



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 52 за 2022 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

В.В. Лукин

Устойчивые методы Рунге –
Кутты второго и третьего
порядка для решения задач
газовой динамики разрывным
методом Галеркина

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Лукин В.В. Устойчивые методы Рунге – Кутты второго и третьего порядка для решения задач газовой динамики разрывным методом Галеркина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 52. 19 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2022-52>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-52>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша
Российской академии наук**

В.В. Лукин

**Устойчивые методы Рунге — Кутты
второго и третьего порядка
для решения задач газовой динамики
разрывным методом Галеркина**

Москва — 2022

Лукин В.В.

Устойчивые методы Рунге — Кутты второго и третьего порядка для решения задач газовой динамики разрывным методом Галеркина

Рассмотрены методы Рунге — Кутты с областью устойчивости, включающей окружность максимального радиуса. Методы используются при аппроксимации системы уравнений газовой динамики разрывным методом Галеркина. Предложены и исследованы три метода второго и один третьего порядка, реализующие свойство максимального диска. Рассмотрены тестовые задачи газовой динамики в одномерной и двумерной постановках. Исследована способность полученных методов сохранять устойчивость и монотонность численного решения при максимально возможных шагах по времени.

Ключевые слова: методы Рунге — Кутты, газовая динамика, разрывный метод Галеркина, монотонность, устойчивость численного метода.

Vladimir Vladimirovich Lukin

Stable Runge — Kutta methods of 2nd and 3rd order for gas dynamics simulation using discontinuous Galerkin method

The Runge — Kutta methods with stability region including the circle of maximum radius are considered. The methods are used to approximate gas dynamics system of equations using the discontinuous Galerkin method. Three second-order and one third-order methods fulfilling maximum disk property are proposed and investigated. Test problems for the 1D and 2D gas dynamics are considered. The ability of the obtained methods to maintain the stability and monotonicity of the numerical solution at the maximum available time steps is studied.

Key words: Runge — Kutta methods, gas dynamics, discontinuous Galerkin method, monotonicity, numerical method stability.

1. Введение

Задачи, связанные с моделированием высокоскоростных течений газа, требуют применения устойчивых монотонных численных схем, обеспечивающих высокое пространственное разрешение. Как правило, разрешение схемы зависит прежде всего от порядка аппроксимации системы гиперболических уравнений по пространству [1], в то время как устойчивость метода определяется способом интегрирования по времени [2]. В свою очередь, монотонность схемы зависит от аппроксимации уравнений как по времени, так и по пространству.

Одним из методов, демонстрирующих высокую разрешающую способность при численном решении гиперболических систем уравнений, является разрывный метод Галеркина (DG — discontinuous Galerkin) [3–6]. Метод предполагает кусочно-полиномиальную аппроксимацию зависимости решения от пространственных переменных. Как правило, для интегрирования по времени системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных DG-методом, используются методы Рунге — Кутты [7].

Как известно, наиболее эффективными и легко масштабируемыми при использовании параллельных вычислений методами являются явные методы. Однако области устойчивости стандартных явных методов Рунге — Кутты малы [8]. Расположение спектра пространственной части оператора разностной задачи, получаемого при использовании DG метода, накладывает ограничения на метод интегрирования по времени как с точки зрения максимально допустимого шага, так и с точки зрения формы области устойчивости [2]. Использование многостадийных методов Рунге — Кутты второго и третьего порядка, количество стадий которых существенно превышает порядок, позволяет увеличить область устойчивости метода [9, 10], а следовательно, и максимальный шаг по времени, при котором метод сохраняет устойчивость и дает корректные результаты.

Кроме устойчивости, немаловажным требованием к методу интегрирования по времени является сохранение монотонности численного решения. Такое требование широко известно в литературе как TVD-свойство — способность метода уменьшать полную вариацию решения (total variation diminishing — TVD) [7].

Целью работы является исследование методов Рунге — Кутты с увеличенной областью устойчивости, которые могут быть использованы совместно с DG-методом для численного решения задач газовой динамики.

2. Система уравнений газовой динамики

В данной работе рассмотрено применение методов Рунге — Кутты при аппроксимации DG-методом системы уравнений газовой динамики, однако подобные рассуждения могут быть проведены для любой гиперболической

системы уравнений. Система уравнений газовой динамики включает следующие уравнения [11]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \hat{I}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} (e + p)) = 0, \quad (3)$$

где ρ — плотность, $\vec{v} = (u, v, w)^T$ — скорость, p — давление, e — полная энергия единицы объема,

$$e = \frac{\rho \|\vec{v}\|^2}{2} + \rho \varepsilon,$$

ε — удельная внутренняя энергия и \hat{I} — единичный тензор, знак \otimes означает внешнее произведение векторов. Система уравнений замыкается уравнением состояния совершенного газа

$$p = \rho \varepsilon (\gamma - 1),$$

где γ — показатель адиабаты.

Систему уравнений газовой динамики легко переписать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} F(U) = 0, \quad (4)$$

где U — вектор консервативных переменных, а $F(U)$ — совокупность тензоров потоков консервативных переменных, причем

$$U = (\rho, \rho \vec{v}, e)^T, \\ F(U) = (\rho \vec{v}, \rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \hat{I}, \vec{v} (e + p))^T.$$

3. Разрывный метод Галеркина

Рассмотрим скалярное уравнение, выражающее некоторый закон сохранения и записанное в консервативной форме,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} F(U) = 0, \quad (5)$$

где $U(\vec{x}, t)$ — неизвестная функция, $F(U) = (F_1(U), F_2(U), F_3(U))^T$ — вектор потоков. Пусть задана начально-краевая задача на пространственной области Ω и временном отрезке $[0, T]$.

Введем сетку $\Omega_h = \{I_j\}_{j=1}^n$ в области Ω . На каждой ячейке I_j зададим пространство $P^m(I_j)$ полиномов степени не выше m и выберем в нем ортонормированный относительно нормы пространства $L_2(I_j)$ базис $\{\varphi_j^{(s)}(\vec{x})\}_{s=0}^m$.

