



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 6 за 2022 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[И.П. Богданов](#)

Моделирование и
оптимальная
диспетчеризация процессов в
производственно-
логистических комплексах

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](#)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Богданов И.П. Моделирование и оптимальная диспетчеризация процессов в производственно-логистических комплексах // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 6. 23 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-6>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-6>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

И.П. Богданов

**Моделирование и оптимальная
диспетчеризация процессов
в производственно-логистических
комплексах**

Москва — 2022

Богданов И.П.

Моделирование и оптимальная диспетчеризация процессов в производственно-логистических комплексах

Рассмотрена задача максимизации объемов однородной продукции, доставляемой от пункта производства до распределительного центра, при наличии значительного количества практических ограничений на схемы технологических циклов. Данная постановка позволяет в том числе оценить последствия нарушений в экономике вследствие распространения инфекций. Для указанной задачи построена формализация в виде задачи бинарного линейного программирования, основанная на дискретизации горизонта планирования. Адекватность предложенной формализации проиллюстрирована на тестовом примере относительно небольшой размерности. Описаны основные подходы, позволяющие как получать точное решение рассматриваемой задачи (для отдельных случаев), так и строить аппроксимации.

Ключевые слова: моделирование производственных процессов, теория расписаний, оптимизация, бинарное линейное программирование

Ilya Petrovich Bogdanov

Modeling and optimal dispatching of processes in production and logistics complexes

The paper regards the problem of maximizing the total volume of homogeneous products delivered from the point of production to the distribution center, in the presence of a significant number of practical restrictions on the schemes of technological cycles. Considered issue allows assessing the consequences of economic downturns, caused by the spread of infections. For this task, formalization is constructed in the form of a binary linear programming problem based on discretization of the planning horizon. The adequacy of the proposed formalization is illustrated by a test example of relatively small dimension. The main approaches are described that make it possible both to obtain an exact solution of the considered problem (for special cases) and to construct approximations.

Key words: modeling of production processes, scheduling theory, optimization, binary linear programming

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 20-04-60160_Вирусы.

Введение

Исследование процессов в крупных промышленных системах, а также выработка рекомендаций по повышению эффективности их функционирования приводят к необходимости решения математических задач оптимизации. Вследствие достаточно сложного и неоднородного состава современных индустриальных комплексов изучение возникающих задач сопряжено с рядом трудностей. Одной из наиболее важных проблем (наряду с большой размерностью, потребностью в значительных вычислительных ресурсах, а также необходимостью учета особенностей оптимизируемых критериев) является построение адекватных моделей рассматриваемых процессов, позволяющих, с одной стороны, учесть специфику анализируемой системы, а с другой стороны, не приводящих к чрезмерно усложненной постановке. Актуальность вопросов, связанных с формированием новых и модификацией существующих моделей технологических процессов в масштабных инфраструктурных системах, дополнительно возросла по причине угроз нарушения функционирования экономик, возникших вследствие возможного распространения пандемий, например COVID-19.

В настоящем исследовании представлен один из возможных подходов к моделированию задачи оптимизации расписания перевозок однородной продукции при ряде дополнительных требований, имеющей важное практическое значение. Указанные требования включают в себя необходимость сопровождения средств транспортировки, учет особенностей графика производства (или добычи), различия в характеристиках, а также приоритетности машин и другие. Задачи данного типа могут подразумевать минимизацию затрат на перевозку строительных материалов (песка, цемента и др.) при осуществлении строительных работ, максимизацию объемов сырья, вывозимого с месторождений, и т.д.

Содержательная постановка задачи

Рассмотрим индустриально-логистический комплекс, состоящий из пункта производства (далее – ПП), где изготавливается (либо добывается) и складировается некоторая однородная продукция, сети путей сообщения, по которым осуществляется транспортировка данной продукции, и распределительного центра (далее – РЦ), куда доставляют продукцию и откуда ее вывозят для последующей продажи на внешнем рынке. Перевозки осуществляют транспортные средства, характеризующиеся, в общем случае, различными значениями скоростей движения и грузоподъемности. Указанные транспортные средства совершают поездки вместе со средствами сопровождения, выполняющими функции по охране либо расчистке дороги (будем считать, что каждый кортеж состоит из одного транспортного средства и одного средства сопровождения). После приезда в ПП (либо в РЦ) кортеж

расформировывается, транспортное средство начинает загружаться (либо разгружаться) или встает в очередь, а средство сопровождения ожидает формирования нового кортежа или едет за следующим транспортным средством.

В течение заданного горизонта планирования (разбитого на равномерные временные периоды) на склад в ПП поступает продукция. Уровень запасов продукции на складе не должен превышать его вместимости. Продукцию загружают в приезжающие транспортные средства. В каждый временной период может загружаться не более одной машины, остальные ждут в очереди (при этом некоторые транспортные средства имеют приоритет перед другими). Режим производства может быть изменен как в сторону увеличения объемов (в целях максимизации вывоза), так и в сторону уменьшения (чтобы избежать переполнения склада на ПП) на заданный временной интервал. После загрузки транспортные средства формируют кортежи со средствами сопровождения и едут в РЦ для разгрузки. У склада в РЦ заданы своя предельная вместимость, а также уровень объемов доставленной продукции, при превышении которого может быть осуществлен вывоз продукции для продажи на внешних рынках (занимающий заданное количество временных периодов). Аналогично загрузке в ПП, разгружаться в РЦ в каждый временной период может не более одной машины.

