ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 49 за 2022 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

К.Ю. Замана, В.Ж. Сакбаев

Композиции независимых случайных операторов и связанные с ними дифференциальные уравнения

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Замана К.Ю., Сакбаев В.Ж. Композиции независимых случайных операторов и связанные с ними дифференциальные уравнения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 49. 23 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2022-49
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-49

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

К.Ю. Замана, В.Ж. Сакбаев

Композиции независимых случайных операторов и связанные с ними дифференциальные уравнения

Москва — 2022

Замана К.Ю., Сакбаев В.Ж.

Композиции независимых случайных операторов и связанные с ними дифференциальные уравнения

Исследуются итерации независимых случайных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функций на конечномерном евклидовом пространстве. Рассматриваемые случайные операторы принимают значение в алгебре операторов, порожденной операторами сдвига аргумента функции либо ее Фурье-образа на вектор евклидова пространства, операторами ортогонального преобразования и операторами сжатия аргумента. Получены условия, достаточные для сходимости последовательности математических ожиданий композиций операторнозначных процессов со значениями в рассматриваемой алгебре операторов к полугруппам, описывающим диффузию в конечномерном евклидовом пространстве. Описаны генераторы предельных полугрупп.

Ключевые слова: случайный линейный оператор, операторнозначный случайный процесс, усреднение случайных полугрупп, итерации Фейнмана-Чернова

Zamana K.Yu., Sakbaev V.Zh.

Compositions of independent random operators and related differential equations

Iterations of independent random linear operators in the Hilbert space of square integrable functions on a finite dimensional Euclidean space are studied. Random operator under consideration take values in the algebra of operators which is generated by an operators of a shift on a vector of Euclidean space of the argument of a function or the argument of its Fourier image, operators of orthogonal mapping and operators of contraction of argument space. We obtain the conditions sufficient to convergence of a sequence of mean values of compositions of operator valued processes with values in the considered algebra of linear operators to the semigroup describing the diffusion in finite dimensional Euclidean space. Generators of limit semigroups are described.

Keywords: Random linear operator, operator valued random process, averaging of random semigroups, Feyman-Chernoff iteration

1. **Введение**

Описание предельных свойств композиций независимых случайных линейных операторов в банаховом пространстве представляет интерес и как некоммутативное обобщение классической теории случайных процессов, и как аппарат описания динамики квантовых систем со случайными параметрами, в т.ч. открытых квантовых систем. Предельные теоремы, описывающие асимптотику распределения произведения произведения большого числа независимых случайных линейных операторов, изучались в работах [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Применение теоремы Чернова (см. [9]) об аппроксимации полугрупп к получению предельных теорем для композиций случайных операторов можно найти в [5, 8, 10, 11, 12].

Эволюция квантовых и классических систем под влиянием нестационарных случайных воздействий интенсивно изучается специалистами по теории случайных процессов, по квантовой и статистической механике (см. [5, 11, 13, 14, 15]). Такие модели возникают в задачах квантовой механики для систем, находящихся в случайных нестационарных полях, а также при анализе композиций преобразований, моделирующих эволюцию состояний квантовых систем (см. [8, 16, 17, 18, 19, 20]). Интерес к изучению динамики квантовых состояний под воздействием последовательности случайных преобразований возникает в задачах квантовой оптики ([17]), высокотемпературной сверхпроводимости ([21, 22]), в задаче о поляроне в биологических структурах ([23, 24, 25]).

Представляет интерес описание характеристик предельного поведения случайных композиций при стремлении к бесконечности числа итераций. В работах [5, 7, 8, 11] получены предельные теоремы типа закона больших чисел и центральной предельной теоремы, описывающие сходимость случайных композиций по вероятности и по распределению. В статье [5] получены теоремы типа закона больших чисел, утверждающие сходимость по распределению последовательности произведений случайных операторов к детерминированному предельному оператору и описывающие предельные распределения композиций большого числа независимых случайных линейных преобразований конечномерного евклидова пространства. В отличие от [5], в работе [11] была доказана сходимость по вероятности последовательности случайных композиций к предельной полугруппе, что позволяет дать оценку вероятности отклонения в форме неравенства Чебышёва. Следует отметить, что результаты работ [7, 8, 11] представляют предельные теоремы, описывающие предельные распределения композиций большого числа независимых случайных преобразований бесконечномерных банаховых пространств. В работе [12] полученные в статье [5] результаты для случайных линейных преобразований распространены на случай аффинных преобразований. В работах [13, 26] были получены уравнения, описывающие диффузию на сфере конечномерного пространства, порождаемую композициями независимых случайных ортогональных преобразований.

Настоящая работа развивает теорию операторнозначных случайных процессов и приложения этой теории к вероятностному описанию решений эволюционных дифференциальных уравнений. Изучаются композиции независимых случайных преобразований функций на конечномерном линейном пространстве, представляющие собой некоммутативный аналог случайных блужданий. Исследуются композиции таких случайных преобразований, как сдвиг аргумента на случайный вектор, сдвиг на случайный вектор аргумента преобразования Фурье, случайное невырожденное линейное преобразование линейного пространства, оператор умножения на случайную функцию. Тем самым, настоящая работа представляет некоторые новые результаты об усреднении случайных линейных преобразований, связанные с расширением исследованной в [12] группы преобразований пространства $H = L_2(\mathbb{R}^d)$, порождаемой аффинными преобразованиями аргумента. Помимо преобразований из рассмотренной в [12] группы допускаются сопряженные к ним посредством преобразования Фурье.

Методы изучения процедуры усреднения основаны на применении теоремы Чернова к операторнозначным аппроксимациям Фейнмана-Чернова [7, 11, 14]. С этой целью изучается область дифференцируемости среднего значения однопараметрического семейства случайных операторов. Получены представляющие самостоятельный интерес представления операторнозначного остаточного члена в формуле Тейлора для операторнозначной функции.

В настоящей работе исследуется эволюционное уравнение, порождаемое случайными аффинными преобразованиями координатного евклидова пространства. Полученные здесь результаты развивают идеи работ [12, 13, 27], в которых изучались случайные аффинные преобразования пространства E, на случайные аффинные преобразования и преобразования, сопряженные аффинным посредством преобразования Фурье.

2. СЛУЧАЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ПОЛУГРУППЫ

Пусть

- $E = \mathbb{R}^d$ — конечномерное евклидово пространство со скалярным произведением $(\, . \, , \, . \,)$ и порождаемой им нормой $| \, . \, |$,

- $B(E)$ — банахова алгебра линейных преобразований пространства E (или матриц порядка d над полем $\mathbb{R}$) с операторной (спектральной) нормой $\|\,.\,\|$,

- $\mathcal{H} = L_2(E)$ — гильбертово пространство функций $u\colon E \to \mathbb{C}$, квадратично интегрируемых относительно стандартной меры Лебега μ на $\mathbb{R}^d$, со скалярным произведением $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ и порождаемой им нормой $\|\,.\,\|_{\mathcal{H}}$; скалярное произведение предполагается линейным по первому аргументу и антилинейным по второму аргументу,

- $B(\mathcal{H})$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ с операторной нормой $\|\,.\,\|_{B(\mathcal{H})}$ и тождественным оператором I,

- Σ — σ-алгебра на $B(\mathcal{H})$, порожденная семейством всех открытых шаров,

- $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ — топологическое векторное пространство, состоящее из операторнозначных функций $F\colon [0;+\infty) \to B(\mathcal{H})$, непрерывных относительно сильной операторной топологии пространства $B(\mathcal{H})$; топология τ_s в $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ порождается семейством полунорм $\Phi_{T,u}(F) = \sup\limits_{t\in[0;T]} \|F(t)u\|_{\mathcal{H}}$ при всех $T > 0$ и $u \in \mathcal{H}$,

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство.

Отображение $\mathbf{A}\colon \Omega \to B(\mathcal{H})$, значение которого на исходе $\omega \in \Omega$ будем обозначать $\mathbf{A}_\omega \in B(\mathcal{H})$, называется случайным оператором, если для любых $u, v \in \mathcal{H}$ функция $\langle \mathbf{A}u, v\rangle\colon \Omega \to \mathbb{C}$ является случайной величиной (здесь под $\mathbf{A}u$ понимается отображение $\omega \mapsto \mathbf{A}_\omega u$). Легко видеть, что случайный оператор является отображением, измеримым относительно σ-алгебры, порожденной стандартной базой слабой операторной топологии в $B(\mathcal{H})$. Известно (см. [28]), что если пространство $\mathcal{H}$ сепарабельно, как в нашем случае, то эта σ-алгебра совпадает с Σ, а также порождается стандартной базой сильной операторной топологии. Отсюда следует, что если $\mathbf{A}$ — случайный оператор на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то $\|\mathbf{A}u\|_{\mathcal{H}}$ для каждого $u \in \mathcal{H}$ и $\|\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})}$ являются случайными величинами. Стоит, однако, отметить, что Σ строго у́же борелевской σ-алгебры пространства $B(\mathcal{H})$, поскольку само $B(\mathcal{H})$ несепарабельно.

