которых описывает режим, на который не влияют политропные индексы, в то время как второй сомножитель зависит как от политропных индексов, так и от эффектов, связанных с магнитным полем и самогравитацией.

Приравнивая к нулю первый сомножитель, получим следующее уравнение для фазовой скорости (так называемых шланговых мод)

$$v_\phi^2 - \left(S_\parallel^2 - S_\perp^2 - c_a^2\right)\cos^2\theta = 0\,. \tag{48}$$

Уравнение (48) показывает, что на фазовую скорость этих мод индексы политропы не оказывают влияния. Решение этого уравнения

$$(v_\phi)_{f,s} = \pm\sqrt{\frac{p_\parallel^2 - p_\perp^2 - H^2/4\pi}{\rho}}\cos^2\theta \tag{49}$$

описывает волны (их обозначим меткой f,s), которые являются прототипами альфвеновских колебаний в обычной изотропной МГД. Если

$$p_\parallel^2 > p_\perp^2 + H^2/4\pi\,,$$

то имеется положительный корень уравнения (48) и, следовательно, в этом случае развивается шланговая неустойчивость. Таким образом, критерий неустойчивости бесстолкновительной анизотропной плазменной системы при косом распространении волны возмущения совпадает, в частности, с критерием (41), справедливым для продольного распространения волны. Вместе с тем решение (49) определяет всевозможные промежуточные режимы (при $\theta \neq 0$) распространения волны для различных значений угла θ. При поперечном режиме распространения волны (когда $\theta = \pi/2$) это решение обращается в нуль. Инкремент неустойчивости имеет максимум при параллельном распространении, когда $\theta = 0$.

Второй сомножитель уравнения (47) приводит к следующему биквадратному уравнению для зависящих от выбора политропных индексов фазовых скоростей:

$$v_\phi^4 + b v_\phi^2 + c = 0\,, \tag{50}$$

где

$$b = \left[\left((\varepsilon+\nu)S_\perp^2 + c_a^2\right)\sin^2\theta + (\Lambda^2 + \boldsymbol{J}_\parallel^2)\cos^2\theta\right],$$

$$c = \boldsymbol{J}_\parallel^2\cos^2\theta\left[\left((\varepsilon+\nu)S_\perp^2 + c_a^2\right)\sin^2\theta + \Lambda^2\cos^2\theta\right] +$$

$$+J_{\perp}^{2}\left((\alpha+1)S_{\parallel}^{2}-S_{\perp}^{2}-J_{\parallel}^{2}\right)\sin^{2}\theta\cos^{2}\theta=0\,. \quad (51)$$

Решение уравнения (50) имеет вид

$$(v_{\phi}^{2})_{f,s}=\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4c}}{2}. \quad (52)$$

Заметим, что при $\alpha=\nu=0$ и $\varepsilon=\beta=5/3$ приведенные соотношения аналогичны стандартным изотропным МГД-дисперсиям для медленных (знак минус в уравнении (52)), промежуточных и быстрых режимов (знак плюс в уравнении (52)) в соответствии с упорядочением их фазовых скоростей. В изотропной МГД плазме поведение корней (52) биквадратного уравнения обсуждалось во многих работах (см., например, [31]), в которых были приведены все три (быстрые, медленные и промежуточные, или альфвеновские) диаграммы фазовых скоростей. Подобные диаграммы представляют собой полярные графики, построенные для характеристической фазовой скорости и значений угла распространения волны θ, которые аналогичны известным диаграммам Фридриха в МГД. В работе [31] приведены фазовые диаграммы анизотропной плазмы давления при использовании обобщенных законов политропного давления.

Таким образом, полученное здесь дисперсионное уравнение (50) описывает как быстрые (f) и медленные (s), так и промежуточные режимы распространения возмущенных волновых мод в анизотропной самогравитирующей плазме. Очевидно, что учет гравитационного члена в уравнении (50) изменяет полученные в [31] три моды гидромагнитных волн. Автор в дальнейшем предполагает опубликовать диаграммы фазовых скоростей для гравитирующей разреженной плазмы с анизотропным давлением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе исследовалась гравитационная неустойчивость Джинса для бесконечной вращающейся намагниченной разреженной плазмы с анизотропным давлением и при учете модифицированных законов двойной политропы. Общая дисперсионная система уравнений была получена с помощью стандартного модового анализа путем построения линеаризованной системы уравнений. На ее основе обсуждались волновые модовые решения и свойства неустойчивости в трех предельных случаях: для продольного волнового числа, для поперечного волнового числа и для наклонного распространения волновой моды. Распространение волн возмущения рассматривалось также как вдоль, так и поперек оси вращения.