Запишем приближенное решение уравнения (5) в виде линейной комбинации функций выбранного базиса

$$U_h(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^m U_j^{(s)}(t) \varphi_j^{(s)}(\vec{x}).$$

В настоящей работе рассматривается случай $m = 1$.

Домножая скалярно (5) на базисную функцию $\varphi_j^{(s)}(\vec{x})$, получаем

$$\int_{I_j} \frac{\partial U}{\partial t} \varphi_j^{(s)}(\vec{x}) dV + \int_{I_j} \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \varphi_j^{(s)}(\vec{x}) dV = 0.$$

После некоторых преобразований приходим к уравнению

$$\int_{I_j} \frac{\partial U}{\partial t} \varphi_j^{(s)}(\vec{x}) dV + \oint_{\partial I_j} F_i n_i \varphi_j^{(s)}(\vec{x}) dS - \int_{I_j} F_i \frac{\partial \varphi_j^{(s)}(\vec{x})}{\partial x_i} dV = 0,$$

где $n = (n_1, \dots, n_N)^T$ — вектор внешней нормали к поверхности ∂I_j , ограничивающей ячейку I_j .

Наконец, заменяя точное решение U приближенным U_h , получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения коэффициентов U_j :

$$\frac{dU_j^{(s)}}{dt} = - \oint_{\partial I_j} F_i n_i \varphi_j^{(s)}(\vec{x}) dS + \int_{I_j} F_i \frac{\partial \varphi_j^{(s)}(\vec{x})}{\partial x_i} dV, \quad j = \overline{1, n}, \quad s = \overline{0, m},$$

или

$$\frac{dU_j^{(s)}}{dt} = L_h \left(\dots, U_\beta^{(\alpha)}, \dots \right), \quad j = \overline{1, n}, \quad s = \overline{0, m}. \quad (6)$$

Система (6) с соответствующими начальными условиями выражает пространственную аппроксимацию уравнения (5), полученную разрывным методом Галеркина [3]. Вычисление интегралов от нормальных компонент вектора потоков по границам ячеек требует применения дополнительных аппроксимаций, поскольку на этих гранях приближенное решение U_h разрывно. Как правило (см. [1]), для этого используются приближенные решения задачи Римана о распаде разрыва, соответствующие уравнению (5).

Сходимость DG-метода исследована в нескольких важных случаях. Априорные оценки ошибки метода существенно зависят от характеристик точного решения (прежде всего, от его гладкости), пространства, в котором приближенное решение ищется, и т.д. Например, в работе [12] рассмотрена сходимость в случае гладкого точного решения. Статьи [13] и особенно [14] посвящены доказательству сходимости DG-метода в случае разрывных решений.

4. Методы Рунге — Кутты

В связи со сложностью и нелинейностью оператора L_h для интегрирования по времени системы уравнений (6), как правило, используют явные методы и прежде всего методы Рунге — Кутты. Такие методы имеют ограниченную область устойчивости [8].

В [2] в качестве примера рассмотрено линейное уравнение переноса $u_t + cu_x = 0$ с постоянной скоростью c , решаемое на отрезке $[0, L]$ и дополненное периодическими граничными условиями $u(0, t) = u(L, t)$. Оператор cu_x , содержащий пространственную производную, может быть в самом простом случае аппроксимирован конечной разностной производной назад:

$$L_h y = -cy_{\bar{x},i} = -c(y_i - y_{i-1})/h,$$

где y — приближенное решение уравнения переноса на пространственной сетке из n ячеек с постоянным шагом $h = L/n$, i — индекс узла сетки. Обозначим через λ собственные числа оператора L_h и, введя величины $\mu = \lambda h/c$, получим, что μ расположены на окружности в левой части комплексной плоскости так, как это изображено на рис. 1.

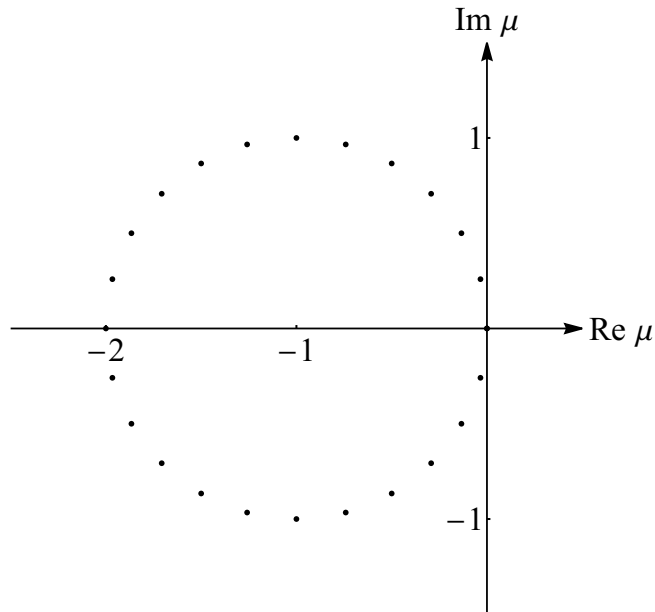


Рис. 1. Расположение нормированных собственных чисел оператора дифференцирования назад

Из приведенного примера видно, что в указанной ситуации для интегрирования уравнения переноса по времени удобно использовать метод, область устойчивости которого включает в себя диск максимального радиуса, расположенный в левой комплексной полуплоскости и касающийся мнимой оси в точке $(0, 0)$. В дальнейшем мы будем указывать это свойство как МД-условие. В случае более сложного вида оператора L_h расположение μ окажется иным, однако МД-условие останется важным с точки зрения выбора метода интегрирования по времени.

В работе [10] построены функции устойчивости, обеспечивающие точное или близкое к точному выполнение МД-условия. Для методов Рунге — Кутты второго порядка функция

$$R(z) = \frac{s-1}{s} \left(\frac{z}{s-1} + 1 \right)^s + \frac{1}{s} \quad (7)$$

обеспечивает выполнение МД-условия для произвольного количества стадий s . Соответствующие области устойчивости для количества стадий $s = 2, 3, 4$ изображены на рис. 2, а.

