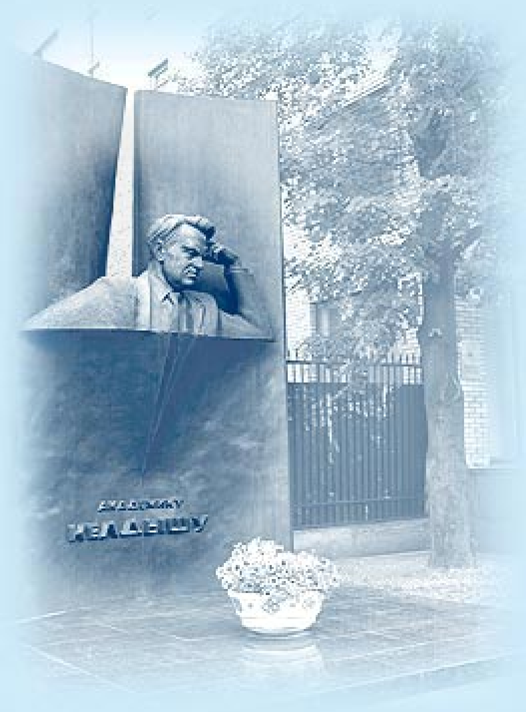
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 59 за 2022 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)



А.Б. Батхин, З.Х. Хайдаров

Сильные резонансы в нелинейной системе Гамильтона

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Батхин А.Б., Хайдаров З.Х. Сильные резонансы в нелинейной системе Гамильтона // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 59. 28 с. **https://doi.org/10.20948/prepr-2022-59**
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-59

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Российской академии наук**

А. Б. Батхин, З. Х. Хайдаров

Сильные резонансы в нелинейной системе Гамильтона

Москва — 2022

УДК 517.913
Александр Борисович Батхин, Зафар Хайдар угли Хайдаров

Сильные резонансы в нелинейной системе Гамильтона. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, Москва, 2022

Для исследования областей формальной устойчивости положения равновесия многопараметрической системы Гамильтона с тремя степенями свободы в случае общего положения найдены условия существования резонансов третьего и четвёртого порядков кратности один. Эти условия формулируются в виде многочленов от коэффициентов характеристического многочлена линейной части системы Гамильтона. Дано описание разбиения области устойчивости по линейному приближению в пространстве коэффициентов характеристического многочлена на такие части, где отсутствуют сильные резонансы и для определения формальной устойчивости может быть применена теорема Брюно. Также рассмотрены все значения коэффициентов характеристического многочлена, при которых кратность резонанса равна двум. Приведён пример описания резонансных множеств для двупараметрической системы маятникового типа.

Ключевые слова: система Гамильтона, положение равновесия, нормальная форма, формальная устойчивость, резонансное условие, базис Грёбнера, элиминационный идеал.

Alexander Borisovich Batkhin, Zafar Khaydar ugli Khaydarov

Strong resonances in nonlinear Hamiltonian system

To investigate formal stability areas of the equilibrium position of a multiparameter Hamiltonian system with three degrees of freedom in the case of common position the conditions for the existence of resonances of the third and fourth orders of multiplicity one are found. These conditions are formulated as polynomials on the coefficients of the characteristic polynomial of the linear part of the Hamilton system. We describe the partition of the region of stability according to the linear approximation in the space of coefficients of the characteristic polynomial into such parts where strong resonances are absent and where Bruno's Theorem can be applied to establish formal stability. We also considered all values of the coefficients of the characteristic polynomial at which the multiplicity of resonance is equal to two. An example of a description of resonance sets for a two-parameter pendulum-type system is given.

Key words: Hamiltonian system, stationary point, normal form, formal stability, resonant condition, Gröbner basis, elimination ideal.

1. Введение

В колебательных системах резонансы играют существенную роль. Их присутствие, с одной стороны, приводит к появлению сложной динамики, когда энергия колебаний «перекачивается» между теми степенями свободы, чьи соответствующие частоты находятся в резонансе. С другой стороны, наличие нетривиальных решений резонансного уравнения позволяет получить дополнительные формальные первые интегралы и, как следствие, позволяет провести анализ устойчивости положения равновесия или асимптотически проинтегрировать систему уравнений движения, приведённую к нормальной форме.

Условно можно указать три основных типа устойчивости для теоретико-механических задач (см. [1]):

- строгая устойчивость (устойчивость по Ляпунову);
- формальная устойчивость (устойчивость по Мозеру);
- практическая устойчивость.

Устойчивость по Ляпунову является наиболее строгой и гарантирует равномерную ограниченность решений на бесконечном интервале времени относительно множества возмущений по начальным условиям и параметрам. Устойчивость по Мозеру слабее, но гарантирует скорость разбегания траекторий медленнее, чем любая степенная функция с произвольным положительным показателем. Практическая устойчивость означает только ограниченные решения на конечном интервале времени относительно набора возмущающих факторов.

Далее рассматриваем автономную гамильтонову систему с аналитической функцией $H(\mathbf{z};\mathbf{P})$, положение равновесия (ПР) которой совпадает с началом координат. Тогда гамильтониан $H(\mathbf{z};\mathbf{P})$ раскладывается в сходящийся ряд однородных полиномов H_k степени k от своих фазовых переменных $\mathbf{z}=(\mathbf{x},\mathbf{y})$

$$H(\mathbf{z};\mathbf{P})=\sum_{j=2}^{\infty}H_j(\mathbf{z};\mathbf{P}), \tag{1}$$

где $\mathbf{P}$ — вектор параметров.

Известно, что устойчивость ПР в первом приближении можно определить только для случая, когда квадратичная форма $H_2(\mathbf{z})$ знакоопределенная (теорема Лагранжа-Дирихле [2]).

Если число степеней свободы не более двух, то

- устойчивость определяется теоремой Арнольда-Мозера (см. [3, Гл. 4, § 1]) при отсутствии резонансов порядка четыре и меньше, что требует вычисления нормальной формы гамильтониана (1) до четвёртого порядка;
- для резонансов порядка менее четырёх условия устойчивости были получены в работах А. П. Маркеева и А. Г. Сокольского [3, Гл. 4].

Когда число степеней свободы больше двух, устойчивость для большинства начальных условий определяется теоремой Арнольда (см, например, [3, Гл. 5, § 1]). С практической точки зрения вполне достаточна более слабая, чем устойчивость по Ляпунову, формальная устойчивость, предложенная Мозером [4].

Цель работы состоит в описании схемы исследования формальной устойчивости ПР системы Гамильтона с тремя степенями свободы, а также в описании областей в пространстве коэффициентов характеристического многочлена линейной части гамильтоновой системы, где такая устойчивость может присутствовать.

Обозначения

- Полужирные символы типа $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ обозначают столбцы-векторы в n-мерных вещественных $\mathbb{R}^n$ или комплексных $\mathbb{C}^n$ пространствах.
- Полужирные символы типа $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ обозначают векторы в n-мерной целочисленной решётке $\mathbb{Z}^n$.
- $|\mathbf{p}| = \sum_{j=1}^{n} |p_j|$ обозначает норму вектора.
- Для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ и $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^\top$ обозначим через $\mathbf{x}^\mathbf{p} \equiv \prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{p_j}$ мультииндекс и через $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j$ скалярное произведение пары векторов.

2. Множество устойчивости линейной гамильтоновой системы

В случае общего положения ряд (1) начинается с квадратичного гамильтониана $H_2(\mathbf{z}; \mathbf{P})$, определяющего локальную динамику вблизи ПР. Поведение фазового потока в первом приближении описывается линейной гамильтоновой системой

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = B(\mathbf{P})\mathbf{z}, \quad B(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} J \frac{\partial^2 H_2(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{z} \partial \mathbf{z}}. \tag{2}$$

Напомним здесь основные свойства линейной гамильтоновой системы.

1. Если λ_j есть собственное число (СЧ) матрицы B, то $-\lambda_j$ также является её СЧ [2]. Все СЧ λ_j, $j = 1, \dots, 2n$, матрицы B могут быть упорядочены таким образом, что $\lambda_{j+n} = -\lambda_j$, $j = 1, \dots, n$. Обозначим через вектор $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ множество *базисных собственных значений*.

2. Характеристический многочлен $\check{f}(\lambda)$ матрицы B содержит только чётные степени λ, поэтому он является многочленом от $\mu = \lambda^2$. Такой многочлен назван в [5] *полухарактеристическим*

$$f(\mu) = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(\mathbf{P}) \mu^j, \quad f_0 \equiv 1. \tag{3}$$

3. Если $\operatorname{Re} \lambda_j \neq 0$ для некоторого j, то ПР неустойчиво.

4. Если все $\mathrm{Re}\,\lambda_j = 0$, то поведение фазового потока в его окрестности может быть получено только при учёте нелинейных членов.

Существует два типа задач об устойчивости многопараметрических систем.

- Для определённых значений вектора параметров $\mathbf{P}$ выяснить устойчивость ПР (частная задача).
- Найти в пространстве параметров Π все значения $\mathbf{P}$, для которых ПР $\mathbf{z} = 0$ системы (1) устойчива, т.е. вычислить так называемое множество устойчивости Σ системы (1) (общая задача).

Здесь рассмотрим схему решения общей задачи.