Линейная комбинация случайных операторов является случайным оператором. Если $\mathcal{H}$ сепарабельно, то композиция $\mathbf{A}\circ\mathbf{B} = \mathbf{AB}$ (поточечное произведение в банаховой алгебре $B(\mathcal{H})$) случайных операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ является случайным оператором; это вытекает из равенства

$$\langle \mathbf{AB}u, v\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \mathbf{B}u, e_k\rangle \langle \mathbf{A}e_k, v\rangle \quad \forall u, v \in \mathcal{H},$$

где $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис пространства $\mathcal{H}$.

Усреднением (или математическим ожиданием, или интегралом) случайного оператора $\mathbf{A}$ называется такой оператор $\mathrm{M}\mathbf{A} \in B(\mathcal{H})$, что для всех $u, v \in \mathcal{H}$ выполняется равенство $\langle (\mathrm{M}\mathbf{A})u, v\rangle) = \mathrm{M}\langle \mathbf{A}u, v\rangle$. Известно, что усреднение случайного оператора существует тогда и только тогда, когда для всех $u, v \in \mathcal{H}$ случайные величины $\langle \mathbf{A}u, v\rangle$ имеют конечные математические ожидания; в случае сепарабельности $\mathcal{H}$ для этого достаточно конечности $\mathrm{M}\|\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})}$ (см. [1]), причем $\|\mathrm{M}\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})} \leqslant \mathrm{M}\|\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})}$.

Отображение $\mathbf{F}\colon \Omega \to C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, значение которого на исходе $\omega \in \Omega$ будем обозначать $\mathbf{F}_\omega \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, называется случайной (сильно непрерывной) операторнозначной функцией, если для всякого $t \geqslant 0$ отображение $\mathbf{F}(t)\colon \Omega \to B(\mathcal{H})$, понимаемое как $\omega \mapsto \mathbf{F}_\omega(t)$, является случайным оператором. Если при каждом $\omega \in \Omega$ значение $\mathbf{F}_\omega$ является операторной полугруппой, то $\mathbf{F}$ будем называть случайной полугруппой. Отметим, что случайную операторнозначную функцию можно рассматривать как операторнозначный случайный процесс.

Усреднением случайной операторнозначной функции $\mathbf{F}$ называется такая операторнозначная функция $\mathrm{M}\mathbf{F} \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, что $(\mathrm{M}\mathbf{F})(t) = \mathrm{M}(\mathbf{F}(t))$ при всяком $t \geqslant 0$. Достаточные условия сильной непрерывности усреднения приведены в [13].

Итерациями Фейнмана-Чернова операторнозначной функции $F \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ называются члены последовательности $\left\{t \mapsto \bigl(F(t/n)\bigr)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$. Функция $F \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ называется эквивалентной по Чернову операторной полугруппе $U \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, если последовательность ее итераций Фейнмана-Чернова сходится к U в топологии τ_s пространства $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$. Достаточные условия эквивалентности по Чернову дает следующая теорема (см. [10, 14]).

Теорема [9]. *Пусть функция $F \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ такова, что $F(0) = I$ и $\|F(t)\|_{B(\mathcal{H})} \leqslant e^{\alpha t}$ при некотором $\alpha \geqslant 0$. Если замыкание оператора $F'(0)$ является генератором полугруппы $U \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, то функция F эквивалентна по Чернову полугруппе U.*

Распределением случайного оператора $\mathbf{A}$ будем называть результат переноса вероятностной меры $\mathbb{P}$ с $(\Omega, \mathcal{F})$ на $(B(\mathcal{H}), \Sigma)$ под действием $\mathbf{A}$. Распределение случайной операторнозначной функции $\mathbf{F}$ будем понимать в смысле теории случайных процессов как результат переноса вероятностной меры $\mathbb{P}$ под действием $\mathbf{F}$ с $(\Omega, \mathcal{F})$ на цилиндрическую σ-алгебру $\Sigma^{\mathbb{R}_+}$, порожденную на $B(\mathcal{H})^{\mathbb{R}_+}$ измеримым пространством $(B(\mathcal{H}), \Sigma)$. В силу отмеченного выше совпадения Σ с σ-алгеброй, порожденной базой слабой операторной топологии, если два случайных оператора имеют одинаковые распределения, то их усреднения совпадают.

Набор $\{\mathbf{A}_{(i)}\}_{i\in\mathcal{I}}$ случайных операторов называется независимым в совокупности, если он независим в совокупности как набор случайных элементов со значениями в $(B(\mathcal{H}), \Sigma)$, т.е. для всякого конечного набора индексов $i_1, \ldots, i_N$ из $\mathcal{I}$ и всякого конечного набора множеств $S_1, \ldots, S_N$ из Σ выполнено равенство

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega\colon \mathbf{A}_{(i_1)\omega} \in S_1, \ldots, \mathbf{A}_{(i_N)\omega} \in S_N\} =$$

$$= \mathbb{P}\{\omega \in \Omega\colon \mathbf{A}_{(i_1)\omega} \in S_1\} \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\{\omega \in \Omega\colon \mathbf{A}_{(i_N)\omega} \in S_N\}.$$

Аналогично, независимость в совокупности набора случайных операторнозначных функций понимается в смысле его независимости в совокупности как набора случайных элементов со значениями в $\big(B(\mathcal{H})^{\mathbb{R}_+}, \Sigma^{\mathbb{R}_+}\big)$. Если случайные операторы $\{\mathbf{A}_{(i)}\}_{i=1}^N$ независимы в совокупности и принимают значения в общем ограниченном шаре пространства $B(\mathcal{H})$, то (см. [14])

$$\mathrm{M}(\mathbf{A}_{(N)} \circ \ldots \circ \mathbf{A}_{(1)}) = \mathrm{M}\mathbf{A}_{(N)} \circ \ldots \circ \mathrm{M}\mathbf{A}_{(1)}.$$

Теорему Чернова можно интерпретировать как предельную теорему о сходимости в среднем композиций случайных операторнозначных функций в следующем смысле.

Теорема [11]. *Пусть* $\{\mathbf{F}_{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ — *последовательность независимых в совокупности одинаково распределенных случайных операторнозначных функций* $\mathbf{F}_{(n)}\colon \Omega \to C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, *имеющих усреднение* $\mathrm{M}\mathbf{F}_{(1)} \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, *причем* $\mathrm{M}\mathbf{F}_{(1)}(0) = I$ *и* $\|\mathrm{M}\mathbf{F}_{(1)}(t)\|_{B(\mathcal{H})} \leqslant e^{\alpha t}$ *при некотором* $\alpha \geqslant 0$. *Если замыкание оператора* $\big(\mathrm{M}\mathbf{F}_{(1)}\big)'(0)$ *является генератором полугруппы* $U \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, *то*

$$\mathrm{M}\left[\mathbf{F}_{(n)}(t/n) \circ \ldots \circ \mathbf{F}_{(1)}(t/n)\right] \xrightarrow{\tau_s} U(t).$$

3. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

Для применения теоремы Чернова к усреднению случайных операторов, порождаемых случайными преобразованиями аргумента функции, нам потребуются следующие тейлоровские аппроксимации операторнозначных функций.

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{A}$ – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда*

I) для любого числа $t > 0$ найдется такой самосопряженный оператор $\mathbf{\Theta}_t$, что $\mathbf{0} \leq \mathbf{\Theta}_t \leq \mathbf{I}$, $[\mathbf{\Theta}_t, e^{-t\mathbf{A}}] = 0$ и для любого $u \in D(\mathbf{A}^2)$ справедливо равенство $e^{-t\mathbf{A}}u = (\mathbf{I} - t\mathbf{A}u + \frac{t^2}{2}\mathbf{A}^2 e^{-t\mathbf{\Theta}_t\mathbf{A}})u$.