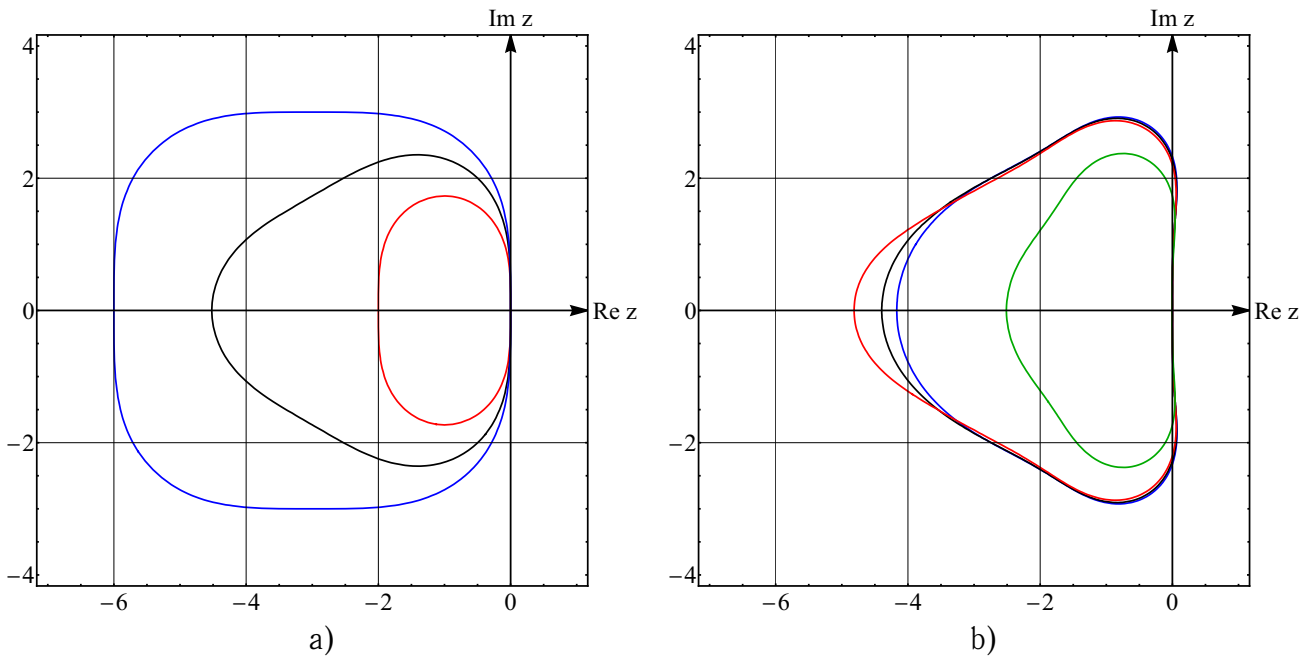


Рис. 2. Области устойчивости, соответствующие виду функции $R(z)$: а) функция (7) при $s = 2, 3, 4$ (красная, черная и синяя кривые соответственно); б) функции (8) (зеленая кривая) и (9) при $\varkappa = 0.022, 0.023805, 0.025$ (красная, черная и синяя кривые соответственно)

Для всех трехстадийных методов Рунге — Кутты третьего порядка функция устойчивости имеет вид

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}. \quad (8)$$

В случае четырехстадийного метода третьего порядка с функцией устойчивости

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \varkappa z^4, \quad (9)$$

где $\varkappa = 0.023805$, МД-условие оказывается почти выполненным (область устойчивости содержит круг близкого к максимальному радиуса). Значения параметра $\varkappa = 0.022 \dots 0.025$ также дают метод с областью устойчивости, включающей диск почти максимального радиуса: при выборе \varkappa в указанном

диапазоне радиус вписанного диска изменяется в пределах одного процента, что несущественно для практических вычислений. Соответствующие области устойчивости изображены на рис. 2, б.

4.1. Условие TVD

При использовании численных схем высокого порядка отдельной сложностью становится обеспечение монотонности получаемого численного решения [15]. В отличие от линейного случая, где понятие монотонности легко трактовать на основе принципа максимума для разностных схем, для нелинейных систем гиперболических уравнений вида $u_t = Lu$, где оператор L содержит только производные по пространственным переменным, понятие монотонности часто вводят с помощью понятия TVD-свойства схемы (total variation diminishing). TVD-свойство схем рассматривается, как правило, в отношении аппроксимации пространственной части оператора задачи [1].

Однако в работе [7] рассмотрено также влияние свойства TVD на выбор метода Рунге — Кутты при интегрировании гиперболических систем уравнений по времени. Пусть разностный оператор L_h аппроксимирует оператор L на пространственной сетке Ω_h . Рассмотрим на временном слое l приближенное решение $Y^l = \{y_i^l\}$. Пусть решение на следующем временном слое Y^{l+1} вычисляется с использованием метода Рунге — Кутты. Этот метод обладает свойством TVD, если $TV(Y^{l+1}) \leq TV(Y^l + \tau L_h(Y^l))$, где $TV(Y) = \sum_j |y_{j+1} - y_j|$ — полная вариация сеточной функции Y , для которой суммирование выполняется по всей сетке Ω_h .

Как показано в [2], явный метод Рунге — Кутты для решения автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений $u' = f(u)$ может быть записан в так называемой интерполяционной форме

$$g_1 = y_l, \quad g_i = g_{i-1} + \tau a_{i,i-1} k_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} \eta_j^i g_j, \quad i = \overline{2, s}, \quad (10)$$

$$g_{s+1} = g_s + \tau \xi k_s, \quad y_{l+1} = \sum_{j=1}^{s+1} \sigma_j g_j, \quad (11)$$

где $k_i = f(g_i)$, σ_j , $j = \overline{1, s}$ и η_j^i , $i = \overline{2, s}$, $j = \overline{1, i-1}$ — некоторые постоянные коэффициенты, вычисляемые с помощью коэффициентов $a_{i,j}$, $i = \overline{2, s}$, $j = \overline{1, i-1}$ и b_j , $j = \overline{1, s}$ из соответствующей методу таблицы Бутчера [8]. При этом коэффициент $\xi \neq 0$ может быть выбран произвольно, а $\sigma_{s+1} = b_s/\xi$.