Определение 1. Множество устойчивости Σ линейной системы (2) — это множество всех значений параметров $\mathbf{P} \in \Pi$, для которых ПР $\mathbf{z} = 0$ устойчива по Ляпунову.

В терминах корней многочлена (3) условие устойчивости ПР даётся следующей теоремой.

Теорема 1 ([5]). *Положение равновесия* $\mathbf{z} = 0$ *линейной гамильтоновой системы* (2) *устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда*

a) все корни μ_k *полухарактеристического многочлена* (3) *вещественны и неположительны;*

b) все элементарные делители матрицы B просты.

Невыполнение условия a) приводит к экспоненциальному разбеганию решений, которое не перекрывается нелинейными добавками, привносящими только степенной эффект в поведение решений. Невыполнение условия b) приводит к степенной неустойчивости, которая может быть перекрыта нелинейными добавками.

Условие вещественности и неположительности корней многочлена $f(\mu)$ определяется следующей теоремы.

Теорема 2. *Для того чтобы все корни многочлена* $f(\mu)$ *степени* n *были вещественны и неположительны, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$a_j(\mathbf{P}) \geqslant 0, j = 1, \ldots, n, D^{(k)}(f) \geqslant 0, k = 0, \ldots, n-2,$$

где $D^{(k)}(f)$ — k*-й субдискриминант многочлена* $f(\mu)$ *[6; 7].*

3. Нормальная форма (НФ) системы Гаимльтона

В дальнейшем считаем, что выполнено условие a) устойчивости теоремы 1. Если невыполнено условие b) теоремы 1, то устойчивость определяется по НФ общими методами.

Согласно теореме 12 в [8] существует каноническое формальное преобразование в виде степенного ряда, которое приводит исходную систему Гамильтона к её *нормальной форме* НФ

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}}, \quad \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}},$$

задаваемой нормализованным гамильтонианом $h(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \lambda_j u_j v_j + \sum h_{\mathbf{pq}} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}}, \quad \sigma_j = \pm 1, \tag{4}$$

который содержит только резонансные члены $h_{\mathbf{pq}} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}}$, удовлетворяющие условию

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0. \tag{5}$$

Здесь $0 \leqslant \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$, $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}| \geqslant 2$ и $h_{\mathbf{pq}}$ — постоянные коэффициенты.

Резонансное уравнение (5) имеет два вида решений, которым соответствуют два вида резонансных членов в НФ (4):

1) *вековые члены* вида $h_{\mathbf{pp}} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{p}}$, которые всегда присутствуют в гамильтоновой нормальной форме из-за особой структуры матрицы B линейной части системы (2); вековые члены являются мономами только чётных степеней от фазовых переменных и входят в соответствующие однородные формы;
2) *строго резонансные члены*, которые соответствуют нетривиальным целочисленным решениям уравнения

$$\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0. \tag{6}$$

Сама процедура нормализации обычно выполняется в комплексных переменных. Для перехода к комплексным переменным используется линейное преобразование $\Phi : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to (\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$, которое преобразует исходный гамильтониан к виду

$$h(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \sum h_{\mathbf{pq}} \mathbf{z}^{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{z}}^{\mathbf{q}}, \tag{7}$$

где $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$ и $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}| \geqslant 2$. Значение $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|$ называется *порядком* соответствующего члена разложения.

Определение 2. Функция Гамильтона $h(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ называется *комплексной нормальной формой* вещественной системы Гамильтона для случая полупростых СЧ, если

1) его квадратичная часть $h_{\mathbf{2}}$ имеет вид $h_{\mathbf{2}} = \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_j \lambda_j z_j \bar{z}_j$, $\sigma_j = \pm 1$;

2) разложение (7) содержит только члены $h_{\mathbf{pq}}\mathbf{z}^{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{z}}^{\mathbf{q}}$, которые удовлетворяют резонансному уравнению (5). Константы σ_j являются инвариантами НФ.

Если резонансы отсутствуют, то имеется НФ Биркгоффа [9]

$$h(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \sum_{j=1}^{\infty} h_{2j}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}),$$

состоящая из однородных форм чётных степеней $2j$, зависящих только от переменных вида $z_j\bar{z}_j$, $j = 1, \ldots, n$, при этом каждая из величин $z_j\bar{z}_j$ является формальным первым интегралом. В переменных действие-угол $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\rho})$ НФ Биркгофа может быть записана в виде

$$h(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_n),$$

где $\rho_j = z_j\bar{z}_j$, $j = 1, \ldots, n$.

В этом случае система интегрируема, но преобразование Биркгофа обычно расходящееся, а в случае гладкой зависимости от параметров $\mathbf{P}$ резонансные значения располагаются всюду плотно в пространстве параметров. Таким образом, сколь угодно малые изменения параметров приводят к появлению резонансных членов в НФ.

Дальнейшие результаты связаны с существованием резонансов в системе Гамильтона, поэтому напомним их определение и укажем условие, с помощью которого последующие результаты проще формулируются.

Определение 3 ([10, Гл. I, § 3]). *Кратность резонанса* $\mathfrak{k}$ — это число линейно независимых решений $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$ резонансного уравнения $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$. *Порядок резонанса* равен $\mathfrak{q} = \min|\mathbf{p}|$ по $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{p} \neq 0, \langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$. Если решение резонансного уравнения содержит только два собственных значения, то такой резонанс называется *двухчастотным резонансом*, если более двух — то *многочастотным резонансом*. Резонансы порядков 2, 3 и 4 назовём *сильными*, бóльших порядков — *слабыми* резонансами.

Условие A_k^n [11]
Резонансное уравнение (6) *не имеет целочисленных решений* $\mathbf{p}$ *с* $|\mathbf{p}| \leqslant k$.

4. Схема исследования формальной устойчивости

Определение 4. ПР $\mathbf{z} = 0$ системы с функцией Гамильтона $H(\mathbf{z})$ *формально устойчиво*, если существует возможно расходящийся степенной ряд $G(\mathbf{z})$, который является формальным положительно определенным первым интегралом $\{G, H\} = 0$.

В [11] было дано схематическое описание метода изучения формальной устойчивости ПР. Этот метод основан на следующих ключевых результатах:

- вычисляется НФ системы гамильтона в окрестности ПР;
- применяется теорема Брюно [12] о формальной устойчивости;
- используются q-аналоги объектов классической теории исключений.

При этом были сделаны следующие предположения:

- число степеней свободы системы больше двух;
- квадратичная форма $H_2(\mathbf{z})$ в разложении (1) невырождена и не является знакоопределённой;
- функция Гамильтона $H(\mathbf{z};\mathbf{P})$ гладко зависит от вектора параметров $\mathbf{P}$.

Пусть имеет место условие A_4^n, т. е. $\langle \mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda}\rangle \neq 0$ для $\mathbf{L} \in \mathbb{Z}^n$, $0 < |\mathbf{L}| \leqslant 4$, тогда существует аналитическое каноническое преобразование $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \to (\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\varphi})$ такое, что новый гамильтониан g имеет вид

$$g(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\varphi}) = g_1(\boldsymbol{\rho}) + g_2(\boldsymbol{\rho}) + r(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\varphi}),$$

где $g_1(\boldsymbol{\rho}) = \langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\rho}\rangle$, $g_2(\boldsymbol{\rho}) = \langle C\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}\rangle$, $C = [c_{ij}]_{i,j=1}^n$, и $r(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\varphi})$ является сходящимся степенным рядом переменных $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\varphi})$ степени три или выше в $\boldsymbol{\rho}$.

При отсутствии сильных резонансов между собственными значениями линейной части гамильтоновой системы в окрестности ПР условие её формальной устойчивости определяется следующей теоремой.

Теорема 3 (Брюно [12]). *Если условие A_k^n выполнено и для любых ненулевых целых векторов $\mathbf{L}$, которые являются решением уравнения $\langle \mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda}\rangle = 0$, квадратичная форма*

$$\langle C\mathbf{L}, \mathbf{L}\rangle \neq 0$$

при $\boldsymbol{\lambda} \neq 0$, то ПР $\mathbf{z} = 0$ гамильтоновой системы формально устойчиво.

Таким образом, для применения теоремы 3 о формальной устойчивости необходимо найти границы областей в пространстве параметров Π, определяемых резонансными многообразиями (см. определение 5 ниже), определяемыми сильными резонансами.

Определение 5. *Резонансным многообразием* $\mathcal{R}_n^{\mathbf{p}}$ в пространстве $\mathbf{K}$ коэффициентов $a_1,\ldots,a_n$ полухарактеристического многочлена $f_n(\mu)$ степени n назовём такое алгебраическое многообразие, на котором вектор базовых собственных значений $\boldsymbol{\lambda}$ соответствующего характеристического многочлена $\check{f}(\lambda)$ является нетривиальным решением резонансного уравнения (6) для фиксированного целочисленного вектора $\mathbf{p}$. Аналитическое представление многообразия $\mathcal{R}_n^{\mathbf{p}}$ в неявной или параметрической формах далее обозначим $R_n^{\mathbf{p}}$.