После разгрузки в РЦ машины проходят техническое обслуживание, а водители отдыхают. Предполагается, что за весь горизонт планирования каждое транспортное средство должно затратить (суммарно) на отдых и ремонт не менее заданного числа временных периодов. Требуется составить расписание движения транспортных средств и средств сопровождения, а также графики производства и вывоза таким образом, что максимизировать объемы доставляемой в РЦ продукции.

Несмотря на то что данная задача схожа с классами задач теории расписаний [1] либо транспортных задач, значительное количество практических условий и различных ограничений, которые необходимо принять во внимание, существенно затрудняет ее сведение к одной из известных постановок [2,3] либо ее решение каким-либо относительно универсальным инструментом [4]. Таким образом, представляется целесообразным построить альтернативный способ формализации пространства задачи и верифицировать ее корректность на примере относительно небольшой размерности (ряд возможных подходов к математическому описанию пространства задач схожего класса был представлен в [5], однако в указанной работе не содержалось результатов тестовых расчетов).

Математическая постановка задачи

Описанная задача может быть формализована как задача бинарного линейного программирования. Введем следующие обозначения (перенумеровав работы, выполняемые каждой производственной единицей):

I – количество средств транспортировки;

K – количество средств сопровождения;

T – количество временных периодов;

$J(i)$ – максимальный из номеров работ, выполняемых i -м средством транспортировки ($i = 1, \dots, I$) либо i -м средством сопровождения ($i = 1, \dots, K$);

$J'(i, j(i))$ ($j(i) = 1, \dots, J(i)$) – множество работ, предшествующих $j(i)$ -й работе i -го средства транспортировки ($i = 1, \dots, I$) либо i -го средства сопровождения ($i = 1, \dots, K$);

$J''(i, j(i))$ ($j(i) = 1, \dots, J(i)$) – множество работ, которые могут следовать за $j(i)$ -й работой i -го средства транспортировки ($i = 1, \dots, I$) либо i -го средства сопровождения ($i = 1, \dots, K$);

$l_{j(i)}^{\min}$ ($j(i) = 1, \dots, J(i)$) – минимальное количество временных периодов, необходимых для выполнения i -м средством транспортировки ($i = 1, \dots, I$) либо i -м средством сопровождения ($i = 1, \dots, K$) $j(i)$ -й работы;

$l_{j(i)}^{\text{fix}}$ ($j(i) = 1, \dots, J(i)$) – количество временных периодов, необходимых для выполнения i -м средством транспортировки ($i = 1, \dots, I$) либо i -м средством сопровождения ($i = 1, \dots, K$) $j(i)$ -й работы с фиксированным временем выполнения (для данных работ $l_{j(i)}^{\text{fix}} = l_{j(i)}^{\min}$);

l_{demand} – количество временных периодов, которое занимает одна операция по вывозу продукции со склада в РЦ;

$l_{\text{supply}}^{\text{inc}}$ – количество временных периодов, которое занимает одна операция по повышению объема производства;

$l_{\text{supply}}^{\text{dec}}$ – количество временных периодов, которое занимает одна операция по снижению объема производства;

l_{repair} – минимально допустимая общая продолжительность отдыха и ремонта для каждого средства транспортировки (в течение всего горизонта планирования);

$x_{i,j(i)}^t$ ($i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J(i), t = 1, \dots, T$) – индикатор выполнения i -м средством транспортировки $j(i)$ -й ($j(i) = 1, \dots, J(i)$) работы в период времени t ;

$\bar{x}_{i,j(i)}^t$ ($i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J(i), t = 1, \dots, T$) – индикатор ситуации, когда i -е средство транспортировки начинает выполнять $j(i)$ -ю ($j(i) = 1, \dots, J(i)$) работу в период времени t ;

$y_{i,j(i)}^t$ ($i=1,\dots,K, j=1,\dots,J(i), t=1,\dots,T$) – индикатор выполнения i -м средством сопровождения $j(i)$ -й ($j(i)=1,\dots,J(i)$) работы в период времени t ;

$\bar{y}_{i,j(i)}^t$ ($i=1,\dots,K, j=1,\dots,J(i), t=1,\dots,T$) – индикатор ситуации, когда i -е средство сопровождения начинает выполнять $j(i)$ -ю ($j(i)=1,\dots,J(i)$) работу в период времени t ;

z^t ($t=1,\dots,T$) – индикатор вывоза продукции со склада в РЦ в период времени t ;

\bar{z}^t ($t=1,\dots,T$) – индикатор ситуации, когда в период времени t начинается вывоз продукции со склада в РЦ;

u^t ($t=1,\dots,T$) – индикатор повышения объема производства в период времени t ;