Применяя результаты, полученные в [7], к обозначениям (10)–(11) можно получить [2], что метод Рунге — Кутты удовлетворяет условию TVD, если

$$a_{i,i-1} \geq 0, \quad i = \overline{2, s}, \quad \delta_{j,i-1} + \eta_j^i \geq 0, \quad i = \overline{2, s}, \quad j = \overline{1, i-1},$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, и существует по крайней мере одно такое значение ξ , что все σ_j неотрицательны, $j = 1, \dots, s+1$.

4.2. Варианты методов Рунге — Кутты

В данном разделе мы сравним два популярных метода Рунге — Кутты [7], удовлетворяющих TVD-условию, и несколько новых методов, полученных с учетом выполнения МД-условия. Всегда существует бесконечно много методов Рунге — Кутты, имеющих одну и ту же функцию устойчивости, мы рассмотрим лишь небольшое количество методов для функций устойчивости (7), (8) и (9).

- Методы второго порядка.

- 1) Двухстадийный TVD-метод из [7] задается формулами

$$k_1 = f(y_l), \quad k_2 = f(y_l + \tau k_1), \quad y_{l+1} = y_l + \frac{\tau}{2}k_1 + \frac{\tau}{2}k_2.$$

Он автоматически удовлетворяет МД-условию, поскольку все двухстадийные методы второго порядка имеют одну и ту же функцию устойчивости $R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}$. Выбирая $\xi = 1$, можно получить интерполяционную форму этого метода:

$$g_1 = y_l, \quad g_2 = g_1 + \tau f(g_1), \quad g_3 = g_2 + \tau f(g_2), \quad y_{l+1} = \frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{2}g_3.$$

Заметим, что она соответствует выполнению двух шагов явного метода Эйлера длины τ и линейной интерполяции значения y_{l+1} по полученным крайним значениям g_1 и g_3 . В дальнейшем будем обозначать его RK2S2TVD.

- 2) Трехстадийный метод, удовлетворяющий условию МД, но не удовлетворяющий условию TVD, из [2] имеет вид

$$g_1 = y_l, \quad k_1 = f(g_1), \quad g_2 = y_l + \frac{\tau}{3}k_1, \quad k_2 = f(g_2), \\ g_3 = y_l + \frac{\tau}{3}k_1 + \frac{\tau}{3}k_2, \quad k_3 = f(g_3), \quad y_{l+1} = y_l + \frac{\tau}{4}k_1 + \frac{3\tau}{4}k_3.$$

Обозначение RK2S3-MD.

- 3) Трехстадийный метод, удовлетворяющий условиям МД и TVD, из [2] имеет вид

$$g_1 = y_l, \quad k_1 = f(g_1), \quad g_2 = y_l + \frac{\tau}{2}k_1, \quad k_2 = f(g_2), \\ g_3 = y_l + \frac{\tau}{2}k_1 + \frac{\tau}{2}k_2, \quad k_3 = f(g_3), \quad y_{l+1} = y_l + \frac{\tau}{3}(k_1 + k_2 + k_3).$$

Обозначение RK2S3TVD-MD. Эти два трехстадийных метода имеют одну и ту же функцию устойчивости $R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{12}$.

- 4) Четырехстадийный метод, удовлетворяющий условиям МД и TVD, с функцией устойчивости $R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{9} + \frac{z^4}{108}$, задается формулами

$$g_1 = y_l, \quad g_2 = g_1 + \frac{\tau}{3}f(g_1), \quad g_3 = g_2 + \frac{\tau}{3}f(g_2), \quad g_4 = g_3 + \frac{\tau}{3}f(g_3),$$

$$g_5 = g_4 + \frac{\tau}{3}f(g_4), \quad y_{l+1} = \frac{1}{4}g_1 + \frac{3}{4}g_5.$$

По аналогии с методом RK2S2TVD он получен путем выполнения четырех шагов явного метода Эйлера длины $\tau/3$ и последующей линейной интерполяции значения y_{l+1} по крайним значениям g_1 и g_5 . Обозначение RK2S4TVD-MD.

• Методы третьего порядка.

- 1) Трехстадийный метод, удовлетворяющий условию TVD, из [7] имеет вид

$$y^* = y_l + \tau f(y_l), \quad y^{**} = \frac{3}{4}y_l + \frac{1}{4}y^* + \frac{1}{4}\tau f(y^*),$$

$$y_{l+1} = \frac{1}{3}y_l + \frac{2}{3}y^{**} + \frac{2}{3}\tau f(y^{**}).$$

Он также удовлетворяет условию МД с функцией устойчивости $R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}$, поскольку его порядок совпадает с количеством стадий. Выбирая $\xi = 1$, его можно представить в интерполяционной форме

$$g_1 = y_l, \quad g_2 = g_1 + \tau f(g_1), \quad g_3 = g_2 + \frac{\tau}{4}f(g_2) + \frac{3}{4}g_1 - \frac{3}{4}g_2,$$

$$g_4 = g_3 + \tau f(g_3), \quad y_{l+1} = \frac{1}{3}g_1 + \frac{2}{3}g_4.$$

Обозначение RK3S3TVD.