Постановка задачи

Для исследования формальной устойчивости ПР гамильтоновой системы необходимо в пространстве параметров Π найти множество устойчивости Σ линейной системы, в ней определить области, в которых квадратичная форма $H_2(\mathbf{z})$ не является знакоопределённой. В этих областях выделить их части S_k, в которых отсутствуют сильные резонансы. Затем в каждой из найденных частей S_k следует выполнить процедуру нормализации гамильтониана до четвёртого порядка включительно и затем применить теорему 3. Для этого достаточно выбрать какую-либо точку в каждой из частей S_k в пространстве параметров и воспользоваться каким-либо алгоритмом нормализации функции Гамильтона. Поскольку в каждой внутренней точке части S_k все собственные числа λ_k, $k = 1, \ldots, n$ простые, то легко применим алгоритм инвариантной нормализации [13].

В данной работе рассматривается описание резонансных многообразий порядков 2, 3 и 4 в пространстве коэффициентов $\mathbf{K}$ полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ для системы Гамильтона с тремя степенями свободы.

Задача (Основная задача)**.** Для многопараметрической системы Гамильтона с 3 степенями свободы дать описание областей в пространстве параметров системы, в которых отсутствуют сильные резонансы порядков 2, 3 и 4.

Рассмотрим более подробно, при каких условиях реализуются резонансы указанных выше порядков. Для резонанса

- порядка $\mathfrak{q} = 2$: $p = (1, 1, 0)$ — это случай кратных корней, который описывается дискриминантным множеством $R_3^{(1,1,0)} \equiv D(f) = 0$;
- порядок $\mathfrak{q} = 3$: для двухчастотного случая $p = (2, 1, 0)$, описывается q-дискриминантом $R_3^{(2,1,0)} \equiv D_4(f) = 0$;
- порядок $\mathfrak{q} = 4$: для двухчастотного случая $p = (3, 1, 0)$, описывается q-дискриминантом $R_3^{(3,1,0)} \equiv D_9(f) = 0$;
- в трёхчастотном случае: для порядка 3 описывается условием $R_3^{(1,1,1)} = 0$, а для порядка 4 — условиями $R_3^{(2,1,1)} = 0$ и $R_3^{(1,1,1,1)} = 0$.

Для решения этой задачи следует получить описание границ областей, свободных от сильных резонансов. Эти границы состоят из участков алгебраических многообразий, на которых резонансное уравнение (6) имеет нетривиальное решение.

Основную задачу разобьём на несколько вспомогательных задач.

1) Получить аналитическое представление в пространстве коэффициентов $\mathbf{K} = (a_1, a_2, a_3)$ кубического многочлена резонансных многообразий $\mathcal{R}_3^{\mathbf{p}}$ для всех векторов $\mathbf{p}$ порядков 2, 3 и 4.
2) Выяснить взаимное расположение всех найденных выше резонансных многообразий, т. е. определить, каким образом указанные выше резонансные многообразия касаются или пересекаются в пространстве $\mathbf{K}$.

5. Условия существования резонансов в системе с тремя степенями свободы

Общее описание процедуры получения условия существования двухчастотного и многочастотного резонансов выглядит следующим образом.

1) Для некоторого вектора $\mathbf{p}^* \in \mathbb{Z}_n$, удовлетворяющего резонансному уравнению $\langle \mathbf{p}^*, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$, составляется полиномиальный идеал

$$J = \left\{ \langle \mathbf{p}^*, \boldsymbol{\lambda} \rangle, \lambda_j^2 - \mu_j, j = 1, \ldots, n \right\}.$$

2) Вычисляется базис Грёбнера $\mathcal{G}$ этого идеала с подходящим мономиальным порядком переменных $\lambda_j, \mu_j, j = 1, \ldots, n$ (подробнее, см. [14, гл. 2, 3]) так, что бы первый полином этого базиса содержал только переменные μ_j. Этот полином является квазиоднородным полиномом в переменных $\mu_j, j = 1, \ldots, n$. Он определяет условие существования резонанса для заданного вектора $\mathbf{p}^*$.

3) Для получения соответствующего резонансного условия для коэффициентов $a_j, j = 1, \ldots, n$ многочлена $f(\mu)$ строится новый базис Грёбнера $\mathcal{F}$ идеала, содержащего полученное условие для μ_j и связи коэффициентов исходного полухарактеристического полинома с его корнями, в виде элементарных симметрических полиномов третьей степени. При этом указывается порядок исключения переменных последовательно μ_j и $a_j, j = 1, \ldots, n$. Также первый полином вычисленного базиса, зависящий только от a_j, будет являться условием существования резонанса в терминах коэффициентов многочлена.

Для вычисления и исследования идеалов $\mathcal{J}, \mathcal{F}$ используется система компьютерной алгебры (СКА) Maple. В ней имеется процедура построения базисов Грёбнера для различных лексикографических порядков, а также некоторые дополнительные процедуры пакета Groebner для проверки нульмерности идеала, вычисления его размерности и др. Для определения рода кривой использовалась команда genus, а для нахождения параметризации — parametrization из пакета algcurves.

5.1. Вычисление условия двухчастотного резонанса. Рассмотрим случай двухчастотного резонанса: $\mathbf{p}^* = (q, 1, 0)$, где $q \in \mathbb{N}$. Здесь имеется пара соизмеримых СЧ, а третье СЧ несоизмеримо ни с каким другим. В пространстве параметров такой резонанс описывается в терминах резонансного множества $\mathcal{R}_{q^2}(f)$ полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ [15].

Вычислим по выше указанной последовательности условие двухчастотного резонанса для $\mathbf{p}^* = (q, 1, 0)$. Для начала составим идеал, содержащий соотношения зависимости между корнями характеристического и полухарактеристического многочленов вида $\lambda_j^2 - \mu_j, j = 1, \ldots, 3$, а также резонансное соотношение $q\lambda_1 + \lambda_2$. Первый многочлен элиминационного базиса Грёбнера этого идеала, с последовательным порядком исключения переменных $\lambda_j, \mu_j, j = 1, \ldots, 3$, есть многочлен

$$q^2\mu_1 - \mu_2. \tag{8}$$

Равенство нулю данного многочлена даёт условие на корни полухарактеристического полинома. Согласно пункту 3), чтобы получить условие на коэффициенты, составляем новый идеал, включающий в себя полученное условие (8) и их связь с коэффициентами a_j многочлена (3) через элементарные симметрические многочлены

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + a_1,\ \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 - a_2,\ \mu_1\mu_2\mu_3 + a_3. \tag{9}$$

Для составленного идеала вычисляем элиминационный базис Грёбнера с соответствующим порядком исключения переменных $\mu_j, a_j, j = 1, \ldots, 3$. Равенство нулю первого его многочлена

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_3^{(q,1,0)} \stackrel{\text{def}}{=} &-(q^2+q+1)^3(q^2-q+1)^3a_3^2 - q^4(q^2+1)^2a_2^3 - q^4(q^2+1)^2a_1^3a_3 \\ &+ q^2(q^2+q+1)(q^2-q+1)(q^4+4q^2+1)a_1a_2a_3 + q^6a_1^2a_2^2 = 0,\end{aligned} \tag{10}$$

зависящего только от a_j, является условием существования двухчастотного резонанса в общем виде для некоторого натурального значения q.

Проверим полученный результат, сравнивая с полученными ранее условиями для случая, когда $q = 1, 2, 3$. Если в полученных в [16] формулах обобщённых субдискриминантов для f_3 положить $\omega = 0$, а $q = q^2$, то получим идентичные с точностью до знака выражения для соответствующих резонансных многообразий:

- при $q = 1$ условие принимает вид

$$\mathcal{R}_3^{(1,1,0)} \stackrel{\text{def}}{=} 4a_1^3a_3 - a_1^2a_2^2 - 18a_1a_2a_3 + 4a_2^3 + 27a_3^2 = 0,$$

- при $q = 2$ оно имеет вид

$$\mathcal{R}_3^{(2,1,0)} \stackrel{\text{def}}{=} 400a_1^3a_3 - 64a_1^2a_2^2 - 2772a_1a_2a_3 + 400a_2^3 + 9261a_3^2 = 0,$$

- а при $q = 3$ оно выглядит

$$\mathcal{R}_3^{(3,1,0)} \stackrel{\text{def}}{=} 8100a_1^3a_3 - 729a_1^2a_2^2 - 96642a_1a_2a_3 + 8100a_2^3 + 753571a_3^2 = 0. \tag{11}$$

5.2. Вычисление условия трёхчастотного резонанса. Рассмотрим для начала случай трёхчастотного резонанса, для которого алгебраическая сумма трёх собственных значений равна нулю, т. е. $\sum_{j=1}^{3} p_j\lambda_j = 0$. Такой резонанс может иметь кратность 1 или 2. Если кратность $\mathfrak{k} = 2$, то это означает, что имеет место попарная соизмеримость между базисными частотами λ_j характеристического многочлена. Такая ситуация исследуется с помощью условий существования двухчастотного резонанса. Далее рассматриваем только случай кратности 1.

Например, в случае базисных частот $\lambda_1 = 1+\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$, $\lambda_3 = -2$ СЧ попарно несоизмеримы, но их сумма равна нулю. Следовательно, резонансным вектором будет служить вектор $(1,1,1)$, что означает наличие трёхчастотного резонанса кратности 1 порядка 3. Таким образом, будем рассматривать случай, когда взвешенная алгебраическая сумма всех трёх базисных собственных значений λ_j $(j = 1,2,3)$ равна нулю для некоторого вектора $\mathbf{p}^* \in \mathbb{Z}^3$, т.е. $\langle \mathbf{p}^*, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$.

