



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 66 за 2022 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Г.О. Астафуров

Построение и исследование
метода CPP (Cubic Polynomial
Projection) решения
уравнения переноса

Статья доступна по лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Астафуров Г.О. Построение и исследование метода CPP (Cubic Polynomial Projection) решения уравнения переноса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 66. 56 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-66>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-66>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

Г.О. Астафуров

Построение и исследование метода СРР
(Cubic Polynomial Projection)
решения уравнения переноса

Москва — 2022

Астафуров Г.О.

Построение и исследование метода CPP (Cubic Polynomial Projection) решения уравнения переноса

Работа посвящена построению метода CPP (Cubic Polynomial Projection) решения линейного уравнения переноса нейтральных частиц или неполяризованного излучения на тетраэдрах. В работе приведены и доказаны оценки точности получаемого численного решения. Коэффициент поглощения аппроксимируется постоянной величиной в ячейке, источник – полиномом второй степени в ячейке, а граничное условие – полиномом третьей степени на гранях. При дополнительных условиях метод может достигать третьего порядка сходимости. Метод базируется на характеристических свойствах уравнения переноса и в некотором смысле обобщает на тетраэдры метод CIP, основанный на эрмитовой интерполяции. Успех метода обеспечивается переходом к использованию проекционных операторов для построения схемы от интерполяционных.

Ключевые слова: уравнение переноса, проекционно-характеристический метод, ячейки-тетраэдры

Gleb Olegovich Astafurov

Construction and investigation of the CPP (Cubic Polynomial Projection) method for the transport equation solving

The present paper is devoted to the construction of the CPP (Cubic Polynomial Projection) method for solving the linear transport of neutral particles or unpolarized radiation on tetrahedra. The paper presents and proves estimates for the accuracy of the resulting numerical solution. The absorption coefficient is approximated by a constant value in the cell, the source is a second-degree polynomial in the cell, and the boundary condition is a third-degree polynomial on the faces. Under additional conditions, the method can reach the third order of convergence. The method is based on the characteristic properties of the transport equation, and in some sense, it is a generalization of the CIP (cubic-Interpolation pseudo-particle) method based on Hermitian interpolation in tetrahedra. The success of the method is ensured by the use of projection operators for constructing the scheme instead of the interpolation ones.

Key words: transport equation, projective characteristic method, tetrahedra cells

Список обозначений

- φ – искомое решение (интенсивность излучения, функция распределения);
 σ – коэффициент поглощения;
 ω – направление распространения излучения;
 F – источник (правая часть уравнения переноса);
 f – заданное граничное условие;
 \mathcal{T} – в зависимости от контекста рассматриваемый объем или конкретный тетраэдр сетки;
 $\text{diam}_\omega(\mathcal{T})$ и $\text{diam}(\mathcal{T})$ – наибольший размер \mathcal{T} в направлении ω и в произвольном направлении;
 $\text{insec}(\mathcal{T})$ – диаметр наибольшего шара, вписанного в \mathcal{T} ;
 \mathbf{n} – направление внешней нормали к \mathcal{T} ;
 $\partial\mathcal{T}_-, \partial\mathcal{T}_+$ – освещенная и неосвещенная границы;
 \mathbb{T}_σ – разрешающий оператор задачи переноса в \mathcal{T} ;
 $\sigma_{\mathcal{T}}$ – константное приближение коэффициента поглощения в ячейке \mathcal{T} ;
 \mathfrak{T} – сетка из тетраэдров;
 Ω – пространственная область решения задачи;
 r, q – параметры регулярности сетки \mathfrak{T} ;
 h – мелкость сетки \mathfrak{T} (максимальный диаметр ячеек);
 ex – индекс точного решения;
 $H^s(\mathcal{T})$ – пространство Соболева гладкости s в \mathcal{T} ;
 $\mathcal{P}_d(\mathcal{T})$ – пространство полиномов степени не выше d в \mathcal{T} ;
 $\hat{\mathcal{T}}$ – эталонный правильный тетраэдр единичного объема;
 \mathcal{F} – грань сетки;
 $\hat{\mathcal{F}}$ – эталонный правильный треугольник единичной площади;
 x_k – вершины тетраэдра \mathcal{T} , \hat{x}_k – вершины тетраэдра $\hat{\mathcal{T}}$;
 y_k – вершины треугольника \mathcal{F} , \hat{y}_k – вершины треугольника $\hat{\mathcal{F}}$;
 \mathcal{F}_k – грань тетраэдра \mathcal{T} , лежащая напротив вершины x_k ;
 $\hat{\mathcal{F}}_k$ – грань тетраэдра $\hat{\mathcal{T}}$, лежащая напротив вершины \hat{x}_k ;
 λ_k – барицентрические координаты в тетраэдре \mathcal{T} , $\hat{\lambda}_k$ – в $\hat{\mathcal{T}}$;
 η_k – барицентрические координаты в треугольнике \mathcal{F} , $\hat{\eta}_k$ – в $\hat{\mathcal{F}}$;
 $\Phi_{\mathcal{T}}, \Psi_{\mathcal{F}}$ – аффинные изоморфизмы $\hat{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{T}$ и $\hat{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}$;

- \hat{m}_k – мономиальный базис в $\mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}})$;
 \hat{u}_k – мономиальный базис в $\mathcal{P}_2(\hat{\mathcal{T}})$;
 $\hat{\xi}_k$ – сеточные величины на $\hat{\mathcal{F}}$: базис в $\mathcal{P}_3^*(\hat{\mathcal{F}})$;
 $\hat{\theta}_k$ – сеточные величины на $\hat{\mathcal{T}}$: базис в $\mathcal{P}_2^*(\hat{\mathcal{T}})$;
 \hat{p}_k – биортогональный базис в $\mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}})$;
 \hat{q}_k – биортогональный базис в $\mathcal{P}_2(\hat{\mathcal{T}})$;
 $\hat{\mathbb{C}}$ и $\hat{\mathbb{D}}$ – матрицы перехода от биортогональных базисов к мономиальным базисам в $\hat{\mathcal{F}}$ и $\hat{\mathcal{T}}$;
 $\hat{\mathbb{G}}$ – матрица Грамма биортогонального базиса в $L_2(\hat{\mathcal{F}})$;
 $\mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}})}$ – оператор ортогональной проекции $L_2(\hat{\mathcal{F}}) \rightarrow \mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}})$;
 $\hat{\mathbb{C}}^k(\mu)$ – матрица перехода от мономиального базиса в $\hat{\mathcal{F}}$ к мономиальному базису в треугольнике $\hat{\mathcal{F}}^k$, полученном из $\hat{\mathcal{F}}$ заменой вершины \hat{y}_k на точку \hat{y}_* с барицентрическими координатами μ ;
 $\hat{\mathbb{D}}^k(\nu)$ – матрица перехода от мономиального базиса в $\hat{\mathcal{T}}$ к мономиальному базису в тетраэдре $\hat{\mathcal{T}}^k$, полученном из $\hat{\mathcal{T}}$ заменой вершины \hat{x}_k на точку \hat{x}_* с барицентрическими координатами ν ;
 $\hat{\mathbb{V}}^k(t)$ – матрица, вводимая формулой (4.10);
 $\hat{\mathbb{U}}^{k,n}(t)$ – матрица, вводимая формулами (4.11);
 $C_{\text{BH},s}$ – константа ошибки в лемме Брамбла-Гильберта;
 $C_{\text{TR},s}$ – константа ошибки в теореме Соболева о следе.

Введение

В большом количестве задач науки и техники применяется численное исследование на основе решения уравнения переноса. Схемы, которые строятся для простейшего уравнения адвекции, потом могут быть обобщены на самые разные случаи: от уравнений газовой динамики до уравнений переноса излучения или частиц. Различные сферы приложения налагают различные требования к качеству разрабатываемых разностных схем. Сферой наших интересов является линейное уравнение переноса незаряженных частиц: фотонов или нейтронов, в котором присутствуют члены поглощения и рассеяния, накладывающие специальные требования к используемым разностным схемам. Имея в виду, что мы ориентируемся на метод лебеговского осреднения по энергии [1,2], в котором сохраняется полный диапазон изменения коэффициента поглощения на несколько порядков, нам важно в схеме сохранить экспоненциальный характер зависимости решения от оптической толщины ячеек. Такая зависимость плохо описывается алгебраическим образом, поэтому предпочтение отдается схемам, построенным на характеристических подходах. В построении характеристических методов явно используется разрешающий оператор задачи переноса. Такие схемы позволяют решать задачи с сечениями, приближенными к реальным.

Для описания пространственно-сложных структур хороши неструктурированные сетки из тетраэдров. Наличие контактных границ (границ раздела сред) и условия на внешних границах делают предпочтительным использование узких шаблонов (в рамках одного тетраэдра). При этом желательно иметь схему с порядком аппроксимации выше первого. В работах автора можно найти такие подходы с порядком аппроксимации 2 и 2,5 на основе использования узловых величин и средних по граням и ребрам [3,4].

В данной работе приводится обобщение на неструктурированные сетки метода CIP: Cubic Interpolation Polynomial [5-10] решения одномерного нестационарного уравнения переноса, который строится на основе эрмитовой интерполяции. Для построения метода CIP используется интерполяционный оператор по значениям искомой функции и ее пространственной производной в узлах регулярной сетки. В оригинальных работах для замыкания метода пространственные производные на верхнем слое определяются из решения продолженного уравнения переноса, которое является результатом дифференцирования исходного уравнения по пространственной переменной. Такой подход неудобен для уравнения переноса с присутствием членов поглощения, и была предложена его модификация для неоднородного уравнения переноса [11,12], в которой замыкание схемы производится с помощью интегральных средних и формулы Эйлера-Маклорена. Этот подход делает схему близкой к бикомпактным схемам [13-19], однако в решении на новом временном слое учитывается явная экспоненциальная зависимость решения от оптической толщины, характерная для неоднородного уравнения переноса. Для решения

стационарного уравнения переноса может быть построена схема примерно на таких же принципах. Однако при работе с тетраэдрами возникают различные типы освещенности ячейки (три различных типа), два из которых не гарантируют гладкости решения на неосвещенных элементах тетраэдра даже при гладком точном решении. Поэтому схема, построенная на основе интерполяционных операторов, не является оптимальной.

В связи со сделанными замечаниями предлагается перейти от использования интерполяционных операторов для построения схемы к ортогональным проекторам. Полученную схему предлагается назвать СРР: Cubic Polynomial Projection. Использование проекционных операторов позволяет легко получать оценки для доказательства устойчивости разностной схемы. Такие операторы в том числе хорошо применимы к разрывным функциям. В качестве проекционного оператора используется оператор ортогональной проекции в смысле L_2 на пространство полиномов степени не выше третьей. Схема первого порядка такого типа построена в работе [20]. Заметим, что использование проекционных операторов роднит предлагаемый метод с разрывным методом Галеркина.

Структура данной работы следующая:

- вводятся необходимые обозначения, их в работе много, и мы попытались собрать их в одном месте;
- обсуждается оператор разрешения задачи переноса в выпуклой области и его приближение оператором задачи с постоянным коэффициентом поглощения;
- задается сеточный оператор переноса величин с освещенных элементов на неосвещенные для разных конфигураций взаимного положения направления переноса и ячейки. Таких конфигураций три. Приводятся формулы программной реализации для каждого из трех типов освещенности ячеек;
- кратко обсуждается алгоритм выбора последовательности расчета ячеек;
- приводятся необходимые сведения из теории пространств Соболева для дальнейшего получения оценок точности метода;
- формулируются и доказываются оценки точности полученного решения;
- формулируются выводы.

Мы позволили два отступления от классического канона препринта: во-первых, мы будем использовать двойную нумерацию формул, во-вторых, приводится таблица обозначений, совершенно необходимая по мере чтения статьи в силу большого количества различных операторов в формулах работы.

1. Разрешающий оператор задачи переноса в выпуклой области

Пусть \mathcal{T} — ограниченная выпуклая пространственная область с кусочно-гладкой границей, например, выпуклый многогранник (Рис. 1). Пусть ω — единичное направление излучения, $\partial\mathcal{T}_-$ — освещенная часть границы \mathcal{T} , определяемая по знаку скалярного произведения ω с единичной внешней нормалью $\mathbf{n}(x)$:

$$\partial\mathcal{T}_- = \{x \in \partial\mathcal{T} : \langle \mathbf{n}(x), \omega \rangle < 0\}.$$

Неосвещенную часть границы определим аналогично и обозначим $\partial\mathcal{T}_+$:

$$\partial\mathcal{T}_+ = \{x \in \partial\mathcal{T} : \langle \mathbf{n}(x), \omega \rangle > 0\}.$$

Для почти всех $x \in \partial\mathcal{T}_-$ определена положительная функция $s_+ \in L_\infty(\partial\mathcal{T}_-)$, $s_+(x) > 0$, такая что $x + s_+(x)\omega \in \partial\mathcal{T}_+$. При этом выполнено $\|s_+\|_{L_\infty(\partial\mathcal{T}_-)} = \text{diam}_\omega(\mathcal{T}) \leq \text{diam}(\mathcal{T})$, где $\text{diam}_\omega(\mathcal{T})$ — наибольший размер области \mathcal{T} по направлению ω .

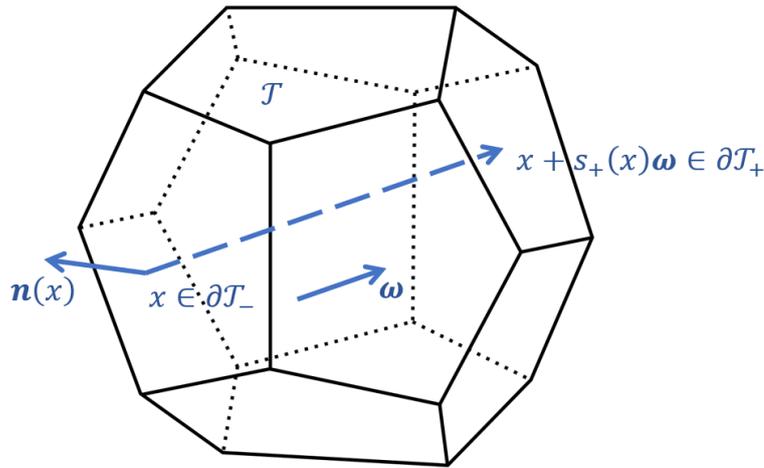


Рис. 1. Перенос излучения в выпуклой области

Краевая задача переноса

Пусть $\sigma \in L_\infty(\mathcal{T})$ — коэффициент поглощения, такой что $\sigma(x) > 0$ почти всюду. Рассмотрим стационарную краевую задачу переноса излучения в \mathcal{T} :

$$\begin{cases} \langle \text{grad}\varphi, \omega \rangle + \sigma\varphi = F, \\ \varphi|_{\partial\mathcal{T}_-} = f. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $F \in L_2(\mathcal{T})$, $f \in L_2(\partial\mathcal{T}_-, |\langle \mathbf{n}, \omega \rangle|)$ — известные функции. Под $L_2(\partial\mathcal{T}_-, |\langle \mathbf{n}, \omega \rangle|)$ понимается пространство квадратично интегрируемых функций

с весом $|\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|$. Функция F имеет физический смысл интенсивности источников излучения. Они могут в том числе включать в себя члены рассеяния, которые на этапе построения схемы мы считаем известными (например, в рамках использования итерационного процесса). Решение φ задачи (1.1) имеет смысл интенсивности излучения в направлении $\boldsymbol{\omega}$. Оно ищется в гильбертовом пространстве

$H(\mathcal{T}, \langle \mathbf{grad}, \boldsymbol{\omega} \rangle) = \{\varphi \in L_2(\mathcal{T}) : \langle \mathbf{grad}\varphi, \boldsymbol{\omega} \rangle \in L_2(\mathcal{T})\}$ типа Соболева с нормой

$$\|\varphi\|_{H(\mathcal{T}, \langle \mathbf{grad}, \boldsymbol{\omega} \rangle)}^2 = \|\varphi\|_{L_2(\mathcal{T})}^2 + \|\langle \mathbf{grad}\varphi, \boldsymbol{\omega} \rangle\|_{L_2(\mathcal{T})}^2.$$

Производная $\langle \mathbf{grad}\varphi, \boldsymbol{\omega} \rangle$, конечно же, понимается в обобщенном смысле. Покажем, что задача (1.1) имеет единственное решение. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H(\mathcal{T}, \langle \mathbf{grad}, \boldsymbol{\omega} \rangle)$ удовлетворяют (1.1), тогда для их разности $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ верно

$$\begin{cases} \langle \mathbf{grad}\psi, \boldsymbol{\omega} \rangle + \sigma\psi = 0, \\ \psi|_{\partial\mathcal{T}_-} = 0. \end{cases}$$

По формуле Стокса имеем

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{T}} \psi^2 \langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle d\mu &= \int_{\mathcal{T}} \langle \mathbf{grad}\psi^2, \boldsymbol{\omega} \rangle d\mu = \\ &= 2 \int_{\mathcal{T}} \psi \langle \mathbf{grad}\psi, \boldsymbol{\omega} \rangle d\mu = -2 \int_{\mathcal{T}} \sigma\psi^2 d\mu \leq 0. \end{aligned}$$

Здесь и далее под μ понимается мера Лебега в соответствующей области интегрирования. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{T}} \psi^2 \langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle d\mu &= \int_{\partial\mathcal{T}_+} \psi^2 |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu - \int_{\partial\mathcal{T}_-} \psi^2 |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu = \\ &= \int_{\partial\mathcal{T}_+} \psi^2 |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu \geq 0. \end{aligned}$$

Откуда заключаем: $\int_{\mathcal{T}} \sigma\psi^2 d\mu = 0 \Rightarrow \psi = 0$ почти всюду в \mathcal{T} . Единственность доказана. Подробно о постановках задач переноса в функциональных пространствах можно узнать в [21,22]. Ниже приводится явный вид решения задачи (1.1). Для почти всех $x \in \partial\mathcal{T}_-$ и $s \in (0, s_+(x))$ зададим функцию φ равенством

$$\begin{aligned} \varphi(x + s\boldsymbol{\omega}) &= \exp\left(-\int_0^s \sigma(x + t\boldsymbol{\omega}) dt\right) f(x) + \\ &+ \int_0^s F(x + t\boldsymbol{\omega}) \exp\left(-\int_t^s \sigma(x + u\boldsymbol{\omega}) du\right) dt. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Переменные s, t, u определены на параллельной $\boldsymbol{\omega}$ прямой от точки x . Правая часть (1.2) корректно определена для почти всех $x \in \partial\mathcal{T}_-$. Непосредственная подстановка убеждает, что функция (1.2) является решением задачи (1.1). Формула (1.2) задает разрешающий оператор

$$L_2(\partial\mathcal{T}_-, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|) \oplus L_2(\mathcal{T}) \ni (f, F) \mapsto \varphi \in L_2(\mathcal{T})$$

задачи переноса (1.1). Обозначим его \mathbb{S}_σ . Докажем непрерывность оператора $\mathbb{S}_\sigma: L_2(\partial\mathcal{T}_-, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|) \oplus L_2(\mathcal{T}) \rightarrow L_2(\mathcal{T})$. Воспользуемся неравенством $e^{-a} \leq 1$, для $a > 0$. Из (1.1) и (1.2) следуют оценки

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L_2(\mathcal{T})} &= \left(\int_{\partial\mathcal{T}_-} \left(\int_0^{s_+(x)} |\varphi(x + s\boldsymbol{\omega})|^2 ds \right) |\langle \mathbf{n}(x), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(x) \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\int_{\partial\mathcal{T}_-} \left(\int_0^{s_+(x)} |f(x)|^2 ds \right) |\langle \mathbf{n}(x), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(x) \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\int_{\partial\mathcal{T}_-} \left(\int_0^{s_+(x)} \left(\int_0^s |F(x + t\boldsymbol{\omega})| dt \right)^2 ds \right) |\langle \mathbf{n}(x), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(x) \right)^{1/2} \leq \quad (1.3) \\ &\leq \left(\int_{\partial\mathcal{T}_-} |f(x)|^2 s_+(x) |\langle \mathbf{n}(x), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(x) \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\int_{\partial\mathcal{T}_-} \left(\int_0^{s_+(x)} \left(s \int_0^s |F(x + t\boldsymbol{\omega})|^2 dt \right) ds \right) |\langle \mathbf{n}(x), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(x) \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \text{diam}_\omega(\mathcal{T})^{1/2} \|f\|_{L_2(\partial\mathcal{T}_-, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)} + \text{diam}_\omega(\mathcal{T}) \|F\|_{L_2(\mathcal{T})}. \end{aligned}$$

Из (1.3) следует непрерывная зависимость решения задачи (1.1) от входных данных. Получим также оценки на $\varphi|_{\partial\mathcal{T}_+} \in L_2(\partial\mathcal{T}_+, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)$:

$$\begin{aligned} \|\varphi|_{\partial\mathcal{T}_+}\|_{L_2(\partial\mathcal{T}_+, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)} &= \left(\int_{\partial\mathcal{T}_+} |\varphi(y)|^2 |\langle \mathbf{n}(y), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(y) \right)^{1/2} = \\ &= \left(\int_{\partial\mathcal{T}_-} |\varphi(x + s_+(x)\boldsymbol{\omega})|^2 |\langle \mathbf{n}(x), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(x) \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\int_{\partial\mathcal{T}_-} |f(x)|^2 |\langle \mathbf{n}(x), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(x) \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\int_{\partial\mathcal{T}_-} \left(\int_0^{s_+(x)} |F(x + s\boldsymbol{\omega})| ds \right)^2 |\langle \mathbf{n}(x), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(x) \right)^{1/2} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_{\partial\mathcal{T}_-} |f(x)|^2 |\langle \mathbf{n}(x), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(x) \right)^{1/2} + \\
&+ \left(\int_{\partial\mathcal{T}_-} \left(\int_0^{s_+(x)} |F(x + s\boldsymbol{\omega})|^2 ds \right) s_+(x) |\langle \mathbf{n}(x), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(x) \right)^{1/2} \leq \quad (1.4) \\
&\leq \|f\|_{L_2(\partial\mathcal{T}_-, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)} + \text{diam}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathcal{T})^{1/2} \|F\|_{L_2(\mathcal{T})}.
\end{aligned}$$

При построении схемы нас в первую очередь будет интересовать именно разрешающий оператор

$$L_2(\partial\mathcal{T}_-, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|) \oplus L_2(\mathcal{T}) \ni (f, F) \mapsto \varphi|_{\partial\mathcal{T}_+} \in L_2(\partial\mathcal{T}_+, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|).$$

Обозначим его \mathbb{T}_σ . Из (1.4) видно, что норма $\|\mathbb{T}_\sigma\|$ не превосходит $(1 + \text{diam}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathcal{T}))^{1/2}$.