\bar{u}^t ($t=1,\dots,T$) – индикатор ситуации, когда в период времени t начинается повышение объема производства;

v^t ($t=1,\dots,T$) – индикатор снижения объема производства в период времени t ;

\bar{v}^t ($t=1,\dots,T$) – индикатор ситуации, когда в период времени t начинается снижение объема производства;

c_i^{load} ($i=1,\dots,I$) – объем продукции, загружаемой в i -е средство транспортировки в ПП за один период времени;

c_i^{reload} ($i=1,\dots,I$) – объем продукции, разгружаемой i -м средством транспортировки на складе в РЦ за один период времени;

d – объем продукции, который вывозят со склада в РЦ за один период времени;

s – объем производства в один период времени;

$\text{Vol}_{\text{demand}}^0$ – объем продукции на складе в РЦ перед началом периода планирования;

$\text{Vol}_{\text{demand}}^{\text{max}}$ – максимальная вместимость склада в РЦ;

$\text{Vol}_{\text{supply}}^0$ – объем продукции на складе в ПП перед началом периода планирования;

$\text{Vol}_{\text{supply}}^{\text{max}}$ – максимальная вместимость склада в ПП;

$\text{Vol}_{\text{supply}}^{\text{corr}}$ – объем, на который снижается/повышается производство (за один период времени).

Воспользовавшись введенными обозначениями, запишем ограничения рассматриваемой задачи в виде системы линейных уравнений и неравенств.

В каждый период времени каждое средство транспортировки может выполнять только одну работу – см. уравнения (1):

$$\forall i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T: \sum_{j(i)=1}^{J(i)} x_{i,j(i)}^t = 1. \quad (1)$$

Корректная последовательность работ задается с помощью неравенств (2)-(4), записанных $\forall i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J(i), t = 2, \dots, T$:

$$\bar{x}_{i,j(i)}^t \leq \sum_{j'(i) \in \mathbf{J}'(i,j(i))} x_{i,j'(i)}^{t-1}, \quad (2)$$

$$x_{i,j(i)}^t - x_{i,j(i)}^{t-1} \leq \bar{x}_{i,j(i)}^t, \quad (3)$$

$$x_{i,j(i)}^t \leq x_{i,j(i)}^{t-1} + \sum_{j''(i) \in \mathbf{J}''(i,j(i))} x_{i,j''(i)}^{t-1}. \quad (4)$$

Для работ $j(i)$ с фиксированным временем выполнения можно записать уравнение связи между моментами начала данной и последующей работ – см. (5):

$$\forall i = 1, \dots, I, \forall t: t + l_{j(i)}^{\text{fix}} \leq T: \bar{x}_{i,j(i)}^t = \sum_{j''(i) \in \mathbf{J}''(i,j(i))} \bar{x}_{i,j''(i)}^{t+l_{j(i)}^{\text{fix}}}. \quad (5)$$

На выполнение очередной работы средство транспортировки должно затратить не менее заданного числа временных периодов – см. неравенства (6) $\forall i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J(i), t = 1, \dots, T, l = 0, \dots, l_{j(i)}^{\text{min}} - 1: t + l \leq T$:

$$\bar{x}_{i,j(i)}^t \leq x_{i,j(i)}^{t+l}. \quad (6)$$

Для каждого средства транспортировки определим работу ($\bar{j}(i)$), которую оно начинает выполнять в первый момент времени:

$$\forall i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T: \bar{x}_{i,\bar{j}(i)}^1 = 1. \quad (7)$$

Замечание. Если предположить, что до начала рассматриваемого горизонта планирования производственные единицы уже находились в процессе

выполнения некоторых работ, то данную ситуацию можно смоделировать путем добавления фиктивных работ, соответствующих указанным выше работам, но с сокращенными сроками завершения.

Соотношения, аналогичные (1)-(7), могут быть записаны для средств сопровождения – см. (8)-(14):

$$\forall i = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T: \sum_{j(i)=1}^{J(i)} y_{i,j(i)}^t = 1. \quad (8)$$

$$\forall i = 1, \dots, K, j = 1, \dots, J(i), t = 2, \dots, T:$$

$$\bar{y}_{i,j(i)}^t \leq \sum_{j'(i) \in \mathbf{J}(i,j(i))} y_{i,j'(i)}^{t-1}, \quad (9)$$

$$y_{i,j(i)}^t - y_{i,j(i)}^{t-1} \leq \bar{y}_{i,j(i)}^t, \quad (10)$$

$$y_{i,j(i)}^t \leq y_{i,j(i)}^{t-1} + \sum_{j'(i) \in \mathbf{J}(i,j(i))} y_{i,j'(i)}^{t-1}. \quad (11)$$

$$\forall i = 1, \dots, K, \forall t: t + l_{j(i)}^{\text{fix}} \leq T: \bar{y}_{i,j(i)}^t = \sum_{j''(i) \in \mathbf{J}''(i,j(i))} \bar{y}_{i,j''(i)}^{t+l_{j(i)}^{\text{fix}}}. \quad (12)$$

$$\forall i = 1, \dots, K, j = 1, \dots, J(i), t = 1, \dots, T, l = 0, \dots, l_{j(i)}^{\text{min}} - 1: t + l \leq T:$$

$$\bar{y}_{i,j(i)}^t \leq y_{i,j(i)}^{t+l}. \quad (13)$$

$$\forall i = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T: \bar{y}_{i,\bar{j}(i)}^1 = 1. \quad (14)$$