Для случая трёхчастотного резонанса $\mathbf{p}^* = (1,1,1)$ аналогично, по выше указанной последовательности действий, вычислим условие существования резонанса. Составляем идеал, содержащий соотношения зависимости между корнями характеристического и полухарактеристического многочленов вида $\lambda_j^2 - \mu_j$, $j = 1,\ldots,3$, а также резонансное соотношение $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$. Первый многочлен базиса Грёбнера этого идеала, с последовательным порядком исключения переменных λ_j, μ_j, $j = 1,\ldots,3$, есть многочлен

$$\mu_1^2 - 2\mu_1\mu_2 - 2\mu_3\mu_1 + \mu_2^2 - 2\mu_3\mu_2 + \mu_3^2.$$

Равенство нулю данного многочлена даёт условие на корни полухарактеристического полинома. Для того чтобы получить условие на коэффициенты, составляем новый идеал, включающий в себя полученное условие на корни и их взаимосвязи с коэффициентами исходного полинома вида (9). Вычислив элиминационный базис Грёбнера для этого идеала, получим искомое условие, т.е. резонансное многообразие $\mathcal{R}_3^{(1,1,1)}$, которое задаётся первым полиномом этого базиса вида:

$$R_3^{(1,1,1)} \stackrel{\text{def}}{=} a_1^2 - 4a_2 = 0. \tag{12}$$

Рассмотрим трёхчастотный резонанс порядка 4, задаваемый вектором $\mathbf{p}^* = (2,1,1)$. Так же и для предыдущего случая составляем идеал из соотношений резонансного $2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ и зависимостей между λ_j и μ_j. Вычисляем его базис Грёбнера и, приравнивая его первый многочлен к нулю, получаем условия на корни полинома f_3.

$$16\mu_1^2 - 8\mu_1\mu_2 - 8\mu_1\mu_3 + \mu_2^2 - 2\mu_2\mu_3 + \mu_3^2 = 0.$$

Далее составляем ещё один идеал с этим многочленом и полиномами (9). Также первый полином элиминационного базиса Грёбнера этого идеала задаёт условие на коэффициенты вида

$$R_3^{(2,1,1)} \stackrel{\text{def}}{=} 16a_1^6 - 264a_1^4a_2 + 36a_1^3a_3 + 1425a_1^2a_2^2 - 630a_1a_2a_3 - 2500a_2^3 + 9261a_3^2 = 0. \tag{13}$$

Из проделанных выше вычислений можно сделать заключение, что процесс вычисления условий на коэффициенты является более общим. Следовательно, можно получить условие существования резонанса для общего случая трёхчастотного резонанса кратности 1, где $\mathbf{p}^* = (p, q, 1)$.

В этом случае резонансное соотношение выглядит как $p\lambda_1 + q\lambda_2 + \lambda_3 = 0$, где $p, q, \in \mathbb{Z}$. Составляем идеал из этого полинома и соотношений зависимости λ_j и μ_j и вычисляем его элиминационный базис Грёбнера. Первый его полином есть условие на корни f_3 в виде квадратичной формы относительно μ_j, $j = 1, 2, 3$:

$$p^4\mu_2^2 - 2p^2q^2\mu_2\mu_3 + q^4\mu_3^2 - 2p^2\mu_1\mu_2 - 2q^2\mu_1\mu_3 + \mu_1^2.$$

Включая его и зависимости корней и коэффициентов (9), составляем новый идеал и вычисляем его элиминационный базис Грёбнера. Также его первый полином от коэффициентов a_j, $j = 1, 2, 3$ и целых чисел p, q задаёт условие на коэффициенты. Он является многочленом двенадцатой степени от a_1, a_2, a_3 с девятнадцатью мономами, коэффициенты которых также являются многочленами от p и q. Сам многочлен квазиоднороден. Его выражение является очень громоздким, но более универсальным в смысле подстановок, потому что изменяя значения p и q, можно получить условие существования произвольного резонанса. Например, подставив $p = 0$, можно получить условие двухчастотного резонанса вида $\mathcal{R}_3^{(q,1,0)}$, в общем случае вычисленного выше. Если положить $q = 1$, а $p = 1$ или $p = 2$, то можно получить резонансные условия $\mathcal{R}_3^{(1,1,1)}$ или $\mathcal{R}_3^{(2,1,1)}$ соответственно.

Правые части полученных в формулах (10), (12), (13) условий существования двух и трёхчастотных резонансов в коэффициентах $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ многочлена $f(\mu)$ представляют собой квазиоднородные многочлены $R_3^{\mathbf{p}}$. Это означает, что носитель каждого из многочленов (т.е. множество векторных показателей степеней его мономов в пространстве $\mathbb{R}^3$) лежит в плоскости, нормаль которой — это вектор $\mathbf{N} = (1, 2, 3)$. Вектор $\mathbf{N}$ принадлежит пространству $\mathbb{R}^3_*$, сопряжённому пространству показателей степеней $\mathbb{R}^3$. Если выполнить такое линейное преобразование, задаваемое унимодулярной матрицей $M = [m_{ij}]_{i,j=1}^3$, $m_{ij} \in \mathbb{Z}$, $\det M = \pm 1$, которая вектор $\mathbf{N}$ переведёт внутрь одномерного координатного подпространства, то соответствующее преобразование в $\mathbb{R}^3$ с матрицей M^{-1} переведёт каждый из носителей многочленов на плоскость, параллельную координатной плоскости. Следовательно, соответствующее этой матрице M степенное преобразование $\mathbf{a} \to \boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$:

$$\ln \mathbf{a} = M^{-1} \cdot \ln \boldsymbol{\nu}, \tag{14}$$

преобразует каждый из квазиоднородных многочленов $R_3^{\mathbf{p}}$ от трёх переменных a_1, a_2, a_3 к многочленам вида $\nu_3^k \tilde{R}_3^{\mathbf{p}}(\nu_1, \nu_2)$. Таким образом, каждое из условий существования резонанса можно представить в виде плоской алгебраической кривой.

Унимодулярная матрица может быть вычислена с помощью известного алгоритма Эйлера, одна из реализаций которого приведена в [17].

Для вектора $\mathbf{N} = (1, 2, 3)$ соответствующая унимодулярная матрица M может быть выбрана вида

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ тогда } M \cdot \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, степенное преобразование (14) определяется матрицей

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

и имеет вид

$$a_1 = \alpha_1 \nu_3, \quad a_2 = \alpha_2 \nu_1 \nu_3^2, \quad a_3 = \alpha_3 \nu_2 \nu_3^3, \tag{15}$$

где ненулевые множители α_j, $j = 1, 2, 3$, можно подбирать для дальнейшего упрощения коэффициентов многочленов $R_3^{\mathbf{p}}$. Здесь α_j выбраны следующим образом:

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 3, \quad \alpha_3 = 1.$$

Поскольку по условиям теоремы 2 коэффициенты a_k, $k = 1, 2, 3$, многочлена $f(\mu)$ должны быть неотрицательны, то из степенного преобразования (15) следует, что параметры ν_k, $k = 1, 2, 3$, также должны быть неотрицательны. Следовательно, нас будет интересовать взаимное расположение кривых, соответствующих резонансным многообразиям, в первом квадранте координатной плоскости (ν_1, ν_2).

5.3. Параметризация и упрощение резонансных условий. Используя степенные преобразования, упростим вычисленные резонансные условия. В эти выражения для резонансов подставим выражения в переменных ν_k, $k = 1, 2, 3$, а именно $a_1 = 3\nu_3, a_2 = 3\nu_1\nu_3^2, a_3 = \nu_2\nu_3^3$.

Для резонансных условий с двумя частотами, задаваемыми общим выражением $R_3^{(q,1,0)}$, имеем

$$\begin{aligned} &\nu_3^6 \Big(27q^4 \left(q^2+1\right)^2 \nu_1^3 - 81q^6\nu_1^2 \\ &\quad - 9q^2 \left(q^2+q+1\right)\left(q^2-q+1\right)\left(q^4+4q^2+1\right)\nu_1\nu_2 \\ &\quad + \left(q^2+q+1\right)^3\left(q^2-q+1\right)^3\nu_2^2 + 27q^4\left(q^2+1\right)^2\nu_2. \Big). \end{aligned} \tag{16}$$

Откуда

$$\tilde{R}_3^{(q,1,0)} = 27q^4\left(q^2+1\right)^2\nu_1^3 - 81q^6\nu_1^2 - 9q^2\left(q^2+q+1\right)\left(q^2-q+1\right)\left(q^4+4q^2+1\right)\nu_1\nu_2 + \left(q^2+q+1\right)^3\left(q^2-q+1\right)^3\nu_2^2 + 27q^4\left(q^2+1\right)^2\nu_2. \quad (17)$$

Из этого выражения можно получить условия $\tilde{R}_3^{(1,1,0)}$, $\tilde{R}_3^{(2,1,0)}$ и $\tilde{R}_3^{(3,1,0)}$ соответственно для $q = 1, 2, 3$. Поступая аналогично, получим, что такие же условия для многообразий $\mathcal{R}_3^{(1,1,1)}$ и $\mathcal{R}_3^{(2,1,1)}$ примут вид

$$\tilde{R}_3^{(1,1,1)} = -4\nu_1 + 3,$$
$$\tilde{R}_3^{(2,1,1)} = -2500\nu_1^3 + 4275\nu_1^2 - 210\nu_2\nu_1 + 343\nu_2^2 - 2376\nu_1 + 36\nu_2 + 432.$$

Так же получено общее выражение для трёхчастотного резонанса вида $\tilde{R}_3^{(p,q,1)}$, который является полиномом шестой степени, которое мы из-за его размеров приводить не будем.