Обоснование замены переменных в поверхностном интеграле

Сделаем небольшую остановку, чтобы обосновать переход

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\mathcal{T}_+} |\varphi(y)|^2 |\langle \mathbf{n}(y), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(y) = \\
&= \int_{\partial\mathcal{T}_-} |\varphi(x + s_+(x)\boldsymbol{\omega})|^2 |\langle \mathbf{n}(x), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(x),
\end{aligned}$$

сделанный в доказательстве оценки (1.4). Он основан на правиле замены переменных в поверхностном интеграле. Приведем подробное обоснование.

Без ограничения общности можно считать, что граница $\partial\mathcal{T}$ гладкая. В случае кусочно-гладкой границы доказательство сводится к разбиению границы на гладкие участки и использованию аддитивности интеграла. Зафиксируем в пространстве плоскость Π ортогональную $\boldsymbol{\omega}$ и рассмотрим гладкие отображения $\pi_+ : \partial\mathcal{T}_+ \rightarrow \Pi$, $\pi_- : \partial\mathcal{T}_- \rightarrow \Pi$: проекции на Π вдоль $\boldsymbol{\omega}$. Заметим, что ввиду выпуклости \mathcal{T} и гладкости $\partial\mathcal{T}$ отображения $\pi_+ : \partial\mathcal{T}_+ \rightarrow \pi_+(\partial\mathcal{T}_+) = \Pi_{\mathcal{T}}$, $\pi_- : \partial\mathcal{T}_- \rightarrow \pi_-(\partial\mathcal{T}_-) = \Pi_{\mathcal{T}}$ являются диффеоморфизмами.

Пусть $\text{Vol} \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ — стандартная форма объема в \mathbb{R}^3 , а $\text{Vol}_{\partial\mathcal{T}} \in \Omega^2(\partial\mathcal{T})$ форма объема на границе $\partial\mathcal{T}$, соответствующая выбору внешней нормали. В точке $x \in \partial\mathcal{T}$ имеется связь между $\text{Vol}(x)$ и $\text{Vol}_{\partial\mathcal{T}}(x)$: для касательных к $\partial\mathcal{T}$ в точке x векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_x\partial\mathcal{T}$ выполнено $\text{Vol}_{\partial\mathcal{T}}(x)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{Vol}(\mathbf{n}(x), \mathbf{u}, \mathbf{v})$. Также можно рассмотреть форму объема $\text{Vol}_{\Pi} \in \Omega^2(\Pi)$. Для нее $\text{Vol}_{\Pi}(z)(\mathbf{w}, \mathbf{r}) = \text{Vol}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{w}, \mathbf{r})$ при всех $z \in \Pi$, $\mathbf{w}, \mathbf{r} \in T_z\Pi$. Обозначим через $\text{Vol}_{\Pi_{\mathcal{T}}}$ ограничение

$\text{Vol}_{\Pi}|_{\Pi_{\mathcal{T}}}$ и аналогично через $\text{Vol}_{\partial\mathcal{T}_+}, \text{Vol}_{\partial\mathcal{T}_-}$ ограничения $\text{Vol}_{\partial\mathcal{T}}|_{\partial\mathcal{T}_+}, \text{Vol}_{\partial\mathcal{T}}|_{\partial\mathcal{T}_-}$. Заметим, что для обратных образов $\pi_+^o(\text{Vol}_{\Pi_{\mathcal{T}}}) \in \Omega^2(\partial\mathcal{T}_+)$, $\pi_-^o(\text{Vol}_{\Pi_{\mathcal{T}}}) \in \Omega^2(\partial\mathcal{T}_-)$ выполнено

$$\pi_+^o(\text{Vol}_{\Pi_{\mathcal{T}}})(y) = \langle \mathbf{n}(y), \boldsymbol{\omega} \rangle \text{Vol}_{\partial\mathcal{T}_+}(y), \quad y \in \partial\mathcal{T}_+, \quad (1.5)$$

$$\pi_-^o(\text{Vol}_{\Pi_{\mathcal{T}}})(x) = \langle \mathbf{n}(x), \boldsymbol{\omega} \rangle \text{Vol}_{\partial\mathcal{T}_-}(x), \quad x \in \partial\mathcal{T}_-. \quad (1.6)$$

Действительно, для всех $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_y \partial\mathcal{T}_+$ имеем

$$\begin{aligned} \pi_+^o(\text{Vol}_{\Pi_{\mathcal{T}}})(y)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \text{Vol}_{\Pi_{\mathcal{T}}}(\pi_+(y))(d\pi_+ \mathbf{u}, d\pi_+ \mathbf{v}) = \\ &= \text{Vol}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega} \rangle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega} \rangle \boldsymbol{\omega}) = \text{Vol}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \\ &= \text{Vol}\left(\left(\boldsymbol{\omega} - \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}(y) \rangle \mathbf{n}(y)\right) + \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}(y) \rangle \mathbf{n}(y), \mathbf{u}, \mathbf{v}\right) = \\ &= \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}(y) \rangle \text{Vol}(\mathbf{n}(y), \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{n}(y), \boldsymbol{\omega} \rangle \text{Vol}_{\partial\mathcal{T}_+}(y)(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается (1.6). Из (1.5) и (1.6) следует, что для любой функции $f \in L_1(\partial\mathcal{T}_+)$ с учетом $\pi_+^{-1}(\pi_-(x)) = x + s_+(x)\boldsymbol{\omega}$ выполнено

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{T}_+} f(y) |\langle \mathbf{n}(y), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(y) &= \int_{\partial\mathcal{T}_+} f(y) |\langle \mathbf{n}(y), \boldsymbol{\omega} \rangle \text{Vol}_{\partial\mathcal{T}_+}(y)| = \\ &= \int_{\Pi_{\mathcal{T}}} f(\pi_+^{-1}(z)) |\text{Vol}_{\Pi_{\mathcal{T}}}(z)| = \\ &= \int_{\partial\mathcal{T}_-} f\left(\pi_+^{-1}(\pi_-(x))\right) |\langle \mathbf{n}(x), \boldsymbol{\omega} \rangle \text{Vol}_{\partial\mathcal{T}_-}(x)| = \\ &= \int_{\partial\mathcal{T}_-} f\left(\pi_+^{-1}(\pi_-(x))\right) |\langle \mathbf{n}(x), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(x) = \\ &= \int_{\partial\mathcal{T}_-} f(x + s_+(x)\boldsymbol{\omega}) |\langle \mathbf{n}(x), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(x). \end{aligned}$$

О приближении коэффициента поглощения постоянной функцией

Предположим, что для постоянной функции $\sigma_{\mathcal{T}} > 0$ выполнена оценка $\|\sigma - \sigma_{\mathcal{T}}\|_{L_{\infty}(\mathcal{T})} < \varepsilon$. Рассмотрим вместе с (1.1) краевую задачу

$$\begin{cases} \langle \mathbf{grad} \varphi_{\mathcal{T}}, \boldsymbol{\omega} \rangle + \sigma_{\mathcal{T}} \varphi_{\mathcal{T}} = F, \\ \varphi_{\mathcal{T}}|_{\partial\Omega_-} = f. \end{cases} \quad (1.7)$$

Оценим разность $(\varphi - \varphi_{\mathcal{T}})|_{\partial\mathcal{T}_+} \in L_2(\partial\mathcal{T}_+, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)$, воспользовавшись неравенством $|e^{-a} - e^{-b}| \leq |a - b|$, для $a, b > 0$. Из формулы (1.2) для решений получаем оценку

$$\begin{aligned}
& \|(\varphi - \varphi_{\mathcal{T}})|_{\partial\mathcal{T}_+}\|_{L_2(\partial\mathcal{T}_+, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)} = \\
& = \left(\int_{\partial\mathcal{T}_+} |(\varphi - \varphi_{\mathcal{T}})(y)|^2 |\langle \mathbf{n}(y), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(y) \right)^{1/2} = \\
& = \left(\int_{\partial\mathcal{T}_-} |(\varphi - \varphi_{\mathcal{T}})(x + s_+(x)\boldsymbol{\omega})|^2 |\langle \mathbf{n}(x), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(x) \right)^{1/2} \leq \\
& \leq \left(\int_{\partial\mathcal{T}_-} \left| f(x) \int_0^{s_+(x)} (\sigma(x + s\boldsymbol{\omega}) - \sigma_{\mathcal{T}}) ds \right|^2 |\langle \mathbf{n}(x), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(x) \right)^{1/2} + \\
& \quad + \left(\int_{\partial\mathcal{T}_-} \left(\int_0^{s_+(x)} |F(x + s\boldsymbol{\omega}) \times \right. \right. \\
& \quad \times \left. \int_s^{s_+(x)} (\sigma(x + t\boldsymbol{\omega}) - \sigma_{\mathcal{T}}) dt \right|^2 ds \Big)^2 |\langle \mathbf{n}(x), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(x) \Big)^{1/2} \leq \\
& \leq \left(\int_{\partial\mathcal{T}_-} |f(x)|^2 \varepsilon^2 s_+^2(x) |\langle \mathbf{n}(x), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(x) \right)^{1/2} + \\
& + \left(\int_{\partial\mathcal{T}_-} \left(\int_0^{s_+(x)} |F(x + s\boldsymbol{\omega})|^2 ds \right) \varepsilon^2 s_+^3(x) |\langle \mathbf{n}(x), \boldsymbol{\omega} \rangle| d\mu(x) \right)^{1/2} \leq \\
& \leq \varepsilon \operatorname{diam}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathcal{T}) (\|f\|_{L_2(\partial\mathcal{T}_-, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)} + \operatorname{diam}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathcal{T})^{1/2} \|F\|_{L_2(\mathcal{T})}).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

В построении и анализе численного метода CPP мы будем пользоваться оценкой (1.8), предполагая, что в каждой достаточно маленькой ячейке сетки \mathcal{T} коэффициент поглощения σ заменен достаточно близкой (в смысле $L_{\infty}(\mathcal{T})$) постоянной функцией $\sigma_{\mathcal{T}}$. Из оценки (1.8) следует, что для нормы разности $\mathbb{T}_{\sigma} - \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}$ разрешающих операторов задач (1.1) и (1.7) выполнена оценка

$$\|\mathbb{T}_{\sigma} - \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}\| \leq \operatorname{diam}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathcal{T}) (1 + \operatorname{diam}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathcal{T}))^{1/2} \|\sigma - \sigma_{\mathcal{T}}\|_{L_{\infty}(\mathcal{T})}.$$

Если дополнительно предполагать непрерывную дифференцируемость функции σ : $\sigma \in C^1(\bar{\mathcal{T}})$, то, беря в качестве $\sigma_{\mathcal{T}}$ значение σ в произвольной точке из \mathcal{T} , в силу теоремы Лагранжа получаем оценки

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma_{\mathcal{T}}\|_{L_\infty(\mathcal{T})} &\leq \text{diam}(\mathcal{T}) \sup_{\mathcal{T}} |\mathbf{grad}\sigma| = \text{diam}(\mathcal{T}) \|\mathbf{grad}\sigma\|_{L_\infty(\mathcal{T})}, \\ \|\mathbb{T}_\sigma - \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}\| &\leq \text{diam}(\mathcal{T})^2 (1 + \text{diam}_\omega(\mathcal{T}))^{1/2} \|\mathbf{grad}\sigma\|_{L_\infty(\mathcal{T})}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В случае постоянной функции $\sigma_{\mathcal{T}}$ формула (1.2) для решения $\varphi_{\mathcal{T}}$ задачи (1.7) упрощается:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{T}}(x + s\omega) &= \\ &= \exp(-s\sigma_{\mathcal{T}}) f(x) + \int_0^s F(x + t\omega) \exp((t-s)\sigma_{\mathcal{T}}) dt. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Аналогично s_+ рассмотрим функцию $s_- \in L_\infty(\partial\mathcal{T}_+)$, для которой $s_-(y) > 0$, $y - s_-(y)\omega \in \partial\mathcal{T}_-$ для почти всех $y \in \partial\mathcal{T}_+$. Тогда, делая замену $x = y - s_-(y)\omega$, из (1.10) получаем

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{T}}(y) &= \exp(-s_-(y)\sigma_{\mathcal{T}}) f(y - s_-(y)\omega) + \\ &+ \int_0^{s_-(y)} F(y - s\omega) \exp(-s\sigma_{\mathcal{T}}) ds. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Постановка задачи

Рассмотрим ограниченную необязательно выпуклую пространственную область Ω . Будем считать, что Ω триангулирована конечным семейством ячеек-тетраэдров $\mathfrak{T} = \{\mathcal{T}\}$. Это означает, что замыкание $\bar{\Omega}$ совпадает с объединением $\cup\{\bar{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \in \mathfrak{T}\}$ замыканий ячеек. Элементы \mathfrak{T} суть дизъюнктивные открытые тетраэдры, для которых пересечение $\bar{\mathcal{T}} \cap \bar{\mathcal{T}}'$ любых двух замыканий есть либо пустое множество, либо их общая вершина, либо общее ребро, либо общая грань. Будем считать выполненным следующее условие регулярности для триангуляции \mathfrak{T} :

$$\max_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}} (\text{diam}(\mathcal{T}) / \text{insc}(\mathcal{T})) \leq r, \quad (2.1)$$

где $\text{diam}(\mathcal{T})$ – длина наибольшего ребра \mathcal{T} , а $\text{insc}(\mathcal{T})$ – диаметр вписанного шара. Число $r > 1$ называется параметром регулярности триангуляции \mathfrak{T} . А величину $h = \max_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}} \text{diam}(\mathcal{T})$ назовем мелкостью \mathfrak{T} . Неформальная суть условия (2.1) состоит в том, что при измельчении сетки (уменьшении h) мы следим за тем, чтобы ячейки не слишком сильно вытягивались. Заметим, что

$$\text{diam}_\omega(\mathcal{T}) \leq \text{diam}(\mathcal{T}) \leq r \text{diam}_\omega(\mathcal{T}).$$

Рассмотрим направление $|\omega| = 1$ и функции $\sigma_{\text{ex}} \in L_\infty(\Omega)$, $F_{\text{ex}} \in L_2(\Omega)$, $f_{\text{ex}} \in L_2(\partial\Omega_-, |\langle \mathbf{n}, \omega \rangle|)$, имеющие аналогичный физический смысл, что и в предыдущем пункте. Индекс ex – сокращение от exact (точный). Рассмотрим краевую задачу переноса

$$\begin{cases} \langle \mathbf{grad} \varphi_{\text{ex}}, \boldsymbol{\omega} \rangle + \sigma_{\text{ex}} \varphi_{\text{ex}} = F_{\text{ex}}, \\ \varphi_{\text{ex}}|_{\partial\Omega_-} = f_{\text{ex}}. \end{cases} \quad (2.2)$$

В качестве априорного предположения будем считать, что решение $\varphi_{\text{ex}} \in H(\Omega, \langle \mathbf{grad}, \boldsymbol{\omega} \rangle)$ задачи (2.2) обладает достаточной гладкостью внутри каждой ячейки: $\varphi_{\text{ex}}|_{\mathcal{T}} \in H^s(\mathcal{T})$, где $H^s(\mathcal{T})$ — пространство Соболева на \mathcal{T} гладкости s . Будут рассмотрены случаи различных показателей гладкости s . Краткому обзору пространств Соболева посвящен один из следующих разделов, поэтому здесь разъяснения опустим.

Ввиду оценки (1.9) при дополнительном предположении относительно коэффициента поглощения σ_{ex} : $\sigma_{\text{ex}}|_{\mathcal{T}} \in C^1(\bar{\mathcal{T}})$, размеры ячеек сетки \mathfrak{T} также обусловлены малостью величины:

$$\max_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}} (\text{diam}^2(\mathcal{T}) \|\mathbf{grad} \sigma_{\text{ex}}|_{\mathcal{T}}\|_{L_\infty(\mathcal{T})}).$$

Будем считать известными достаточно хорошие приближения σ, F, f для $\sigma_{\text{ex}}, F_{\text{ex}}, f_{\text{ex}}$ соответственно:

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma_{\text{ex}}\|_{L_\infty(\Omega)} &< \varepsilon_\sigma, \quad \|F - F_{\text{ex}}\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon_F, \\ \|f - f_{\text{ex}}\|_{L_2(\partial\Omega_-, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)} &< \varepsilon_f, \end{aligned} \quad (2.3)$$

для которых во всякой ячейке $\mathcal{T} \subset \Omega$ и грани $\mathcal{F} \subset \partial\Omega_-$ выполняется

$$\sigma_{\mathcal{T}} = \sigma|_{\mathcal{T}} \in \mathcal{P}_0(\mathcal{T}), \quad F_{\mathcal{T}} = F|_{\mathcal{T}} \in \mathcal{P}_2(\mathcal{T}), \quad f_{\mathcal{F}} = f|_{\mathcal{F}} \in \mathcal{P}_3(\mathcal{F}). \quad (2.4)$$

Здесь $\mathcal{P}_0(\mathcal{T})$ – постоянные функции в \mathcal{T} , $\mathcal{P}_2(\mathcal{T})$ – полиномиальные функции степени не выше второй в \mathcal{T} , и $\mathcal{P}_3(\mathcal{F})$ – полиномиальные функции степени не выше третьей в \mathcal{F} . В общем, \mathcal{P}_d обозначает пространство полиномиальных функций степени не выше d на соответствующей области.

Целью работы являются построение приближенного решения φ задачи (2.2) на гранях \mathcal{F} сетки \mathfrak{T} , для которого $\varphi_{\mathcal{F}} \in \mathcal{P}_3(\mathcal{F})$, а также последующая оценка отклонения φ от φ_{ex} с учетом (2.3), (2.4). Развиваемый нами метод носит сокращенное название СРР и является идейным продолжением одномерного метода третьего порядка, описанного в работе [12], а также трехмерного метода первого порядка, описанного в работе [20].

Суть метода СРР заключается в следующем. Начиная с освещенной границы $\partial\Omega_-$ последовательно рассматриваются разрешимые ячейки. Ячейка \mathcal{T} считается разрешимой, если на данной стадии алгоритма на ее освещенной границе $\partial\mathcal{T}_-$, состоящей из одной, двух или трех граней $\mathcal{F} \subset \partial\mathcal{T}_-$, уже известны сеточные данные $\varphi_{\mathcal{F}} \in \mathcal{P}_3(\mathcal{F})$. На начальной стадии эти данные известны только на гранях $\mathcal{F} \subset \partial\Omega_-$: для них $\varphi_{\mathcal{F}} = f_{\mathcal{F}}$. В разрешимой ячейке \mathcal{T} оператор $\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}$, дающий решение задачи переноса (1.7), применяется к граничному условию $\varphi_{\mathcal{F}}$, $\mathcal{F} \subset \partial\mathcal{T}_-$ и к источнику $F_{\mathcal{T}} \in \mathcal{P}_2(\mathcal{T})$. В результате получается функция из $L_2(\partial\mathcal{T}_+, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)$,

определенная на неосвещенной границе \mathcal{T} . Для каждой неосвещенной грани $\mathcal{F} \subset \partial\mathcal{T}_+$ ограничение полученной функции на \mathcal{F} ортогонально проектируется на подпространство $\mathcal{P}_3(\mathcal{F}) \subset L_2(\mathcal{F})$. Результат этой проекции как раз и принимается в качестве приближенного решения $\varphi_{\mathcal{F}} \in \mathcal{P}_3(\mathcal{F})$, $\mathcal{F} \subset \partial\mathcal{T}_+$. Полученные сеточные данные порождают новые разрешимые ячейки. Алгоритм заканчивает работу, когда последовательно будут разрешены все ячейки $\mathcal{T} \subset \Omega$.

3. Обозначения, сеточные величины и полиномиальные базисы

Зафиксируем обозначение \mathcal{T} для произвольной ячейки сетки, а $\hat{\mathcal{T}}$ — для эталонного правильного тетраэдра единичного объема. Аналогично, \mathcal{F} — для произвольной грани сетки, а $\hat{\mathcal{F}}$ — для эталонного правильного треугольника единичной площади.