- 2) Четырехстадийный метод, удовлетворяющий условию TVD и приближенно — МД (квази-МД), имеет вид

$$g_1 = y_l, \quad g_2 = g_1 + \tau p f(g_1), \quad g_3 = g_2 + \tau p f(g_2), \quad g'_3 = \alpha g_1 + (1 - \alpha)g_3,$$

$$g_4 = g'_3 + \tau p f(g'_3), \quad g'_4 = \beta g_1 + (1 - \beta)g_4, \quad g_5 = g'_4 + \tau p f(g'_4),$$

$$y_{l+1} = \gamma g_1 + (1 - \gamma)g_5,$$

где

$$p = \frac{3}{5}, \quad \alpha = \frac{6}{11}, \quad \beta = \frac{56}{111}, \quad \gamma = \frac{31}{216}.$$

Ему соответствует функция устойчивости (9) при значении пара-

метра $\varkappa = 1/40$. Обозначение RK3S4TVD-qMD. Заметим, что при заданном коэффициенте \varkappa коэффициенты p, α, β, γ могут быть вычислены по следующим формулам:

$$p = 24\varkappa, \quad \mu = \frac{1}{2p^2} \left(\frac{1}{36\varkappa} - 1 \right) - \frac{2\varkappa}{p^4},$$

$$\gamma = 1 - \mu + \frac{\varkappa}{p^4} \left(3 - \frac{p^3}{\varkappa} \right), \quad \beta = (\varkappa/p^4 - \mu + \gamma - 1)/(\gamma - 1),$$

$$\alpha = \mu/(\beta - 1)(1 - \gamma).$$

Радиусы максимальных дисков, вписанных в области устойчивости перечисленных методов, приведены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры рассматриваемых методов Рунге — Кутты

Метод	RK2S2TVD	RK2S3-MD	RK2S3TVD-MD
Кол-во стадий	2	3	3
Порядок	2	2	2
Радиус МД	1	2	2
Метод	RK2S4TVD-MD	RK3S3TVD	RK3S4TVD-qMD
Кол-во стадий	4	3	4
Порядок	2	3	3
Радиус МД	3	1.25	2.05

Заметим, что вычислительная стоимость каждого из методов в реальных расчетах зависит не только от максимально допустимого шага по времени (теоретически пропорционального радиусу МД), но и от количества вызовов функции, вычисляющей правую часть системы ОДУ. Также в зависимости от способа пространственной аппроксимации уравнения влияние оказывает и порядок метода Рунге — Кутты.

5. Численные примеры

Описанные выше методы протестированы на примере нескольких гиперболических задач. Результаты тестирования методов применительно к решению одномерного уравнения переноса полностью определяются соотношениями радиусов МД, приведенными в таблице 1 (часть результатов тестов приведена в [2]). Здесь рассмотрим результаты тестовых расчетов для системы уравнений газовой динамики (1)–(3) в одномерной и двумерной пространственных постановках.

5.1. Одномерные тесты

Для проведения одномерных тестовых расчетов использован программный комплекс, представленный в работе [16]. На ячейках пространственной

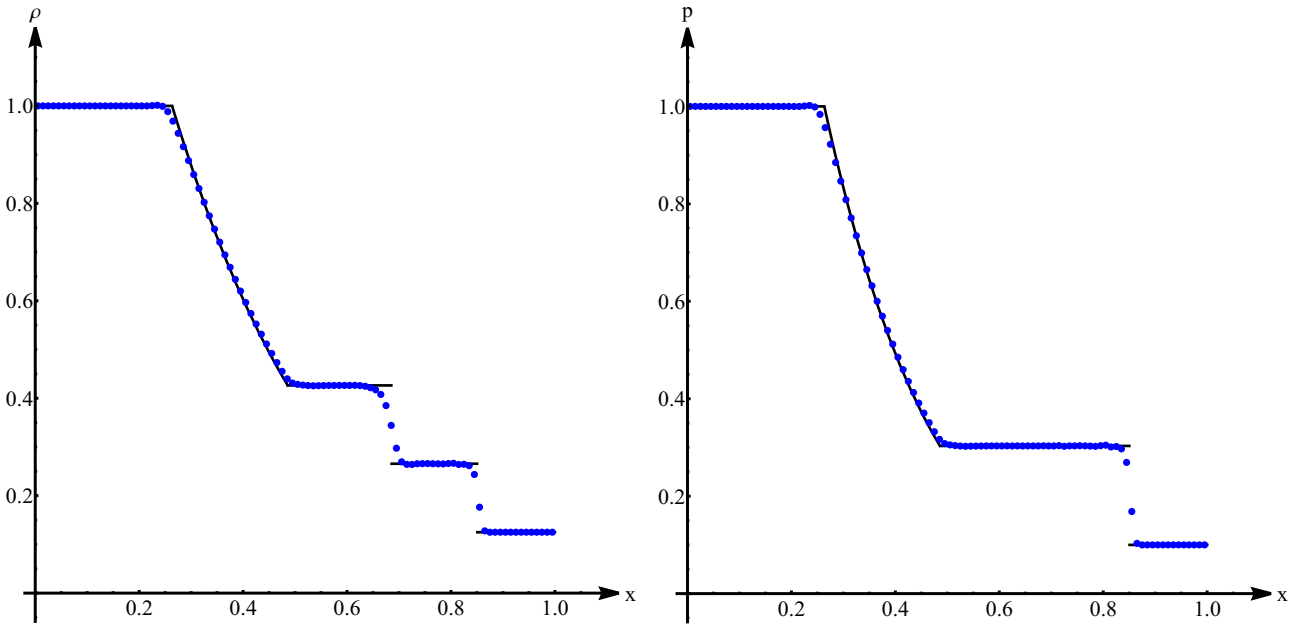


Рис. 3. Распределения плотности (слева) и давления (справа) в задаче Сода, точное (непрерывная линия) и численное (точки) решения

сетки решение аппроксимировалось линейными функциями, численные потоки вычислялись по методу HLLC, для монотонизации решения использовался индикатор Хартена, а также лимитеры WENO_S [17] и HWENO_SC [18].

В качестве тестового примера рассмотрен вариант задачи Римана о распаде разрыва — тестовая задача Сода [11]. Она успешно применяется для тестирования численных схем, поскольку ее решение содержит три типа разрывов, характерных для задач газовой динамики: ударную волну, волну разрежения, контактный разрыв. Задача решалась на отрезке $[0, 1]$ с начальным положением разрыва в точке $x^* = 0.5$ вплоть до момента времени $T = 0.2$. Начальные условия имеют вид:

$$(\rho, u, v, w, p) = \begin{cases} (1, 0, 0, 0, 1), & x \leq 0.5; \\ (0.125, 0, 0, 0, 0.1), & x > 0.5. \end{cases}$$

Точное и типичное численное решения задачи Сода изображены на рис. 3.