II) для любого числа $t > 0$ найдутся такие самосопряженные операторы $\mathbf{\Theta}_t$, Ξ_t, что $\mathbf{0} \leq \mathbf{\Theta}_t \leq \mathbf{I}$, $[\mathbf{\Theta}_t, e^{-it\mathbf{A}}] = 0$ и для любого $u \in D(\mathbf{A}^2)$ справедливо равенство

$$e^{-it\mathbf{A}}u = (\mathbf{I} - it\mathbf{A}u - \frac{t^2}{2}\mathbf{A}^2[\cos(t\mathbf{\Theta}_t\mathbf{A}) - i\sin(t\mathbf{\Xi}_t\mathbf{A})])u. \tag{3.1}$$

Доказательство. I) Рассмотрим сначала оператор $\mathbf{A}$ с дискретным спектром $\{\lambda_k\}$ и ОНБ из собственных векторов $\{e_k\}$. Тогда для каждого $t > 0$ и для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется число $\theta_{t,k} \in (0,1)$ такое, что $e^{-t\lambda_k} = 1 - t\lambda_k + \frac{t^2}{2}{\lambda_k}^2 e^{-t\theta_{t,k}\lambda_k}$. Если $u \in D(\mathbf{A}^2)$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^4 |u_k|^2 < +\infty$, где $u_k = (u, e_k)$. Поэтому ограниченный линейный самосопряженный оператор $\mathbf{\Theta}_t$, имеющий ОНБ из собственный векторов $\{e_k\}$ и соответствующий набор собственных значений $\{\theta_{t,k}\}$, удовлетворяет требуемым условиям.

Рассмотрим случай самосопряженного оператора $\mathbf{A}$ с непрерывным спектром и ортогональным разложением единицы $\mathbf{E}$. Тогда $D(\mathbf{A}) = \{u \in H : \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^2 d(\mathbf{E}_\lambda u, u) < +\infty\}$ и $(\mathbf{A}u, u) = \int\limits_{R} \lambda d(\mathbf{E}_\lambda u, u)$ $\forall u \in D(\mathbf{A})$.

Для каждого $t > 0$ и для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ найдется число $\theta_{t,\lambda} \in (0,1)$ такое, что

$$e^{-t\lambda} = 1 - t\lambda + \frac{t^2}{2}\lambda^2 e^{-t\theta_{t,\lambda}\lambda}. \tag{3.2}$$

Заметим, что при каждом $t > 0$ функция $\theta_{t,\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, принимает значения в интервале $(0,1)$ и непрерывна согласно равенству (3.2). Если $u \in D(\mathbf{A}^2)$, то $\int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^4 d(\mathbf{E}_\lambda u, u) < +\infty$.

Поэтому при каждом $t > 0$ определен ограниченный линейный самосопряженный оператор $\mathbf{\Theta}_t$, имеющий ортогональное разложение единица $\mathbf{E}$ и задаваемый равенством $(\mathbf{\Theta}_t u, u) = \int\limits_{\mathbb{R}} \theta_{t,\lambda} d(\mathbf{E}_\lambda u, u)$ и этот оператор удовлетворяет всем требуемым условиям.

II) Докажем вторую часть утверждения. Рассмотрим сначала оператор $\mathbf{A}$ с дискретным спектром $\{\lambda_k\}$ и ОНБ из собственных векторов $\{e_k\}$. Для каждого $t > 0$ и для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдутся числа $\theta_{t,k}$, $\xi_{t,k} \in (0,1)$ такие, что $e^{-it\lambda_k} =$

$1-it\lambda_k-\frac{t^2}{2}{\lambda_k}^2[\cos(t\theta_{t,k}\lambda_k)-i\sin(t\xi_{t,k}\lambda_k)]$. Если $u\in D(\mathbf{A}^2)$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k^4|u_k|^2<+\infty$, где $u_k=(u,e_k)$.

Поэтому ограниченные линейные самосопряженные операторы $\mathbf{\Theta}_t$, $\mathbf{\Xi}_t$, имеющий ОНБ из собственный векторов $\{e_k\}$ и соответствующий набор собственных значений $\{\theta_{t,k}\}$, $\{\xi_{t,k}\}$, удовлетворяет требуемым условиям.

Рассмотрим случай самосопряженного оператора $\mathbf{A}$ с непрерывным спектром и ортогональным разложением единицы $\mathbf{E}$. Тогда $D(\mathbf{A})=\{u\in H:\int\limits_{\mathbb{R}}\lambda^2 d(\mathbf{E}_\lambda u,u)<+\infty\}$ и $(\mathbf{A}u,u)=\int\limits_{R}\lambda d(\mathbf{E}_\lambda u,u)\ \forall u\in D(\mathbf{A})$

Для каждого $t>0$ и для каждого $\lambda\in\mathbb{R}$ найдутся числа $\theta_{t,\lambda}$, $\xi_{t,\lambda}\in(0,1)$ такие, что

$$e^{-it\lambda}=1-it\lambda-\frac{t^2}{2}\lambda^2[\cos(t\theta_{t,\lambda}\lambda)-i\sin(t\xi_{t,\lambda}\lambda)]. \tag{3.3}$$

Заметим, что при каждом $t>0$ функции $\theta_{t,\lambda}$, $\xi(t,\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, принимают значения в интервале $(0,1)$ и непрерывны согласно равенству (3.3). Если $u\in D(\mathbf{A}^2)$, то $\int\limits_{\mathbb{R}}\lambda^4 d(\mathbf{E}_\lambda u,u)<+\infty$.

Поэтому при каждом $t>0$ определены ограниченные линейные самосопряженные операторы $\mathbf{\Theta}_t$, $\mathbf{\Xi}_t$, имеющие ортогональные разложения единицы $\mathbf{E}$ и задаваемые равенствами $(\mathbf{\Theta}_t u,u)=\int\limits_{\mathbb{R}}\theta_{t,\lambda}d(\mathbf{E}_\lambda u,u)$, $(\mathbf{\Xi}_t u,u)=\int\limits_{\mathbb{R}}\xi_{t,\lambda}d(\mathbf{E}_\lambda u,u)$, и эти операторы удовлетворяют всем требуемым условиям. $\square$

4. СЛУЧАЙНЫЕ СДВИГИ, ПОВОРОТЫ И РАСТЯЖЕНИЯ

В работах [13, 12, 27, 29] рассматривались и изучались следующие типы случайных полугрупп на $\mathcal{H}$:

- $\mathbf{S}\colon\Omega\to C_s(\mathbb{R}_+,B(\mathcal{H}))$ — полугруппа сдвигов, действующая по формуле

$$\mathbf{S}_\omega(t)u(x)=u(x+t\xi(\omega))\quad\forall\omega\in\Omega\ \forall t\geqslant 0\ \forall u\in\mathcal{H},$$

  где $\xi\colon\Omega\to E$ — случайный вектор. В работе [13] было показано, что $\mathbf{S}(\sqrt{t})$ имеет сильно непрерывное усреднение, производная которого в нуле при условии равенства $\mathrm{M}\xi$ нулю и существования конечного ковариационного оператора D_ξ случайного вектора ξ представляет собой оператор диффузии в E вида

$$\Big((\mathrm{M}\mathbf{S})(\sqrt{t})\Big)'\Big|_{t=0}=\frac{1}{2}\nabla\cdot D_\xi\cdot\nabla\equiv\mathbf{L}_1, \tag{4.1}$$

а само усреднение $(\mathrm{M}\mathbf{S})(\sqrt{t})$ эквивалентно по Чернову операторной полугруппе

$$\mathbf{U}_1(t),\ t \geq 0, \tag{4.2}$$

разрешающей соответствующее эволюционное уравнение диффузии для этого оператора. При этом, как известно, замыкание плотно определенного на пространстве $C_0^2(E)$ оператора (4.1) является генератором полугруппы самосопряженных сжатий (4.2).

- $\mathbf{V}\colon \Omega \to C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ — полугруппа умножения на мнимую экспоненту (или полугруппа сдвигов в пространстве импульсов), действующая по формуле
$$\mathbf{V}_\omega(t)u(x) = e^{it(\eta(\omega),x)}u(x) \quad \forall\omega \in \Omega\ \forall t \geqslant 0\ \forall u \in \mathcal{H},$$
где $\eta\colon \Omega \to E$ — случайный вектор. В работе [1] было показано, что $\mathbf{V}(\sqrt{t})$ имеет сильно непрерывное усреднение, производная которого в нуле при условии равенства $\mathrm{M}\eta$ нулю и существования конечного ковариационного оператора D_η случайного вектора η представляет собой оператор умножения на квадратичную форму вида
$$\Big((\mathrm{M}\mathbf{V})(\sqrt{t})\Big)'\Big|_{t=0} = -\frac{1}{2}(D_\eta x, x) \equiv \mathbf{L}_2, \tag{4.3}$$
а само усреднение $(\mathrm{M}\mathbf{V})(\sqrt{t})$ эквивалентно по Чернову операторной полугруппе
$$\mathbf{U}_2(t),\ t \geq 0, \tag{4.4}$$
умножения на экспоненту $e^{-\frac{t}{2}(D_\eta x,x)}$. При этом, как нетрудно проверить (см., например, [27]), замыкание плотно определенного на пространстве $C_0^2(E)$ оператора (4.3) является генератором полугруппы самосопряженных сжатий (4.4).