Барицентрические координаты

Будем обозначать через $\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_3$ вершины $\hat{\mathcal{T}}$, а через $\hat{\mathcal{F}}_0, \dots, \hat{\mathcal{F}}_3$ — противоположащие им грани. Соответствующие барицентрические координаты в $\hat{\mathcal{T}}$ обозначим $\hat{\lambda}_0, \dots, \hat{\lambda}_3$. Через $\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_2$ обозначим вершины $\hat{\mathcal{F}}$, а через $\hat{\eta}_0, \dots, \hat{\eta}_2$ — соответствующие барицентрические координаты в $\hat{\mathcal{F}}$. Напомним, что барицентрические координаты являются полиномиальными функциями первой степени и задаются соотношениями

$$\hat{\lambda}_k(\hat{x}_{k'}) = \delta_{k,k'}, \quad k, k' = 0, \dots, 3; \quad \hat{\eta}_l(\hat{y}_{l'}) = \delta_{l,l'}, \quad l, l' = 0, \dots, 2.$$

Заметим, что $\hat{\lambda}_0, \dots, \hat{\lambda}_3$ — базис в $\mathcal{P}_1(\hat{\mathcal{T}})$, а $\hat{\eta}_0, \dots, \hat{\eta}_2$ — базис в $\mathcal{P}_1(\hat{\mathcal{F}})$. Для всяких точек $\hat{x} \in \hat{\mathcal{T}}$, $\hat{y} \in \hat{\mathcal{F}}$ выполнено

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \hat{\lambda}_0(\hat{x})\hat{x}_0 + \dots + \hat{\lambda}_3(\hat{x})\hat{x}_3, & \hat{y} &= \hat{\eta}_0(\hat{y})\hat{y}_0 + \dots + \hat{\eta}_2(\hat{y})\hat{y}_2, \\ 1 &= \hat{\lambda}_0(\hat{x}) + \dots + \hat{\lambda}_3(\hat{x}), & 1 &= \hat{\eta}_0(\hat{y}) + \dots + \hat{\eta}_2(\hat{y}). \end{aligned}$$

Для каждой ячейки \mathcal{T} и грани \mathcal{F} можно рассмотреть аффинные биекции $\Phi_{\mathcal{T}}: \hat{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{T}$, $\Psi_{\mathcal{F}}: \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}$, которые помимо всего прочего задают нумерацию вершин. В дальнейшем, из соображений удобства построения схемы, мы будем предполагать ту или иную нумерацию вершин в рассматриваемых ячейках и гранях. В силу свойства аффинной инвариантности барицентрических координат: функции

$$\begin{aligned} \lambda_k &= (\Phi_{\mathcal{T}}^{-1})^\circ(\hat{\lambda}_k) = \hat{\lambda}_k \circ \Phi_{\mathcal{T}}^{-1}, \quad k = 0, \dots, 3; \\ \eta_l &= (\Psi_{\mathcal{F}}^{-1})^\circ(\hat{\eta}_l) = \hat{\eta}_l \circ \Psi_{\mathcal{F}}^{-1}, \quad l = 0, \dots, 2 \end{aligned}$$

являются барицентрическими координатами в \mathcal{T} и \mathcal{F} соответственно. Они, в свою очередь, составляют базис в пространствах $\mathcal{P}_1(\mathcal{T})$ и $\mathcal{P}_1(\mathcal{F})$, и для них также выполнено

$$\begin{aligned} x &= \lambda_0(x)x_0 + \dots + \lambda_3(x)x_3, & y &= \eta_0(y)y_0 + \dots + \eta_2(y)y_2, \\ 1 &= \lambda_0(x) + \dots + \lambda_3(x), & 1 &= \eta_0(y) + \dots + \eta_2(y), \end{aligned}$$

при $x \in \mathcal{T}$, $y \in \mathcal{F}$.

Для ячейки \mathcal{T} через x_0, \dots, x_3 будем обозначать образы $\Phi_{\mathcal{T}}(\hat{x}_0), \dots, \Phi_{\mathcal{T}}(\hat{x}_3)$ — ее вершины, а через $\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_3$ — образы $\Phi_{\mathcal{T}}(\hat{\mathcal{F}}_0), \dots, \Phi_{\mathcal{T}}(\hat{\mathcal{F}}_3)$ — ее грани. Для соответствующих единичных внешних нормалей будем использовать обозначение $\mathbf{n}_0, \dots, \mathbf{n}_3$. Пусть h_0, \dots, h_3 — длины соответствующих высот в тетраэдре \mathcal{T} . Выпишем уравнения $\langle \mathbf{n}_k, \mathbf{x} \rangle = m_k$ плоскостей, содержащих грани \mathcal{F}_k , $k = 0, \dots, 3$. Тогда можно выписать явные выражения для барицентрических координат как функций точки $x \in \mathcal{T}$:

$$\lambda_k(x) = -h_k^{-1}(\langle \mathbf{n}_k, \mathbf{x} \rangle - m_k). \quad (3.1)$$

Жирным шрифтом \mathbf{x} обозначается радиус-вектор, направленный из фиксированного начала координат в точку x .

Мономиальные базисы

В методе СРР нас интересуют пространства $\mathcal{P}_2(\hat{\mathcal{T}})$, $\mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}})$. Заметим, что $(\Phi_{\mathcal{T}})^\circ: \mathcal{P}_2(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\hat{\mathcal{T}})$, $(\Psi_{\mathcal{F}})^\circ: \mathcal{P}_3(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}})$ — линейные изоморфизмы. Размерности пространств $\mathcal{P}_2(\hat{\mathcal{T}})$ и $\mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}})$ равны десяти. Для работы в них зафиксируем по два базиса в каждом.

Начнем с мономиального базиса $\hat{m}_0, \dots, \hat{m}_9$ в $\mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}})$. По определению будем считать, что $\hat{m}_{3i+j} = \hat{\eta}_i^2 \hat{\eta}_j$, $i, j = 0, \dots, 2$ и $\hat{m}_9 = \hat{\eta}_0 \hat{\eta}_1 \hat{\eta}_2$. Результат удобно записать в виде таблицы

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \hat{m}_0 & \hat{m}_1 & \hat{m}_2 \\ \hline \hat{m}_3 & \hat{m}_4 & \hat{m}_5 \\ \hline \hat{m}_6 & \hat{m}_7 & \hat{m}_8 \\ \hline \end{array} \quad \boxed{\hat{m}_9} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \hat{\eta}_0^3 & \hat{\eta}_0^2 \hat{\eta}_1 & \hat{\eta}_0^2 \hat{\eta}_2 \\ \hline \hat{\eta}_1^2 \hat{\eta}_0 & \hat{\eta}_1^3 & \hat{\eta}_1^2 \hat{\eta}_2 \\ \hline \hat{\eta}_2^2 \hat{\eta}_0 & \hat{\eta}_2^2 \hat{\eta}_1 & \hat{\eta}_2^3 \\ \hline \end{array} \quad \boxed{\hat{\eta}_0 \hat{\eta}_1 \hat{\eta}_2}. \quad (3.2)$$

Мономиальный базис $\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_9$ в $\mathcal{P}_2(\hat{\mathcal{T}})$ определим так: $\hat{u}_{4i+j-i(i+1)/2} = \hat{\lambda}_i \hat{\lambda}_j$, $i, j = 0, \dots, 3$, $i \leq j$. В табличном виде получим

$$\begin{array}{|cccc|} \hline \hat{u}_0 & \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \\ & \hat{u}_4 & \hat{u}_5 & \hat{u}_6 \\ & & \hat{u}_7 & \hat{u}_8 \\ & & & \hat{u}_9 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cccc|} \hline \hat{\lambda}_0^2 & \hat{\lambda}_0\hat{\lambda}_1 & \hat{\lambda}_0\hat{\lambda}_2 & \hat{\lambda}_0\hat{\lambda}_3 \\ & \hat{\lambda}_1^2 & \hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2 & \hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_3 \\ & & \hat{\lambda}_2^2 & \hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_3 \\ & & & \hat{\lambda}_3^2 \\ \hline \end{array}. \quad (3.3)$$

Мономиальными базисами в $\mathcal{P}_3(\mathcal{F})$ и $\mathcal{P}_2(\mathcal{T})$ будем считать $m_k = (\Psi_{\mathcal{F}}^{-1})^\circ(\hat{m}_k) = \hat{m}_k \circ \Psi_{\mathcal{F}}^{-1}$, и $u_k = (\Phi_{\mathcal{T}}^{-1})^\circ(\hat{u}_k) = \hat{u}_k \circ \Phi_{\mathcal{T}}^{-1}$, $k = 0, \dots, 9$ соответственно.

Сеточные величины

По разным причинам для хранения многочленов из $\mathcal{P}_2(\mathcal{T})$ или $\mathcal{P}_3(\mathcal{F})$ в памяти компьютера удобнее пользоваться не их коэффициентами разложения по мономиальному базису, а сеточными величинами. Дадим определение сеточных величин. Зафиксируем специальный базис $\hat{\xi}_0, \dots, \hat{\xi}_9$ в пространстве линейных функционалов $\mathcal{P}_3^*(\hat{\mathcal{F}})$, называемый в дальнейшем базисом сеточных величин в $\hat{\mathcal{F}}$. Определим $\hat{\xi}_{3i+i} = \text{Ev}_{\hat{y}_i}$, $i = 0, \dots, 2$ – функционалы вычисления значений

$$\hat{\xi}_{3i+i}(\hat{p}) = \text{Ev}_{\hat{y}_i}(\hat{p}) = \hat{p}(\hat{y}_i)$$

в вершинах \hat{y}_i . Здесь $\hat{p} \in \mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}})$ – многочлен. Далее определим $\hat{\xi}_{3i+j} = \text{Dr}_{\hat{y}_i \rightarrow \hat{y}_j}$, где $i, j = 0, \dots, 2$, $i \neq j$ – функционалы вычисления производных

$$\hat{\xi}_{3i+j}(\hat{p}) = \text{Dr}_{\hat{y}_i \rightarrow \hat{y}_j}(\hat{p}) = \langle \mathbf{grad} \hat{p}(\hat{y}_i), \hat{y}_j - \hat{y}_i \rangle$$

в вершинах \hat{y}_i по реберным направлениям из \hat{y}_i в \hat{y}_j . И, наконец, определим $\hat{\xi}_9 = \text{Av}$ – интегральный функционал вычисления среднего значения

$$\hat{\xi}_9(\hat{p}) = \text{Av}(\hat{p}) = \int_{\hat{\mathcal{F}}} \hat{p} d\mu$$

по треугольнику $\hat{\mathcal{F}}$. Напомним, что $\mu(\hat{\mathcal{F}}) = 1$. В табличном виде:

$$\begin{array}{|ccc|} \hline \hat{\xi}_0 & \hat{\xi}_1 & \hat{\xi}_2 \\ \hat{\xi}_3 & \hat{\xi}_4 & \hat{\xi}_5 \\ \hat{\xi}_6 & \hat{\xi}_7 & \hat{\xi}_8 \\ \hline \end{array} \boxed{\hat{\xi}_9} = \begin{array}{|ccc|} \hline \text{Ev}_{\hat{y}_0} & \text{Dr}_{\hat{y}_0 \rightarrow \hat{y}_1} & \text{Dr}_{\hat{y}_0 \rightarrow \hat{y}_2} \\ \text{Dr}_{\hat{y}_1 \rightarrow \hat{y}_0} & \text{Ev}_{\hat{y}_1} & \text{Dr}_{\hat{y}_1 \rightarrow \hat{y}_2} \\ \text{Dr}_{\hat{y}_2 \rightarrow \hat{y}_0} & \text{Dr}_{\hat{y}_2 \rightarrow \hat{y}_1} & \text{Ev}_{\hat{y}_2} \\ \hline \end{array} \boxed{\text{Av}}. \quad (3.4)$$

Набор сеточных величин $\hat{\theta}_0, \dots, \hat{\theta}_9 \in \mathcal{P}_2^*(\hat{\mathcal{T}})$ в $\hat{\mathcal{T}}$ построим из следующих функционалов. Во-первых, из узловых значений $\hat{\theta}_{4i+i-i(i+1)/2} = \text{Ev}_{\hat{x}_i}$, $i = 0, \dots, 3$,

$$\hat{\theta}_{4i+i-i(i+1)/2}(\hat{q}) = \text{Ev}_{\hat{x}_i}(\hat{q}) = \hat{q}(\hat{x}_i).$$

Здесь $\hat{q} \in \mathcal{P}_2(\hat{\mathcal{T}})$ – многочлен. Во-вторых, из реберных средних $\hat{\theta}_{4i+j-i(i+1)/2} = \text{Av}_{\hat{x}_i, \hat{x}_j}$, где $i, j = 0, \dots, 3$, $i < j$,

$$\hat{\theta}_{4i+j-i(i+1)/2}(\hat{q}) = \text{Av}_{\hat{x}_i, \hat{x}_j}(\hat{q}) = l_{\hat{x}_i, \hat{x}_j}^{-1} \int_{\hat{x}_i, \hat{x}_j} \hat{q} d\mu.$$

Здесь $l_{\hat{x}_i, \hat{x}_j}$ – расстояние между \hat{x}_i и \hat{x}_j . В табличном виде имеем

$$\begin{array}{|cccc|} \hline \hat{\theta}_0 & \hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_2 & \hat{\theta}_3 \\ & \hat{\theta}_4 & \hat{\theta}_5 & \hat{\theta}_6 \\ & & \hat{\theta}_7 & \hat{\theta}_8 \\ & & & \hat{\theta}_9 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cccc|} \hline \text{Ev}_{\hat{x}_0} & \text{Av}_{\hat{x}_0, \hat{x}_1} & \text{Av}_{\hat{x}_0, \hat{x}_2} & \text{Av}_{\hat{x}_0, \hat{x}_3} \\ & \text{Ev}_{\hat{x}_1} & \text{Av}_{\hat{x}_1, \hat{x}_2} & \text{Av}_{\hat{x}_1, \hat{x}_3} \\ & & \text{Ev}_{\hat{x}_2} & \text{Av}_{\hat{x}_2, \hat{x}_3} \\ & & & \text{Ev}_{\hat{x}_3} \\ \hline \end{array}. \quad (3.5)$$

В качестве замечания скажем, что выбор сеточных величин достаточно условен: можно было бы взять в качестве них любые базисы в пространствах $\mathcal{P}_3^*(\hat{\mathcal{F}})$ и $\mathcal{P}_2^*(\hat{\mathcal{T}})$, и это бы не сильно сказалось на дальнейшей логике. Выбор сеточных величин (3.4) отдает дань классической интерполяции Эрмита. Также для введенных сеточных величин (3.4) и (3.5) имеет место «инвариантность» при аффинных преобразованиях, о чем пойдет речь ниже.

Сеточными величинами в \mathcal{F} и \mathcal{T} соответственно назовем линейные функционалы $\xi_k = \hat{\xi}_k \circ (\Psi_{\mathcal{F}})^\circ = (\Psi_{\mathcal{F}})^\circ * \hat{\xi}_k \in \mathcal{P}_3^*(\mathcal{F})$, $\theta_k = \hat{\theta}_k \circ (\Phi_{\mathcal{T}})^\circ = (\Phi_{\mathcal{T}})^\circ * \hat{\theta}_k \in \mathcal{P}_2^*(\mathcal{T})$, для $k = 0, \dots, 9$. Заметим, что для $q \in \mathcal{P}_2(\mathcal{T})$ в силу известных правил замены переменных выполнены равенства

$$\begin{aligned} ((\Phi_{\mathcal{T}})^\circ * \text{Ev}_{\hat{x}_i})(q) &= \text{Ev}_{\hat{x}_i}(q \circ \Phi_{\mathcal{T}}) = q(\Phi_{\mathcal{T}}(\hat{x}_i)) = q(x_i), \\ ((\Phi_{\mathcal{T}})^\circ * \text{Av}_{\hat{x}_i, \hat{x}_j})(q) &= \text{Av}_{\hat{x}_i, \hat{x}_j}(q \circ \Phi_{\mathcal{T}}) = l_{\hat{x}_i, \hat{x}_j}^{-1} \int_{\hat{x}_i, \hat{x}_j} (q \circ \Phi_{\mathcal{T}}) d\mu = \\ &= l_{x_i, x_j}^{-1} \int_{x_i, x_j} q d\mu, \end{aligned}$$

Ими объясняется сказанное об «инвариантности» сеточных величин при аффинных преобразованиях. Аналогично для $p \in \mathcal{P}_3(\mathcal{F})$ выполнено

$$((\Psi_{\mathcal{F}})^\circ * \text{Ev}_{\hat{y}_i})(p) = \text{Ev}_{\hat{y}_i}(p \circ \Psi_{\mathcal{F}}) = p(\Psi_{\mathcal{F}}(\hat{y}_i)) = p(y_i),$$

$$\begin{aligned}
((\Psi_{\mathcal{F}})^{\circ*} \text{Dr}_{\hat{y}_i \rightarrow \hat{y}_i})(p) &= \text{Dr}_{\hat{y}_i \rightarrow \hat{y}_i}(p \circ \Psi_{\mathcal{F}}) = \\
&= \langle \mathbf{grad}(p \circ \Psi_{\mathcal{F}})(\hat{y}_i), \hat{y}_j - \hat{y}_i \rangle = \langle \mathbf{grad} p(y_i), y_j - y_i \rangle, \\
((\Psi_{\mathcal{F}})^{\circ*} \text{Av})(p) &= \text{Av}(p \circ \Psi_{\mathcal{F}}) = \int_{\hat{\mathcal{F}}} (p \circ \Psi_{\mathcal{F}}) d\mu = \mu(\mathcal{F})^{-1} \int_{\mathcal{F}} p d\mu.
\end{aligned}$$

Биортогональные базисы

Определим теперь биортогональный базис $\hat{p}_0, \dots, \hat{p}_9$ в $\mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}})$ соотношениями

$$\hat{\xi}_k(\hat{p}_{k'}) = \delta_{k,k'}, \quad k, k' = 0, \dots, 9.$$

Для всякого $\hat{p} \in \mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}})$ выполнено $\hat{p} = \hat{\xi}_0(\hat{p})\hat{p}_0 + \dots + \hat{\xi}_9(\hat{p})\hat{p}_9$.

Аналогичным образом определим биортогональный базис $\hat{q}_0, \dots, \hat{q}_9$ в $\mathcal{P}_2(\hat{\mathcal{T}})$ соотношениями

$$\hat{\theta}_k(\hat{q}_{k'}) = \delta_{k,k'}, \quad k, k' = 0, \dots, 9.$$

Для $\hat{q} \in \mathcal{P}_2(\hat{\mathcal{T}})$ выполнено $\hat{q} = \hat{\theta}_0(\hat{q})\hat{q}_0 + \dots + \hat{\theta}_{19}(\hat{q})\hat{q}_{19}$.