Результаты исследования максимальных шагов по времени собраны в таблице 2. Каждый расчет производился с постоянным шагом по времени. В таблице $C_m = \tau_{\max}/h$, где τ_{\max} — максимальный шаг по времени, при котором решение устойчиво и не содержит существенных паразитных осцилляций, h — шаг пространственной сетки; W — отношение коэффициентов C_m для текущего метода и референсного метода соответствующего порядка (RK2S2TVD для методов второго порядка и RK3S3TVD для методов третьего порядка); E — отношение вычислительных сложностей текущего метода и референсного. Вычислительная сложность метода оценивалась как полное количество вызовов правой части системы ОДУ и вычислялась как W , скорректированное на отношение количеств стадий методов, взятых из таблицы 1.

Таблица 2. Соотношения максимальных временных шагов для тестовой задачи Сода

Метод	WENO_S			HWENO_SC		
	C_m	W	E	C_m	W	E
второй порядок						
RK2S2TVD	0.195	—	—	0.305	—	—
RK2S3-MD	0.325	1.67	1.11	0.455	1.49	0.99
RK2S3TVD-MD	0.345	1.77	1.18	0.540	1.77	1.18
RK2S4TVD-MD	0.435	2.23	1.12	0.720	2.36	1.18
третий порядок						
RK3S3TVD	0.225	—	—	0.365	—	—
RK3S4TVD-qMD	0.399	1.77	1.33	0.570	1.56	1.17

Заметим, что применение лимитеров при аппроксимации пространственного оператора, по всей видимости, приводит и к изменению расположения его собственных чисел. Причем, поскольку лимитеры используются только на части ячеек сетки, помеченной индикатором немонотонности, то указанное влияние в различных с точки зрения монотонности схемах интегрирования по времени оказывается различным. Так, методы, удовлетворяющие условию TVD, оказываются более эффективными, чем те, которые ему не удовлетворяют. Например, хотя методы RK2S3-MD и RK2S3TVD-MD имеют одну и ту же область устойчивости, TVD-метод позволяет использовать больший шаг по времени во всех расчетах. Иными словами, более редкое применение лимитера при использовании TVD-методов позволяет в том числе “улучшить” спектр пространственного оператора.

Сопоставление параметра E для разных методов показывает, что хотя метод RK2S4TVD-MD обеспечивает максимальный шаг по времени в проведенных расчетах, однако он содержит 4 внутренние стадии на каждом временном шаге и не дает выигрыша в вычислительной сложности относительно метода RK2S3TVD-MD. Причем в некоторых случаях RK2S4TVD-MD работает даже медленнее, чем RK2S3TVD-MD.

Эффективность методов существенно зависит от использованного алгоритма монотонизации решения — лимитера. Во многих случаях применение лимитера HWENO_SC позволяет вести расчет с временным шагом, более чем в полтора раза большим, чем при использовании лимитера WENO_S. Это снова говорит о влиянии лимитера на спектр пространственного оператора схемы. В то же время вычислительная и алгоритмическая сложность лимитера HWENO_SC существенно выше, чем WENO_S, поскольку в первом случае предполагается переход от консервативных неизвестных задачи к характеристическим.

Также стоит отметить, что при одинаковом количестве стадий методы второго порядка позволяют использовать больший шаг по времени, нежели методы третьего порядка. Это свойство важно, если высокий порядок интегрирования по времени не является обязательным.

5.2. Двумерные тесты

Описанные методы протестированы также применительно к двумерным задачам. Для этого использован описанный в [19] параллельный программный комплекс для решения задач газовой динамики на смешанных неструктурированных сетках, основанный на разрывном методе Галеркина. Используются две комбинации методов:

- 1) лимитер WENO_SC [17, 18] и локальный численный поток Лакса — Фридрикса (LLF) [11];
- 2) лимитер BVVertex [20] и численный поток Хартена — Лакса — ван Лира (HLL) [11].

Тестовая задача описывает набегание вертикальной ударной волны с числом Маха $M_s = 10$ на призму, имеющую наклон $\varphi = 30^\circ$ к горизонтали. При соударении волны и призмы формируется сложная ударно-волновая структура так называемого двойного Маховского отражения (ДМО). Были выбраны параметры набегающего потока $\rho = 8$, $u = 8.25$ и $p = 116.518$; начальные условия $\rho = 1.4$, $u = v = w = 0$ и $p = 1$; показатель адиабаты $\gamma = 1.4$.