Правила движения транспортных средств к ПП и РЦ с сопровождением описываются уравнениями (15) и (16) $\forall t = 1, \dots, T$:

$$\sum_{i=1}^I \bar{x}_{i,j}^t \text{двигание к ПП с сопровождением} = \sum_{i=1}^K \bar{y}_{i,j}^t \text{сопровождение к ПП} \cdot \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^I \bar{x}_{i,j}^t \text{двигание к РЦ с сопровождением} = \sum_{i=1}^K \bar{y}_{i,j}^t \text{сопровождение к РЦ} \cdot \quad (16)$$

В каждый момент времени на складе, размещенном в ПП (соответственно, в РЦ), может загружаться (соответственно, разгружаться) не более одного транспортного средства – см. (17):

$$\forall t = 1, \dots, T: \sum_{i=1}^I x_{i,j}^t \text{загрузка} \leq 1, \sum_{i=1}^I x_{i,j}^t \text{разгрузка} \leq 1. \quad (17)$$

В течение всего горизонта планирования каждое транспортное средство должно затратить не менее l_{repair} временных периодов на ремонт и отдых – см. (18):

$$\forall i = 1, \dots, I: \sum_{t=1}^T x_{i,j}^t \text{ремонт} \geq l_{\text{repair}} \cdot \quad (18)$$

Пусть более приоритетные транспортные средства имеют номера $1, \dots, I'$, а менее приоритетные – $I' + 1, \dots, I$. Тогда условие корректной очередности при загрузке на складе в ПП и разгрузке в РЦ имеет вид (19):

$$\forall t = 2, \dots, T: \begin{cases} 1 - \frac{1}{I'} \cdot \sum_{i=1}^{I'} x_{i,j}^{t-1} \text{ожидание в очереди (ПП)} \geq \sum_{i=I'+1}^I \bar{x}_{i,j}^t \text{загрузка}, \\ 1 - \frac{1}{I'} \cdot \sum_{i=1}^{I'} x_{i,j}^{t-1} \text{ожидание в очереди (РЦ)} \geq \sum_{i=I'+1}^I \bar{x}_{i,j}^t \text{разгрузка}. \end{cases} \quad (19)$$

Производственные единицы, осуществляющие вывоз продукции на внешний рынок, начинают свою работу не чаще, чем 1 раз в l_{demand} периодов – см. (20):

$$\forall t = 1, \dots, T : \sum_{t \leq l \leq \min\{t+l_{\text{demand}}, T\}} \bar{z}^l \leq 1. \quad (20)$$

Вывоз продукции занимает ровно l_{demand} временных периодов – см. (21) и (22):

$$\forall t = 1, \dots, T, l = 0, \dots, l_{\text{demand}} - 1 : t + l \leq T : \bar{z}^t \leq z^{t+l}, \quad (21)$$

$$\forall t = 1, \dots, T : t + l_{\text{demand}} \leq T : \bar{z}^t \leq \left(1 - z^{t+l_{\text{demand}}}\right) + \bar{z}^{t+l_{\text{demand}}}. \quad (22)$$

Разгрузка транспортных средств на складе в ПП не может осуществляться одновременно с вывозом продукции на внешний рынок – см. неравенства (23):

$$\forall t = 1, \dots, T : z^t + \sum_{i=1}^I x_{i, j_{\text{разгрузка}}}^t \leq 1. \quad (23)$$

Для определенности будем считать, что в начальный момент времени вывоз продукции из РЦ не осуществляется – см. (24):

$$z^1 = 0. \quad (24)$$

Если необходимо учесть, что вывоз продукции начался до стартового момента времени, то это можно задать в явном виде – например, пусть вывоз продукции (требующий 5 временных периодов) начался за два временных периода до стартового момента времени, тогда заменяем (24) на равенства $z^1 = 1$, $z^2 = 1$, $z^3 = 1$, $z^4 = 0$.