Биортогональными базисами в $\mathcal{P}_3(\mathcal{F})$ и $\mathcal{P}_2(\mathcal{T})$ будем считать по определению $p_k = (\Psi_{\mathcal{F}}^{-1})^{\circ}(\hat{p}_k)$, и $q_k = (\Phi_{\mathcal{T}}^{-1})^{\circ}(\hat{q}_k)$, $k = 0, \dots, 9$ соответственно. Для них также выполнено

$$\xi_k(p_{k'}) = \delta_{k,k'}, \quad \theta_k(q_{k'}) = \delta_{k,k'}, \quad k, k' = 0, \dots, 9,$$

что позволяет выписать тождества для всех $p \in \mathcal{P}_3(\mathcal{F})$ и $q \in \mathcal{P}_2(\mathcal{T})$:

$$\begin{aligned}
p &= \xi_0(p)p_0 + \dots + \xi_9(p)p_9 = \\
&= \hat{\xi}_0(p \circ \Psi_{\mathcal{F}})(\hat{p}_0 \circ \Psi_{\mathcal{F}}^{-1}) + \dots + \hat{\xi}_9(p \circ \Psi_{\mathcal{F}})(\hat{p}_9 \circ \Psi_{\mathcal{F}}^{-1}),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
q &= \theta_0(q)q_0 + \dots + \theta_9(q)q_9 = \\
&= \hat{\theta}_0(q \circ \Phi_{\mathcal{T}})(\hat{q}_0 \circ \Phi_{\mathcal{T}}^{-1}) + \dots + \hat{\theta}_9(q \circ \Phi_{\mathcal{T}})(\hat{q}_9 \circ \Phi_{\mathcal{T}}^{-1}).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Правые части равенств (3.6) и (3.7) можно рассматривать как определение линейных операторов на $\mathcal{P}_3(\mathcal{F})$ и $\mathcal{P}_2(\mathcal{T})$ соответственно. Эти операторы имеют естественные линейные непрерывные продолжения до интерполяционных операторов в пространствах Соболева на \mathcal{F} и \mathcal{T} с достаточно высоким показателем гладкости. Их использование для построения численного метода возможно, однако несет с собой дополнительные трудности. Дело в том, что по ходу вычислений может возникнуть необходимость применения

Матрица $\widehat{\mathbb{G}}^{-1}$ и ортогональные проекторы $\mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\widehat{\mathcal{F}})}$

Во-вторых, приведем обратную к 10×10 матрице Грамма $\widehat{\mathbb{G}}$ для биортогонального базиса $\hat{p}_0, \dots, \hat{p}_9$ в пространстве $\mathcal{P}_3(\widehat{\mathcal{F}})$ относительно скалярного произведения из $L_2(\widehat{\mathcal{F}})$. Имеем

$$(\widehat{\mathbb{G}})_{i,j} = \int_{\widehat{\mathcal{F}}} \hat{p}_i \hat{p}_j d\mu. \quad (4.2)$$

Элементы матрицы $\widehat{\mathbb{G}}$ проще всего вычислить, перейдя в мономиальный базис, и воспользовавшись выкладкой

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{\mathcal{F}}} \hat{\eta}_0^{\alpha_0} \hat{\eta}_1^{\alpha_1} \hat{\eta}_2^{\alpha_2} d\mu &= 2 \int_0^1 \hat{\eta}_0^{\alpha_0} \left(\int_0^{1-\hat{\eta}_0} \hat{\eta}_1^{\alpha_1} (1 - \hat{\eta}_0 - \hat{\eta}_1)^{\alpha_2} d\hat{\eta}_1 \right) d\hat{\eta}_0 = \\ &= 2 \left(\int_0^1 s^{\alpha_0} (1-s)^{\alpha_1+\alpha_2+1} ds \right) \left(\int_0^1 s^{\alpha_1} (1-s)^{\alpha_2} ds \right) = \\ &= 2 \frac{\alpha_0! (\alpha_1 + \alpha_2 + 1)!}{(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 2)!} \frac{\alpha_1! \alpha_2!}{(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)!} = \\ &= \frac{2\alpha_0! \alpha_1! \alpha_2!}{(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 2)!}. \end{aligned}$$

Обращая матрицу $\widehat{\mathbb{G}}$, находим $\widehat{\mathbb{G}}^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 100 & -600 & -600 & 180 & -10 & 0 & 180 & 0 & -10 & 1 \\ -600 & 5400 & 2700 & -2880 & 180 & -180 & -180 & 180 & 0 & 0 \\ -600 & 2700 & 5400 & -180 & 0 & 180 & -2880 & -180 & 180 & 0 \\ 180 & -2880 & -180 & 5400 & -600 & 2700 & 180 & -180 & 0 & 0 \\ -10 & 180 & 0 & -600 & 100 & -600 & 0 & 180 & -10 & 1 \\ 0 & -180 & 180 & 2700 & -600 & 5400 & -180 & -2880 & 180 & 0 \\ 180 & -180 & -2880 & 180 & 0 & -180 & 5400 & 2700 & -600 & 0 \\ 0 & 180 & -180 & -180 & 180 & -2880 & 2700 & 5400 & -600 & 0 \\ -10 & 0 & 180 & 0 & -10 & 180 & -600 & -600 & 100 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обращенная матрица Грамма $\widehat{\mathbb{G}}^{-1}$ нужна для работы с оператором ортогонального проектирования $\mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\widehat{\mathcal{F}})}: L_2(\widehat{\mathcal{F}}) \rightarrow \mathcal{P}_3(\widehat{\mathcal{F}})$. Оператор $\mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\widehat{\mathcal{F}})}$ определяется стандартным образом:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\widehat{\mathcal{F}})} \hat{f} = \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\widehat{\mathcal{F}})}^2 \hat{f} \in \mathcal{P}_3(\widehat{\mathcal{F}}), \quad \hat{f} - \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\widehat{\mathcal{F}})} \hat{f} \perp \mathcal{P}_3(\widehat{\mathcal{F}})$$

для $\hat{f} \in L_2(\widehat{\mathcal{F}})$. Заметим также, что

$$\mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}})}\hat{f} = \sum_{i,j=0}^9 \hat{p}_i(\hat{\mathbb{G}}^{-1})_{i,j} \langle \hat{p}_j, \hat{f} \rangle_{L_2(\hat{\mathcal{F}})}.$$

Аналогично определяется оператор ортогонального проектирования $\mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F})}: L_2(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{P}_3(\mathcal{F})$ для произвольной грани \mathcal{F} . Заметим, что верно равенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} p_i p_j d\mu &= \int_{\mathcal{F}} (\hat{p}_i \circ \Psi_{\mathcal{F}}^{-1})(\hat{p}_j \circ \Psi_{\mathcal{F}}^{-1}) d\mu = \mu(\mathcal{F}) \int_{\hat{\mathcal{F}}} \hat{p}_i \hat{p}_j d\mu = \\ &= \mu(\mathcal{F})(\hat{\mathbb{G}})_{i,j}. \end{aligned}$$

Откуда следует, что для $f \in L_2(\mathcal{F})$ выполнено

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F})}f &= \mu(\mathcal{F})^{-1} \sum_{i,j=0}^9 p_i(\hat{\mathbb{G}}^{-1})_{i,j} \langle p_j, f \rangle_{L_2(\mathcal{F})} = \\ &= \sum_{i,j=0}^9 (\hat{p}_i \circ \Psi_{\mathcal{F}}^{-1})(\hat{\mathbb{G}}^{-1})_{i,j} \langle \hat{p}_j, f \circ \Psi_{\mathcal{F}} \rangle_{L_2(\hat{\mathcal{F}})}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

По-другому можно сказать, что имеет место перестановочность операторов ортогонального проектирования с оператором аффинной замены:

$$(\Psi_{\mathcal{F}})^\circ \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F})} = \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}})} (\Psi_{\mathcal{F}})^\circ.$$

Матрицы $\hat{\mathbb{C}}^l(\mu)$ и $\hat{\mathbb{D}}^k(\nu)$

Теперь предположим, что в треугольнике $\hat{\mathcal{F}}$ зафиксирована точка \hat{y}_* с барицентрическими координатами $(\mu_0, \dots, \mu_2) = (\hat{\eta}_0(\hat{y}_*), \dots, \hat{\eta}_2(\hat{y}_*))$. При этом треугольник $\hat{\mathcal{F}}$ разбивается на три треугольника $\hat{\mathcal{F}}^0, \dots, \hat{\mathcal{F}}^2$ (Рис. 2). Пусть Ψ_0, \dots, Ψ_2 аффинные изоморфизмы $\Psi_l: \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}^l$, $l = 0, \dots, 2$. Считаем, что $\Psi_l(\hat{y}_l) = \hat{y}_*$ и $\Psi_l(\hat{y}_{l'}) = \hat{y}_{l'}$ для $l' \neq l$.

В пространстве полиномиальных функций $\mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}}^l)$ можно рассмотреть два базиса: мономиальный базис $\hat{m}_0 \circ \Psi_l^{-1}, \dots, \hat{m}_9 \circ \Psi_l^{-1}$ в $\hat{\mathcal{F}}^l$ и ограниченный на $\hat{\mathcal{F}}^l$ мономиальный базис $\hat{m}_0|_{\hat{\mathcal{F}}^l}, \dots, \hat{m}_9|_{\hat{\mathcal{F}}^l}$ в $\hat{\mathcal{F}}$.

Обозначим через $\hat{\mathbb{C}}^l(\mu)$, $l = 0, \dots, 2$ (зависящие от барицентрических координат точки \hat{y}_*) 10×10 матрицы перехода

$$(\hat{m}_0|_{\hat{\mathcal{F}}^l}, \dots, \hat{m}_9|_{\hat{\mathcal{F}}^l}) = (\hat{m}_0 \circ \Psi_l^{-1}, \dots, \hat{m}_9 \circ \Psi_l^{-1}) \hat{\mathbb{C}}^l(\mu). \quad (4.4)$$

Заметим, что для барицентрических координат $\hat{\eta}_0, \dots, \hat{\eta}_2$, входящих в мономы $\hat{m}_0, \dots, \hat{m}_9$, выполнено

$$\begin{cases} \hat{\eta}_l|_{\hat{\mathcal{F}}^l} = \mu_l(\hat{\eta}_l \circ \Psi_l^{-1}), \\ \hat{\eta}_{l'}|_{\hat{\mathcal{F}}^l} = (\hat{\eta}_{l'} \circ \Psi_l^{-1}) + \mu_{l'}(\hat{\eta}_l \circ \Psi_l^{-1}), \quad l' \neq l. \end{cases}$$

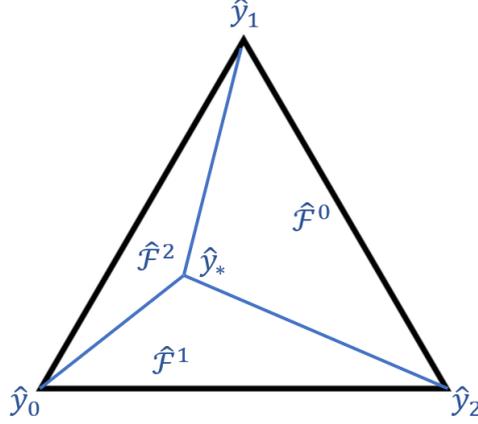


Рис. 2. Разбиение треугольника на три части

Действительно, функции $\hat{\eta}_0 \circ \Psi_l^{-1}, \dots, \hat{\eta}_2 \circ \Psi_l^{-1}$ являются барицентрическими координатами в треугольнике $\hat{\mathcal{F}}^l$. Дальнейшее вытекает из равенств

$$\begin{aligned} & \hat{\eta}_0(\hat{y})\hat{y}_0 + \hat{\eta}_1(\hat{y})\hat{y}_1 + \hat{\eta}_2(\hat{y})\hat{y}_2 = \\ & = (\hat{\eta}_l \circ \Psi_l^{-1})(\hat{y})\hat{y}_* + \sum_{l' \neq l} (\hat{\eta}_{l'} \circ \Psi_l^{-1})(\hat{y})\hat{y}_{l'}, \quad \forall \hat{y} \in \hat{\mathcal{F}}^l; \\ & \hat{y}_* = \mu_0\hat{y}_0 + \mu_1\hat{y}_1 + \mu_2\hat{y}_2. \end{aligned}$$

Поэтому заключаем, что

$$(\hat{\eta}_0^{\alpha_0} \dots \hat{\eta}_2^{\alpha_2})|_{\hat{\mathcal{F}}^l} = \left(\mu_l(\hat{\eta}_l \circ \Psi_l^{-1})\right)^{\alpha_l} \prod_{l' \neq l} \left((\hat{\eta}_{l'} \circ \Psi_l^{-1}) + \mu_{l'}(\hat{\eta}_l \circ \Psi_l^{-1})\right)^{\alpha_{l'}}.$$

После раскрытия скобок находим $\hat{\mathbb{C}}^0(\mu), \hat{\mathbb{C}}^1(\mu), \hat{\mathbb{C}}^2(\mu)$ соответственно:

$$\begin{pmatrix} \mu_0^3 & \mu_0^2\mu_1 & \mu_0^2\mu_2 & \mu_0\mu_1^2 & \mu_1^3 & \mu_1^2\mu_2 & \mu_0\mu_2^2 & \mu_1\mu_2^2 & \mu_2^3 & \mu_0\mu_1\mu_2 \\ 0 & \mu_0^2 & 0 & 2\mu_0\mu_1 & 3\mu_1^2 & 2\mu_1\mu_2 & 0 & \mu_2^2 & 0 & \mu_0\mu_2 \\ 0 & 0 & \mu_0^2 & 0 & 0 & \mu_1^2 & 2\mu_0\mu_2 & 2\mu_1\mu_2 & 3\mu_2^2 & \mu_0\mu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_0 & 3\mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_0 & \mu_1 & 3\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_1 & 0 & 2\mu_2 & 0 & \mu_0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\mu_0^2 & 2\mu_0\mu_1 & 2\mu_0\mu_2 & \mu_1^2 & 0 & 0 & \mu_2^2 & 0 & 0 & \mu_1\mu_2 \\ \mu_0^3 & \mu_0^2\mu_1 & \mu_0^2\mu_2 & \mu_0\mu_1^2 & \mu_1^3 & \mu_1^2\mu_2 & \mu_0\mu_2^2 & \mu_1\mu_2^2 & \mu_2^3 & \mu_0\mu_1\mu_2 \\ 0 & 0 & \mu_0^2 & 0 & 0 & \mu_1^2 & 2\mu_0\mu_2 & 2\mu_1\mu_2 & 3\mu_2^2 & \mu_0\mu_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_0 & \mu_1 & 3\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu_0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_2 & 0 & 0 & \mu_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_0 & 3\mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\mu_0^2 & 2\mu_0\mu_1 & 2\mu_0\mu_2 & \mu_1^2 & 0 & 0 & \mu_2^2 & 0 & 0 & \mu_1\mu_2 \\ 0 & \mu_0^2 & 0 & 2\mu_0\mu_1 & 3\mu_1^2 & 2\mu_1\mu_2 & 0 & \mu_2^2 & 0 & \mu_0\mu_2 \\ \mu_0^3 & \mu_0^2\mu_1 & \mu_0^2\mu_2 & \mu_0\mu_1^2 & \mu_1^3 & \mu_1^2\mu_2 & \mu_0\mu_2^2 & \mu_1\mu_2^2 & \mu_2^3 & \mu_0\mu_1\mu_2 \\ 0 & 2\mu_0 & 0 & 2\mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Обобщая рассуждение на тетраэдры, рассмотрим точку \hat{x}_* в $\hat{\mathcal{T}}$ с барицентрическими координатами $(v_0, \dots, v_3) = (\hat{\lambda}_0(\hat{x}_*), \dots, \hat{\lambda}_3(\hat{x}_*))$, которая разбивает $\hat{\mathcal{T}}$ на четыре тетраэдра $\hat{\mathcal{T}}^0, \dots, \hat{\mathcal{T}}^3$ (Рис. 3). Введем аффинные изоморфизмы $\Phi_k: \hat{\mathcal{T}} \rightarrow \hat{\mathcal{T}}^k$, $k = 0, \dots, 3$, для которых $\Phi_k(\hat{x}_k) = \hat{x}_*$ и $\Phi_k(\hat{x}_{k'}) = \hat{x}_{k'}$ при $k' \neq k$.

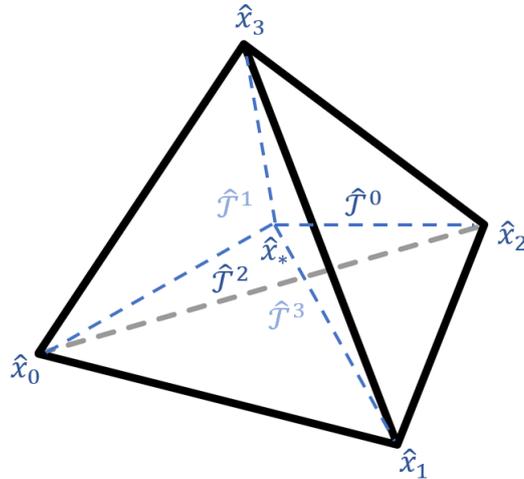


Рис. 3. Разбиение тетраэдра на четыре части

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 & 0 & 2v_1 & v_2 & v_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 & 0 & 0 & v_1 & 0 & 2v_2 & v_3 & 0 \\ v_0^2 & v_0v_1 & v_0v_2 & v_0v_3 & v_1^2 & v_1v_2 & v_1v_3 & v_2^2 & v_2v_3 & v_3^2 \end{pmatrix}.$$

Специальные функции ${}_1F_1^{reg}$ и ${}_2F_2^{reg}$

Введем в рассмотрение два вида специальных функций. Для $a, b \in \mathbb{Z}_+$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}_+$ и $z \in \mathbb{C}$ положим

$${}_1F_1^{reg} \left(\begin{matrix} 1+a \\ 1+b \end{matrix}; z \right) = \frac{1}{a!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+n)!}{(b+n)! n!} z^n, \quad (4.6)$$

$${}_2F_2^{reg} \left(\begin{matrix} 1+a_1, 1+a_2 \\ 1+b_1, 1+b_2 \end{matrix}; z \right) = \frac{1}{a_1! a_2!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1+n)! (a_2+n)!}{(b_1+n)! (b_2+n)! n!} z^n. \quad (4.7)$$

Как видно, например, из формулы Стирлинга, относительно $z \in \mathbb{C}$ введенные функции являются целыми аналитическими. Это частный случай обобщенных гипергеометрических функций. При малых $|z|$ можно вычислять значения (4.6) и (4.7) с помощью частичных сумм рядов Тейлора.

Функции ${}_1F_1^{reg}$ и ${}_2F_2^{reg}$ возникают в связи с необходимостью находить следующие интегралы:

$$\int_0^1 \frac{x^a (1-x)^b}{a! b!} e^{zx} dx = {}_1F_1^{reg} \left(\begin{matrix} 1+a \\ 2+a+b \end{matrix}; z \right), \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{a_1} (1-x)^{b_1}}{a_1! b_1!} \left(\int_0^1 \frac{y^{a_2} (1-y)^{b_2}}{a_2! b_2!} e^{zxy} dy \right) dx = \\ = {}_2F_2^{reg} \left(\begin{matrix} 1+a_1, 1+a_2 \\ 2+a_1+b_1, 2+a_2+b_2 \end{matrix}; z \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Формулы (4.8) и (4.9) могут быть проверены интегрированием разложения экспоненты в степенной ряд. Другой способ вычисления интегралов в левых частях (4.8) и (4.9) состоит в последовательном применении интегрирования по

частям, в результате чего будет получаться многочлен относительно z^{-1} и e^z . Такой способ подходит для вычислений с большими $|z|$. Например, для (4.8)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^a(1-x)^b}{a!b!} e^{zx} dx &= \left(\sum_{k=0}^{a+b} (-1)^k \left(\frac{x^a(1-x)^b}{a!b!} \right)^{(k)} \frac{e^{zx}}{z^{k+1}} \right)_{x=0}^{x=1} = \\ &= e^z \sum_{k=0}^{a+b} \frac{(-1)^k}{z^{k+1}} \left(\frac{x^a(1-x)^b}{a!b!} \right)_{x=1}^{(k)} - \sum_{k=0}^{a+b} \frac{(-1)^k}{z^{k+1}} \left(\frac{x^a(1-x)^b}{a!b!} \right)_{x=0}^{(k)} = \\ &= e^z \sum_{k=b}^{a+b} \frac{(-1)^{k+b} k!}{b!(a+b-k)!(k-b)!} z^{-k-1} - \\ &\quad - \sum_{k=a}^{a+b} \frac{(-1)^a k!}{a!(a+b-k)!(k-a)!} z^{-k-1}. \end{aligned}$$

При условии $a_1 > a_2 + b_2$ (а в наших случаях будет именно так) аналогично может быть выражен двойной интеграл (4.9):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{a_1}(1-x)^{b_1}}{a_1!b_1!} \left(\int_0^1 \frac{y^{a_2}(1-y)^{b_2}}{a_2!b_2!} e^{zxy} dy \right) dx = \\ = \sum_{k=b_2}^{a_2+b_2} \frac{(-1)^{k+b_2} k! z^{-k-1}}{b_2!(a_2+b_2-k)!(k-b_2)!} \int_0^1 \frac{x^{a_1-k-1}(1-x)^{b_1}}{a_1!b_1!} e^{zx} dx - \\ - \sum_{k=a_2}^{a_2+b_2} \frac{(-1)^{a_2} k! z^{-k-1}}{a_2!(a_2+b_2-k)!(k-a_2)!} \int_0^1 \frac{x^{a_1-k-1}(1-x)^{b_1}}{a_1!b_1!} dx. \end{aligned}$$

Дальнейшие выкладки сводятся к (4.8). В программной реализации выражения упрощаются, и вычисления производятся при помощи схемы Горнера относительно z^{-1} . Экспонента e^z вычисляется один раз при работе с различными a, b и одним и тем же z .

Матрицы $\widehat{\mathbb{V}}^l(t)$

Для $t > 0$, $i, j = 0, \dots, 9$, $l = 0, \dots, 2$ рассмотрим функции

$$\left(\widehat{\mathbb{V}}^l(t) \right)_{i,j} = \int_{\widehat{\mathcal{F}}} \widehat{m}_i \widehat{m}_j e^{-t\widehat{\eta}_l} d\mu. \quad (4.10)$$

Из них составим 10×10 матрицы $\widehat{\mathbb{V}}^l(t)$, $l = 0, \dots, 2$. Матрицы $\widehat{\mathbb{V}}^l(t)$ являются по сути матрицами Грамма мономиального базиса $\widehat{m}_0, \dots, \widehat{m}_9$ в $\mathcal{P}_3(\widehat{\mathcal{F}})$ относительно скалярного произведения из $L_2(\widehat{\mathcal{F}}, e^{-t\widehat{\eta}_l})$ (с весовой функцией $0 < e^{-t\widehat{\eta}_l} < 1$).