- $\mathbf{R}\colon \Omega \to C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ — полугруппа поворотов, действующая по формуле
$$\mathbf{R}_\omega(t)u(x) = u\left(e^{t\mathbf{A}_\omega}x\right) \quad \forall\omega \in \Omega\ \forall t \geqslant 0\ \forall u \in \mathcal{H},$$
где $\mathbf{A}\colon \Omega \to B(E)$ — случайная кососимметрическая матрица. В работе [2] было показано, что $\mathbf{R}(\sqrt{t})$ имеет сильно непрерывное усреднение, производная которого в нуле при условии равенства $\mathrm{M}\mathbf{A}$ нулю и существования конечного $\mathrm{M}\|\mathbf{A}\|^2$ представляет собой оператор диффузии на сферах вида
$$\Big((\mathrm{M}\mathbf{R})(\sqrt{t})\Big)'\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\nabla\cdot\mathrm{M}\left(\mathbf{A}x \otimes \mathbf{A}x\right)\cdot\nabla \equiv \mathbf{L}_3, \tag{4.5}$$

а итерации Фейнмана-Чернова усреднения $(\mathrm{M}\mathbf{R})(\sqrt{t})$ сходятся при некоторых условиях в пространстве $C_s(\mathbb{R}_+, B(L_2(\mathbb{S}^{d-1})))$ к операторной полугруппе

$$\mathbf{U}_S(t),\ t \geq 0, \tag{4.6}$$

разрешающей соответствующее эволюционное уравнение диффузии на сфере $\mathbb{S}^{d-1}$ для этого оператора.

Покажем, что полугруппы операторов диффузии на сферах (4.6) задают полугруппу диффузии в пространстве E, сохраняющей инвариаными сферы S_r, $r > 0$. Для этого заметим, что $L_2(E) = L_{2,r}((0,+\infty), L_2(S_r))$, где $L_2(S_r)$ – пространство квадратично интегрируемых по мере Лебега на сфере S_r комплекснозначных функций; $L_{2,r}((0,+\infty), L_2(S_r))$ – пространство квадратично интегрируемых по Бохнеру с весом r отображений $(0,+\infty) \to L_2(S_r)$, норма в котором задается равенством $\|u\|^2_{L_{2,r}((0,+\infty),L_2(S_r))} = \int\limits_0^\infty r\|u(r)\|^2_{L_2(S_r)}dr$.

Пусть θ – локальные координаты на сфере S_1. Поскольку

$$\mathbf{R}_\omega(t)u(\theta,r) = (\mathbf{R}_\omega(t)u(\theta,r_1))|_{r_1=r},\ t \geq 0, r, r_1 > 0,\ \theta \in S_1,\ \omega \in \Omega,$$

то

$$\mathbf{U}_S(t)u(\theta,r) = (\mathbf{U}_S(t)u(\theta,r_1))|_{r_1=r},\ t \geq 0, r, r_1 > 0,\ \theta \in S_1.$$

Для произвольного промежутка $\Delta \subset (0,+\infty)$ и произвольного $\psi \in L_2(S_1)$ положим

$$\mathbf{U}(t)(\chi_\Delta(r)\psi(\theta)) = \chi_\Delta(r)\mathbf{U}_S\psi(\theta), \qquad t \geq 0. \tag{4.7}$$

Поскольку подпространство функций $\mathcal{H}_\Delta = \{\chi_\Delta(r) \otimes \psi(\theta),\ (r,\theta) \in (0,+\infty) \times S_1;\ \psi \in L_2(S_1)\}$ инвариантно относительно преобразований (4.7), то однопараметрическая полугруппа сжимающих операторов (4.7) в подпространствах $\mathcal{H}_\Delta$ продолжается по линейности и непрерывности до полугруппы сжимающих линейных преобразований пространства $\mathcal{H}$. Генератор полугруппы

$$\mathbf{U}_3(t),\ t \geq 0, \tag{4.8}$$

заданной на инвариантных подпространствах $\mathcal{H}_\Delta$ равенствами (4.7), будем обозначать символом $\mathbf{L}_3$.

Относительно случайного кососимметрического оператора $\mathbf{A}$ предполагаются некоторые из следующих условий:

A1. $\mathrm{M}\mathbf{A} = \int\limits_{\Omega} \mathbf{A}_\omega dP(\omega) = 0;$

A2. $\int\limits_{\Omega} \|\mathbf{A}_\omega\|^2 sP(\omega) < +\infty;$

A3. существуют $\gamma, \Gamma \in (0, +\infty)$ такие, что

$$\gamma\|\xi\|^2 \leq \mathrm{M}|(\mathbf{A}_\omega\sigma, \xi)|^2 \leq \Gamma\|\xi\|^2 \quad \forall\ \sigma:\ |\sigma| = 1, \quad \forall\xi \in T_\sigma(S^{d-1}),\ \forall\ \omega \in \Omega;$$

A4. $(\mathbf{A}_\omega)^* = -\mathbf{A}_\omega\ \forall\omega \in \Omega.$

A5. Распределение случайного оператора $\mathbf{A}$ дискретно: с вероятностью 1 случайный оператор принимает значения из некоторого счетного множества $\{\mathbf{A}_j\}$, достигая значения $\mathbf{A}_j$ с вероятностью $P(\mathbf{A} = \mathbf{A}_j) = p_j$.

A6. Распределение случайного оператора $\mathbf{A}$ симметрично, т.е. $P(\mathbf{A} \in B) = P(\mathbf{A} \in -B)\ \forall\ B \in \mathcal{B}(E)$.

- $\mathbf{\Lambda}\colon \Omega \to C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ — полугруппа растяжений, действующая по формуле

$$\mathbf{W}_\omega(t)u(x) = u\left(e^{t\mathbf{\Lambda}_\omega}x\right) \quad \forall\omega \in \Omega\ \forall t \geqslant 0\ \forall u \in \mathcal{H}, \tag{4.9}$$

где $\mathbf{\Lambda}\colon \Omega \to B(E)$ — случайная симметрическая матрица (случайный самосопряженный оператор в пространстве E) с нулевым следом. Равенство (4.9) определяет полугруппу $\mathbf{W}_\omega$ преобразований пространства финитных дважды непрерывно дифференцируемых функций $C_c^2(E)$ в себя, сохраняющее $\mathcal{H}$-норму.

При каждом ω и каждом $t \in \mathbb{R}$ невырожденное самосопряженное преобразование $e^{t\mathbf{\Lambda}_\omega}$ евклидова пространства E представимо как композиция сжатий и растяжений вдоль векторов собственного ОНБ оператора $\mathbf{\Lambda}_\omega$. Из равенства нулю следа оператора $\mathbf{\Lambda}_\omega$ следует, что якобиан преобразования в (4.9) равен единице, и, следовательно, унитарность полугруппы преобразований $\mathbf{W}_\omega$. Сильная непрерывность полугруппы $\mathbf{W}_\omega$ следует из сильной непрерывности полугруппы операторов растяжения с коэффициентом $e^{\lambda t},\ t \geq 0$, вдоль фиксированной прямой.

Подпространство $C_c^2(E)$ инвариантно относительно преобразований полугруппы $\mathbf{W}_\omega$. Поскольку эти преобразования сохраняют норму пространства $\mathcal{H}$ на векторах плотного подпространства $C_c^2(E)$, то операторы полугруппы $\mathbf{W}_\omega$ являются замыканиями операторов сужения $\mathbf{W}_\omega|_{C_c^2(E)}$.

Для каждого $u \in C_c^2(E)$ вектор-функция $\mathbf{W}_\omega(t)u$ имеет производную

$$\frac{d}{dt}\mathbf{W}_\omega(t)u = -i\mathcal{L}_{\mathbf{\Lambda}_\omega}\mathbf{W}_\omega(t)u,$$

где самосопряженный оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{\Lambda}_\omega}: \ D_\omega \to \mathcal{H}$ на векторах плотного подпространства $C_c^2(E)$ задан равенством $\mathcal{L}_{\mathbf{\Lambda}_\omega} u(x) = i(\mathbf{\Lambda}_\omega x, \nabla u(x)), \ x \in E$.

Поскольку на векторах плотного инвариантного подпространства $C_c^2(E)$ определен и квадрат генератора $-i\mathcal{L}_{\Lambda_\omega}$, то подпространство $u \in C_c^2(E)$ входит в область определения неотрицательного оператора $\mathcal{L}^2_{\Lambda_\omega}$, действующего на векторы $u \in C_c^2(E)$ по правилу

$$\mathcal{L}^2_{\Lambda_\omega} u = -\left(\mathbf{\Lambda}_\omega x, \nabla\left(\mathbf{\Lambda}_\omega x, \nabla u\right)\right).$$

Относительно случайного самосопряженного оператора $\mathbf{\Lambda}$ сделаем предположения:

Λ1. $\mathrm{M}\mathbf{\Lambda} = \int\limits_\Omega \mathbf{\Lambda}_\omega dP(\omega) = 0$;

Λ2. существует $\rho > 0$ такое, что $\|\mathbf{\Lambda}_\omega\|_{B(E)} \leq \rho$ для всех $\omega \in \Omega$;

Λ3. существует $\beta \in (0,1)$ такое, что $\beta \mathbf{I} \leq |\mathbf{\Lambda}_\omega| \leq \frac{1}{\beta}\mathbf{I} \quad \forall\ \omega \in \Omega$.