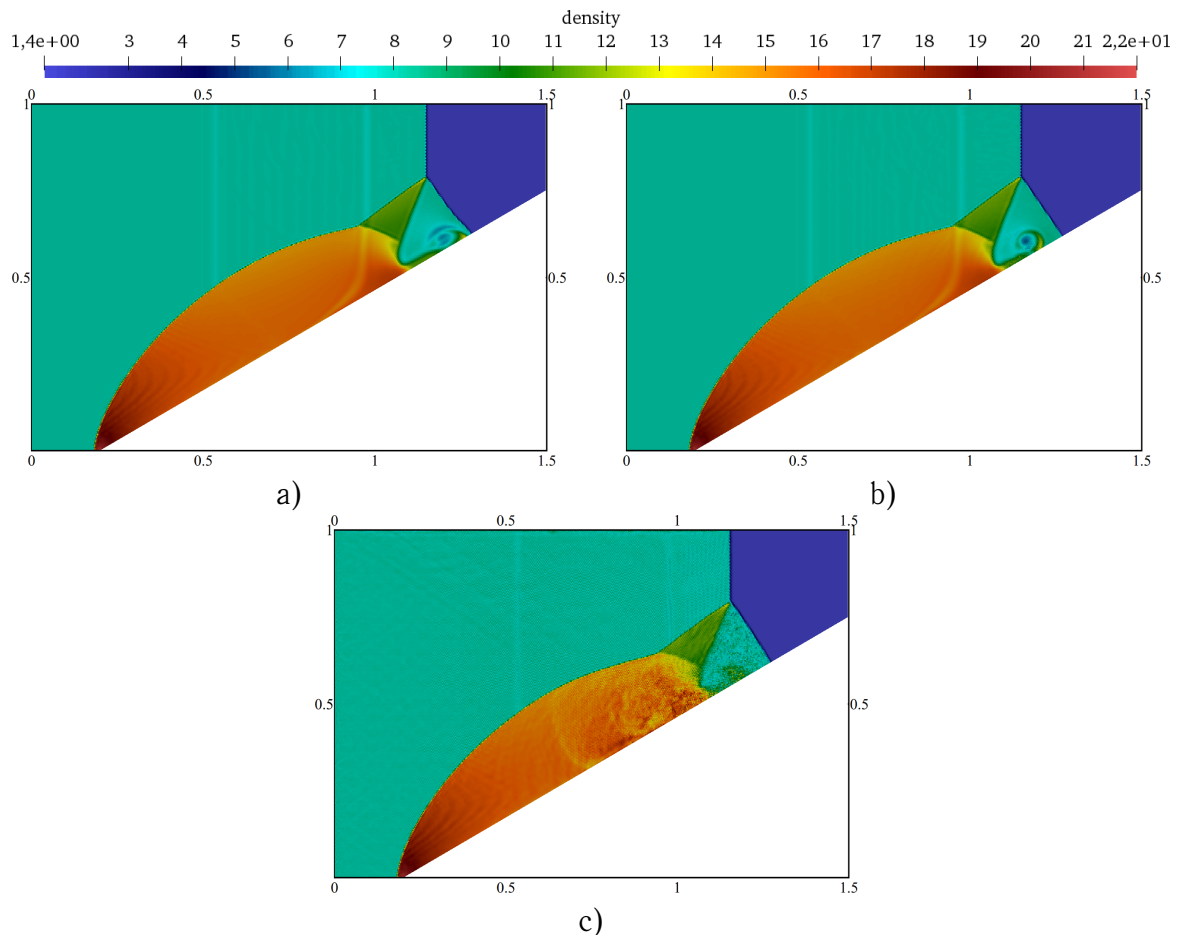


Рис. 4. Распределение плотности в тестовой задаче о двойном маховском отражении: а) корректная картина течения, б) искажения вихря, с) развитие нефизичных осцилляций

Таблица 3. Максимальные шаги для тестовой задачи ДМО: WENO_SC+LLF

Метод	Искажения			Останов		
	$\tau_m \cdot 10^4$	W	E	$\tau_m \cdot 10^4$	W	E
второй порядок						
RK2S2TVD	0.44	—	—	0.66	—	—
RK2S3-MD	1.00	2.27	1.52	1.20	1.82	1.21
RK2S3TVD-MD	1.00	2.27	1.52	1.30	1.97	1.31
RK2S4TVD-MD	1.40	3.18	1.59	2.80	4.24	2.12
третий порядок						
RK3S3TVD	0.58	—	—	0.79	—	—
RK3S4TVD-qMD	0.92	1.59	1.19	1.50	1.90	1.42

В расчетах использована треугольная неструктурированная сетка из 74 тысяч ячеек со средней длиной ребер порядка 0.005. Расчеты проводились до момента времени $t^* = 0.1$ с постоянным временным шагом. Общий вид численного решения изображен на рис. 4, а.

При постепенном увеличении длины временного шага численное решение искажается из-за немонотонности численной схемы. Сначала искажения касаются формы потока в треугольнике между контактными разрывом и ударной волной (рис. 4, б). Затем паразитные осцилляции появляются в области постоянства решения (рис. 4, в). Наконец, в численном решении возникают нефизические волны, приводящие к неустойчивости расчета и аварийному останову до достижения времени t^* .

Результаты исследования максимальных временных шагов для первой и второй комбинации методов приведены в таблицах 3 и 4 соответственно. Отдельно указаны шаги, при которых решение существенно искажается (левая колонка) и при которых происходит аварийный останов программы (правая колонка). По аналогии с описанием методики тестирования, приведенной в подразделе 5.1, исследованы достигнутые методами максимальные шаги по времени τ_m , а также отношения W между шагами τ_m и E между вычислительными сложностями текущего и референсного методов.

Таблица 4. Максимальные шаги для тестовой задачи ДМО: BVVertex+HLL

Метод	Искажения			Останов		
	$\tau_m \cdot 10^4$	W	E	$\tau_m \cdot 10^4$	W	E
второй порядок						
RK2S2TVD	0.65	—	—	0.81	—	—
RK2S3-MD	1.10	1.69	1.13	1.20	1.48	0.99
RK2S3TVD-MD	1.00	1.54	1.03	1.50	1.85	1.23
RK2S4TVD-MD	1.40	2.15	1.08	3.00	3.70	1.85
третий порядок						
RK3S3TVD	0.80	—	—	0.84	—	—
RK3S4TVD-qMD	1.10	1.38	1.03	1.70	2.02	1.52

Предметом основного интереса является максимальная длина временно-го шага, обеспечивающая штатное окончание расчетов. Во всех вариантах расчетов максимальный шаг достигался методом RK2S4TVD-MD. С учетом количества стадий, он показал примерно вдвое более высокую вычислительную эффективность по сравнению со стандартным методом RK2TVD. Аналогично, максимальный временной шаг, доступный методу RK3S4TVD-qMD, примерно в два раза больше, а вычислительная эффективность в полтора раза выше, чем соответствующие параметры метода RK3S3TVD, заметим, что значения τ_m для методов RK2S2TVD и RK3S3TVD, как правило, оказывались близки.

Также отметим существенные различия в результатах методов RK2S3-MD и RK2S3TVD-MD. Рассмотрим, для примера, комбинацию методов BJVertex+HLL. Хотя метод RK2S3-MD обеспечивает больший временной шаг по сравнению с методом RK2S2TVD, но вычислительная сложность обоих методов оказывается близкой из-за различия количества стадий. В то же время метод RK2S3TVD-MD, очевидно, более эффективно подавляет паразитные осцилляции решения, приводящие к численной неустойчивости, и оказывается на более чем 20% более эффективным, чем метод RK2S3-MD.