Укажем способ нахождения элементов матрицы $\widehat{\mathbb{V}}^l(t)$. Пусть $\widehat{m}_i \widehat{m}_j = \widehat{\eta}_0^{\alpha_0} \dots \widehat{\eta}_2^{\alpha_2}$ с $\alpha_0 + \dots + \alpha_2 = 6$. Пусть l' — отличный от l номер вершины $\widehat{\mathcal{F}}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathbb{V}}^l(t))_{i,j} &= \int_{\widehat{\mathcal{F}}} \widehat{\eta}_0^{\alpha_0} \dots \widehat{\eta}_2^{\alpha_2} e^{-t\widehat{\eta}_l} d\mu = \\ &= 2 \int_0^1 \widehat{\eta}_l^{\alpha_l} e^{-t\widehat{\eta}_l} \left(\int_0^{1-\widehat{\eta}_l} \widehat{\eta}_{l'}^{\alpha_{l'}} (1 - \widehat{\eta}_l - \widehat{\eta}_{l'})^{6-\alpha_l-\alpha_{l'}} d\widehat{\eta}_{l'} \right) d\widehat{\eta}_l = \\ &= 2 \left(\int_0^1 s^{\alpha_{l'}} (1-s)^{6-\alpha_l-\alpha_{l'}} ds \right) \left(\int_0^1 \widehat{\eta}_l^{\alpha_l} (1-\widehat{\eta}_l)^{7-\alpha_l} e^{-t\widehat{\eta}_l} d\widehat{\eta}_l \right) = \\ &= 2\alpha_0! \alpha_1! \alpha_2! {}_1F_1^{reg} \left(1 + \alpha_l; -t \right). \end{aligned}$$

Матрицы $\widehat{\mathbb{U}}^{k,n}(t)$

Пусть в эталонном тетраэдре $\widehat{\mathcal{T}}$ фиксирована вершина \widehat{x}_k , $k = 0, \dots, 3$. Рассмотрим грань $\widehat{\mathcal{F}}_k$ и аффинный изоморфизм $\widehat{\gamma}_k: \widehat{\mathcal{F}} \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}_k$. Пусть также в эталонном треугольнике $\widehat{\mathcal{F}}$ фиксирована вершина \widehat{y}_l , $l = 0, \dots, 2$. Будем считать, что $\widehat{\gamma}_k(\widehat{y}_l) = \widehat{x}_n$. Таким образом, номера k, l, n зафиксированы.

Пусть $t > 0$, для $j = 0, \dots, 9$ рассмотрим вспомогательные функции

$$\chi_j^{\widehat{x}_k \rightarrow \widehat{x}_n}(\widehat{x}, t) = \int_0^{\widehat{\lambda}_n(\widehat{x})} \widehat{u}_j(\widehat{x} - s(\widehat{x}_n - \widehat{x}_k)) e^{-ts} ds, \quad \widehat{x} \in \widehat{\mathcal{F}}_k,$$

заданные на грани $\widehat{\mathcal{F}}_k$. Заметим, что точка $\widehat{x} - s(\widehat{x}_n - \widehat{x}_k)$ при $s \in (0, \widehat{\lambda}_n(\widehat{x}))$ пробегает интервал с концами на гранях $\widehat{\mathcal{F}}_k$ и $\widehat{\mathcal{F}}_n$ параллельный вектору $\widehat{x}_n - \widehat{x}_k$, соответствующего ребру в $\widehat{\mathcal{T}}$.

Пусть $\widehat{u}_j = \widehat{\lambda}_0^{\beta_0} \dots \widehat{\lambda}_3^{\beta_3}$ с $\beta_0 + \dots + \beta_3 = 2$ и пусть l' — отличный от l номер вершины в $\widehat{\mathcal{F}}$, а $\widehat{\gamma}_k(\widehat{y}_{l'}) = \widehat{x}_{n'}$. Тогда выражение $\widehat{u}_j(\widehat{x} - s(\widehat{x}_n - \widehat{x}_k))$ можно записать так:

$$\widehat{\lambda}_{n'}^{\beta_{n'}}(\widehat{x}) \left(1 - \widehat{\lambda}_n(\widehat{x}) - \widehat{\lambda}_{n'}(\widehat{x}) \right)^{2-\beta_k-\beta_n-\beta_{n'}} s^{\beta_k} (\widehat{\lambda}_n(\widehat{x}) - s)^{\beta_n}.$$

Следовательно, выполнено

$$\begin{aligned}
\chi_j^{\hat{x}_k \rightarrow \hat{x}_n}(\hat{x}, t) &= \hat{\lambda}_{n'}^{\beta_{n'}}(\hat{x}) \times \\
&\times \left(1 - \hat{\lambda}_n(\hat{x}) - \hat{\lambda}_{n'}(\hat{x})\right)^{2-\beta_k-\beta_n-\beta_{n'}} \left(\int_0^{\hat{\lambda}_n(\hat{x})} s^{\beta_k} (\hat{\lambda}_n(\hat{x}) - s)^{\beta_n} e^{-ts} ds\right) = \\
&= \hat{\lambda}_n^{1+\beta_k+\beta_n}(\hat{x}) \hat{\lambda}_{n'}^{\beta_{n'}}(\hat{x}) \left(1 - \hat{\lambda}_n(\hat{x}) - \hat{\lambda}_{n'}(\hat{x})\right)^{2-\beta_k-\beta_n-\beta_{n'}} \times \\
&\quad \times \left(\int_0^1 s^{\beta_k} (1-s)^{\beta_n} e^{-t\hat{\lambda}_n(\hat{x})s} ds\right).
\end{aligned}$$

Теперь для всяких $i = 0, \dots, 9$, $j = 0, \dots, 9$ определим функции

$$\left(\widehat{\mathbb{U}}^{k,n}(t)\right)_{i,j} = \int_{\widehat{\mathcal{F}}} \widehat{m}_i(\widehat{y}) \chi_j^{\hat{x}_k \rightarrow \hat{x}_n}(\widehat{y}_k(\widehat{y}), t) d\mu(\widehat{y}). \quad (4.11)$$

И из них составим 10×10 матрицы $\widehat{\mathbb{U}}^{k,n}(t)$, $k, n = 0, \dots, 3$.

Укажем способ нахождения элементов матрицы $\widehat{\mathbb{U}}^{k,n}(t)$. Пусть, как и выше, $\hat{u}_j = \hat{\lambda}_0^{\beta_0} \dots \hat{\lambda}_3^{\beta_3}$ с $\beta_0 + \dots + \beta_3 = 2$, а также $\widehat{m}_i = \hat{\eta}_0^{\alpha_0} \dots \hat{\eta}_2^{\alpha_2}$ с $\alpha_0 + \dots + \alpha_2 = 3$. Тогда $\widehat{m}_i = \hat{\eta}_l^{\alpha_l} \hat{\eta}_{l'}^{\alpha_{l'}} (1 - \hat{\eta}_l - \hat{\eta}_{l'})^{3-\alpha_l-\alpha_{l'}}$ и выполнено

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\mathbb{U}}^{k,n}(t)\right)_{i,j} &= 2 \int_0^1 \hat{\eta}_l^{1+\alpha_l+\beta_k+\beta_n} \left(\int_0^1 s^{\beta_k} (1-s)^{\beta_n} e^{-t\hat{\eta}_l s} ds\right) \times \\
&\times \left(\int_0^{1-\hat{\eta}_l} \hat{\eta}_{l'}^{\alpha_{l'}+\beta_{n'}} (1 - \hat{\eta}_l - \hat{\eta}_{l'})^{5-\alpha_l-\alpha_{l'}-\beta_k-\beta_n-\beta_{n'}} d\hat{\eta}_{l'}\right) d\hat{\eta}_l = \\
&= 2 \left(\int_0^1 s^{\alpha_{l'}+\beta_{n'}} (1-s)^{5-\alpha_l-\alpha_{l'}-\beta_k-\beta_n-\beta_{n'}} ds\right) \times \\
&\times \left(\int_0^1 \hat{\eta}_l^{1+\alpha_l+\beta_k+\beta_n} (1 - \hat{\eta}_l)^{6-\alpha_l-\beta_k-\beta_n} \left(\int_0^1 s^{\beta_k} (1-s)^{\beta_n} e^{-t\hat{\eta}_l s} ds\right) d\hat{\eta}_l\right) = \\
&= 2\beta_k! \beta_n! (1 + \alpha_l + \beta_k + \beta_n)! (\alpha_{l'} + \beta_{n'})! \times \\
&\times (5 - \alpha_l - \alpha_{l'} - \beta_k - \beta_n - \beta_{n'})! {}_2F_2^{reg} \left(\begin{matrix} 1 + \beta_k, 2 + \alpha_l + \beta_k + \beta_n \\ 2 + \beta_k + \beta_n, 9 \end{matrix}; -t \right).
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $1 + \alpha_l + \beta_k + \beta_n > \beta_k + \beta_n$, поэтому выполнено условие, позволяющее сводить вычисление специальной функции ${}_2F_2^{reg}$ к e^{-t} и многочлену от t^{-1} .

5. Разрешение ячеек первого типа

Рассмотрим ячейку \mathcal{T} с одной освещенной гранью. Через $\mathbf{n}_0, \dots, \mathbf{n}_3$, как и раньше, обозначены единичные внешние нормали к граням \mathcal{T} , а через h_0, \dots, h_3

соответствующие высоты. Выбор конкретной нумерации вершин \mathcal{T} при помощи аффинного изоморфизма $\Phi_{\mathcal{T}}: \hat{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{T}$ не ограничивает общность и осуществляется из соображений удобства. Будем считать, что нумерация вершин такова, что освещенной является грань \mathcal{F}_3 . Это означает, что $\langle \mathbf{n}_3, \boldsymbol{\omega} \rangle < 0$ и $\langle \mathbf{n}_k, \boldsymbol{\omega} \rangle \geq 0$ для $k = 0, \dots, 2$. Также считаем, что аффинные изоморфизмы $\Psi_{\mathcal{F}_k}: \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}_k$, $k = 0, \dots, 3$ для граней \mathcal{T} определены следующими нумерациями:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{F}_0} &: (x_3, x_1, x_2), & \Psi_{\mathcal{F}_1} &: (x_0, x_3, x_2), \\ \Psi_{\mathcal{F}_2} &: (x_0, x_1, x_3), & \Psi_{\mathcal{F}_3} &: (x_0, x_1, x_2). \end{aligned}$$

Пусть $\sigma_{\mathcal{T}} > 0$ — положительное число, приближающее коэффициент поглощения внутри \mathcal{T} . Пусть $f \in L_2(\mathcal{F}_3, |\langle \mathbf{n}_3, \boldsymbol{\omega} \rangle|)$ — граничное условие, заданное на освещенной грани \mathcal{F}_3 , а $F \in L_2(\mathcal{T})$ — источник излучения, заданный в \mathcal{T} . Ниже определим результат применения сеточного оператора $\text{CRR}(f, F)$ к паре функций (f, F) , который представляется совокупностью из трех функций:

$$\text{CRR}(f, F) = (\text{CRR}_k(f, F)) = (\text{CRR}_0(f, F), \text{CRR}_1(f, F), \text{CRR}_2(f, F)),$$

определенных на неосвещенных гранях $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ соответственно. Будем рассматривать $\text{CRR}(f, F)$, как элемент прямой суммы гильбертовых пространств $\bigoplus_{k=0, \dots, 2} L_2(\mathcal{F}_k, |\langle \mathbf{n}_k, \boldsymbol{\omega} \rangle|)$. Последнее изометрично введенному ранее пространству $L_2(\partial\mathcal{T}_+, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)$. А $L_2(\mathcal{F}_3, |\langle \mathbf{n}_3, \boldsymbol{\omega} \rangle|)$ в свою очередь отождествляется с $L_2(\partial\mathcal{T}_-, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)$. Напомним обозначение $\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}$ для разрешающего оператора задачи переноса (1.7), задаваемого формулой (1.11):

$$\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}: L_2(\mathcal{F}_3, |\langle \mathbf{n}_3, \boldsymbol{\omega} \rangle|) \oplus L_2(\mathcal{T}) \rightarrow \bigoplus_{k=0, \dots, 2} L_2(\mathcal{F}_k, |\langle \mathbf{n}_k, \boldsymbol{\omega} \rangle|).$$

Сеточный оператор $\text{CRR}(f, F)$ приближает действие $\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}$ в следующем смысле:

$$\text{CRR}_k(f, F) := \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F}_k)}(\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, F)|_{\mathcal{F}_k}). \quad (5.1)$$

Таким образом, для граничного условия f на освещенной грани \mathcal{F}_3 и источника F внутри \mathcal{T} решается задача переноса (1.7) с постоянным коэффициентом поглощения $\sigma_{\mathcal{T}}$. Затем отдельно для каждой из неосвещенных граней $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ соответствующее прямое слагаемое полученного решения $\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, F_{\mathcal{T}})$ ортогонально проектируется на пространство полиномиальных функций при помощи операторов $\mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F}_0)}, \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F}_1)}, \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F}_2)}$ соответственно.

Из оценки (1.4) и свойства нормы ортогональных проекторов следует справедливость для всех $(f, F) \in L_2(\mathcal{F}_3, |\langle \mathbf{n}_3, \boldsymbol{\omega} \rangle|) \oplus L_2(\mathcal{T})$ неравенства

$$\begin{aligned}
& \|(\text{CPP}_k(f, F))\|_{L_2(\partial\mathcal{T}_+, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)} = \\
& = \left(\sum_{k=0}^2 |\langle \mathbf{n}_k, \boldsymbol{\omega} \rangle| \left\| \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F}_k)}(\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, F)|_{\mathcal{F}_k}) \right\|_{L_2(\mathcal{F}_k)}^2 \right)^{1/2} \leq \\
& \leq \left(\sum_{k=0}^2 |\langle \mathbf{n}_k, \boldsymbol{\omega} \rangle| \left\| \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, F)|_{\mathcal{F}_k} \right\|_{L_2(\mathcal{F}_k)}^2 \right)^{1/2} = \tag{5.2} \\
& = \left\| \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, F) \right\|_{L_2(\partial\mathcal{T}_+, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)} \leq \\
& \leq \|f\|_{L_2(\partial\mathcal{T}_-, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)} + \text{diam}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathcal{T})^{1/2} \|F\|_{L_2(\mathcal{T})}.
\end{aligned}$$

Матричные формулы для программной реализации

Перейдем к самому кропотливому этапу: выражению линейного оператора (5.1) в терминах сеточных величин, то есть к его матричному виду в биортогональных базисах. Этот этап является основным шагом на пути программной реализации метода СРР. В качестве F будем рассматривать полиномиальное приближение реального источника излучения: элемент пространства $\mathcal{P}_2(\mathcal{T})$. А в качестве f будем рассматривать полученное с предыдущих шагов алгоритма полиномиальное приближение граничного условия из $\mathcal{P}_3(\mathcal{F}_3)$.

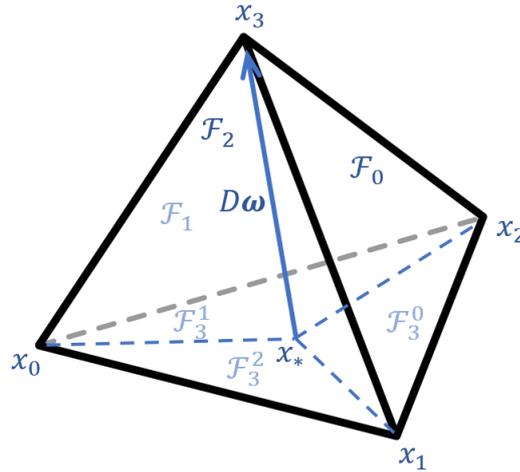


Рис. 4. Ячейка первого типа

Для начала получим разбиение ячейки \mathcal{T} в соответствии с вектором $\boldsymbol{\omega}$ (Рис. 4). Из вершины x_3 проведем прямую параллельную $\boldsymbol{\omega}$ до пересечения с гранью \mathcal{F}_3 . Обозначим точку пересечения через x_* . Найдём барицентрические координаты этой точки в \mathcal{F}_3 :

$$\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2) = (\eta_0(x_*), \eta_1(x_*), \eta_2(x_*)) = (\lambda_0(x_*), \lambda_1(x_*), \lambda_2(x_*)).$$

Пусть D есть расстояние между x_3 и x_* , тогда $x_* = x_3 - D\omega$. Поэтому в силу (3.1) выполнено $0 = \lambda_3(x_*) = \lambda_3(x_3 - D\omega) = \lambda_3(x_3) + Dh_3^{-1}\langle n_3, \omega \rangle$, откуда

$$D = -h_3\langle n_3, \omega \rangle^{-1}. \quad (5.3)$$

Также из (3.1) получаем для $k = 0, \dots, 2$, что

$$\mu_k = \lambda_k(x_*) = Dh_k^{-1}\langle n_k, \omega \rangle = -h_k^{-1}\langle n_k, \omega \rangle h_3\langle n_3, \omega \rangle^{-1}. \quad (5.4)$$

Обозначим через $\mathcal{F}_3^0, \mathcal{F}_3^1, \mathcal{F}_3^2$ треугольники, на которые точка x_* делит грань \mathcal{F}_3 , а через $\mathcal{T}^0, \mathcal{T}^1, \mathcal{T}^2$ — тетраэдры, на которые точка x_* делит \mathcal{T} . Треугольник \mathcal{F}_3^k строится на вершинах \mathcal{F}_3 с x_* вместо x_k . Аналогично, тетраэдр \mathcal{T}^k строится на вершинах \mathcal{T} с x_* вместо x_k . Аффинные изоморфизмы $\Psi_{\mathcal{F}_3^k}: \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}_3^k$, $\Phi_{\mathcal{T}^k}: \hat{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{T}^k$ задаются следующими нумерациями вершин:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{T}^0}: (x_*, x_1, x_2, x_3), \Phi_{\mathcal{T}^1}: (x_0, x_*, x_2, x_3), \\ \Phi_{\mathcal{T}^2}: (x_0, x_1, x_*, x_3), \Phi_{\mathcal{T}^3}: (x_0, x_1, x_2, x_*), \\ \Psi_{\mathcal{F}_3^0}: (x_*, x_1, x_2), \Psi_{\mathcal{F}_3^1}: (x_0, x_*, x_2), \Psi_{\mathcal{F}_3^2}: (x_0, x_1, x_*). \end{aligned}$$

Заметим, что для $y = \Psi_{\mathcal{F}_k}(\hat{y}) \in \mathcal{F}_k$ выполнено $s_-(y) = s_-(\Psi_{\mathcal{F}_k}(\hat{y})) = D\hat{\eta}_k(\hat{y})$, так как $\Psi_{\mathcal{F}_k}(\hat{y}_k) = x_3$ ввиду выбранной нумерации вершин. Если к тому же $y = \Phi_{\mathcal{T}}(\hat{x})$ и $\hat{x} \in \hat{\mathcal{F}}_k$, то $s_-(y) = D\hat{\lambda}_3(\hat{x})$. Аффинное отображение $y \mapsto y - s_-(y)\omega$ переводит \mathcal{F}_k в \mathcal{F}_3^k . В связи с нашим выбором изоморфизмов $\Psi_{\mathcal{F}_3^k}$ и $\Phi_{\mathcal{T}^k}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{F}_3^k}(\hat{y}) &= \Psi_{\mathcal{F}_k}(\hat{y}) - D\hat{\eta}_k(\hat{y})\omega = \Phi_{\mathcal{T}}(\hat{x}) - D\hat{\lambda}_3(\hat{x})\omega, \\ \Phi_{\mathcal{T}^k}(\hat{x} - s(\hat{x}_3 - \hat{x}_k)) &= \Phi_{\mathcal{T}}(\hat{x}) - Ds\omega. \end{aligned}$$

Отметим, что композиция $\Psi_{\mathcal{F}_3}^{-1} \circ \Psi_{\mathcal{F}_3^k}$ осуществляет аффинный изоморфизм между $\hat{\mathcal{F}}$ и треугольником, полученным из $\hat{\mathcal{F}}$ заменой вершины \hat{y}_k на точку с барицентрическими координатами (μ_0, μ_1, μ_2) . Поэтому в соответствии с (4.4) для всех $n = 0, \dots, 9$ выполнено

$$\left(\hat{m}_n \circ \Psi_{\mathcal{F}_3}^{-1} \circ \Psi_{\mathcal{F}_3^k} \right) = \sum_{v=0}^9 \hat{m}_v \left(\hat{\mathbb{C}}^k(\mu) \right)_{v,n}.$$

Аналогично, композиция $\Phi_{\mathcal{T}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{T}^k}$ осуществляет аффинный изоморфизм между $\hat{\mathcal{T}}$ и тетраэдром, полученным из $\hat{\mathcal{T}}$ заменой вершины \hat{x}_k на точку с барицентрическими координатами $(\mu, 0) = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, 0)$. Поэтому в соответствии с (4.5): для всех $n = 0, \dots, 9$ выполнено

$$(\hat{u}_n \circ \Phi_{\mathcal{T}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{T}^k}) = \sum_{v=0}^9 \hat{u}_v \left(\hat{\mathbb{D}}^k(\mu, 0) \right)_{v,n}.$$

Итак, для $f \in \mathcal{P}_3(\mathcal{F}_3)$ и $F \in \mathcal{P}_2(\mathcal{T})$ из (3.6) и (3.7) имеем

$$\begin{aligned} f &= \hat{\xi}_0(f \circ \Psi_{\mathcal{F}_3})(\hat{p}_0 \circ \Psi_{\mathcal{F}_3}^{-1}) + \dots + \hat{\xi}_9(f \circ \Psi_{\mathcal{F}_3})(\hat{p}_9 \circ \Psi_{\mathcal{F}_3}^{-1}), \\ F &= \hat{\theta}_0(F \circ \Phi_{\mathcal{T}})(\hat{q}_0 \circ \Phi_{\mathcal{T}}^{-1}) + \dots + \hat{\theta}_9(F \circ \Phi_{\mathcal{T}})(\hat{q}_9 \circ \Phi_{\mathcal{T}}^{-1}). \end{aligned}$$