Если вывоз продукции не успевают завершить до окончания горизонта планирования, то его не начинают – см. (25):

$$\bar{z}^{T-l_{\text{demand}}+2} = \bar{z}^{T-l_{\text{demand}}+3} = \dots = \bar{z}^T = 0. \quad (25)$$

Неравенство (26) задает взаимосвязь между индикатором начала вывоза и индикаторами осуществления вывоза в двух последовательных временных периодах:

$$\forall t = 2, \dots, T : z^t - z^{t-1} \leq \bar{z}^t. \quad (26)$$

Условия на максимально и минимально допустимые объемы продукции, хранящейся на складе в РЦ, имеют следующий вид – см. (27) и (28) $\forall t = 1, \dots, T$:

$$0 \leq \text{Vol}_{\text{demand}}^0 + \sum_{l=1}^t \sum_{i=1}^I \left(c_i^{\text{reload}} \cdot x_{i, j_{\text{разгрузка}}}^l \right) - \sum_{l=1}^t \left(d \cdot z^l \right), \quad (27)$$

$$\text{Vol}_{\text{demand}}^0 + \sum_{l=1}^t \sum_{i=1}^I \left(c_i^{\text{reload}} \cdot x_{i, j_{\text{разгрузка}}}^l \right) - \sum_{l=1}^t \left(d \cdot z^l \right) \leq \text{Vol}_{\text{demand}}^{\text{max}}. \quad (28)$$

Аналогично записываются соотношения для индикаторов включения режимов увеличения/снижения объемов производства:

$$\forall t = 1, \dots, T: \quad \sum_{t \leq l \leq \min\{t+l_{\text{supply}}^{\text{inc}}, T\}} \bar{u}^l \leq 1, \quad \sum_{t \leq l \leq \min\{t+l_{\text{supply}}^{\text{dec}}, T\}} \bar{v}^l \leq 1, \quad (29)$$

$$\forall t = 1, \dots, T, l = 0, \dots, l_{\text{supply}}^{\text{inc}} - 1: t + l \leq T: \quad \bar{u}^t \leq u^{t+l}, \quad (30)$$

$$\forall t = 1, \dots, T, l = 0, \dots, l_{\text{supply}}^{\text{dec}} - 1: t + l \leq T: \quad \bar{v}^t \leq v^{t+l}, \quad (31)$$

$$\forall t = 1, \dots, T: t + l_{\text{supply}}^{\text{inc}} \leq T: \quad \bar{u}^t \leq \left(1 - u^{t+l_{\text{supply}}^{\text{inc}}} \right) + \bar{u}^{t+l_{\text{supply}}^{\text{inc}}}, \quad (32)$$

$$\forall t = 1, \dots, T: t + l_{\text{supply}}^{\text{dec}} \leq T: \quad \bar{v}^t \leq \left(1 - v^{t+l_{\text{supply}}^{\text{dec}}} \right) + \bar{v}^{t+l_{\text{supply}}^{\text{dec}}}, \quad (33)$$

$$u^1 = 0, v^1 = 0, \quad (34)$$

$$\forall t = 2, \dots, T: u^t - u^{t-1} \leq \bar{u}^t, v^t - v^{t-1} \leq \bar{v}^t, \quad (35)$$

$\forall t = 1, \dots, T:$

$$0 \leq \text{Vol}_{\text{supply}}^0 + s \cdot t - \sum_{l=1}^t \sum_{i=1}^I \left(c_i^{\text{load}} \cdot x_{i, j_{\text{загрузка}}}^l \right) + \text{Vol}_{\text{supply}}^{\text{corr}} \cdot \sum_{l=1}^t \left(u^l - v^l \right), \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \text{Vol}_{\text{supply}}^0 + s \cdot t - \sum_{l=1}^t \sum_{i=1}^I \left(c_i^{\text{load}} \cdot x_{i, j_{\text{загрузка}}}^l \right) + \\ & + \text{Vol}_{\text{supply}}^{\text{corr}} \cdot \sum_{l=1}^t \left(u^l - v^l \right) \leq \text{Vol}_{\text{supply}}^{\text{max}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Данные соотношения необходимо дополнить неравенствами (38), формализующими запрет одновременного включения и режима повышения объемов производства, и режима снижения объемов производства:

$$\forall t = 1, \dots, T: u^t + v^t \leq 1. \quad (38)$$

Целевая функция задачи соответствует суммарному объему продукции, доставленной транспортными средствами в РЦ – см. (39):

$$f = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \left(c_i^{\text{reload}} \cdot x_{i, j_{\text{разгрузка}}}^t \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} \max \\ x_{i, j(i)}^t, y_{k, j(k)}^t, z^t, u^t, v^t, \\ \bar{x}_{i, j(i)}^t, \bar{y}_{k, j(k)}^t, \bar{z}^t, \bar{u}^t, \bar{v}^t \in \{0, 1\}, \\ i=1, \dots, I, k=1, \dots, K, t=1, \dots, T, \\ j(i)=1, \dots, J(i), j(k)=1, \dots, J(k), \end{array} \right). \quad (39)$$

Таким образом, рассматриваемая задача формализована как задача максимизации линейной функции бинарных переменных (39) при линейных ограничениях (1)-(38).

Тестовый пример

Проиллюстрируем предложенную формализацию на следующем примере. Рассмотрим процесс доставки продукции между ПП и РЦ, выполняемый тремя транспортными средствами различных типов, сопровождение которых осуществляют два одинаковых средства сопровождения. Наименования и последовательности работ для транспортных средств и средств сопровождения приведены на рис. 1 и рис. 2 соответственно.