Λ4. $\mathrm{Tr}(\mathbf{\Lambda}_\omega) = 0\ \forall \omega \in \Omega$.

Λ5. Распределение случайного оператора $\mathbf{\Lambda}$ дискретно: с вероятностью 1 случайный оператор принимает значения из некоторого счетного множества $\{\mathbf{\Lambda}_j\}$, достигая значения $\mathbf{\Lambda}_j$ с вероятностью $P(\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_j) = p_j$.

Λ6. Распределение случайного оператора $\mathbf{\Lambda}$ симметрично, т.е.

$$P(\mathbf{\Lambda} \in B) = P(\mathbf{\Lambda} \in -B)\ \forall\ B \in \mathcal{B}(E).$$

На линейном многообразии $C_c^2(E)$ рассмотрим неотрицательный оператор

$$\bar{\mathbf{L}} = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \mathcal{L}^2_{\mathbf{\Lambda}_\omega} dP(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^\infty p_j \mathcal{L}^2_{\mathbf{\Lambda}_j}. \tag{4.10}$$

Оператор (4.10) задает на пространстве $C_c^2(E)$ неотрицательную квадратичную форму, с замыканием которой ассоциировано фридрихсово расширение $\mathbf{L}_4$ оператора $\bar{\mathbf{L}}$. Поскольку все операторы в сумме (4.10) являются неотрицательными, то из $u \in \mathbf{L}_4$ следует, что при каждом j вектор u принадлежит Фридрихсову расширению оператора $\mathcal{L}^2_{\mathbf{\Lambda}_j}|_{C_c^2(E)}$ и, следовательно,

$$D(\mathbf{L}_4) \subset D(\mathcal{L}^2_{\mathbf{\Lambda}_j}) \ \ \forall \ \ j. \tag{4.11}$$

Следовательно, в силу теоремы 1, при каждом $\omega \in \Omega$ и каждом $u \in D(\mathbf{L}_4)$ выполняется $u \in D(\mathcal{L}^2_{\mathbf{\Lambda}_\omega})$ и справедливо равенство

$$\mathbf{W}_\omega(t)u = u - it\mathcal{L}_{\mathbf{\Lambda}_\omega} u - \frac{1}{2}t^2 \mathcal{L}^2_{\mathbf{\Lambda}_\omega} u + t^2 r_{u,\omega}(t),\ t \geq 0,$$

где $\|r_{u,\omega}(t)\|_{\mathcal{H}} \to 0$ при $t \to 0$. Поэтому (см. [12]) при условиях Λ1-Λ6 случайная операторнозначная функция $\mathbf{W}_\omega(\sqrt{t}),\ t \geq 0,\ \omega \in \Omega$, имеет сильно непрерывное усреднение $\mathbf{F}(t) = \mathrm{M}\mathbf{W}(\sqrt{t}) = \int\limits_\Omega \mathbf{W}_\omega(\sqrt{t})dP(\omega),\ t \geq 0$.

При выполнении условий Λ1-Λ6 при любом $u \in D(\mathbf{L}_4)$ производная среднего значения $\mathbf{F}$ случайной векторнозначной функции $\mathbf{W}(\sqrt{t})u,\ t \geq 0$, в нуле существует и равна

$$\Big((\mathrm{M}\mathbf{W})(\sqrt{t})u\Big)'\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\mathrm{M}\left(\mathbf{\Lambda}_\omega x, \nabla\left(\mathbf{\Lambda}_\omega x, \nabla u\right)\right) \equiv -\mathbf{L}_4 u, \tag{4.12}$$

Поскольку оператор $\mathbf{L}_4 :\ D(\mathbf{L}_4) \to \mathcal{H}$ является поточечным на многообразии $D(\mathbf{L_4})$ пределом последовательности самосопряженных операторов

$$\mathbf{L}_{4,n} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j\left(\mathbf{\Lambda}_{\omega_j} x, \nabla\left(\mathbf{\Lambda}_{\omega_j} x, \nabla u\right)\right) \ :\quad D(\mathbf{L}_4) \to \mathcal{H},$$

то оператор $\mathbf{L}_4$ является самосопряженным (см. [30]).

Потому в силу теоремы Чернова при выполнении условий Λ1-Λ6 итерации Фейнмана-Чернова усреднения $(\mathrm{M}\mathbf{W})(\sqrt{t})$ сходятся в пространстве $C_s(\mathbb{R}_+, B(L_2(\mathbb{R}^d)))$ к операторной полугруппе

$$\mathbf{U}_4(t) = e^{-t\mathbf{L}_4},\ t \geq 0. \tag{4.13}$$

5. БЕРНУЛЛИЕВСКОЕ СМЕШИВАНИЕ

Рассмотрим случайную величину $\sigma\colon \Omega \to \{1, 2, 3, 4\}$ «бернуллиевского» типа, такую что $\mathbb{P}(\sigma = i) = p_i$ при $i = 1, 2, 3, 4$, где $\sum\limits_{j=1}^{4} p_j = 1$. Рассмотрим случайную полугруппу $\mathbf{X}$, получающуюся случайным «смешиванием» указанных выше полугрупп:

$$\mathbf{X}_\omega = \begin{cases} \mathbf{S}_\omega, & \text{если } \sigma(\omega) = 1, \\ \mathbf{V}_\omega, & \text{если } \sigma(\omega) = 2, \\ \mathbf{R}_\omega, & \text{если } \sigma(\omega) = 3, \\ \mathbf{W}_\omega, & \text{если } \sigma(\omega) = 4 \end{cases} = \tag{5.1}$$

$$= \chi_{\sigma^{-1}(1)}(\omega) \cdot \mathbf{S}_\omega + \chi_{\sigma^{-1}(2)}(\omega) \cdot \mathbf{V}_\omega + \chi_{\sigma^{-1}(3)}(\omega) \cdot \mathbf{R}_\omega + \chi_{\sigma^{-1}(4)}(\omega) \cdot \mathbf{W}_\omega.$$

Теорема 2. *Пусть случайная величина σ независима относительно случайных полугрупп $\mathbf{S}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{W}$. Пусть $\mathrm{M}\xi = \mathrm{M}\eta = 0$ и существуют конечные ковариационные операторы $\mathbf{D}_\xi$, $\mathbf{D}_\eta$ случайных величин ξ и η. Пусть случайные операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{\Lambda}$ удовлетворяют условиям A1-A6 и Λ1-Λ6 соответственно. Пусть*

$$\mathbf{F}(t)u(x) = \mathrm{M}u(\mathbf{X}(\sqrt{t})x), \ x \in E, \, t \geq 0, \ u \in \mathcal{H}. \tag{5.2}$$

Тогда при каждом $u \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$ справедливо равенство

$$\mathbf{F}'(0)u = \Big(\frac{p_1}{2}\nabla \cdot \mathbf{D}_\xi \cdot \nabla - \frac{p_2}{2}(\mathbf{D}_\eta x, x) + \tag{5.3}$$

$$+\frac{p_3}{2}\nabla \cdot \mathrm{M}\left(\mathbf{A}x \otimes \mathbf{A}x\right) \cdot \nabla + \frac{p_4}{2}\nabla \cdot \mathrm{M}\left(\mathbf{\Lambda}x \otimes \mathbf{\Lambda}x\right) \cdot \nabla\Big) \, u$$

Пусть, кроме того, $p_1 > 0$ и оператор $\mathbf{D}_\xi$ положительно определен. Тогда оператор (5.3) с областью определения $C_c^2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{H}$ является существенно неположительным.

Доказательство. Первое утверждение теоремы 1 следует из равенств (4.1, 4.3, 4.5, 4.12). Каждое из четырех слагаемых в (5.3) задает на подпространстве $C_c^2(E)$ неотрицательный оператор, а первое слагаемое при условии, что $p_1 > 0$ и оператор $\mathbf{D}_\xi$ положительно определен, задает существенно неположительный оператор: $(\frac{p_1}{2}\nabla \cdot \mathbf{D}_\xi \cdot \nabla u, u) \leq -p_1 d_1 \|u\|^2_{\mathcal{H}} \ \forall \ u \in C_c^2(E)$, где d_1 – наименьшее собственное значение ковариационного оператора $\mathbf{D}_\xi$. $\square$

Пусть $\mathbf{L}$ – фридрихсово расширение оператора (5.3), $D(\mathbf{L})$ – его область определения.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда*

1. Если $u \in D(\mathbf{L})$, то вектор-функция (5.2) дифференцируема и ее производная в нуле задается равенством (5.3).