Для каждой из полученных пяти алгебраических кривых был вычислен род, который получился равен 0 во всех случаях. Это говорит о том, что все они рациональные кривые, допускающие рациональную параметризацию. Вычислим эти параметризации.

- Для $\tilde{R}_3^{(1,1,0)}$ она выглядит

$$\left\{\nu_1 = -\frac{(9t_1-5)(t_1-1)}{4\left(-1+2t_1\right)^2}, \nu_2 = \frac{(t_1-1)^2(7t_1-4)}{4\left(-1+2t_1\right)^3}\right\};$$

- для $\tilde{R}_3^{(2,1,0)}$:

$$\left\{\nu_1 = -\frac{(49t_1-16)(743t_1-812)}{400\left(4t_1-7\right)^2}, \nu_2 = \frac{(49t_1-16)^2(97t_1-100)}{400\left(4t_1-7\right)^3}\right\};$$

- для $\tilde{R}_3^{(3,1,0)}$:

$$\left\{\nu_1 = -\frac{(8281t_1-729)(972271t_1-803439)}{218700\left(27t_1-91\right)^2}, \nu_2 = \frac{(8281t_1-729)^2(2617t_1-2025)}{54675\left(27t_1-91\right)^3}\right\};$$

- для $\tilde{R}_3^{(1,1,1)}$:

$$\left\{\nu_1 = \frac{3}{4}, \nu_2 = t_1\right\};$$

- для $\tilde{R}_3^{(2,1,1)}$:

$$\left\{\nu_1 = \frac{39739t_1^2 - 77430t_1 + 54075}{4\left(111t_1 - 175\right)^2}, \nu_2 = -\frac{\left(t_1 + 15\right)\left(-225 + 353t_1\right)^2}{\left(111t_1 - 175\right)^3}\right\}.$$

Пользуясь параметрическим представлением, можно построить плоские алгебраические кривые на координатной плоскости (ν_1, ν_2).

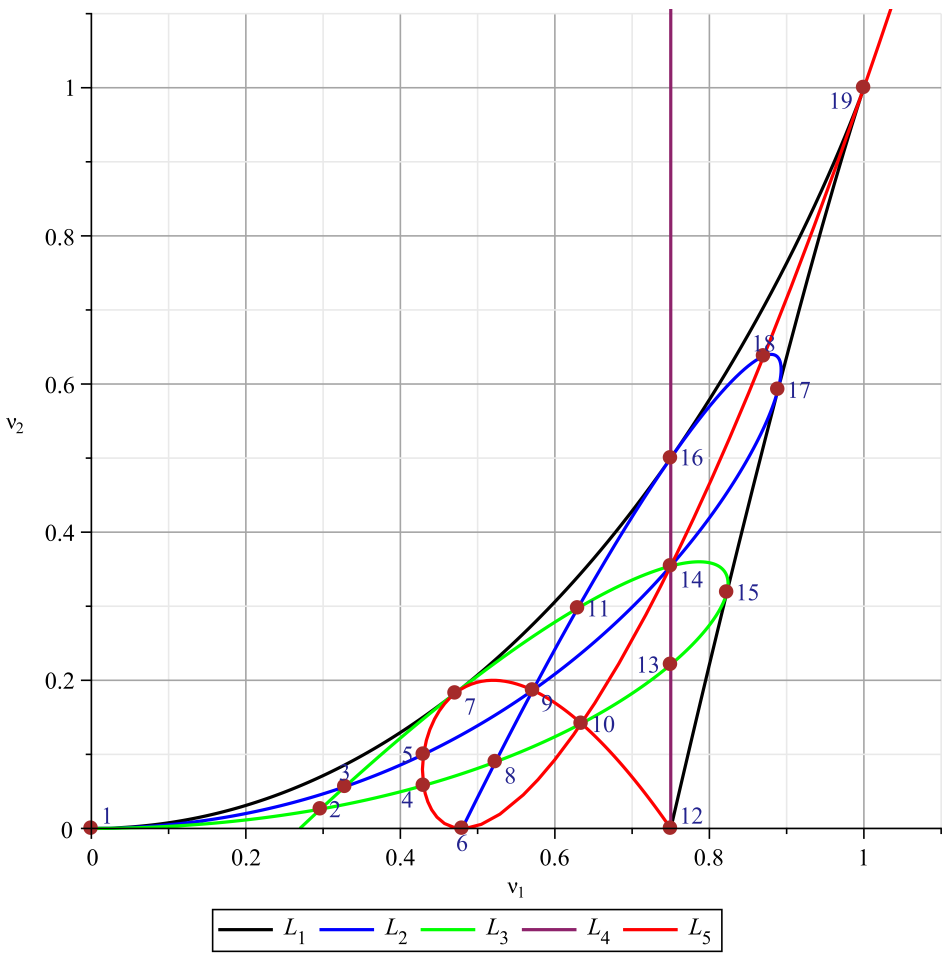


Рис. 1. Резонансные многообразия в переменных ν_1, ν_2.

Для полного представления о взаимном расположении многообразий, соответствующих сильным резонансам, дадим описание рис. 1. Кривые обозначим символами $L_j, j = 1, ..., 5$. Их особые точки, а также точки их взаимного пересечения обозначим символами P_j, где нумерация индексов j точек выбрана в соответствии с увеличением расстояния от начала координат.

Кривая L_1 играет особую роль, она задаёт границу области устойчивости ПР по линейному приближению. Эта кривая является образом дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_3)$, которое делит пространство коэффициентов $\mathbf{K}$ многочлена третей степени на две части. В одной части все корни многочлена вещественные, а в другой части имеется пара комплексно сопряжённых корней и один вещественный корень. Согласно теореме 2, криволинейный треугольник $P_1P_{19}P_{12}$ является границей области Σ. Остальные резонансные кривые полностью или частично располагаются внутри этой области. Резонансные кривые L_2 и L_3, соответствующие двухчастотному резонансу, полностью располагаются в ней, касаясь кривой L_1. Это связано с тем, что если есть две частоты участвующие в резонансе, то они как корни характеристического уравнения должны быть одной природы – либо одновременно вещественные, либо одновременно комплексные. Но пара комплексно сопряжённых корней не может находиться в резонансе, а третий корень всегда должен быть вещественным. Отметим, что ранее кривые L_1, L_2 и L_3 были изображены в [15], но их параметризации были получены другим способом.

Ещё два резонансных многообразия, образами которых являются кривые L_4 и L_5, соответствуют трёхчастотным резонансам. В них, в отличие от двух частотных резонансов, могут участвовать корни различной природы. Это говорит о том, что трёхчастотные резонансные многообразия будут находиться и в области вещественности корней, и в области, где существуют комплексные корни. Во всех изображённых точках на кривых кратность резонанса $\mathfrak{k}$ становится равной 2.

1) Кривая L_1 определяется уравнением $\tilde{R}_3^{(1,1,0)} = 0$. Она показана чёрным цветом. На ней имеется одна особая точка $P_{19} = (1, 1)$ — точка возврата. Этой точке соответствует резонанс $(1, 1, 1)$ кратности 2, потому что имеются два набора независимых решений. В качестве примера можно привести резонансы вида $(1, 1, 0)$ и $(1, 0, 1)$, для которых алгебраическая сумма трёх собственных значений равна нулю.

2) Кривая L_2, изображённая синим цветом, определяется уравнением $\tilde{R}_3^{(2,1,0)} = 0$ и является самопересекающейся кривой с точкой самопересечения

$$P_9 = \left(\frac{4}{7}, \frac{64}{343}\right).$$

Структура резонанса, соответствующая этой точке, будет описана ниже в пункте 5), поскольку она одновременно принадлежит и кривой L_5. Кривая L_2 также касается дискриминантной кривой L_1 в точках

$$P_{16} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right), \quad P_{17} = \left(\frac{8}{9}, \frac{16}{27}\right).$$

3) Зелёным цветом изображена кривая L_3. Она определяется уравнением

$\tilde{R}_3^{(3,1,0)} = 0$ и является кривой самопересечения с особой точкой

$$P_2 = \left(\frac{27}{91}, \frac{19683}{753571}\right).$$

Она также касается дискриминантной кривой L_1 в точках

$$P_7 = \left(\frac{57}{121}, \frac{243}{1331}\right), \quad P_{15} = \left(\frac{297}{361}, \frac{2187}{6859}\right).$$

Кривая L_3 пересекается с кривой L_2 в четырёх точках с координатами:

$$P_3 = \left(\frac{552}{1681}, \frac{3888}{68921}\right), \qquad P_8 = \left(\frac{1107}{2116}, \frac{2187}{24334}\right),$$
$$P_{11} = \left(\frac{216}{343}, \frac{34992}{117649}\right), \qquad P_{14} = \left(\frac{3}{4}, \frac{243}{686}\right).$$

4) Прямая линия фиолетового цвета, обозначенная L_4, определяется уравнением $\tilde{R}_3^{(1,1,1)} = 0$. Она не имеет никаких особенностей и пересекается с указанными выше кривыми в точках P_{12}, P_{13}, P_{14} и P_{16}, где

$$P_{12} = \left(\frac{3}{4}, 0\right), \quad P_{13} = \left(\frac{3}{4}, \frac{86}{2197}\right).$$

5) Последняя кривая L_5, изображённая красным цветом, определяется уравнением $\tilde{R}_3^{(2,1,1)} = 0$. Она является самопересекающейся кривой с особой точкой

$$P_{10} = \left(\frac{111}{175}, \frac{243}{1715}\right),$$

которая также является точкой пересечения с кривой L_3. С кривой L_1 она касается в точке P_7 и пересекается в точках P_{12} и P_{19}. С кривой L_2 она пересекается в точках P_5, P_6, P_9, P_{14} и P_{18}, где

$$P_5 = \left(\frac{43}{100}, \frac{1}{10}\right), \quad P_6 = \left(\frac{12}{25}, 0\right), \quad P_{18} = \left(\frac{732}{841}, \frac{15552}{24389}\right).$$

С кривой L_3 она также касается в точке P_7, а пересекается с ней в точках

$$P_4 = \left(\frac{1497}{3481}, \frac{11907}{205379}\right)$$

и P_{14}, описанной выше в п. 3).