Рис. 1. Наименования и последовательность работ для транспортных средств



Рис. 2. Наименования и последовательность работ для средств сопровождения

Транспортные средства различаются скоростью движения, а также вместимостью. Кроме того, транспортное средство 1 имеет приоритет при загрузке и разгрузке перед транспортными средствами 2 и 3. Продолжительность работ для транспортных средств приведена в табл. 1-3.

Таблица 1

Продолжительность работ (транспортное средство 1)

Номер работы	Наименование работы	$l_{j(i)}^{\min}$ (временные периоды)	$l_{j(i)}^{\text{fix}}$ (временные периоды)
1	Разгрузка в РЦ	2	2
2	Отдых, ремонт	1	-
3	Ожидание средств сопровождения, формирование кортежа (РЦ)	1	-
4	Движение с сопровождением к ПП	4	4

Номер работы	Наименование работы	$l_{j(i)}^{\min}$ (временные периоды)	$l_{j(i)}^{\text{fix}}$ (временные периоды)
5	Ожидание в очереди на загрузку	1	-
6	Загрузка на складе в ПП	2	2
7	Ожидание средств сопровождения, формирование кортежа (ПП)	1	-
8	Движение с сопровождением к РЦ	5	5
9	Ожидание в очереди на разгрузку	1	-

Таблица 2

Продолжительность работ (транспортное средство 2)

Номер работы	Наименование работы	$l_{j(i)}^{\min}$ (временные периоды)	$l_{j(i)}^{\text{fix}}$ (временные периоды)
1	Разгрузка в РЦ	4	4
2	Отдых, ремонт	1	-
3	Ожидание средств сопровождения, формирование кортежа (РЦ)	1	-
4	Движение с сопровождением к ПП	4	4
5	Ожидание в очереди на загрузку	1	-
6	Загрузка на складе в ПП	4	4
7	Ожидание средств сопровождения, формирование кортежа (ПП)	1	-
8	Движение с сопровождением к РЦ	5	5
9	Ожидание в очереди на разгрузку	1	-

Таблица 3

Продолжительность работ (транспортное средство 3)

Номер работы	Наименование работы	$l_{j(i)}^{\min}$ (временные периоды)	$l_{j(i)}^{\text{fix}}$ (временные периоды)
1	Разгрузка в РЦ	1	1
2	Отдых, ремонт	1	-
3	Ожидание средств сопровождения, формирование кортежа (РЦ)	1	-
4	Движение с сопровождением к ПП	4	4
5	Ожидание в очереди на загрузку	1	-
6	Загрузка на складе в ПП	1	1
7	Ожидание средств сопровождения, формирование кортежа (ПП)	1	-
8	Движение с сопровождением к РЦ	5	5
9	Ожидание в очереди на разгрузку	1	-

Объемы продукции, загружаемой/разгружаемой в единицу времени, совпадают для всех транспортных средств: $c_1^{\text{load}} = c_2^{\text{load}} = c_3^{\text{load}} = 100$ (тонн), $c_1^{\text{reload}} = c_2^{\text{reload}} = c_3^{\text{reload}} = 100$ (тонн).

Продолжительность работ для средств сопровождения указана в табл. 4.

Таблица 4

Продолжительность работ (средства сопровождения)

Номер работы	Наименование работы	$l_{j(i)}^{\min}$ (временные периоды)	$l_{j(i)}^{\text{fix}}$ (временные периоды)
1	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (РЦ)	1	-
2	Сопровождение транспортных средств к ПП	4	4
3	Движение к ПП без транспортных средств	2	2
4	Ожидание транспортных средств,	1	-

Номер работы	Наименование работы	$l_{j(i)}^{\min}$ (временные периоды)	$l_{j(i)}^{\text{fix}}$ (временные периоды)
	формирование кортежа (ПП)		
5	Сопровождение транспортных средств к РЦ	5	5
6	Движение к РЦ без транспортных средств	2	2

Значения остальных параметров тестового примера приведены в табл. 5.

Таблица 5

Параметры тестового примера

Параметр	Значение	Размерность
l_{demand}	4	Временные периоды
$l_{\text{supply}}^{\text{inc}}$	5	Временные периоды
$l_{\text{supply}}^{\text{dec}}$	5	Временные периоды
l_{repair}	2	Временные периоды
d	150	Тонны
s	200	Тонны
$\text{Vol}_{\text{demand}}^0$	399	Тонны
$\text{Vol}_{\text{demand}}^{\text{max}}$	1050	Тонны
$\text{Vol}_{\text{supply}}^0$	100	Тонны
$\text{Vol}_{\text{supply}}^{\text{max}}$	4000	Тонны
$\text{Vol}_{\text{supply}}^{\text{corr}}$	100	Тонны

Предполагается, что в начальный момент времени полностью загруженные транспортные средства ожидают разгрузки в РЦ.

Результаты расчета для горизонта планирования продолжительностью 25 временных периодов, осуществленного с помощью инструментов, входящих в систему Mathworks Matlab R2015b (при следующих характеристиках

оборудования: один 4-ядерный процессор Intel Core i7-3770, 16 GB установленной оперативной памяти), описаны в табл. 6.