В силу линейности (5.1) и равенства $(f, F) = (f, 0) + (0, F)$ достаточно по отдельности найти $\text{CPR}_k(f, 0)$ и $\text{CPR}_k(0, F)$, $k = 0, \dots, 2$. Для этого нужно получить выражения для всех сеточных величин $\xi_i \text{CPR}_k(f, 0)$, $\xi_i \text{CPR}_k(0, F)$, $i = 0, \dots, 9$. Заметим, что для $y = \Psi_{\mathcal{F}_k}(\hat{y}) \in \mathcal{F}_k$ в силу (1.11) выполнено

$$\begin{aligned} &(\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, 0)|_{\mathcal{F}_k} \circ \Psi_{\mathcal{F}_k})(\hat{y}) = \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, 0)|_{\mathcal{F}_k}(y) = \\ &= f(y - s_-(y)\omega)e^{-\sigma_{\mathcal{T}}s_-(y)} = f(\Psi_{\mathcal{F}_k}(\hat{y}) - D\hat{\eta}_k(\hat{y})\omega)e^{-\sigma_{\mathcal{T}}D\hat{\eta}_k(\hat{y})} = \\ &= f\left(\Psi_{\mathcal{F}_3^k}(\hat{y})\right)e^{-\sigma_{\mathcal{T}}D\hat{\eta}_k(\hat{y})} = \\ &= \sum_{l=0}^9 \left(\hat{p}_l \circ \Psi_{\mathcal{F}_3}^{-1} \circ \Psi_{\mathcal{F}_3^k}\right)(\hat{y})e^{-\sigma_{\mathcal{T}}D\hat{\eta}_k(\hat{y})}\hat{\xi}_l(f \circ \Psi_{\mathcal{F}_3}) = \\ &= \sum_{n,l=0}^9 \left(\hat{m}_n \circ \Psi_{\mathcal{F}_3}^{-1} \circ \Psi_{\mathcal{F}_3^k}\right)(\hat{y})e^{-\sigma_{\mathcal{T}}D\hat{\eta}_k(\hat{y})}\hat{\mathbb{C}}_{n,l}\xi_l f = \\ &= \sum_{v,l=0}^9 \hat{m}_v(\hat{y})e^{-\sigma_{\mathcal{T}}D\hat{\eta}_k(\hat{y})}(\hat{\mathbb{C}}^k(\mu)\hat{\mathbb{C}})_{v,l}\xi_l f. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \xi_i \text{CPR}_k(f, 0) &= \hat{\xi}_i(\text{CPR}_k(f, 0) \circ \Psi_{\mathcal{F}_k}) = \\ &= \hat{\xi}_i\left(\left(\mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F}_k)}(\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, 0)|_{\mathcal{F}_k})\right) \circ \Psi_{\mathcal{F}_k}\right) = \\ &= \hat{\xi}_i\left(\mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}})}(\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, 0)|_{\mathcal{F}_k} \circ \Psi_{\mathcal{F}_k})\right) = \\ &= \sum_{j=0}^9 (\hat{\mathbb{G}}^{-1})_{i,j} \langle \hat{p}_j, (f \circ \Psi_{\mathcal{F}_3^k}) e^{-\sigma_{\mathcal{T}}D\hat{\eta}_k} \rangle_{L_2(\hat{\mathcal{F}})} = \\ &= \sum_{r,v,l=0}^9 (\hat{\mathbb{G}}^{-1}\hat{\mathbb{C}}^T)_{i,r} \langle \hat{m}_r, \hat{m}_v e^{-\sigma_{\mathcal{T}}D\hat{\eta}_k} \rangle_{L_2(\hat{\mathcal{F}})} (\hat{\mathbb{C}}^k(\mu)\hat{\mathbb{C}})_{v,l} \xi_l f = \\ &= \sum_{l=0}^9 (\hat{\mathbb{G}}^{-1}\hat{\mathbb{C}}^T\hat{\mathbb{V}}^k(\sigma_{\mathcal{T}}D)\hat{\mathbb{C}}^k(\mu)\hat{\mathbb{C}})_{i,l} \xi_l f. \end{aligned}$$

Таким образом, столбец сеточных величин от $\text{CPR}_k(f, 0) \in \mathcal{P}_3(\mathcal{F}_k)$ равен произведению матрицы $\hat{\mathbb{G}}^{-1}\hat{\mathbb{C}}^T\hat{\mathbb{V}}^k(\sigma_{\mathcal{T}}D)\hat{\mathbb{C}}^k(\mu)\hat{\mathbb{C}}$ на столбец сеточных величин от

$f \in \mathcal{P}_3(\mathcal{F}_3)$. Напомним, что в памяти компьютера данные о функциях хранятся как раз в виде массивов сеточных величин. С целью оптимизации вычислительного времени мы, воспользовавшись ассоциативностью матричного умножения, будем сначала умножать столбец f на $\hat{\mathbb{C}}$, потом результат на $\hat{\mathbb{C}}^k(\mu)$, и так далее. Далее заметим, что для $y = \Psi_{\mathcal{F}_k}(\hat{y}) = \Phi_{\mathcal{T}}(\hat{x}) \in \mathcal{F}_k$ в силу (1.11) выполнено

$$\begin{aligned}
& (\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(0, F)|_{\mathcal{F}_k} \circ \Psi_{\mathcal{F}_k})(\hat{y}) = \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(0, F)|_{\mathcal{F}_k}(y) = \\
& = \int_0^{s_-(y)} F(y - s\omega) e^{-\sigma_{\mathcal{T}}s} ds = D \int_0^{\hat{\eta}_k(\hat{y})} F(\Psi_{\mathcal{F}_k}(\hat{y}) - sD\omega) e^{-\sigma_{\mathcal{T}}Ds} ds = \\
& = D \sum_{l=0}^9 \left(\int_0^{\hat{\lambda}_3(\hat{x})} (\hat{q}_l \circ \Phi_{\mathcal{T}}^{-1})(\Phi_{\mathcal{T}}(\hat{x}) - sD\omega) e^{-\sigma_{\mathcal{T}}Ds} ds \right) \hat{\theta}_l(F \circ \Phi_{\mathcal{T}}) = \\
& = D \sum_{n,l=0}^9 \left(\int_0^{\hat{\lambda}_3(\hat{x})} (\hat{u}_n \circ \Phi_{\mathcal{T}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{T}k})(\hat{x} - s(\hat{x}_3 - \hat{x}_k)) e^{-\sigma_{\mathcal{T}}Ds} ds \right) \times \\
& \quad \times \hat{\mathbb{D}}_{n,l} \theta_l F = D \sum_{v,l=0}^9 \left(\int_0^{\hat{\lambda}_3(\hat{x})} \hat{u}_v(\hat{x} - s(\hat{x}_3 - \hat{x}_k)) e^{-\sigma_{\mathcal{T}}Ds} ds \right) \times \\
& \quad \times (\hat{\mathbb{D}}^k(\mu, 0) \hat{\mathbb{D}})_{v,l} \theta_l F = D \sum_{v,l=0}^9 \hat{\chi}_v^{\hat{x}_k \rightarrow \hat{x}_3}(\hat{x}, \sigma_{\mathcal{T}}D) (\hat{\mathbb{D}}^k(\mu, 0) \hat{\mathbb{D}})_{v,l} \theta_l F.
\end{aligned}$$

Рассматривая в качестве $\hat{\gamma}_k: \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_k$ отображение $\Phi_{\mathcal{T}}^{-1} \circ \Psi_{\mathcal{F}_k}$, находим, что

$$\begin{aligned}
& \xi_i \text{CPP}_k(0, F) = \hat{\xi}_i(\text{CPP}_k(0, F) \circ \Psi_{\mathcal{F}_k}) = \\
& = \hat{\xi}_i \left(\mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}})}(\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(0, F)|_{\mathcal{F}_k} \circ \Psi_{\mathcal{F}_k}) \right) = \\
& = \sum_{j=0}^9 (\hat{\mathbb{G}}^{-1})_{i,j} \langle \hat{p}_j, \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(0, F)|_{\mathcal{F}_k} \circ \Psi_{\mathcal{F}_k} \rangle_{L_2(\hat{\mathcal{F}})} = \\
& = D \sum_{r,v,l=0}^9 (\hat{\mathbb{G}}^{-1} \hat{\mathbb{C}}^T)_{i,r} \langle \hat{m}_r(\hat{y}), \hat{\chi}_v^{\hat{x}_k \rightarrow \hat{x}_3}(\hat{\gamma}_k(\hat{y}), \sigma_{\mathcal{T}}D) \rangle_{L_2(\hat{\mathcal{F}})} (\hat{\mathbb{D}}^k(\mu, 0) \hat{\mathbb{D}})_{v,l} \theta_l F \\
& = D \sum_{l=0}^9 (\hat{\mathbb{G}}^{-1} \hat{\mathbb{C}}^T \hat{\mathbb{U}}^{k,3}(\sigma_{\mathcal{T}}D) \hat{\mathbb{D}}^k(\mu, 0) \hat{\mathbb{D}})_{i,l} \theta_l F.
\end{aligned}$$

Таким образом, столбец сеточных величин от $\text{CPP}_k(0, F) \in \mathcal{P}_3(\mathcal{F}_k)$ равен произведению матрицы $D \hat{\mathbb{G}}^{-1} \hat{\mathbb{C}}^T \hat{\mathbb{U}}^{k,3}(\sigma_{\mathcal{T}}D) \hat{\mathbb{D}}^k(\mu, 0) \hat{\mathbb{D}}$ на столбец сеточных величин от $F \in \mathcal{P}_2(\mathcal{T})$. В итоге

$$\text{CPP}_k(f, F) = \hat{\mathbb{G}}^{-1} \hat{\mathbb{C}}^T (\hat{\mathbb{V}}^k(\sigma_{\mathcal{T}}D) \hat{\mathbb{C}}^k(\mu) \hat{\mathbb{C}} f + D \hat{\mathbb{U}}^{k,3}(\sigma_{\mathcal{T}}D) \hat{\mathbb{D}}^k(\mu, 0) \hat{\mathbb{D}} F). \quad (5.5)$$

6. Разрешение ячеек третьего типа

Третий тип ячеек во многом схож с первым. Будем считать, что нумерация вершин \mathcal{T} такова, что освещенными являются грани $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$. Считаем, что аффинные изоморфизмы $\Psi_{\mathcal{F}_k}: \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}_k$, $k = 0, \dots, 3$ для граней \mathcal{T} определяются теми же нумерациями, как и в случае первого типа.

Для источника излучения $F \in L_2(\mathcal{T})$ и граничного условия $f = (f_0, f_1, f_2) \in L_2(\partial\mathcal{T}_-, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|) = \bigoplus_{k=0, \dots, 2} L_2(\mathcal{F}_k, |\langle \mathbf{n}_k, \boldsymbol{\omega} \rangle|)$. Зададим функцию CPP(f, F) на неосвещенной грани \mathcal{F}_3 формулой

$$\text{CPP}(f, F) := \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F}_3)} \left(\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, F) \right). \quad (6.1)$$

Для всех $(f, F) \in \bigoplus_{k=0, \dots, 2} L_2(\mathcal{F}_k, |\langle \mathbf{n}_k, \boldsymbol{\omega} \rangle|) \oplus L_2(\mathcal{T})$ имеем

$$\begin{aligned} \|\text{CPP}(f, F)\|_{L_2(\partial\mathcal{T}_+, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)} &= \left\| \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F}_3)} \left(\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, F) \right) \right\|_{L_2(\mathcal{F}_3, |\langle \mathbf{n}_3, \boldsymbol{\omega} \rangle|)} \leq \\ &\leq \|\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, F)\|_{L_2(\mathcal{F}_3, |\langle \mathbf{n}_3, \boldsymbol{\omega} \rangle|)} \leq \|f\|_{L_2(\partial\mathcal{T}_-, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)} + \text{diam}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathcal{T})^{1/2} \|F\|_{L_2(\mathcal{T})}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Матричные формулы для программной реализации

Аналогично случаю первого типа рассматривается разбиение ячейки \mathcal{T} на три тетраэдра $\mathcal{T}^0, \mathcal{T}^1, \mathcal{T}^2$ и грани \mathcal{F}_3 на три треугольника $\mathcal{F}_3^0, \mathcal{F}_3^1, \mathcal{F}_3^2$ с помощью точки x_* пересечения прямой, выходящей из x_3 параллельно $\boldsymbol{\omega}$, с гранью \mathcal{F}_3 . Отличие в том, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ теперь направлен из x_3 в x_* , а не наоборот. Бариецентрические координаты $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2)$ точки x_* в треугольнике \mathcal{F}_3 вычисляются по формуле (5.4), а расстояние D между x_* и x_3 отличается от (5.3) только знаком: $D = h_3 \langle \mathbf{n}_3, \boldsymbol{\omega} \rangle^{-1}$. Аффинные изоморфизмы $\Psi_{\mathcal{F}_3^k}: \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}_3^k$, $\Phi_{\mathcal{T}^k}: \hat{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{T}^k$ те же самые, что выше. Заметим, что для $y = \Psi_{\mathcal{F}_3^k}(\hat{y}) \in \mathcal{F}_3^k$ в силу (1.11) выполнено

$$\begin{aligned} &\left(\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, 0) \Big|_{\mathcal{F}_3^k} \circ \Psi_{\mathcal{F}_3^k} \right) (\hat{y}) = \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, 0) \Big|_{\mathcal{F}_3^k}(y) = \\ &= f_k(y - s_-(y)\boldsymbol{\omega}) e^{-\sigma_{\mathcal{T}} s_-(y)} = f_k \left(\Psi_{\mathcal{F}_3^k}(\hat{y}) - D \hat{\eta}_k(\hat{y}) \boldsymbol{\omega} \right) e^{-\sigma_{\mathcal{T}} D \hat{\eta}_k(\hat{y})} = \\ &= f_k \left(\Psi_{\mathcal{F}_k}(\hat{y}) \right) e^{-\sigma_{\mathcal{T}} D \hat{\eta}_k(\hat{y})} = \sum_{l=0}^9 \hat{p}_l(\hat{y}) e^{-\sigma_{\mathcal{T}} D \hat{\eta}_k(\hat{y})} \hat{\xi}_l(f_k \circ \Psi_{\mathcal{F}_k}) = \\ &= \sum_{n,l=0}^9 \hat{m}_n(\hat{y}) e^{-\sigma_{\mathcal{T}} D \hat{\eta}_k(\hat{y})} \hat{\mathbb{C}}_{n,l} \hat{\xi}_l f_k. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\xi_i \text{CPP}(f, 0) &= \hat{\xi}_i(\text{CPP}(f, 0) \circ \Psi_{\mathcal{F}_3}) = \hat{\xi}_i\left(\left(\mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F}_3)} \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, 0)\right) \circ \Psi_{\mathcal{F}_3}\right) = \\
&= \hat{\xi}_i\left(\mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}})}(\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, 0) \circ \Psi_{\mathcal{F}_3})\right) = \\
&= \sum_{j=0}^9 (\hat{\mathbb{G}}^{-1})_{i,j} \langle \hat{p}_j, \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, 0) \circ \Psi_{\mathcal{F}_3} \rangle_{L_2(\hat{\mathcal{F}})} = \\
&= \sum_{k=0}^2 \sum_{j=0}^9 (\hat{\mathbb{G}}^{-1})_{i,j} \langle \hat{p}_j|_{\hat{\mathcal{F}}^k}, \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, 0)|_{\mathcal{F}_3^k} \circ \Psi_{\mathcal{F}_3} \rangle_{L_2(\hat{\mathcal{F}}^k)} = \\
&= \sum_{k=0}^2 \mu_k \sum_{v=0}^9 (\hat{\mathbb{G}}^{-1} \hat{\mathbb{C}}^T)_{i,v} \times \\
&\quad \times \langle \hat{m}_v|_{\hat{\mathcal{F}}^k} \circ (\Psi_{\mathcal{F}_3}^{-1} \circ \Psi_{\mathcal{F}_3^k}), \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, 0)|_{\mathcal{F}_3^k} \circ \Psi_{\mathcal{F}_3^k} \rangle_{L_2(\hat{\mathcal{F}})} = \\
&= \sum_{k=0}^2 \mu_k \sum_{r,n,l=0}^9 (\hat{\mathbb{G}}^{-1} \hat{\mathbb{C}}^T \hat{\mathbb{C}}^k(\mu)^T)_{i,r} \langle \hat{m}_r, \hat{m}_n e^{-\sigma_{\mathcal{T}} D \hat{\eta}_k} \rangle_{L_2(\hat{\mathcal{F}})} \hat{\mathbb{C}}_{n,l} \xi_l f_k = \\
&= \sum_{k=0}^2 \mu_k \sum_{l=0}^9 (\hat{\mathbb{G}}^{-1} \hat{\mathbb{C}}^T \hat{\mathbb{C}}^k(\mu)^T \hat{\mathbb{V}}^k(\sigma_{\mathcal{T}} D) \hat{\mathbb{C}})_{i,l} \xi_l f_k.
\end{aligned}$$

Таким образом, столбец сеточных величин от $\text{CPP}(f, 0) \in \mathcal{P}_3(\mathcal{F}_3)$ складывается из произведений матриц $\mu_k \hat{\mathbb{G}}^{-1} \hat{\mathbb{C}}^T \hat{\mathbb{C}}^k(\mu)^T \hat{\mathbb{V}}^k(\sigma_{\mathcal{T}} D) \hat{\mathbb{C}}$ на столбцы сеточных величин от $f_k \in \mathcal{P}_3(\mathcal{F}_k)$. Далее, для $y = \Psi_{\mathcal{F}_3^k}(\hat{y}) = \Phi_{\mathcal{T}^k}(\hat{x}) \in \mathcal{F}_3^k$ в силу (1.11) выполнено

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(0, F)|_{\mathcal{F}_3^k} \circ \Psi_{\mathcal{F}_3^k}\right)(\hat{y}) = \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(0, F)|_{\mathcal{F}_3^k}(y) = \\
&= \int_0^{s_-(y)} F(y - s\omega) e^{-\sigma_{\mathcal{T}} s} ds = D \int_0^{\hat{\eta}_k(\hat{y})} F(\Psi_{\mathcal{F}_3^k}(\hat{y}) - sD\omega) e^{-\sigma_{\mathcal{T}} Ds} ds = \\
&= D \sum_{l=0}^9 \left(\int_0^{\hat{\lambda}_k(\hat{x})} (\hat{q}_l \circ \Phi_{\mathcal{T}}^{-1})(\Phi_{\mathcal{T}^k}(\hat{x}) - sD\omega) e^{-\sigma_{\mathcal{T}} Ds} ds \right) \hat{\theta}_l(F \circ \Phi_{\mathcal{T}}) = \\
&= D \sum_{n,l=0}^9 \left(\int_0^{\hat{\lambda}_k(\hat{x})} (\hat{u}_n \circ \Phi_{\mathcal{T}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{T}^k})(\hat{x} - s(\hat{x}_k - \hat{x}_3)) e^{-\sigma_{\mathcal{T}} Ds} ds \right) \times \\
&\quad \times \hat{\mathbb{D}}_{n,l} \theta_l F = \\
&= D \sum_{v,l=0}^9 \left(\int_0^{\hat{\lambda}_3(\hat{x})} \hat{u}_v(\hat{x} - s(\hat{x}_k - \hat{x}_3)) e^{-\sigma_{\mathcal{T}} Ds} ds \right) (\hat{\mathbb{D}}^k(\mu, 0) \hat{\mathbb{D}})_{v,l} \theta_l F = \\
&= D \sum_{v,l=0}^{19} \hat{\chi}_v^{\hat{x}_3 \rightarrow \hat{x}_k}(\hat{x}, \sigma_{\mathcal{T}} D) (\hat{\mathbb{D}}^k(\mu, 0) \hat{\mathbb{D}})_{v,l} \theta_l F.
\end{aligned}$$

Рассматривая в качестве $\hat{y}_k: \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_k$ отображение $\Phi_{\mathcal{T}^k}^{-1} \circ \Psi_{\mathcal{F}_3^k}$, находим, что

$$\begin{aligned}
\xi_i \text{CPP}(0, F) &= \hat{\xi}_i (\text{CPP}(0, F) \circ \Psi_{\mathcal{F}_3}) = \hat{\xi}_i \left(\mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}})} (\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}} (0, F) \circ \Psi_{\mathcal{F}_3}) \right) = \\
&= \sum_{k=0}^2 \sum_{v=0}^9 (\hat{\mathbb{G}}^{-1} \hat{\mathbb{C}}^T)_{i,v} \langle \hat{m}_v |_{\hat{\mathcal{F}}^k}, \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}} (0, F) |_{\mathcal{F}_3^k} \circ \Psi_{\mathcal{F}_3} \rangle_{L_2(\hat{\mathcal{F}}^k)} = \\
&= \sum_{k=0}^2 \mu_k \sum_{r=0}^9 (\hat{\mathbb{G}}^{-1} \hat{\mathbb{C}}^T \hat{\mathbb{C}}^k(\mu)^T)_{i,r} \langle \hat{m}_r, \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}} (0, F) |_{\mathcal{F}_3^k} \circ \Psi_{\mathcal{F}_3^k} \rangle_{L_2(\hat{\mathcal{F}})} = \\
&= D \sum_{k=0}^2 \mu_k \sum_{r,v,l=0}^9 (\hat{\mathbb{G}}^{-1} \hat{\mathbb{C}}^T \hat{\mathbb{C}}^k(\mu)^T)_{i,r} \times \\
&\quad \times \langle \hat{m}_r(\hat{y}), \hat{\chi}_v^{\hat{x}_3 \rightarrow \hat{x}_k}(\hat{y}_k(\hat{y}), \sigma_{\mathcal{T}} D) \rangle_{L_2(\hat{\mathcal{F}})} (\hat{\mathbb{D}}^k(\mu, 0) \hat{\mathbb{D}})_{v,l} \theta_l F = \\
&= D \sum_{k=0}^2 \mu_k \sum_{l=0}^9 (\hat{\mathbb{G}}^{-1} \hat{\mathbb{C}}^T \hat{\mathbb{C}}^k(\mu)^T \hat{\mathbb{U}}^{3,k}(\sigma_{\mathcal{T}} D) \hat{\mathbb{D}}^k(\mu, 0) \hat{\mathbb{D}})_{i,l} \theta_l F.
\end{aligned}$$