Для проверки выполнения резонансных условий в вышевычисленных точках рассмотрим наглядно некоторые из них. Выполнение условий резонанса проверим для точки P_9, которая является особенной для двухчастотной резонансной кривой L_2 и точкой пересечения с трёхчастотной резонансной кривой L_5. Подставив в выражения степенного преобразования (15) значения переменных ν_1, ν_2, являющихся координатами точки P_9, и выполнив замену $\nu_3 = -t$ при $t > 0$, получим однопараметрические выражения коэффициентов многочлена f_3. Сам многочлен примет вид:

$$f_3 = \frac{(7\mu + t)\,(7\mu + 16t)\,(7\mu + 4t)}{343}.$$

Однопараметрическим семейством корней этого полухарактеристического многочлена являются

$$\mu_1 = -\frac{t}{7}, \quad \mu_2 = -\frac{4t}{7}, \quad \mu_3 = -\frac{16t}{7}.$$

Учитывая, что в каждом из них имеется общий множитель вида $t/7$, то всё семейство корней будет пропорционально числам $(-1, -4, -16)$. Пользуясь равенством зависимости корней характеристического и полухарактеристического полиномов, вычислим все значения $\lambda_j, j = 1, \ldots, 6$, они будут пропорциональны значениям:

$$\lambda_{1,4} = \pm \mathrm{i}, \lambda_{2,5} = \mp 2\mathrm{i}, \lambda_{3,6} = \pm 4\mathrm{i}.$$

Зная значения корней, можно убедиться в выполнении резонансных соотношений. Так как точка P_9 принадлежит двум резонансным многообразиям, проверим эти условия для каждого из них:

1. Так как данная точка для L_2 является точкой самопересечения, то имеются 2 пары соизмеримых корней с отношением $2 : 1$, т.е. резонансное соотношение $\mathbf{p}^* = (2, 1, 0)$ выполняется для корней в виде равенства: $2\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_2 + \lambda_3 = 2\lambda_4 + \lambda_5 = 2\lambda_5 + \lambda_6 = 0$.

2. Также в принадлежащей кривой L_5 точке должен выполнятся трёхчастотный резонанс $\mathbf{p}^* = (2, 1, 1)$. Так, соотношение $2 : 1 : 1$ выполняется в виде: $2\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_6 = \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0$.

Такую же проверку выполним для точки P_{10}. Она является особой для резонансной кривой L_5 и точкой пересечения с кривой L_3. Выполнив подобные вышеприведённым подстановки, получим выражение для f_3:

$$f_3 = \frac{(35\mu + 27t)\,(35\mu + 3t)\,(7\mu + 15t)}{8575}.$$

А соответствующее ему однопараметрическое семейство корней имеет вид:

$$\mu_1 = -\frac{3t}{35}, \quad \mu_2 = -\frac{15t}{7}, \quad \mu_3 = -\frac{27t}{35}.$$

Если учесть, что в каждом из них имеется общий множитель вида $3t/35$, то всё семейство корней будет пропорционально числам $(-1, -25, -9)$. А λ_j в данном случае будут пропорциональны следующим:

$$\lambda_{1,4} = \pm \mathrm{i}, \quad \lambda_{2,5} = \mp 5\mathrm{i}, \quad \lambda_{3,6} = \pm 3\mathrm{i}.$$

Зная значения корней, можно аналогично убедиться в выполнении резонансных соотношений. Так как точка P_{10} принадлежит двум резонансным многообразиям, проверим эти условия для каждого из них:

1. Так как данная точка для L_5 является точкой самопересечения, то имеются 2 пары соизмеримых корней с отношением $2:1:1$, т. е. резонансные соотношения $\mathbf{p}^* = (2, 1, 1)$ выполняются для корней в виде равенств $2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 = 0$.

2. Также в принадлежащей кривой L_3 точке должен выполняться двухчастотный резонанс $\mathbf{p}^* = (3, 1, 0)$. Так, соотношение $3:1$ выполняется для корней в виде равенств $3\lambda_1 + \lambda_6 = \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0$.

В аналогичной последовательности рассмотрим выполнение условия резонанса в точке P_{14}. Она, в свою очередь, не является особой для какой-либо кривой, но является точкой пересечения сразу четырёх алгебраических кривых: L_2, L_3, L_4 и L_5. Следовательно, в ней должно выполняться сразу 4 резонансных условия. Что-бы проверить это, также найдём корни многочлена f_3. Выразим коэффициенты этого многочлена через параметр t и разложим его на множители:

$$f_3 = \frac{(14\mu + 3t)\,(7\mu + 6t)\,(14\mu + 27t)}{1372},$$

а соответствующее однопараметрическое семейство корней примет вид:

$$\mu_1 = -\frac{3t}{14}, \quad \mu_2 = -\frac{6t}{7}, \quad \mu_3 = -\frac{27t}{14}.$$

Если также учесть, что в них имеется общий множитель вида $3t/14$, то всё семейство корней будет пропорционально числам $(-1, -4, -9)$. А λ_j в данном случае будут пропорциональны значениям

$$\lambda_{1,4} = \pm \mathrm{i}, \quad \lambda_{2,5} = \mp 2\mathrm{i}, \quad \lambda_{3,6} = \pm 3\mathrm{i}.$$

Зная значения корней можно аналогично убедится в выполнении резонансных соотношений. Так как точка P_{14} принадлежит четырём резонансным многообразиям, проверим эти условия для каждого из них.

1. Она принадлежит L_2, тогда должно выполняться резонансное соотношение $\mathbf{p}^* = (2, 1, 0)$, а для корней оно примет вид: $2\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_4 + \lambda_5 = 0$.

2. Также в принадлежащей кривой L_3 точке должен выполняться двухчастотный резонанс $\mathbf{p}^* = (3, 1, 0)$. Так, соотношение $3 : 1$ выполняется для корней в виде $3\lambda_1 + \lambda_6 = \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0$.

3. Для точки, принадлежащей кривой L_4, должен выполняться трёхчастотный резонанс $\mathbf{p}^* = (1, 1, 1)$. Так, соотношение $1 : 1 : 1$ выполняется следующим образом: $\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_6 = \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$.

4. Для точки, принадлежащей кривой L_5, должен выполняться трёхчастотный резонанс $\mathbf{p}^* = (2, 1, 1)$. Так, соотношение $2 : 1 : 1$ выполняется для корней в виде равенства $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_4 + 2\lambda_5 + \lambda_6 = 0$.

6. Пример

Рассмотрим три математических маятника одинаковой длины l, точки подвеса которых расположены на равных расстояниях d на горизонтальной прямой, а массы маятников выбраны равными $\mathbf{m} = (1, \alpha, 1)$ соответственно. Пусть маятники соединены между собой невесомыми линейно упругими пружинами жёсткости k длиной d в недеформированном состоянии. Точки прикрепления пружин расположены на расстоянии $b \leqslant d$ от точек подвеса маятников (см. рис. 2).

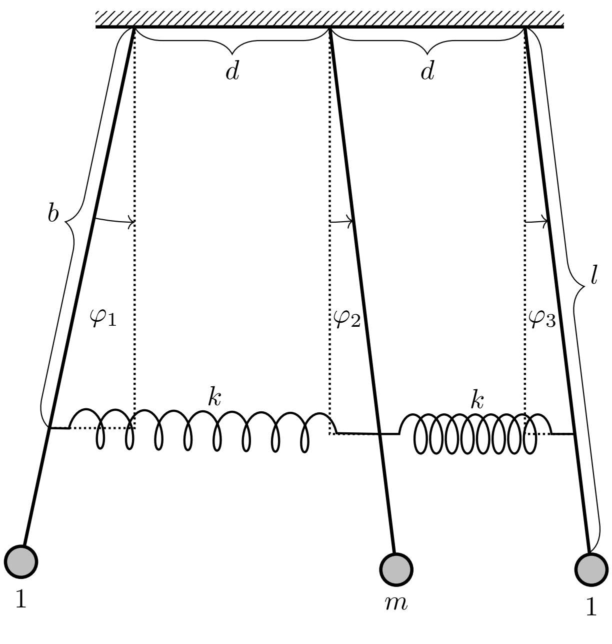


Рис. 2. Три симпатических маятника.