Таблица 6

Результаты расчета для тестового примера

Временной период	Наименование работы				
	Транспортные средства			Средства сопровождения	
	1	2	3	1	2
1	Ожидание в очереди на разгрузку	Ожидание в очереди на разгрузку	Ожидание в очереди на разгрузку	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (РЦ)	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (РЦ)
2	Разгрузка в РЦ	Ожидание в очереди на разгрузку	Ожидание в очереди на разгрузку	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (РЦ)	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (РЦ)
3	Разгрузка в РЦ	Ожидание в очереди на разгрузку	Ожидание в очереди на разгрузку	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (РЦ)	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (РЦ)
4	Отдых, ремонт	Ожидание в очереди на разгрузку	Ожидание в очереди на разгрузку	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (РЦ)	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (РЦ)
5	Отдых, ремонт	Ожидание в очереди на разгрузку	Разгрузка в РЦ	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (РЦ)	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (РЦ)
6	Ожидание средств сопровождения, формирование кортежа (РЦ)	Ожидание в очереди на разгрузку	Отдых, ремонт	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (РЦ)	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (РЦ)
7	Движение с сопровождением к ПП	Ожидание в очереди на разгрузку	Ожидание средств сопровождения, формирование кортежа (РЦ)	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (РЦ)	Сопровождение транспортных средств к ПП

Временной период	Наименование работы				
	Транспортные средства			Средства сопровождения	
	1	2	3	1	2
8	Движение с сопровождением к ПП	Ожидание в очереди на разгрузку	Движение с сопровождением к ПП	Сопровождение транспортных средств к ПП	Сопровождение транспортных средств к ПП
9	Движение с сопровождением к ПП	Ожидание в очереди на разгрузку	Движение с сопровождением к ПП	Сопровождение транспортных средств к ПП	Сопровождение транспортных средств к ПП
10	Движение с сопровождением к ПП	Ожидание в очереди на разгрузку	Движение с сопровождением к ПП	Сопровождение транспортных средств к ПП	Сопровождение транспортных средств к ПП
11	Ожидание в очереди на загрузку	Ожидание в очереди на разгрузку	Движение с сопровождением к ПП	Сопровождение транспортных средств к ПП	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (ПП)
12	Ожидание в очереди на загрузку	Ожидание в очереди на разгрузку	Ожидание в очереди на загрузку	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (ПП)	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (ПП)
13	Загрузка на складе в ПП	Ожидание в очереди на разгрузку	Ожидание в очереди на загрузку	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (ПП)	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (ПП)
14	Загрузка на складе в ПП	Ожидание в очереди на разгрузку	Ожидание в очереди на загрузку	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (ПП)	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (ПП)
15	Ожидание средств сопровождения, формирование кортежа (ПП)	Ожидание в очереди на разгрузку	Загрузка на складе в ПП	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (ПП)	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (ПП)
16	Ожидание средств сопровождения, формирование кортежа (ПП)	Ожидание в очереди на разгрузку	Ожидание средств сопровождения, формирование кортежа (ПП)	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (ПП)	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (ПП)

Временной период	Наименование работы				
	Транспортные средства			Средства сопровождения	
	1	2	3	1	2
17	Ожидание средств сопровождения, формирование кортежа (ПП)	Разгрузка в РЦ	Движение с сопровождением к РЦ	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (ПП)	Сопровождение транспортных средств к РЦ
18	Движение с сопровождением к РЦ	Разгрузка в РЦ	Движение с сопровождением к РЦ	Сопровождение транспортных средств к РЦ	Сопровождение транспортных средств к РЦ
19	Движение с сопровождением к РЦ	Разгрузка в РЦ	Движение с сопровождением к РЦ	Сопровождение транспортных средств к РЦ	Сопровождение транспортных средств к РЦ
20	Движение с сопровождением к РЦ	Разгрузка в РЦ	Движение с сопровождением к РЦ	Сопровождение транспортных средств к РЦ	Сопровождение транспортных средств к РЦ
21	Движение с сопровождением к РЦ	Отдых, ремонт	Движение с сопровождением к РЦ	Сопровождение транспортных средств к РЦ	Сопровождение транспортных средств к РЦ
22	Движение с сопровождением к РЦ	Отдых, ремонт	Ожидание в очереди на разгрузку	Сопровождение транспортных средств к РЦ	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (РЦ)
23	Ожидание в очереди на разгрузку	Отдых, ремонт	Разгрузка в РЦ	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (РЦ)	Движение к ПП без транспортных средств
24	Разгрузка в РЦ	Отдых, ремонт	Отдых, ремонт	Ожидание транспортных средств, формирование кортежа (РЦ)	Движение к ПП без транспортных средств
25	Разгрузка в РЦ	Отдых, ремонт	Ожидание средств сопровождения, формирование	Ожидание транспортных средств, формирование	Движение к ПП без транспортных

Временной период	Наименование работы				
	Транспортные средства			Средства сопровождения	
	1	2	3	1	2
			кортежа (РЦ)	кортежа (РЦ)	средств

Т.е. на пути к ПП средство сопровождения 1 сопровождает транспортное средство 3, а средство сопровождения 2 сопровождает транспортное средство 1, а на пути к РЦ средство сопровождения 1 сопровождает транспортное средство 1, а средство сопровождения 2 сопровождает транспортное средство 3.