Таким образом, столбец сеточных величин от $\text{CPP}(0, F) \in \mathcal{P}_3(\mathcal{F}_3)$ равен произведению матрицы $D \sum_{k=0}^2 \mu_k \hat{\mathbb{G}}^{-1} \hat{\mathbb{C}}^T \hat{\mathbb{C}}^k(\mu)^T \hat{\mathbb{U}}^{3,k}(\sigma_{\mathcal{T}} D) \hat{\mathbb{D}}^k(\mu, 0) \hat{\mathbb{D}}$ на столбец сеточных величин от $F \in \mathcal{P}_2(\mathcal{T})$. В итоге

$$\begin{aligned}
\text{CPP}(f, F) &= \sum_{k=0}^2 \mu_k \hat{\mathbb{G}}^{-1} \hat{\mathbb{C}}^T \hat{\mathbb{C}}^k(\mu)^T \times \\
&\quad \times (\hat{\mathbb{V}}^k(\sigma_{\mathcal{T}} D) \hat{\mathbb{C}} f_k + D \hat{\mathbb{U}}^{3,k}(\sigma_{\mathcal{T}} D) \hat{\mathbb{D}}^k(\mu, 0) \hat{\mathbb{D}} F).
\end{aligned} \tag{6.3}$$

7. Разрешение ячеек второго типа

Этот случай самый сложный. Пусть теперь освещенными являются грани $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$, а неосвещенными — $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$. Аффинные автоморфизмы $\Psi_{\mathcal{F}_k}: \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}_k$ определим следующими нумерациями вершин:

$$\Psi_{\mathcal{F}_0} : (x_2, x_3, x_1), \quad \Psi_{\mathcal{F}_1} : (x_2, x_3, x_0),$$

$$\Psi_{\mathcal{F}_2} : (x_0, x_1, x_3), \quad \Psi_{\mathcal{F}_3} : (x_0, x_1, x_2).$$

Для источника $F \in L_2(\mathcal{T})$ и граничного условия $f = (f_2, f_3) \in L_2(\partial\mathcal{T}_-, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|) = L_2(\mathcal{F}_2, |\langle \mathbf{n}_2, \boldsymbol{\omega} \rangle|) \oplus L_2(\mathcal{F}_3, |\langle \mathbf{n}_3, \boldsymbol{\omega} \rangle|)$ зададим $\text{CPP}(f, F) = (\text{CPP}_0(f, F), \text{CPP}_1(f, F))$ из пространства $L_2(\partial\mathcal{T}_+, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|) = L_2(\mathcal{F}_0, |\langle \mathbf{n}_0, \boldsymbol{\omega} \rangle|) \oplus L_2(\mathcal{F}_1, |\langle \mathbf{n}_1, \boldsymbol{\omega} \rangle|)$ формулой

$$\text{CPP}_k(f, F) = \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F}_k)} (\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, F) |_{\mathcal{F}_k}). \tag{7.1}$$

Для всех $(f, F) \in L_2(\mathcal{F}_2, |\langle \mathbf{n}_2, \boldsymbol{\omega} \rangle|) \oplus L_2(\mathcal{F}_3, |\langle \mathbf{n}_3, \boldsymbol{\omega} \rangle|) \oplus L_2(\mathcal{T})$ имеем

$$\begin{aligned}
& \|\text{CPP}(f, F)\|_{L_2(\partial\mathcal{T}_+, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)} = \\
& = \left(\sum_{k=0,1} |\langle \mathbf{n}_k, \boldsymbol{\omega} \rangle| \left\| \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F}_k)}(\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, F)|_{\mathcal{F}_k}) \right\|_{L_2(\mathcal{F}_k)}^2 \right)^{1/2} \leq \\
& \leq \left(\sum_{k=0,1} |\langle \mathbf{n}_k, \boldsymbol{\omega} \rangle| \left\| \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, F)|_{\mathcal{F}_k} \right\|_{L_2(\mathcal{F}_k)}^2 \right)^{1/2} = \\
& = \|\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, F)\|_{L_2(\partial\mathcal{T}_+, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)} \leq \|f\|_{L_2(\partial\mathcal{T}_-, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)} + \text{diam}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathcal{T})^{1/2} \|F\|_{L_2(\mathcal{T})}.
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Матричные формулы для программной реализации

Найдем для начала барицентрические координаты двух точек x_* и x_{**} на ребрах x_0x_1 и x_2x_3 соответственно, для которых вектор $x_{**} - x_*$ сонаправлен с $\boldsymbol{\omega}$ (Рис. 5). Заметим, что $\lambda_2(x_*) = \lambda_3(x_*) = 0$, $\lambda_0(x_{**}) = \lambda_1(x_{**}) = 0$ и $x_{**} = x_* + D\boldsymbol{\omega}$, где D – длина отрезка x_*x_{**} . В силу (3.1) получаем

$$\begin{aligned}
\lambda_0(x_*) &= Dh_0^{-1}\langle \mathbf{n}_0, \boldsymbol{\omega} \rangle, & \lambda_1(x_*) &= Dh_1^{-1}\langle \mathbf{n}_1, \boldsymbol{\omega} \rangle, \\
\lambda_2(x_*) &= -Dh_2^{-1}\langle \mathbf{n}_2, \boldsymbol{\omega} \rangle, & \lambda_3(x_*) &= -Dh_3^{-1}\langle \mathbf{n}_3, \boldsymbol{\omega} \rangle.
\end{aligned}$$

Откуда, учитывая $\lambda_0(x_*) + \lambda_1(x_*) = 1$, $\lambda_2(x_{**}) + \lambda_3(x_{**}) = 1$, заключаем

$$D = (h_0^{-1}\langle \mathbf{n}_0, \boldsymbol{\omega} \rangle + h_1^{-1}\langle \mathbf{n}_1, \boldsymbol{\omega} \rangle)^{-1} = -(h_2^{-1}\langle \mathbf{n}_2, \boldsymbol{\omega} \rangle + h_3^{-1}\langle \mathbf{n}_3, \boldsymbol{\omega} \rangle)^{-1}. \tag{7.3}$$

Обозначим $\mu_* = (\mu_0, \mu_1) = (\lambda_0(x_*), \lambda_1(x_*))$, $\mu_{**} = (\mu_2, \mu_3) = (\lambda_2(x_{**}), \lambda_3(x_{**}))$. Имеем

$$\mu_k = \begin{cases} h_k^{-1}\langle \mathbf{n}_k, \boldsymbol{\omega} \rangle / (h_0^{-1}\langle \mathbf{n}_0, \boldsymbol{\omega} \rangle + h_1^{-1}\langle \mathbf{n}_1, \boldsymbol{\omega} \rangle), & k = 0, 1, \\ h_k^{-1}\langle \mathbf{n}_k, \boldsymbol{\omega} \rangle / (h_2^{-1}\langle \mathbf{n}_2, \boldsymbol{\omega} \rangle + h_3^{-1}\langle \mathbf{n}_3, \boldsymbol{\omega} \rangle), & k = 2, 3. \end{cases} \tag{7.4}$$

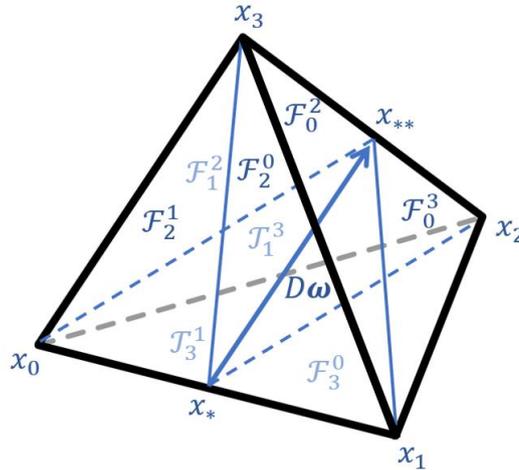


Рис. 5. Ячейка второго типа

При помощи точек x_* и x_{**} можно разделить ячейку \mathcal{T} на четыре тетраэдра $\mathcal{T}^{0,2}, \mathcal{T}^{0,3}, \mathcal{T}^{1,2}, \mathcal{T}^{1,3}$: $\mathcal{T}^{k,l}$ получается из \mathcal{T} заменой вершин $x_k, k = 0,1$ на x_* и $x_l, l = 2,3$ на x_{**} . Точка x_* разбивает освещенные грани \mathcal{F}_2 и \mathcal{F}_3 на треугольники $\mathcal{F}_2^0, \mathcal{F}_2^1$ и $\mathcal{F}_3^0, \mathcal{F}_3^1$ соответственно: \mathcal{F}_l^k получается из \mathcal{F}_l заменой вершины x_k на x_* . Аналогично точка x_{**} разбивает неосвещенные грани \mathcal{F}_0 и \mathcal{F}_1 на треугольники $\mathcal{F}_0^2, \mathcal{F}_0^3$ и $\mathcal{F}_1^2, \mathcal{F}_1^3$ соответственно: \mathcal{F}_k^l получается из \mathcal{F}_k заменой вершины x_l на x_{**} .

Будем использовать следующие нумерации вершин в аффинных изоморфизмах $\Phi_{\mathcal{T}^{k,l}}: \hat{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{T}^{k,l}, \Psi_{\mathcal{F}_k^l}: \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}_k^l, \Psi_{\mathcal{F}_l^k}: \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}_l^k, k = 0,1, l = 2,3$:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{T}^{0,2}}: (x_*, x_1, x_{**}, x_3), & \quad \Phi_{\mathcal{T}^{0,3}}: (x_*, x_1, x_2, x_{**}), \\ \Phi_{\mathcal{T}^{1,2}}: (x_0, x_*, x_{**}, x_3), & \quad \Phi_{\mathcal{T}^{1,3}}: (x_0, x_*, x_2, x_{**}), \\ \Psi_{\mathcal{F}_2^0}: (x_*, x_1, x_3), & \quad \Psi_{\mathcal{F}_3^0}: (x_*, x_1, x_2), \\ \Psi_{\mathcal{F}_2^1}: (x_0, x_*, x_3), & \quad \Psi_{\mathcal{F}_3^1}: (x_0, x_*, x_2), \\ \Psi_{\mathcal{F}_0^2}: (x_{**}, x_3, x_1), & \quad \Psi_{\mathcal{F}_0^3}: (x_2, x_{**}, x_1), \\ \Psi_{\mathcal{F}_1^2}: (x_{**}, x_3, x_0), & \quad \Psi_{\mathcal{F}_1^3}: (x_2, x_{**}, x_0). \end{aligned}$$

В отличие от предыдущих двух случаев, здесь не удастся воспользоваться единой нумерацией вершин для встречающихся треугольников и тетраэдров – придется совершать перенумерации по ходу дела. Введем дополнительное обозначение $\hat{\Psi}_\alpha$ для аффинного изоморфизма $\hat{\mathcal{T}} \rightarrow \hat{\mathcal{T}}$, переставляющего вершины треугольника: $\hat{\Psi}_\alpha(\hat{x}_i) = \hat{x}_{\alpha(i)}$, где $\alpha = (\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2))$ – перестановка. Перестановке вершин треугольника соответствует перестановка мономиального базиса. Обозначим через $\hat{\mathbb{C}}_\alpha$ матрицу этой перестановки:

$$(\hat{m}_0 \circ \hat{\Psi}_\alpha, \dots, \hat{m}_9 \circ \hat{\Psi}_\alpha) = (\hat{m}_0, \dots, \hat{m}_9) \hat{\mathbb{C}}_\alpha.$$

Пусть $y = \Psi_{\mathcal{F}_k^l}(\hat{y}) \in \mathcal{F}_k^l \subset \mathcal{F}_k, k = 0,1, l = 2,3$, тогда в соответствии с нашим выбором нумерации $s_-(y) = s_- \left(\Psi_{\mathcal{F}_k^l}(\hat{y}) \right) = D\hat{\eta}_{l-2}(\hat{y})$, так как $\Psi_{\mathcal{F}_k^l}(\hat{y}_{l-2}) = x_{**}$. Если также $y = \Phi_{\mathcal{T}^{k,l}}(\hat{x})$ и $\hat{x} \in \hat{\mathcal{F}}_k$, то $s_-(y) = D\hat{\lambda}_l(\hat{x})$. Аффинное отображение $y \mapsto y - s_-(y)\omega$ переводит \mathcal{F}_k^l в $\mathcal{F}_l^k \subset \mathcal{F}_l$. Имеем

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{F}_l^k} \circ \hat{\Psi}_{\alpha_{k,l}}(\hat{y}) &= \Psi_{\mathcal{F}_k^l}(\hat{y}) - D\hat{\eta}_{l-2}(\hat{y})\omega = \Phi_{\mathcal{T}^{k,l}}(\hat{x}) - D\hat{\lambda}_l(\hat{x})\omega, \\ \Phi_{\mathcal{T}^{k,l}}(\hat{x} - s(\hat{x}_l - \hat{x}_k)) &= \Phi_{\mathcal{T}^{k,l}}(\hat{x}) - Ds\omega, \end{aligned}$$

где перестановка $\alpha_{k,l}$ есть

$$\begin{pmatrix} l-2 & 3-l & 2 \\ k & 2 & 1-k \end{pmatrix}.$$

Композиции $\Psi_{\mathcal{F}_k}^{-1} \circ \Psi_{\mathcal{F}_k}^l$ и $\Psi_{\mathcal{F}_l}^{-1} \circ \Psi_{\mathcal{F}_l}^k$ осуществляют аффинный изоморфизм между $\hat{\mathcal{F}}$ и треугольниками, полученными из $\hat{\mathcal{F}}$ в первом случае заменой вершины \hat{y}_{l-2} на точку с барицентрическими координатами $(\mu_{**}, 0) = (\mu_2, \mu_3, 0)$, а во втором — вершины \hat{y}_k на точку $(\mu_*, 0) = (\mu_0, \mu_1, 0)$. Поэтому в соответствии с (4.4) для всех $n = 0, \dots, 9$ выполнено

$$\begin{aligned} (\hat{m}_n \circ \Psi_{\mathcal{F}_k}^{-1} \circ \Psi_{\mathcal{F}_k}^l) &= \sum_{v=0}^9 \hat{m}_v \left(\hat{\mathbb{C}}^{l-2}(\mu_{**}, 0) \right)_{v,n}, \\ (\hat{m}_n \circ \Psi_{\mathcal{F}_l}^{-1} \circ \Psi_{\mathcal{F}_l}^k) &= \sum_{v=0}^9 \hat{m}_v \left(\hat{\mathbb{C}}^k(\mu_*, 0) \right)_{v,n}. \end{aligned}$$

Композиция $\Phi_{\mathcal{J}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{J}^{k,l}}$ осуществляет аффинный изоморфизм между $\hat{\mathcal{J}}$ и тетраэдром, полученным из $\hat{\mathcal{J}}$ заменой вершин \hat{x}_k и \hat{x}_l соответственно на точки с барицентрическими координатами $(\mu_*, 0) = (\mu_0, \mu_1, 0, 0)$ и $(0, \mu_{**}) = (0, 0, \mu_2, \mu_3)$. Дважды применяя (4.5), заключаем, что для всех $n = 0, \dots, 9$ выполнено

$$\begin{aligned} (\hat{u}_n \circ \Phi_{\mathcal{J}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{J}^{k,l}}) &= \sum_{v=0}^9 \hat{u}_v \left(\hat{\mathbb{D}}^k(\mu_*, 0) \hat{\mathbb{D}}^l(0, \mu_{**}) \right)_{v,n} = \\ &= \sum_{v=0}^9 \hat{u}_v \left(\hat{\mathbb{D}}^l(0, \mu_{**}) \hat{\mathbb{D}}^k(\mu_*, 0) \right)_{v,n}. \end{aligned}$$

Для $y = \Psi_{\mathcal{F}_k}^l(\hat{y}) \in \mathcal{F}_k^l$ в силу (1.11) выполнено

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{J}}}(f, 0)|_{\mathcal{F}_k^l} \circ \Psi_{\mathcal{F}_k}^l)(\hat{y}) &= \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{J}}}(f, 0)|_{\mathcal{F}_k^l}(y) = \\ &= f_l(y - s_-(y)\omega) e^{-\sigma_{\mathcal{J}} s_-(y)} = \\ &= f_l(\Psi_{\mathcal{F}_k}^l(\hat{y}) - D\hat{\eta}_{l-2}(\hat{y})\omega) e^{-\sigma_{\mathcal{J}} D\hat{\eta}_{l-2}(\hat{y})} = \\ &= (f_l \circ \Psi_{\mathcal{F}_l}^k \circ \hat{\Psi}_{\alpha_{k,l}})(\hat{y}) e^{-\sigma_{\mathcal{J}} D\hat{\eta}_{l-2}(\hat{y})} = \\ &= \sum_{n=0}^9 (\hat{p}_n \circ \Psi_{\mathcal{F}_l}^{-1} \circ \Psi_{\mathcal{F}_l}^k \circ \hat{\Psi}_{\alpha_{k,l}})(\hat{y}) e^{-\sigma_{\mathcal{J}} D\hat{\eta}_{l-2}(\hat{y})} \hat{\xi}_n(f_l \circ \Psi_{\mathcal{F}_l}) = \\ &= \sum_{n,v=0}^9 \hat{m}_v(\hat{y}) e^{-\sigma_{\mathcal{J}} D\hat{\eta}_{l-2}(\hat{y})} (\hat{\mathbb{C}}_{\alpha_{k,l}} \hat{\mathbb{C}}^k(\mu_*, 0) \hat{\mathbb{C}})_{v,n} \hat{\xi}_n f_l. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\xi_i \text{CPP}_k(f, 0) &= \hat{\xi}_i(\text{CPP}_k(f, 0) \circ \Psi_{\mathcal{F}_k}) = \\
&= \hat{\xi}_i\left(\left(\mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F}_k)} \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, 0)|_{\mathcal{F}_k}\right) \circ \Psi_{\mathcal{F}_k}\right) = \hat{\xi}_i\left(\mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}})}(\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, 0)|_{\mathcal{F}_k} \circ \Psi_{\mathcal{F}_k})\right) = \\
&= \sum_{j=0}^9 (\hat{\mathbb{G}}^{-1})_{i,j} \langle \hat{p}_j, \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, 0)|_{\mathcal{F}_k} \circ \Psi_{\mathcal{F}_k} \rangle_{L_2(\hat{\mathcal{F}})} = \\
&= \sum_{l=2}^3 \sum_{j=0}^9 (\hat{\mathbb{G}}^{-1})_{i,j} \langle \hat{p}_j|_{\hat{\mathcal{F}}^{l-2}}, \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, 0)|_{\mathcal{F}_k^l} \circ \Psi_{\mathcal{F}_k} \rangle_{L_2(\hat{\mathcal{F}}^{l-2})} = \\
&= \sum_{l=2}^3 \mu_l \sum_{r=0}^9 (\hat{\mathbb{G}}^{-1} \hat{\mathbb{C}}^T)_{i,r} \times \\
&\times \langle \hat{m}_r|_{\hat{\mathcal{F}}^{l-2}} \circ (\Psi_{\mathcal{F}_k}^{-1} \circ \Psi_{\mathcal{F}_k^l}), \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(f, 0)|_{\mathcal{F}_k^l} \circ \Psi_{\mathcal{F}_k^l} \rangle_{L_2(\hat{\mathcal{F}})} = \\
&= \sum_{l=2}^3 \mu_l \sum_{r,v,n=0}^9 (\hat{\mathbb{G}}^{-1} \hat{\mathbb{C}}^T \hat{\mathbb{C}}^{l-2}(\mu_{**}, 0)^T)_{i,r} \times \\
&\times \langle \hat{m}_r, \hat{m}_v e^{-\sigma_{\mathcal{T}} D \hat{\eta}_{l-2}} \rangle_{L_2(\hat{\mathcal{F}})} (\hat{\mathbb{C}}_{\alpha_{k,l}} \hat{\mathbb{C}}^k(\mu_*, 0) \hat{\mathbb{C}})_{v,n} \xi_n f_l = \\
&= \sum_{l=2}^3 \mu_l \sum_{n=0}^9 (\hat{\mathbb{G}}^{-1} \hat{\mathbb{C}}^T \hat{\mathbb{C}}^{l-2}(\mu_{**}, 0)^T \hat{\mathbb{V}}^{l-2}(\sigma_{\mathcal{T}} D) \hat{\mathbb{C}}_{\alpha_{k,l}} \hat{\mathbb{C}}^k(\mu_*, 0) \hat{\mathbb{C}})_{i,n} \xi_n f_l.
\end{aligned}$$