Выбрав в качестве обобщённых координат $\boldsymbol{\varphi}$ углы φ_j, $j = 1, 2, 3$, отклонения маятников от вертикали, запишем функцию Лагранжа этой системы

$$L(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \frac{1}{2} \langle T\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \dot{\boldsymbol{\varphi}} \rangle + \Pi, \tag{18}$$

где матрица T диагональна: $T = \operatorname{diag}\left(l^2, \alpha l^2, l^2\right)$, а потенциальная энергия Π

имеет вид

$$\Pi = \frac{k}{2}\sum_{j=1}^{2}\left\{\sqrt{b^2\left(\cos\varphi_{j+1}-\cos\varphi_j\right)^2+\left[b(\sin\varphi_{j+1}-\sin\varphi_j)+d\right]^2}-d\right\}-$$
$$-gl\sum_{j=1}^{3}m_j\cos\varphi_j.$$

Следуя [18], введём безразмерные переменные

$$\tau=\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,\quad \beta=\frac{b^2k}{gl}.$$

Перейдём к гамильтоновой форме уравнений движения, но при этом будем использовать новые канонические переменные, определяемые нормальными модами колебаний. Для этого раскладываем функцию Лагранжа (18) в ряд Тейлора в окрестности положения равновесия $\boldsymbol{\varphi}=0$, получим линейную систему уравнений Лагранжа с СЧ

$$\boldsymbol{\lambda}=\left(1,\sqrt{1+\beta},\sqrt{\beta\alpha+2\beta+1}\right).$$

Этим частотам соответствуют амплитудные векторы

$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}_3=\begin{pmatrix}1\\-2/\alpha\\1\end{pmatrix},$$

которые задают матрицу перехода $U=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$ к новым переменным $\mathbf{Q}$:

$$\boldsymbol{\varphi}=U\mathbf{Q}.$$

Переход к канонически сопряжённым импульсам $\mathbf{P}$ осуществляется с помощью матрицы $\mathbf{p}=(U^*)^{(-1)}$:

$$\mathbf{p}=(U^*)^{(-1)}\,\mathbf{P},\ \text{где}\ \mathbf{p}=gl\left\langle\mathbf{m},\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right\rangle.$$

Здесь звёздочка означает транспонирование.

Тогда в новых переменных разложение функции Гамильтона вблизи начала координат имеет вид

$$H(\mathbf{Q},\mathbf{P})=H_2(\mathbf{Q},\mathbf{P})+H_4(\mathbf{Q},\mathbf{P})+\cdots,\tag{19}$$

где первые два члена разложения следующие:

$$\begin{aligned} H_2 =& \frac{2P_1^2}{2+\alpha} + P_2^2 + \frac{\alpha P_3^2}{2+\alpha} + \left(1+\frac{\alpha}{2}\right) Q_1^2 + (\beta+1)\, Q_2^2 + \\ &+ \frac{(2+\alpha)(\beta\alpha+\alpha+2\beta)\, Q_3^2}{\alpha^2}, \\ H_4 =& -\frac{(2+\alpha)\, Q_1^4}{24} - \frac{(2\beta+1)\, Q_1^2 Q_2^2}{2} - \frac{(2+\alpha)(2\beta\alpha+\alpha+4\beta)\, Q_1^2 Q_3^2}{2\alpha^2} - \\ &- \frac{(3\beta\alpha+\alpha+2\beta)\, Q_1 Q_2^2 Q_3}{\alpha} - \frac{\left(\alpha^2-4\right)(3\beta\alpha+\alpha+6\beta)\, Q_1 Q_3^3}{3\alpha^3} - \\ &- \frac{(4\beta+1)\, Q_2^4}{12} - \frac{(4\beta\alpha+\alpha+4\beta)\, Q_2^2 Q_3^2}{2\alpha} - \\ &- \frac{(2+\alpha)\left(\alpha^2-2\alpha+4\right)(4\beta\alpha+\alpha+8\beta)\, Q_3^4}{12\alpha^4}. \end{aligned} \tag{20}$$

Поскольку в (19) $H_3(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \equiv 0$, то резонансы порядка $\mathfrak{q} = 3$ проявят себя при приведении к НФ только в формах степени 6 и выше. Следовательно, в данном случае можно ограничиться исследованием резонансов порядка $\mathfrak{q} = 4$, а именно:

- в случае двухчастотного резонанса исследуем многообразие $\mathcal{R}_3^{(3,1,0)}$;
- в случае трёхчастотного резонанса исследуем многообразие $\mathcal{R}_3^{(2,1,1)}$.

Обозначим через $A(H_2)$ матрицу квадратичной формы (20), тогда полухарактеристический многочлен матрицы $JA(H_2)$, соответствующей линейной системы Гамильтона, есть

$$\begin{aligned} f(\mu) = \mu^3 + \frac{(2\beta\alpha+3\alpha+2\beta)\,\mu^2}{\alpha} + \frac{\left(\beta^2\alpha+4\beta\alpha+2\beta^2+3\alpha+4\beta\right)\mu}{\alpha} + \\ + \frac{(\beta\alpha+\alpha+2\beta)(\beta+1)}{\alpha}. \end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, пространство параметров $\Pi \equiv (\alpha, \beta)$ задачи двумерно и значения параметров должны быть неотрицательны: $\{\alpha, \beta \geqslant 0\}$. Квадратичная форма (20) в указанной области пространства параметров является знакоопределённой, следовательно, нижнее равновесное положение маятников является устойчивым по Ляпунову. Поэтому анализ формальной устойчивости здесь не нужен, и далее будет приведено только описание резонансных множеств 4-го порядка.

Подставляем коэффициенты a_1, a_2, a_3 многочлена (21) в уравнение (11) резонансного многообразия $\mathcal{R}_3(3, 1, 0)$, раскладываем его на множители и отбираем среди них только те, нули которых располагаются в первом квадранте плоскости (α, β). Аналогично поступаем и с уравнением (13) резонансного многообразия $\mathcal{R}_3(2, 1, 1)$. В результате получается пять резонансных кривых: три соответствуют двухчастотному резонансу, а две — трёхчастотному:

$$\mathcal{R}_a^{(3,1,0)} \overset{\text{def}}{=} \beta = \frac{8\alpha}{2+\alpha}, \tag{22}$$

$$\mathcal{R}_b^{(3,1,0)} \overset{\text{def}}{=} \beta = 8, \tag{23}$$

$$\mathcal{R}_c^{(3,1,0)} \overset{\text{def}}{=} \beta = \frac{4\alpha}{1-4\alpha}, \tag{24}$$

$$\mathcal{R}_a^{(2,1,1,)} \overset{\text{def}}{=} \beta = 4\alpha^2 + 4\alpha, \tag{25}$$

$$\mathcal{R}_b^{(2,1,1)} \overset{\text{def}}{=} \beta = \frac{8\alpha\,(2-\alpha)}{(3\alpha-2)^2}. \tag{26}$$

Эти кривые показаны на рис. 3. Пунктиром обозначены вертикальные асимптоты кривых (24) и (26) соответственно.

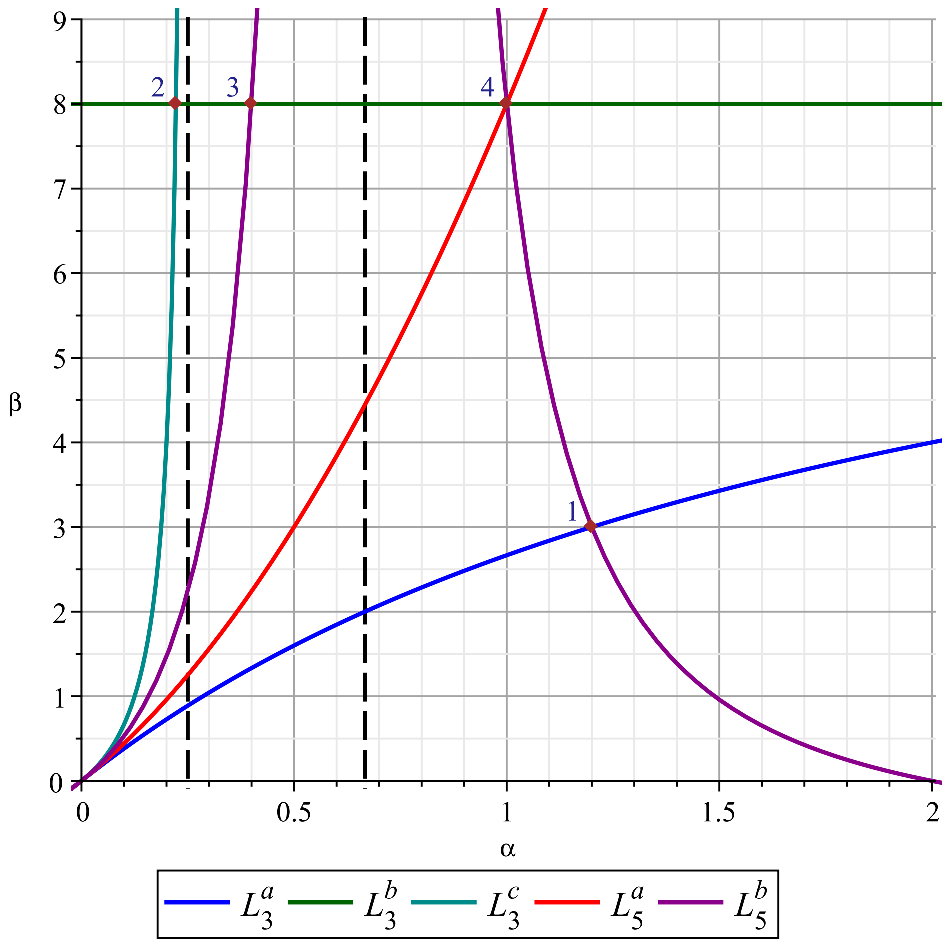


Рис. 3. Резонансные многообразия примера в переменных α, β.