2. Определенный на линейном многообразии $D(\mathbf{L})$ оператор (5.3) является существенно самосопряженным.

3. Заданная равенством (5.2) операторнозначная функция $\mathbf{F}$ эквивалентна по Чернову сильно непрерывной операторной полугруппе, порождаемой замыканием оператора (5.3).

Для доказательства теоремы 3 установим сначала свойства дифференцируемости векторнозначной функции, определяемой действием операторнозначной функции (5.3) на вектор u из более широкого чем $C_c^2(E)$ линейного многообразия $D(\mathbf{L})$.

6. СВОЙСТВА СМЕШИВАЕМЫХ ПОЛУГРУПП

Пусть $\mathbf{U}_j(t),\ t \geq 0;\ j = 1,2,3,4$ – полугруппы, заданные равенствами (4.2), (4.4), (4.8), (4.13). Заметим, что для любого $u \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$ $\mathbf{F}'(0)u = -(p_1\mathbf{L}_1 + p_2\mathbf{L}_2 + p_3\mathbf{L}_3 + p_4\mathbf{L}_4)$, где при каждом $j = 1,2,3,4$ $p_j \in (0,1)$ и $\mathbf{L}_j$ – неотрицательный самосопряженный оператор в пространстве $\mathcal{H}$, для которого линейное многообразие $D(\mathbf{L})$ приходится существенной областью определения.

Плотно определенный на линейном многообразии C_c^2 оператор $\mathbf{F}'(0)$ неотрицателен и, следовательно, замыкаем.

Пусть $\mathbf{L}$ – оператор, ассоциированный с квадратичной формой оператора $\mathbf{F}'(0)$, т.е. фридрихсово расширение оператора $\mathbf{F}'(0)$. Так как квадратичная форма оператора $\mathbf{F}'(0)$ мажорирует квадратичную форму каждого из операторов $\mathbf{L}_j$, то $D(\mathbf{L}) \subset \bigcap_{j=1}^4 D(\mathbf{L}_j)$ и существуют константы $c_j:\ \|\mathbf{L}_j u\|_H \leq c_j\|\mathbf{L}u\|_H\ \forall\ u \in D(\mathbf{L})$ (константы c_j можно выбрать $c_j = \frac{1}{p_j}$ в силу знакоопределенности генераторов).

Покажем, что на линейном многообразии $D(\mathbf{L})$ дифференцируема каждая из аппроксимаций $\mathbf{F}_j(t),\ t \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$.

Лемма 1. *Пусть* $u \in D(\mathbf{L})$. *Пусть* $\mathrm{M}|\mathbf{a}|^2 < \infty$ *и ковариационный оператор* $\mathbf{D}$ *случайного вектора* $\mathbf{a}$ *невырожден. Тогда*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}_1(t)u|_{t=0} = \mathbf{L}_1 u \tag{6.1}$$

где $\mathbf{F}_1(t)u(x) = \mathrm{M}(e^{i\sqrt{t}(a,x)})u(x),\ x \in E,\ t \geq 0;$ *и* $\mathbf{L}_1 u(x) = -(\mathbf{D}x,x)u(x),\ x \in E.$

Так как $u \in D(\mathbf{L})$, то $u \in D(\mathbf{L}_1)$, значит, $(1 + (\mathbf{D}x,x))u(x) \in L_2(E)$.

Следовательно, в силу невырожденности ковариационного оператора $\mathbf{D}$, для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $r_\epsilon > 0$, что

$$\int\limits_{|x|>r_\epsilon} |x|^4|u(x)|^2 dx < \epsilon.$$

Согласно формуле Тейлора

$$e^{i\sqrt{t}(a,x)}u(x) = (1 + i\sqrt{t}(a,x) - \frac{t}{2}(a,x)^2 +$$

$$+\frac{t}{2}(a,x)^2[(1 - \cos(\sqrt{t}(a,x)\theta(t,x,\omega))) + i(1 - \cos(\sqrt{t}(a,x)\xi(t,x,\omega))])u(x),$$

где $\theta(t,x,\omega),\ \xi(t,x,\omega) \in (0,1)$.

Следовательно,

$$\mathbf{F}_1(t)u(x) - u(x) - t\mathbf{A}_1 u(x) =$$

$$= \mathrm{M}[\frac{t}{2}(a,x)^2[(1-\cos(\sqrt{t}(a,x)\theta(t,x,\omega))) + i(1-\cos(\sqrt{t}(a,x)\xi(t,x,\omega))]u(x)].$$

Поэтому

$$\|\frac{1}{t}(\mathbf{F}_1(t)u(x)-u(x)) - \mathbf{A}_1u(x)\|_H^2 \le (\mathrm{M}\|a\|_E^2)^2 \int\limits_{|x|>r_\epsilon} |x|^4|u(x)|^2dx+$$

$$+\int\limits_{|x|\le r_\epsilon} |\mathrm{M}[(a,x)^2(\sin^2(\sqrt{t}\frac{\theta}{2}(a,x)) + \sin^2(\sqrt{t}\frac{\xi}{2}(a,x)))]|u(x)|^2dx.$$

Поскольку норма случайного вектора a имеет конечный второй момент, то с точностью до положительной постоянной ϵ можно считать величину a принимающей значения в некотором отрезке. В силу произвольности числа $\epsilon > 0$ выполняется доказываемое равенство (6.1).$\Box$

Лемма 2. *Пусть $u \in D(\mathbf{L})$. Пусть $\mathrm{M}|\mathbf{h}|^2 < \infty$ и ковариационный оператор $\mathbf{D}$ вектора $\mathbf{h}$ невырожден. Тогда*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}_2(t)u|_{t=0} = \mathbf{L}_2u \tag{6.2}$$

где $\mathbf{F}_2(t)u(x) = \mathrm{M}(\mathbf{S}_{\sqrt{t}h})u(x),\ x \in E,\ t \ge 0$; и $\mathbf{L}_2u(x) = \mathbf{D}_{i,j}\partial_j\partial_iu(x),\ x \in E$.

Доказательство леммы 2 сводится к доказательству леммы 1 благодаря унитарности преобразования Фурье и равенству $\mathbf{S}_{\sqrt{t}h}u(x) = \mathcal{F}^{-1}(\exp(i\sqrt{t}(h,\xi))(\mathcal{F}u))(x),\ x \in E,\ u \in \mathcal{H}$.

Лемма 3. *Пусть $\mathbf{A}$ – кососимметрический генератор случайной однопараметрической группы $e^{\mathbf{A}t}$, $t \in \mathbb{R}$ ортогональных операторов в пространстве $\mathbb{R}^d$. Тогда оператор-функция $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}(t)u(x) = u(e^{t\mathbf{A}}x),\ t \in \mathbb{R}$ является сильно непрерывной полугруппой в пространстве $\mathcal{H} = L_2(E)$, генератор которой содержит пространство $C_c^2(R^d)$ в качестве существенной области определения и действует согласно равенству*

$$\mathbf{L}_{\mathbf{A}}u(x) = (\mathbf{F}_{\mathbf{A}}(t))'u(x)|_{t=0} = (\mathbf{A}x, \nabla u(x)),\ x \in \mathbb{R}^d;$$

$$\mathbf{L}_{\mathbf{A}}^2u(x) = (\mathbf{F}_{\mathbf{A}}(t))''u(x)|_{t=0} = (\nabla, ((\mathbf{A}x \otimes \mathbf{A}x)\nabla)u(x)),\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Лемма 4.[13] *Пусть $\mathbf{A}$ – случайный кососимметрический генератор случайной однопараметрической группы ортогональных операторов, удовлетворяющий условию*

$$\gamma\|\xi\|^2 \le \mathrm{M}|(\mathbf{A}\sigma,\xi)|^2 \le \Gamma\|\xi\|^2 \quad \forall\ \sigma:\ |\sigma| = 1, \quad \forall \xi \in T_\sigma(S^{d-1}), \tag{6.3}$$

. *Тогда оператор-функция*

$$\mathbf{F}(t)u(x) = \mathrm{M}[u(e^{t\mathbf{A}}x)],\ t \in \mathbb{R}$$

эквивалентна по Чернову сильно непрерывной полугруппе в пространстве $\mathcal{H} = L_2(E)$*, генератор которой на существенной области определения* $C_c^2(R^d)$ *задается равенством*

$$\mathbf{L}_3 u(x) = \mathrm{M}(\nabla, ((\mathbf{A}x \otimes \mathbf{A}x)\nabla)u(x)),\ x \in \mathbb{R}^d.$$

При этом $D(\mathbf{L}_3) = L_{2,r}(0,+\infty), W_2^2(S_r))$ *и* $\|u\|^2_{L_{2,r}(0,+\infty),W_2^2(S_r))} = \int\limits_0^{+\infty} C_d r dr \int\limits_{S_r} \|\Delta_S u\|^2_{L_2(S_r)} dS$.