Заметим, что эффективность удовлетворяющих условию MD методов в монотонизации решения существенно зависит от используемой комбинации лимитеров и численных потоков. Для комбинации WENO_SC+LLF все многостадийные MD-методы второго порядка обеспечивают более чем вдвое больший шаг по времени без искажений решения, чем референсный метод RK2S2TVD. В то же время при использовании комбинации BJVertex+HLL MD-методы оказываются только лишь на 10% эффективнее с точки зрения затрат вычислительных ресурсов по сравнению с RK2S2TVD. Заметим, что в случае применения комбинации BJVertex+HLL и RK2S2TVD, и RK3S3TVD оказываются более устойчивыми, чем при комбинации WENO_SC+LLF.

В работе [2] показано, что процедура лимитирования больше влияет на проявления немонотонности численного решения, нежели на устойчивость метода. И наоборот, выбор численного потока в большей степени определяет устойчивость расчетов и в меньшей — монотонность решения. Эти выводы подтверждаются представленными результатами.

6. Заключение

Исследованы методы Рунге — Кутты с областями устойчивости, включающими максимальный для данного порядка и количества стадий диск. Такие методы востребованы в численных схемах, где для аппроксимации гиперболических систем уравнений используется разрывный метод Галеркина. Рассмотрены три новых метода второго порядка и один метод третьего порядка. Их свойства исследованы на численных примерах. С использованием тестовых задач для системы уравнений газовой динамики в одно- и дву-

мерной пространственных постановках исследованы возможности представленных методов по обеспечению устойчивости и монотонности численного решения при максимально возможном шаге по времени. Также исследована вычислительная эффективность новых методов и ее зависимость от комбинации применяемых алгоритмов расчета численных потоков и пространственной монотонизации решения (лимитеров). Представленные методы показали сокращение затрат вычислительных ресурсов по сравнению со стандартными методами Рунге — Кутты вплоть до полутора раз.

Автор выражает благодарность Виктории Николаевне Корчаговой и Софье Михайловне Сауткиной за помощь в проведении тестовых расчетов.

Список литературы

- [1] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 607 с.
- [2] Лукин В.В., Корчагова В.Н., Сауткина С.М. Об устойчивых методах Рунге — Кутты для решения гиперболических уравнений разрывным методом Галеркина // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. №7. С. 951–962.
- [3] Cockburn B., Shu C.-W., TVB Runge — Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II. General framework // Math. Comput. 1989. vol. 52. №186. Pp. 411–435.
- [4] Cockburn B., Shu C.-W., Runge — Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // J. Sci. Comput. 2001. Vol. 16. Pp. 2440–2463.
- [5] Galanin M.P., Lukin V.V., Chechetkin V.M. 3D hydrodynamical simulation of accretion disk in binary star system using RKDG CFD solver // J. Phys. Conf. Ser. 2018. Vol. 1103. 012019.
- [6] Галанин М.П., Савенков Е.Б., Токарева С.А. Решение задач газовой динамики с ударными волнами RKDG-методом // Матем. моделирование. 2008. Т. 20. №11. С. 55–66.
- [7] Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes // J. Comput. Phys. 1988. Vol. 77. Pp. 439–471.
- [8] Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
- [9] Gottlieb S., Ketcheson D., Shu C.-W. High order strong stability preserving time discretizations // J. Sci. Comput. 2009. Vol. 38. Pp. 251–289.

- [10] Jeltsch R., Torrilhon M. Flexible stability domains for explicit Runge — Kutta methods. *Some Topics in Industrial and Applied Mathematics*, Jeltsch, R., Li, D., and Sloan, I.H., Eds., Beijing, 2007.
- [11] Toro E. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer, 2009. 724 p.
- [12] Lin Q., Yan N., Zhou A. An optimal error estimate of the discontinuous Galerkin method // *Gongcheng Shuxue Xuebao*. 1996. Vol. 13. Pp. 101–105.
- [13] Lin Q., Zhou A.H. Convergence of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation // *Acta Math. Sci.* 1993. Vol. 13. Pp. 207–210.
- [14] Walkington N.J. Convergence of the discontinuous Galerkin method for discontinuous solutions // *SIAM J. Numer. Anal.* 2005. Vol. 42. №5. Pp. 1801–1817.
- [15] Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // *Матем. сб.* 1959. Т. 47(89), №3. С. 271–306.
- [16] Галеева В.Д., Лукин В.В., Марчевский И.К., Фуфаев И.Н. Сравнительное исследование лимитеров семейства WENO и Hermite WENO для расчета одномерных течений газа методом RKDG // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН*. 2017. №131. 32 с.
- [17] Zhong X., Shu C.-W. A simple weighted essentially nonoscillatory limiter for Runge — Kutta discontinuous Galerkin methods // *J. Comput. Phys.* 2013. Vol. 232. Pp. 397–415.
- [18] Zhu J., Zhong X., Shu C.-W., Qiu J.-X., Runge — Kutta discontinuous Galerkin method with a simple and compact Hermite WENO limiter // *Commun. Comput. Phys.* 2016. Vol. 19. Pp. 944–969.
- [19] Корчагова В.Н., Сауткина С.М., Лукин В.В., Фуфаев И.Н. Экспериментальная оценка эффективности распараллеливания RKDG-метода для решения двумерных газодинамических задач // *Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ-2020)*. Короткие статьи и описания плакатов (Пермь, 31 марта – 2 апреля 2020 г.). Челябинск. 2020. С. 142–151.
- [20] Giuliani A., Krivodonova L. Analysis of slope limiters on unstructured triangular meshes // *J. Comput. Phys.* 2018. Vol. 374. Pp. 1–26.

Содержание

1. Введение	3
2. Система уравнений газовой динамики	3
3. Разрывный метод Галеркина	4
4. Методы Рунге — Кутты	6
4.1. Условие TVD	8
4.2. Варианты методов Рунге — Кутты	9
5. Численные примеры	11
5.1. Одномерные тесты	11
5.2. Двумерные тесты	14
6. Заключение	16