Существование анизотропного давления при учете модифицированных законов политропы приводит к появлению новых неустойчивых режимов. В частности, для поперечного режима распространения волны возмущения с осью вращения, параллельной направлению магнитного поля, наблюдается уменьшение критического волнового числа Джинса с ростом угловой скорости вращения, означающее стабилизирующее влияние вращения на систему. Бвыло показано, что область неустойчивости и величина критического волнового числа Джинса больше для системы уравнений ЧГЛ по сравнению с системой МГД уравнений. В случае распространения волны параллельно магнитному полю и вдоль оси вращения, перпендикулярной магнитному полю, получены две отдельные моды, которые существенно зависят от вращения и самогравитации системы. С целью выявления влияния вращения и самогравитации на наклонное распространение возмущающей волны в анизотропной плазменной системе был проведен предварительный анализ этого случая, в результате которого получен критерий шланговой неустойчивости.

Работа выполнена в рамках Госзадания ИПМ им. М.В.Келдыша.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Jeans J.H.* The stability of a spherical nebula // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. 1902. V.199. P. 1-53.

[2] *Bonnor W. B.* Jeans' Formula for Gravitational Instability // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1957. V. 117. № 1. P. 104-117.

[3] *Cadez V.M.* Applicability problem of Jeans criterion to a stationary self-gravita ting cloud // Astron. Astrophys. 1990. V. 235. P. 242-244.

[4] *Cadez V. M.* Instabilities in stratified magnetized Stellar atmospheres //Publ. Astron. Obs. Belgrade. 2010. V. 90. P. 121-124.

[5]*Chandrasekhar S., Fermi E.* Problems of gravitational stability in the Presence of a magnetic field // Astrophysical Journal. 1953. V. 118. P. 116-141.

[6] *Dhiman J.S., Dadwal R***.** On the Jeans Criterion of a Stratified Heat Conducting Gaseous Medium in the Presence of Non-uniform Rotation and Magnetic Field // Journal of Astrophysics and Astronomy. 2012.V. 33. № 4. P. 363-373.

[7] *Chandrasekhar S*. Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability// Clarendon. 1961. 585 p..

[8] *Hunter C***.** Self-gravitating gaseous disks // Ann. Rev. Fluid Mech. 1972. V.4. P. 219-242.

[9] *Kaothekar S., Chhajlani R.K* Jeans Instability Of Self Gravitating Partially Ionized Hall Plasma With Radiative Heat Loss Functions And Porosity // AIP Conference Proceedings 1536. 2013. P.1288-1289.

[10] *Kolesnichenko A.V., Marov M. Ya*. Thermodynamic Model of MHD Turbulence and Some of Its Applications to Accretion Disks // Solar System Research. 2008. V. 42. № 3. P. 226-255

[11] *Kolesnichenko A.V.* Jeans Instability of a Protoplanetary Gas Cloud with Radiation in Nonextensive Tsallis Kinetics // Solar System Research. 2020. V. 54. № 2. P. 137-149.

[12] *Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya*. Modification of the Jeans and Toomre Instability Criteria for Astrophysical Fractal Objects Within Nonextensive Statistics // Solar System Research, 2016. V. 50. № 4. P. 251-261.

[13] *Колесниченко А.В.* Влияние черного излучения на критерий гравитационной неустойчивости джинса в околозвездном плазменном диске при учете неизоэнтропических эффектов // Астроном. Вестн, 2022, Т. 56, № 5, с. 1–15.

[14] *Pandey B.P., Avinash K.* Jeans instability of a dusty plasma // Physical Review E (Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics). 1994 .V. 49. № 6. P. 5599-5606.

[15] *Pensia R. K., Sutar D. L., Sharma S*. Analysis of Jeans Instability of Optically Thick Quantum Plasma under the Effect of Modified Ohms law // 2nd International Conference on Condensed Matter and Applied Physics (ICC 2017).AIP Conf. Proc. 1953. 2018. P. 060044-1–060044-4.

[16] *Shukla P. K., Stenflo L*. Jeans instability in a self-gravitating dusty plasma // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 462. 2006. P. 403-407.

[17] *Tsintsadze N. L., Chaudhary R., Shah H. A., Murtaza G.* Jeans instability in a magneto- radiative dusty plasma // Journal of Plasma Physics. 2008. V. 74. № 6. P. 847-853.