Лемма 5. *Если случайный генератор* $\mathbf{A}$ *ортогональных преобразований пространства* E *удовлетворяет условию (6.3), то тогда для любого кососимметрического оператора* $\mathbf{A} \in B(\mathbb{R}^d)$ *выполняется условие*

$$(\mathbf{L}_{\mathbf{A}}u, \mathbf{L}_{\mathbf{A}}u)_H \leq \Gamma \|\mathbf{A}\|^2_{B(\mathbb{R}^d)} \int\limits_0^\infty r^2 \|\nabla_S u\|^2_{L_2(S_r)} r dr\ \forall\ u \in D(\mathbf{L}_3).$$

Доказательство. Действительно,

$$(\mathbf{L}_{\mathbf{A}}u, \mathbf{L}_{\mathbf{A}}u)_H = \int\limits_0^\infty r dr \int\limits_{S_r} |(\mathbf{A}x, \nabla_S u(x))_E|^2 dS_r \leq$$

$$\leq \Gamma \int\limits_0^\infty \|\mathbf{A}\|^2_{B(\mathbb{R}^d} dr r^3 \int\limits_{S_r} \|\nabla_S u(x)\|^2_E dS_r. \quad \square$$

Следствие 6. Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда $D(\mathbf{L}^2_{\mathbf{A}}) \supset D(\mathbf{L}_3)$.

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение

Следствие 7. *Пусть* $\mathbf{A}$ *– генератор группы ортогональных преобразований пространства* $E = R^d$*, пусть* $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}$ *– генератор унитарной группы* $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ *в пространстве* $L_2(R^d)$*. Тогда для любого* $u \in D(\mathbf{L}^2_{\mathbf{A}})$ *выполняется условие*

$$e^{i\sqrt{t}(-i\mathbf{L}_{\mathbf{A}})}u = u + i\sqrt{t}\mathbf{L}_{\mathbf{A}}u - \frac{1}{2}t\mathbf{L}^2_{\mathbf{A}}u + \frac{1}{2}t((\mathbf{I} - \cos(\sqrt{t}\mathbf{\Theta}\mathbf{L}_{\mathbf{A}}) + i\sin(\sqrt{t}\mathbf{\Xi}\mathbf{L}_{\mathbf{A}}))\mathbf{L}^2_{\mathbf{A}}u,$$

где $[\mathbf{\Theta}, \mathbf{L}_{\mathbf{A}}] = \mathbf{0},\ [\mathbf{\Xi}, \mathbf{L}_{\mathbf{A}}] = \mathbf{0},$ *и* $\mathbf{0} \leq \mathbf{\Theta} \leq \mathbf{I},\ \mathbf{0} \leq \mathbf{\Xi} \leq \mathbf{I}$.

Лемма 8. *Если распределение случайного генератора* $\mathbf{A}_\omega$, $\omega \in \Omega$ *ортогонального преобразования пространства* E *симметрично (т.е.* $P(\mathbf{A} \in B) = P(\mathbf{A} \in -B)\ \forall\ B \in \mathcal{B}(E)$*), то среднее значение* $\mathbf{F}_3(t) = \int\limits_\Omega \mathbf{F}_{\mathbf{A}_\omega}(\sqrt{t})dP(\omega)$ *является ограниченным самосопряженным оператором при каждом* $t > 0$.

Доказательство. Если $\mathbf{A}$ – кососимметрический оператор в пространстве E, то для любого $t \geq 0$ оператор $\mathbf{F}_\mathbf{A}(t)$ унитарен в пространстве $\mathcal{H}$ и $(\mathbf{F}_\mathbf{A}(t))^* = \mathbf{F}_{-\mathbf{A}}(t)\ \forall\, t \geq 0$. Поэтому при каждом $t \geq 0$ оператор $\mathbf{F}_3(t)$ является сжимающим ибо $\|\mathbf{F}_3(t)\| \leq \int\limits_\Omega \|\mathbf{F}_{\mathbf{A}_\omega}(\sqrt{t})\|dP(\omega) \leq 1$. Поскольку распределение случайного генератора $\mathbf{A}_\omega$, $\omega \in \Omega$ ортогонального преобразования пространства E симметрично, то $(\mathbf{F}_3(t))^* = \int\limits_\Omega (\mathbf{F}_{\mathbf{A}_\omega}(\sqrt{t}))^* dP(\omega) = \int\limits_\Omega \mathbf{F}_{-\mathbf{A}_\omega}(\sqrt{t})dP(\omega) = \mathbf{F}_3(t)$ является ограниченным самосопряженным оператором при каждом $t > 0$. $\Box$

Следствие 9. *Если распределение случайного генератора* A_ω, $\omega \in \Omega$, *симметрично, то разностное отношение* $\mathbf{R}(t) = \frac{1}{t}(\mathbf{F}_3(t) - \mathbf{I})$ *является ограниченным самосопряженным оператором в пространстве* $\mathcal{H} = L_2(E)$.

Лемма 10. *Пусть* $u \in D(\bar{\mathbf{L}})$. *Пусть распределение случайного генератора* $\mathbf{A}$ *ортогонального преобразования является симметричным, дискретным и* $\mathrm{M}\|\mathbf{A}_\omega\|^4 < \infty$. *Тогда*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}_3(t)u|_{t=0} = \mathbf{A}_3 u. \tag{6.4}$$

Доказательство. Так как $u \in D(\mathbf{L})$, то $u \in D(\mathbf{L}_3)$. Значит,

$$(1 - \nabla_S \cdot \mathrm{M}(\mathbf{A}x \otimes \mathbf{A}x) \cdot \nabla_S)u(x) \in L_2(E).$$

Так как $u \in D(\mathbf{A}_3)$, то для любого кососимметрического оператора $\mathbf{A}$ согласно лемме 5 и следствию 6 выполняется условие $u \in D(\mathbf{L}_\mathbf{A}^2)$. Согласно теореме 1 и следствию 7

$$e^{i\sqrt{t}(-i\mathbf{L}_\mathbf{A})}u = (\mathbf{I} + \sqrt{t}\mathbf{L}_\mathbf{A}u - \frac{t}{2}\mathbf{L}_\mathbf{A}^2 + \frac{t}{2}\mathbf{L}_\mathbf{A}^2[\mathbf{I} - \cos(\sqrt{t}\mathbf{\Theta}_t\mathbf{L}_\mathbf{A}) + i\sin(\sqrt{t}\mathbf{\Xi}_t\mathbf{L}_\mathbf{A})])u,$$

где самосопряженные операторы $\mathbf{\Theta}_t$, $\mathbf{\Xi}_t$, обладают всеми свойствами, которые утверждает лемма 8. Следовательно,

$$\mathbf{F}_3(t)u(x) - u(x) - t\mathbf{A}_3u(x) = \mathrm{M}[\frac{t}{2}(\mathbf{L}_{\mathbf{A}_\omega})^2[(\mathbf{I} - \cos(\sqrt{t}\mathbf{\Theta}_{t,\omega}\mathbf{L}_{\mathbf{A}_\omega})) + i\sin(\sqrt{t}\mathbf{\Xi}_{t,\omega}\mathbf{L}_{\mathbf{A}_\omega})])u] =$$

$$= \mathrm{M}[\frac{t}{2}(\mathbf{L}_{\mathbf{A}_\omega})^2(2\sin^2(\frac{\sqrt{t}}{2}\mathbf{\Theta}_{t,\omega}\mathbf{L}_{\mathbf{A}_\omega}) + i\sin(\sqrt{t}\mathbf{\Xi}_{t,\omega}\mathbf{L}_{\mathbf{A}_\omega}))u]. \tag{6.5}$$

В силу следствия 9 второе слагаемое в правой части (6.5) равно нулю.