Кривые обозначим символами L_k^j, $k = 3, 5$, $j = a, b, c$, где нижний индекс соответствует индексу кривых L_k, описанных в пп. 3) и 5) на стр. 17. Их точки взаимного пересечения обозначим символами P_j, где нумерация индексов j точек выбрана в соответствии с увеличением расстояния от начала координат. Дадим краткое описание структуры СЧ на соответствующих резонансных кривых.

1) На кривой L_3^a с уравнением (22) СЧ следующие:

$$\lambda_{1,4} = \pm\mathrm{i}, \lambda_{2,5} = \pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{9\alpha+2}{\alpha+2}}, \lambda_{3,6} = \pm 3\mathrm{i}.$$

Таким образом, для всех значений параметра α имеет место двухчастотный резонанс, кроме значения $\alpha = 6/5$, соответствующего точке P_1 (см. ниже).

2) На прямой L_3^b с уравнением (23) СЧ следующие:

$$\lambda_{1,4} = \pm\mathrm{i}, \lambda_{2,5} = \pm 3\mathrm{i}, \lambda_{3,6} = \pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{9\alpha+16}{\alpha}}.$$

Эта прямая пересекается с другими кривыми в трёх точках: P_2, P_3, P_4.

3) На кривой L_3^c с уравнением (24) СЧ следующие:

$$\lambda_{1,4} = \pm\mathrm{i}, \lambda_{2,5} = \pm\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{1-4\alpha}}, \lambda_{3,6} = \pm\frac{3\mathrm{i}}{\sqrt{1-4\alpha}}.$$

4) На кривой L_5^a с уравнением (25) СЧ следующие:

$$\lambda_{1,4} = \pm\mathrm{i}, \lambda_{2,5} = \pm\mathrm{i}(2\alpha+1), \lambda_{3,6} = \pm\mathrm{i}(2\alpha+3).$$

На этой кривой для всех значений α имеет место трёхчастотный резонанс, кроме значения $\alpha = 1$, соответствующего точке P_4.

5) На кривой L_5^b с уравнением (26) СЧ следующие:

$$\lambda_{1,4} = \pm\mathrm{i}, \qquad \lambda_{2,5} = \pm\mathrm{i}\frac{\alpha+2}{2-3\alpha}, \qquad \lambda_{3,6} = \pm\mathrm{i}\frac{6-\alpha}{2-3\alpha} \text{ при } 0 \leqslant \alpha < 2/3;$$
$$\lambda_{1,4} = \pm\mathrm{i}, \qquad \lambda_{2,5} = \pm\mathrm{i}\frac{\alpha+2}{3\alpha-2}, \qquad \lambda_{3,6} = \pm\mathrm{i}\frac{6-\alpha}{3\alpha-2} \text{ при } \alpha > 2/3.$$

На этой кривой для всех значений α имеет место трёхчастотный резонанс, кроме точек P_2, P_3,P_4.

Кривая L_3^a пересекается только с одной ветвью кривой L_5^b в точке $P_1 = (6/5, 3)$. Подставив в выражения (21) значения переменных α, β, являющихся координатами точки P_1, получим

$$f_3 = (\mu+1)(\mu+4)(\mu+9).$$

Корнями этого полухарактеристического многочлена являются значения

$$\mu_1 = -1, \quad \mu_2 = -4, \quad \mu_3 = -9.$$

А в корнях характеристического уравнения они запишутся в виде

$$\lambda_{1,4} = \pm \mathrm{i}, \quad \lambda_{2,5} = \pm 2\mathrm{i}, \quad \lambda_{3,6} = \pm 3\mathrm{i}.$$

Зная значения корней, проверим выполнение резонансных соотношений. Так как точка P_1 принадлежит двум резонансным многообразиям, соответствующим двухчастотному и трёхчастотному резонансу, проверим эти условия для каждого из них:

1) для $\mathcal{R}_a^{(3,1,0)}$ имеются 2 пары соизмеримых корней с отношением $3 : 1$, т. е. $3\lambda_1 + \lambda_6 = 3\lambda_4 + \lambda_3 = 0$.

2) для $\mathcal{R}_b^{(2,1,1)}$ также должно выполняться соотношение $2 : 1 : 1$, которое выглядит как: $\lambda_1 + 2\lambda_5 + \lambda_3 = \lambda_4 + 2\lambda_2 + \lambda_6 = 0$.

Кривая L_3^b пересекается с кривой L_3^c в точке $P_2 = (2/9, 8)$, с кривой L_5^b в точке $P_3 = (2/5, 8)$ и $P_4 = (1, 8)$. В точке P_4 она также пересекается с кривой L_5^a. Подставив в выражения (21) значения переменных α, β, являющихся координатами этих точек, получим соответствующие выражения для f_3:

$$\begin{aligned} P_2 :& f_3 = (\mu + 1)(\mu + 9)(\mu + 81); \\ P_3 :& f_3 = (\mu + 1)(\mu + 9)(\mu + 49); \\ P_4 :& f_3 = (\mu + 1)(\mu + 9)(\mu + 25). \end{aligned}$$

Аналогично, как и в вышеуказанном случае, здесь можно убедиться в выполнении резонансных соотношений.

7. Заключение

Для системы Гамильтона с тремя степенями свободы получено описание разбиения области устойчивости в пространстве коэффициентов $\mathbf{K}$ полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ на такие части, в которых гарантированно отсутствие сильных резонансов между СЧ линейной системы (2). Это позволяет, с одной стороны выполнить исследование формальной устойчивости ПР для каждой из таких частей с помощью НФ четвёртого порядка и теоремы 3, а с другой стороны, в случае наличия резонанса кратности 1 получить дополнительные формальные интегралы и выполнить асимптотическое интегрирование уравнений нормализованной системы Гамильтона.

Благодарности

Авторы выражают благодарность профессору А.Д. Брюно за указанные замечания и полезное обсуждение работы.

Список литературы

1. *Брюно А.* О типах устойчивости в системах Гамильтона // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. Москва, 2020. № 21. С. 1—24. DOI: https://doi.org/10.20948/prepr-2020-21.
2. *Зигель К.*, *Мозер Ю.* Лекции по небесной механике. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 384 с.
3. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М. : «Наука», 1978. 352 с.
4. *Moser J.* New aspects in the theory of stability of Hamiltonian Systems // Comm. Pure Appl. Math. 1958. Vol. 11, no. 1. P. 81–114.
5. *Батхин А. Б.*, *Брюно А. Д.*, *Варин В. П.* Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, № 1. С. 80—133.
6. *Калинина Е. А.*, *Утешев А. Ю.* Теория исключения: Учеб. пособие. СПб. : Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. 72 с.
7. *Basu S.*, *Pollack R.*, *Roy M.-F.* Algorithms in Real Algebraic Geometry. Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 2006. ix+662. (Algorithms and Computations in Mathematics 10).
8. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений (II) // Тр. ММО. 1972. Т. 26. С. 199—239.
9. *Биркгоф Д. Д.* Динамические системы. Ижевск : Изд. дом «Удмуртский университет», 1999. 408 с.
10. *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. М. : Наука, 1990. 296 с.
11. *Bruno A. D.*, *Batkhin A. B.* Survey of eight modern methods of Hamiltonian mechanics // Axioms. 2021. Vol. 10, no. 4. DOI: 10.3390/axioms10040293. URL: https://www.mdpi.com/2075-1680/10/4/293.
12. *Брюно А. Д.* О формальной устойчивости систем Гамильтона // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 3. С. 325—330.
13. *Журавлев В. Ф.*, *Петров А. Г.*, *Шундерюк М. М.* Избранные задачи гамильтоновой механики. М. : ЛЕНАНД, 2015. 304 с.
14. *Кокс Д.*, *Литтл Д.*, *О'Ши Д.* Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. М. : Мир, 2000. 687 с.

15. *Батхин А. Б.* Резонансное множество многочлена и проблема формальной устойчивости // Вестник ВолГУ. Серия 1. Математика. Физика. 2016. 4 (35). С. 5—23. DOI: 10.15688/jvolsu1.2016.4.1.

16. *Батхин А. Б.* Параметризация множества, определяемого обобщенным дискриминантом многочлена // Программирование. 2018. № 2. С. 5—17.

17. *Брюно А.*, *Азимов А.* Вычисление унимодулярных матриц // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. Москва, 2022. № 36. С. 1—20. DOI: https://doi.org/10.20948/prepr-2022-46.

18. *Маркеев А. П.* О движении связанных маятников // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, № 1. С. 27—38.

Аббревиатуры

Оглавление