[18] *Toomre A*. On the gravitational stability of a disk of stars // J. Astroph. 1964. V.139. P. 1217-1238.

[19] Chew G. F., Goldberger M. L., Low F. E. 1956 The Boltzmann equation and the one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions // Proc. R. Soc. Lond. A. 1956. V.236. P. 112–118.

[20] *Bhatia P. K*. Gravitational instability of a rotating anisotropic plasma with the inclusion of finite Larmor radius effect // Z. Astrophysik. 1968. V. 69 S. 363–367.

[21] *Bhatia P. K., Chhonka, R. P. S*. Instability of rotating isotropic and anisotropic plasmas//. Astrophys. Space Sci. 1985. V.114 P. 135-149.

[22] *Dzhalilov N. S., Kuznetsov V. D., Staude J*. Wave instabilities in an anisotropic magnetized space plasma // Astronomy & Astrophysics. 2008. V. 489. № 2. P. 769-772.

[23] *Ren H., Ca, J., Wu, Z., Chu, P. K*. (2011). Magnetorotational instability in a collisionless plasma with heat flux vector and an isotropic plasma with self-gravitational effect // Physics of Plasmas. 2011. V. 18. № 9. P. 092117 (1-10).

[24] *Singh B., Kalra, G. L*. Gravitational instability of thermally anisotropic plasma // Astrophys. J. 1986. V. 304. P. 6–10.

[25] *Argal S, Tiwari1 A., Prajapati R. P., Sharma P. K*. Gravitational instability of rotating magnetized quantum anisotropic plasma // J. Plasma Phys. 2017, V. 83 905830203 (1-14)/

[26] *Kalra G.L., Hosking R.J*. Effect of sele-gravitation or finite ion mass on the stability of anisotropic plasma// Astrophysics and Space Science. 1970. V.9. P.34-79.

[27] *Cherkos A. M., Tessema S. B.* Gravitational instability on propagation of MHD waves in astrophysical plasma. Journal of Plasma Physics. 2013. V. 79. № 05. P. 805-816.

[28] *Рудаков Л.И., Сагдеев Р.З*. О квазигидродинамическом описании разреженной плазмы, находящейся в магнитном поле // В сб. «Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций». М.: Изд-во АН СССР. 1958.Т.3. С. 268-277.

[29] *Маров М.Я., Колесниченко А.В*. Введение в планетную аэрономию // М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит. 1987. 456 с.

[30] *Колесниченко А.В.* К описанию движения разреженной магнитосферной плазмы в сильном магнитном поле // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 43. 32 с.

[31] *Abraham-Shrauner B.* Small amplitude hydromagnetic waves for a plasma with a generalized polytrope law // Plasma Physics. 1973. V 15. № 5.P. 375-385.

[32] *Noerdlinger P. D.* Anisotropic Compression of a Relativistic Plasma // Physics of Fluids. 1967. V. 10. № 11. P., 2505.

[33] *PrajapatI R. P., Chhajlani R. K.* Effect of pressure anisotropy and flow velocity on Kelvin–Helmholtz instability of anisotropic magnetized plasma using generalized polytrope laws // Phys. Plasmas. 2010. V. 17. P.112108 (1-12).

[34] *Hau L.-N.,. Phan T.-D, Sonnerup B.U.O, Paschmann G*. Double-polytropic closure in the magnetosheath //Geophys. Res. Let. 1993. V. 20. №. 20, P. 2255-2258.

[35] Wang B. J., Hau L. N. MHD aspects of fire-hose type instabilities // J. Geophys. Res. 2003. V. 108. № A12. P.1463 (1-12).

[36] *Bhakta S., Prajapati R. P., Dolai B.* Small amplitude waves and linear fire-hose and mirror instabilities in rotating polytropic quantum plasma // Phys. Plasmas. 2017. V. 24.P. 082113 (1-13).

[37] *Hau L.-N., Sonnerup B. U. Ö.* On slow-mode waves in an anisotropic plasma // Geophysical Research Letters. 1993. V. 2. № 17. P.1763-766.

[38] *Chou M. Hau L.-N* Magnetohydrodynamic Waves and Instabilities in Homogeneous Gyrotropic Ultrarelativistic Plasma. The Astrophysical Journal. 2004. V. 611. № 2. P.1200-1207.

[39] *Sharma P., Quataert E., Hammett G.W., Stone J.M.* Electron heating in hot accretion flows // Astrophys. J. 2007. V. 667. P. 714-723

ОГЛАВЛЕНИЕ