Положим $\mathbf{R}(t)=\frac{1}{t}(\mathbf{F}_3(t)-\mathbf{I})-\mathbf{A}_3,\ t\geq 0$. Из (6.5) следует, что

$$\mathbf{R}(t)u=\mathrm{M}[\mathbf{L}_{\mathbf{A}}^2\sin^2(\frac{\sqrt{t}}{2}\Theta_{t,\omega}\mathbf{L}_{\mathbf{A}_\omega})]u=\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\sin^2(\frac{\sqrt{t}}{2}\theta(t,\omega,\lambda)\lambda)\lambda^2 d\mathbf{E}_{\omega,\lambda}u\right)dP(\omega).$$

Если распределение $\mathbf{A}_\omega$, $\omega\in\Omega$, является дискретным, то $(\mathbf{R}(t)u,\mathbf{R}(t)u)\to 0$ при $t\to 0$ для всех $u\in D(\mathbf{L})$. Действительно, так как $u\in D(\mathbf{A}_3)$, то для любого кососимметрического оператора $\mathbf{A}$ согласно лемме 5 и следствию 6 выполняется условие $u\in D(\mathbf{L}_{\mathbf{A}}^2)$. Значит $\lim\limits_{l\to+\infty}\|\int\limits_{|\lambda|>l}\lambda^2 d\mathbf{E}_{\omega,\lambda}u\|_H=0$ для каждого $\omega\in\Omega$. Следовательно, для каждого $\omega\in\Omega$ и каждого $\epsilon>0$ существует $m=m_{\omega,\epsilon}>0$ такое, что

$$\|\int\limits_{|\lambda|>m}\lambda^2 d\mathbf{E}_{\omega,\lambda}u\|_H<\frac{\epsilon}{2}. \tag{6.6}$$

Тогда найдется такое $T_\epsilon>0$, что для любых $t\in(0,T_\epsilon)$ выполняется оценка

$$\int\limits_{\Omega}\left(\|\int\limits_{|\lambda|\leq m_\epsilon}\sin^2(\frac{\sqrt{t}}{2}\theta(t,\omega,\lambda)\lambda)\lambda^2 d\mathbf{E}_{\omega,\lambda}u\|\right)dP(\omega)<\frac{\epsilon}{2}.$$

Полученные оценки доказывают утверждение. (6.4).□

По той же схеме, что и лемма 10, доказывается следующее утверждение.

Лемма 11. *Пусть $u\in D(\bar{\mathbf{L}})$. Пусть распределение случайного генератора $\mathbf{\Lambda}$ преобразования растяжения является симметричным и удовлетворяет условиям Λ1-Λ6. Тогда*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}_4(t)u|_{t=0}=\mathbf{L}_4 u. \tag{6.7}$$

Доказательство леммы 11 основано на том, что $D(\mathbf{L})\subset D(\mathbf{L}_4)$ и, в силу предположений Λ1-Λ6, выполняется включение (4.11). Следовательно, $u\in D(\mathcal{L}_{\mathbf{\Lambda}_j}^2)$ при любом $j\in\mathbb{N}$ и потому применимо представление вектор-функции $e^{-it\mathcal{L}_{\mathbf{\Lambda}_j}}u$ в форме (3.1). Далее оценка остатка в представлении (3.1) проводится также, какк в доказательстве леммы 10. □

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Леммы 1, 2, 10, 11 показывают, что на линейном многообразии $D(\mathbf{L})$ операторнозначная функция $\mathbf{F}(t)=\sum\limits_{j=1}^{4}p_j\mathbf{F}_j(t),\ t\geq 0$, является дифференцируемой и для каждого $u \in D(\mathbf{L})$ выполняется равенство (5.3). Следовательно, функция $\mathbf{F}$ удовлетворяет всем условиям теоремы Чернова и потому

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|((\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n - e^{t\mathbf{L}})u\|_H = 0$$

при любых $u \in H$ и $T > 0$. Отсюда следует утверждение теоремы 3.

Таким образом, получены условия на распределения случайных преобразований со значениями в множестве операторов, включающем оператор аффинного преобразования аргумента и оператор умножения на экспоненту от мнимой линейной формы, достаточные для сходимости математических ожиданий последовательности бернуллиевских марковских случайных преобразований к сильно непрерывной полугруппе с усредненным генератором.

Список литературы

[1] *Furstenberg H.* Non-commuting random products // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 108. N^o 3. P. 377-428.

[2] *Тутубалин В.Н.* Некоторые теоремы типа усиленного закона больших чисел // Теория вероятн. и ее примен. 1969. Т. 14. № 2. С. 319-326.

[3] *Тутубалин В.Н.* О предельных теоремах для произведения случайных матриц // Теория вероятн. и ее примен. 1965. Т. 10. № 1. С. 19-32.

[4] *Летчиков А.В.* Условная предельная теорема для произведений случайных матриц // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 3. С. 65-84.

[5] *Berger M.A.* Central limit theorem for products of random matrices // Trans. AMS. 1984. V. 285. N^o 2. P. 777-803.

[6] *Протасов В.Ю.* Инвариантные функции для показателей Ляпунова случайных матриц // Матем. сб. 2011. Т. 202. № 1. С. 105-132.

[7] *Гоф Дж., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж. Смолянов О.Г.* Рандомизированное квантование гамильтоновых систем // Доклады РАН. 2021. Т. 498. № 1. С. 31-36.

[8] *Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh., Shmidt E.V.* Operator Approach to Weak Convergence of Measures and Limit Theorems for Random Operators // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42. N^o 10. P. 2413-2426.

[9] *Chernoff P.* Note on product formulas for operator semigroups // J. Funct. Anal. 1968. V. 2. N^o 2. P. 238-242.

[10] *Сакбаев В.Ж.* О законе больших чисел для композиций независимых случайных полугрупп // Изв. вузов. 2016. Т. 60. № 4. С. 86-91.

[11] *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Формулы Фейнмана и закон больших чисел для случайных однопараметрических полугрупп // Труды МИАН. 2019. Т. 306. С. 210-226.

[12] *Kalmet'ev R.Sh., Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh.* Chernoff iterations as a method of averaging of random affine mappings // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2022. V. 62. № 6. 160-171.

[13] *Замана К.Ю.* Усреднение случайных ортогональных преобразований аргумента функций // Уфимский Мат. Журнал. 2021. Т. 13. N^o 4. С. 23-41.

[14] *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Неограниченные случайные операторы и формулы Фейнмана // Изв. РАН. Сер. матем. 2016. Т. 80. N^o 6. С. 141-172.

[15] *Bonaccorci S., Cottini F., Mugnolo D.* Random evolution equation: well-posedness, asymptotics and application to graphs// Appl Math Optim (2021). https://doi.org/10.1007/s00245-020-09732-w

[16] *Гоф Дж., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж. Смолянов О.Г.* Марковские аппроксимации // Доклады РАН. 2022. V. 105. N^o 2. P. 92-96.

[17] *Borisov L.A., Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh.* Chernoff equivalence for shift operators, generating coherent states in quantum optics // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. V. 39. № 6. P. 742-746.

[18] *Kalmetev R.Sh., Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh.* Generalized Coherent States Representation // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V. 42. No 11. P. 2608-2614.

[19] *Orlov Yu.N., Vedenyapin V.V.* Special polynomials in problems of quantum optics // Modern Physics Letters B. 1995. V. 9. № 5. P. 291-298.

[20] *Efremova L.S., Grekhneva A.D., Sakbaev V.Zh.* Phase Flows Generated by Cauchy Problem for Nonlinear Schrödinger Equation and Dynamical Mappings of Quantum States// Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. V. 40. N^o 10. P. 1455-1469.

[21] *Lakhno V.D.* Translation-invariant bipolarons and the problem of high temperature superconductivity // Solid State Commun. 2012. V. 152. P. 621.

[22] *Fröhlich H.* On the Theory of superconductivity: The one dimensional case // Proceedings of the Royal Society A. 1954. V. 223. P. 296-305.

[23] *Lakhno V.D., Sultanov V.B.* On the possibility of bipolaronic states in DNA // Mol.Biophysics. 2011. V. 56. P. 210.

[24] *Каширина Н.И., Лахно В.Д.* Континуальная модель одномерного биполярона Холстейна в ДНК // Мат. биол. и биоинф. 2014. V. 9. P. 430.

[25] *Козырев С.В.* Модель вибронов в квантовом фотосинтезе как аналог модели лазера // Тр. МИАН. 2019. Т. 306. С. 158-169.

[26] *Замана К.Ю., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Случайные процессы на группе ортогональных матриц и описывающие их эволюционные уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 10. С. 1741-1756.

[27] *Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh. Zavadskii D.V.* Operator random walks and quantum oscillator // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41. *№* 4. P. 676-685.

[28] *Blasco O., García-Bayona I.* Remarks on Measurability of Operator-Valued Functions // Mediterr. J. Math. 2016. V. 13. P. 5147-5162.

[29] *Бусовиков В.М., Завадский Д.В., Сакбаев В.Ж.* Квантовые системы с бесконечномерным координатным пространством и преобразование Фурье // Труды МИАН. 2021. Т. 313. С. 33-46.

[30] *Богачев В.И., Смолянов О.Г.* Действительный и функциональный анализ. М.: УРСС, 2011.