Режим снижения объемов производства включается со 2 по 6 и с 23 по 25 временные периоды.

Вывоз продукции осуществляется с 12 по 15 временные периоды.

Непосредственной проверкой и перебором можно убедиться в корректности, непротиворечивости, а также оптимальности построенного расписания.

Обсуждение предложенной формализации

Построенная формализация представляет собой задачу бинарного линейного программирования. В ряде случаев (при относительно небольшом количестве производственных единиц и относительно непродолжительном горизонте планирования) для поиска ее точного решения могут быть применены подходы, основанные на методах ветвей и отсечений и генерации столбцов [6]. Для случая большей размерности указанные подходы становятся неприменимыми в силу NP-трудности рассматриваемой задачи [7].

В указанной ситуации перспективным направлением представляется разработка эвристических методов аппроксимации точного решения (например, получения нижних оценок путем расчета допустимых точек, а верхних – путем решения релаксированных задач). Качество указанных эвристик может быть проверено на решаемых точными методами тестовых задачах относительно небольшой размерности.

Примененный подход позволяет формализовать значительное количество ограничений, возникающих на практике – в частности, в дополнение к уже рассмотренным ограничениям, можно записать в виде линейных уравнений и неравенств условия на: недоступность определенных транспортных средств в заданные временные периоды, наличие нескольких альтернативных маршрутов движения, перегрузочные работы (осуществляемые между транспортными средствами различных типов) и др. Но при этом нужно заметить, что добавление данных ограничений приведет к увеличению размерности задачи как за счет новых уравнений/неравенств, так и за счет новых переменных.

В дальнейшем представляет интерес поиск альтернативных путей решения рассматриваемой задачи – в частности, формирование оптимизационных

моделей с непрерывным временем, разработка методов последовательного построения расписания с применением «жадных» алгоритмов [8], использование концепций имитационного моделирования, применение подходов нелинейного программирования (обладающих высоким потенциалом масштабируемости [9]) и др.

Сопоставление различных подходов, предположительно, позволит осуществить декомпозицию исходной задачи на подзадачи, для решения каждой из которых можно будет применить наиболее подходящий (как с точки зрения учета практических ограничений, так и с точки зрения трудоемкости расчета) подход, а также выработать схему, при которой указанные подходы будут наиболее эффективно дополнять друг друга.

Заключение

В настоящем исследовании рассмотрена задача транспортировки однородной продукции от пункта ее производства (добычи) до центра, откуда ее вывозят для реализации на внешних рынках. Учтены условия на неоднородность характеристик автопарка, требования по организации сопровождения на опасных либо труднопроходимых участках, особенности графиков производства (добычи) и вывоза и т.д. Для данной задачи предложена формализация в виде задачи бинарного линейного программирования. Корректность указанной формализации проиллюстрирована на тестовом примере небольшой размерности. Описаны основные свойства предложенной формализации, а также определены направления дальнейших исследований, которые, предположительно, позволят получать для задач данного класса результаты приемлемого качества за практически приемлемое время.

Библиографический список

1. Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. Теория расписаний. Задачи и алгоритмы. М.: МГУ, 2011.
2. Nouri H.E., Driss O.B., Ghédira K. A Classification Schema for the Job Shop Scheduling Problem with Transportation Resources: State-of-the-Art Review // Artificial Intelligence Perspectives in Intelligent Systems. Proceedings of the 5th Computer Science On-line Conference 2016 (CSOC2016). Vol. 1.
3. Афраймович Л.Г., Катеров А.С., Прилуцкий М.Х. Многоиндексные транспортные задачи с 1-вложенной структурой // Автоматика и телемеханика. 2016. № 11. С. 18-42.
4. Аничкин А.С., Семенов В.А. Современные модели и методы теории расписаний // Труды ИСП РАН. 2014. Т. 26, Вып. 3. С. 5-50.
5. Бахтин В.А., Богданов И.П., Осипов В.П., Рыков Ю.Г., Смирнов А.А., Судаков В.А. Оптимизация перевозок однородной продукции между оптовыми складами // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 65. 26 с. doi:10.20948/prepr-2018-65.
6. Toth P., Vigo D. The vehicle routing problem. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, Philadelphia, 2002.
7. Garey M.R., Johnson D.S. Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.
8. Рафгарден Т. Совершенный алгоритм. Жадные алгоритмы и динамическое программирование. СПб.: Питер, 2020.
9. Andrianov A.N., Anikin A.S., Vychkov I.V., Gornov A.Yu. Numerical solution of huge-scale quasiseparable optimization problems // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38, No. 5. P. 870-873.

Оглавление

Введение	3
Содержательная постановка задачи	3
Математическая постановка задачи	4
Тестовый пример	12
Обсуждение предложенной формализации.....	20
Заключение.....	21
Библиографический список.....	22