Таким образом, столбец сеточных величин $\text{CPP}_k(f, 0) \in \mathcal{P}_3(\mathcal{F}_k)$ складывается из произведений матриц $\mu_l \hat{\mathbb{G}}^{-1} \hat{\mathbb{C}}^T \hat{\mathbb{C}}^{l-2}(\mu_{**}, 0)^T \hat{\mathbb{V}}^{l-2}(\sigma_{\mathcal{T}} D) \hat{\mathbb{C}}_{\alpha_{k,l}} \hat{\mathbb{C}}^k(\mu_*, 0) \hat{\mathbb{C}}$ на столбцы сеточных величин $f_l \in \mathcal{P}_3(\mathcal{F}_l)$. Далее, для $y = \Psi_{\mathcal{F}_k^l}(\hat{y}) = \Phi_{\mathcal{T}^{k,l}}(\hat{x}) \in \mathcal{F}_k^l$ в силу (1.11) имеем

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(0, F)|_{\mathcal{F}_k^l} \circ \Psi_{\mathcal{F}_k^l}\right)(\hat{y}) = \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(0, F)|_{\mathcal{F}_k^l}(y) = \\
&= \int_0^{s_-(y)} F(y - s\omega) e^{-\sigma_{\mathcal{T}} s} ds = D \int_0^{\hat{\eta}_{l-2}(\hat{y})} F(\Psi_{\mathcal{F}_k^l}(\hat{y}) - sD\omega) e^{-\sigma_{\mathcal{T}} Ds} ds = \\
&= D \sum_{n=0}^9 \left(\int_0^{\hat{\lambda}_l(\hat{x})} (\hat{q}_n \circ \Phi_{\mathcal{T}}^{-1})(\Phi_{\mathcal{T}^{k,l}}(\hat{x}) - sD\omega) e^{-\sigma_{\mathcal{T}} Ds} ds \right) \hat{\theta}_n (F \circ \Phi_{\mathcal{T}}) = \\
&= D \sum_{v,n=0}^9 \left(\int_0^{\hat{\lambda}_l(\hat{x})} (\hat{u}_v \circ \Phi_{\mathcal{T}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{T}^{k,l}})(\hat{x} - s(\hat{x}_l - \hat{x}_k)) e^{-\sigma_{\mathcal{T}} Ds} ds \right) \times \\
&\times \hat{\mathbb{D}}_{v,n} \theta_n F = D \sum_{r,n=0}^9 \left(\int_0^{\hat{\lambda}_l(\hat{x})} \hat{u}_r(\hat{x} - s(\hat{x}_l - \hat{x}_k)) e^{-\sigma_{\mathcal{T}} Ds} ds \right) \times \\
&\times (\hat{\mathbb{D}}^k(\mu_*, 0) \hat{\mathbb{D}}^l(0, \mu_{**}) \hat{\mathbb{D}})_{r,n} \theta_n F =
\end{aligned}$$

$$= D \sum_{r,n=0}^9 \hat{\chi}_r^{\hat{x}_l \rightarrow \hat{x}_k}(\hat{x}, \sigma_{\mathcal{T}} D) (\widehat{\mathbb{D}}^k(\mu_*, 0) \widehat{\mathbb{D}}^l(0, \mu_{**}) \widehat{\mathbb{D}})_{r,n} \theta_n F.$$

Рассматривая в качестве $\hat{\gamma}_{k,l}: \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_k$ отображение $\Phi_{\mathcal{T}^{k,l}}^{-1} \circ \Psi_{\mathcal{F}_k^l}$, находим, что

$$\begin{aligned} \xi_i \text{CPP}_k(0, F) &= \hat{\xi}_i(\text{CPP}_k(0, F) \circ \Psi_{\mathcal{F}_k}) = \hat{\xi}_i\left(\mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}})}(\mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(0, F)|_{\mathcal{F}_k} \circ \Psi_{\mathcal{F}_k})\right) = \\ &= \sum_{l=2}^3 \sum_{s=0}^9 (\widehat{\mathbb{G}}^{-1} \widehat{\mathbb{C}}^T)_{i,s} \langle \hat{m}_s |_{\hat{\mathcal{F}}^{l-2}}, \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(0, F)|_{\mathcal{F}_k^l} \circ \Psi_{\mathcal{F}_k} \rangle_{L_2(\hat{\mathcal{F}}^{l-2})} = \\ &= \sum_{l=2}^3 \mu_l \sum_{t=0}^9 (\widehat{\mathbb{G}}^{-1} \widehat{\mathbb{C}}^T \widehat{\mathbb{C}}^{l-2}(\mu_{**}, 0)^T)_{i,t} \langle \hat{m}_t, \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}(0, F)|_{\mathcal{F}_k^l} \circ \Psi_{\mathcal{F}_k^l} \rangle_{L_2(\hat{\mathcal{F}})} = \\ &= D \sum_{l=2}^3 \mu_l \sum_{t,r,n=0}^9 (\widehat{\mathbb{G}}^{-1} \widehat{\mathbb{C}}^T \widehat{\mathbb{C}}^{l-2}(\mu_{**}, 0)^T)_{i,t} \times \\ &\quad \times \langle \hat{m}_t(\hat{y}), \hat{\chi}_r^{\hat{x}_l \rightarrow \hat{x}_k}(\hat{\gamma}_{k,l}(\hat{y}), \sigma_{\mathcal{T}} D) \rangle_{L_2(\hat{\mathcal{F}})} (\widehat{\mathbb{D}}^k(\mu_*, 0) \widehat{\mathbb{D}}^l(0, \mu_{**}) \widehat{\mathbb{D}})_{r,n} \theta_n F = \\ &= D \sum_{l=2}^3 \mu_l \sum_{n=0}^9 (\widehat{\mathbb{G}}^{-1} \widehat{\mathbb{C}}^T \widehat{\mathbb{C}}^{l-2}(\mu_{**}, 0)^T \widehat{\mathbb{U}}^{l,k}(\sigma_{\mathcal{T}} D) \widehat{\mathbb{D}}^k(\mu_*, 0) \widehat{\mathbb{D}}^l(0, \mu_{**}) \widehat{\mathbb{D}})_{i,n} \theta_n F. \end{aligned}$$

Таким образом, столбец сеточных величин $\text{CPP}_k(0, F) \in \mathcal{P}_3(\mathcal{F}_k)$ равен произведению $D \sum_{l=2}^3 \mu_l \widehat{\mathbb{G}}^{-1} \widehat{\mathbb{C}}^T \widehat{\mathbb{C}}^{l-2}(\mu_{**}, 0)^T \widehat{\mathbb{U}}^{l,k}(\sigma_{\mathcal{T}} D) \widehat{\mathbb{D}}^k(\mu_*, 0) \widehat{\mathbb{D}}^l(0, \mu_{**}) \widehat{\mathbb{D}}$ на столбец сеточных величин $F \in \mathcal{P}_2(\mathcal{T})$. В итоге

$$\begin{aligned} \text{CPP}_k(f, F) &= \sum_{l=2}^3 \mu_l \widehat{\mathbb{G}}^{-1} \widehat{\mathbb{C}}^T \widehat{\mathbb{C}}^{l-2}(\mu_{**}, 0)^T \times \\ &\quad \times (\widehat{\mathbb{V}}^{l-2}(\sigma_{\mathcal{T}} D) \widehat{\mathbb{C}}_{\alpha_{k,l}} \widehat{\mathbb{C}}^k(\mu_*, 0) \widehat{\mathbb{C}} f_l + D \widehat{\mathbb{U}}^{l,k}(\sigma_{\mathcal{T}} D) \widehat{\mathbb{D}}^k(\mu_*, 0) \widehat{\mathbb{D}}^l(0, \mu_{**}) \widehat{\mathbb{D}} F). \end{aligned} \quad (7.5)$$

8. Порядок разрешения ячеек

Пусть ячейки сетки $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathfrak{T}$ граничат друг с другом по треугольнику \mathcal{F} . Допустим, что грань \mathcal{F} является освещенной в тетраэдре \mathcal{T}_2 и неосвещенной в тетраэдре \mathcal{T}_1 . То есть

$$\langle \mathbf{n}_1, \boldsymbol{\omega} \rangle > 0, \quad \langle \mathbf{n}_2, \boldsymbol{\omega} \rangle < 0, \quad (8.1)$$

где $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ — внешние нормали $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$, относящиеся к грани \mathcal{F} ($\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$). Это означает, что разрешение ячейки \mathcal{T}_2 в ходе метода СРР должно предшествовать разрешению ячейки \mathcal{T}_1 . Действительно, сеточные данные на грани \mathcal{F} необходимы для разрешения \mathcal{T}_2 и могут быть получены только в ходе разрешения \mathcal{T}_1 . Возникают вопросы: как расположить все ячейки сетки в нужном порядке,

который соответствует правильному разрешению, и как реализовать алгоритм этого упорядочения? Ответ на них дает теория графов.

Рассмотрим ориентированный граф, вершинами которого являются все ячейки сетки $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}$. Скажем, что вершины графа $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ связаны ребром, ведущим из \mathcal{T}_1 в \mathcal{T}_2 , если, во-первых, $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ имеют общую грань и, во-вторых, эта грань освещена в \mathcal{T}_2 и не освещена в \mathcal{T}_1 (8.1). Алгоритм расположения вершин такого графа в порядке, соответствующем ориентации ребер, называется топологической сортировкой [23]. Возможность топологической сортировки эквивалентна отсутствию циклов из стрелок. Будем предполагать, что в сетке \mathfrak{T} для рассматриваемого направления ω отсутствуют циклы из ячеек. Назовем такую сетку ациклической в направлении ω . Отметим, что циклические структуры в сетках из тетраэдров все же возможны [24].

Кратко обсудим реализацию алгоритма топологической сортировки. Сначала каждой вершине графа \mathcal{T} присваивается число $\deg \mathcal{T}$: входная степень \mathcal{T} , – количество стрелок с концом в \mathcal{T} . Ввиду отсутствия циклов найдется ячейка сетки с нулевой входной степенью. Создадим очередь и добавим в нее все те \mathcal{T} , у которых $\deg \mathcal{T} = 0$. Это в точности все те ячейки сетки, у которых все освещенные грани принадлежат освещенной границе сетки $\partial\Omega_-$. Эти ячейки разрешимы, поскольку на освещенной границе известно граничное условие. Далее, пока очередь не пуста, будем доставать ячейки \mathcal{T} из начала очереди и разрешать их. При разрешении \mathcal{T} рассмотрим все ячейки \mathcal{T}' , для которых имеется стрелка с началом в \mathcal{T} и концом в \mathcal{T}' (таких ячеек не более трех), понизим их входные степени $\deg \mathcal{T}'$ на единицу. Если после этой процедуры окажется $\deg \mathcal{T}' = 0$, то ячейка \mathcal{T}' становится разрешимой (на всех освещенных гранях известны сеточные данные) и добавляется в конец очереди.

Более подробно об обходе ячеек в характеристических методах можно прочитать в препринте [24].

9. Необходимые сведения о пространствах Соболева

Пусть $\mathcal{G} \subset \mathbb{E}^d$ — ограниченное открытое множество с кусочно-гладкой границей. Нас интересуют в основном только два случая: $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ – треугольник ($d = 2$), и $\mathcal{G} = \mathcal{T}$ – тетраэдр ($d = 3$). Пусть $s \in \mathbb{N}$. Пространство Соболева $H^s(\mathcal{G})$ гладкости s на \mathcal{G} состоит из тех функций $f \in L_2(\mathcal{G})$, для которых обобщенные производные k -го порядка $\partial_{v_1} \dots \partial_{v_k} f$ вдоль произвольного набора векторов $v_1, \dots, v_k \in T\mathbb{E}^d$, $k \leq s$ принадлежат $L_2(\mathcal{G})$. Ввиду полилинейности обобщенной производной вдоль набора векторов достаточно выбрать произвольный ортонормированный базис e_1, \dots, e_d в $T\mathbb{E}^d$ и потребовать $\partial_{v_1} \dots \partial_{v_k} f \in L_2(\mathcal{G})$ только для $v_1, \dots, v_k \in \{e_1, \dots, e_d\}$, $k \leq s$. Норма в пространстве $H^s(\mathcal{G})$ задается скалярным произведением, которое может быть введено различными эквивалентными способами. Мы будем пользоваться следующим определением, инвариантным относительно выбора ортонормированного базиса e_1, \dots, e_d :

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{H^s(\mathcal{G})} &= \int_{\mathcal{G}} (fg + \langle D^1 f, D^1 g \rangle + \dots + \langle D^s f, D^s g \rangle) d\mu = \\ &= \int_{\mathcal{G}} \left(fg + \sum_{1 \leq k \leq s} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq d} (\partial_{e_{i_1}} \dots \partial_{e_{i_k}} f) (\partial_{e_{i_1}} \dots \partial_{e_{i_k}} g) \right) d\mu. \end{aligned}$$

Проверим инвариантность: пусть e'_1, \dots, e'_d — другой ортонормированный базис, тогда $e_i = \sum_j \alpha_{ij} e'_j$, где (α_{ij}) — ортогональная матрица. Откуда получаем, что

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq d} (\partial_{e_{i_1}} \dots \partial_{e_{i_k}} f) (\partial_{e_{i_1}} \dots \partial_{e_{i_k}} g) = \\ &= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k, m_1, \dots, m_k \leq d} \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \dots \alpha_{i_k j_k} \alpha_{i_1 m_1} \dots \alpha_{i_k m_k} \times \\ &\quad \times (\partial_{e'_{j_1}} \dots \partial_{e'_{j_k}} f) (\partial_{e'_{m_1}} \dots \partial_{e'_{m_k}} g) = \\ &= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_k, m_1, \dots, m_k \leq d} \delta_{j_1 m_1} \dots \delta_{j_k m_k} (\partial_{e'_{j_1}} \dots \partial_{e'_{j_k}} f) (\partial_{e'_{m_1}} \dots \partial_{e'_{m_k}} g) = \\ &= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_k \leq d} (\partial_{e'_{j_1}} \dots \partial_{e'_{j_k}} f) (\partial_{e'_{j_1}} \dots \partial_{e'_{j_k}} g). \end{aligned}$$

Пространство Соболева $H^s(\mathcal{G})$ является гильбертовым пространством. Также вводятся соболевские полунормы: для $f \in H^s(\mathcal{G})$, $k \leq s$,

$$|f|_{k, \mathcal{G}}^2 = \int_{\mathcal{G}} \langle D^k f, D^k f \rangle d\mu = \int_{\mathcal{G}} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq d} (\partial_{e_{i_1}} \dots \partial_{e_{i_k}} f)^2 d\mu.$$

Узнать больше о пространствах Соболева можно в [25].

Масштабирование соболевских полунорм при аффинных заменах координат

Пусть \mathcal{G} — треугольник или тетраэдр, а $\hat{\mathcal{G}}$ — эталонный правильный треугольник или тетраэдр единичной меры. Пусть $Y: \hat{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ — аффинный изоморфизм. Заметим сначала, что для Y найдутся два ортонормированных базиса $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_d$ и e_1, \dots, e_d в $T\mathbb{E}^d$, для которых

$$dY \hat{e}_k = c_k e_k.$$

Действительно, рассмотрим невырожденный самосопряженный положительно определенный оператор $dY^+ dY: T\mathbb{E}^d \rightarrow T\mathbb{E}^d$. Существует ортонормированный базис $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_d$, в котором оператор $dY^+ dY$ диагонализируется: $dY^+ dY \hat{e}_k = c_k^2 \hat{e}_k$, причем числа c_k положительны. Считаем, что $c_1 \leq \dots \leq c_d$. Имеем

$$\langle dY\hat{e}_k, dY\hat{e}_m \rangle = \langle dY^+ dY\hat{e}_k, \hat{e}_m \rangle = c_k^2 \delta_{km}.$$

Итак, система векторов $dY\hat{e}_1, \dots, dY\hat{e}_d$ ортогональна и $|dY\hat{e}_k| = c_k$. При этом норма оператора $dY: T\mathbb{E}^d \rightarrow T\mathbb{E}^d$ равна c_d , а норма dY^{-1} равна c_1^{-1} . Оператор $Y^\circ: f \mapsto f \circ Y$ задает линейный изоморфизм между пространствами $H^s(\mathcal{G})$ и $H^s(\hat{\mathcal{G}})$. Посмотрим, как Y° действует на соболевские полунормы. Имеем для $f \in H^s(\mathcal{G})$, что

$$\begin{aligned} |Y^\circ f|_{k, \hat{\mathcal{G}}}^2 &= \int_{\hat{\mathcal{G}}} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq d} \left(\partial_{\hat{e}_{i_1}} \dots \partial_{\hat{e}_{i_k}} (f \circ Y) \right)^2 d\mu = \\ &= \int_{\hat{\mathcal{G}}} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq d} \left(\left(\partial_{dY\hat{e}_{i_1}} \dots \partial_{dY\hat{e}_{i_k}} f \right) \circ Y \right)^2 d\mu = \\ &= \mu(\mathcal{G})^{-1} \int_{\mathcal{G}} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq d} c_{i_1}^2 \dots c_{i_k}^2 \left(\partial_{e_{i_1}} \dots \partial_{e_{i_k}} f \right)^2 d\mu \leq \\ &\leq \mu(\mathcal{G})^{-1} \|dY\|^{2k} |f|_{k, \mathcal{G}}^2. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Совершенно аналогично доказывается, что для $\hat{f} \in H^s(\hat{\mathcal{G}})$ выполнено

$$|(Y^\circ)^{-1} \hat{f}|_{k, \mathcal{G}}^2 \leq \mu(\mathcal{G}) \|dY^{-1}\|^{2k} |\hat{f}|_{k, \hat{\mathcal{G}}}^2. \quad (9.2)$$

Для норм $\|dY\|$ и $\|dY^{-1}\|$ имеются оценки

$$\|dY\| \leq \text{diam}(\mathcal{G}) / \text{insc}(\hat{\mathcal{G}}), \quad \|dY^{-1}\| \leq \text{diam}(\hat{\mathcal{G}}) / \text{insc}(\mathcal{G}). \quad (9.3)$$

Действительно, пусть $|\hat{\mathbf{v}}| = 1$, тогда найдутся две диаметрально противоположные точки \hat{x} и \hat{y} , принадлежащие вписанному шару $\hat{\mathcal{G}}$, для которых

$$\hat{x} - \hat{y} = \text{insc}(\hat{\mathcal{G}}) \hat{\mathbf{v}},$$

$$\begin{aligned} |dY\hat{\mathbf{v}}| &= |dY(\hat{x} - \hat{y})| / \text{insc}(\hat{\mathcal{G}}) = |Y(\hat{x}) - Y(\hat{y})| / \text{insc}(\hat{\mathcal{G}}) \leq \\ &\leq \text{diam}(\mathcal{G}) / \text{insc}(\hat{\mathcal{G}}), \end{aligned}$$

что доказывает первую оценку в (9.3). Вторая доказывается аналогично.

Лемма Брамбла-Гильберта

Данный результат позволяет строить оценки точности полиномиальных приближений в пространствах Соболева. Мы сформулируем его в необходимой нам общности. Более общее утверждение вместе с доказательством можно найти в [26].

Теорема (Bramble-Hilbert lemma)

Пусть линейный непрерывный оператор $\mathbb{P}: L_2(\hat{\mathcal{G}}) \rightarrow L_2(\hat{\mathcal{G}})$ таков, что $\mathcal{P}_s(\hat{\mathcal{G}}) \subset \text{Ker}(\text{Id} - \mathbb{P})$. Тогда существует $C_{s+1} > 0$, что для всех $\hat{f} \in H^{s+1}(\hat{\mathcal{G}})$ выполнена оценка

$$\|(\text{Id} - \mathbb{P})\hat{f}\|_{L_2(\hat{\mathcal{G}})} \leq C_{s+1} |\hat{f}|_{s+1, \hat{\mathcal{G}}}. \quad (9.4)$$

Пусть теперь $\Upsilon: \hat{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ — аффинный изоморфизм. Рассмотрим оператор $(\Upsilon^\circ)^{-1}\mathbb{P}\Upsilon^\circ: L_2(\mathcal{G}) \rightarrow L_2(\mathcal{G})$. Для $f \in H^{s+1}(\mathcal{G})$ из (9.1) и (9.4) имеем оценку

$$\begin{aligned} \|(\text{Id} - (\Upsilon^\circ)^{-1}\mathbb{P}\Upsilon^\circ)f\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 &= \|(\Upsilon^\circ)^{-1}(\text{Id} - \mathbb{P})\Upsilon^\circ f\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 = \\ &= \mu(\mathcal{G}) \|(\text{Id} - \mathbb{P})\Upsilon^\circ f\|_{L_2(\hat{\mathcal{G}})}^2 \leq \mu(\mathcal{G}) C_{s+1}^2 |\Upsilon^\circ f|_{s+1, \hat{\mathcal{G}}}^2 = \\ &= C_{s+1}^2 \|d\Upsilon\|^{2(s+1)} |f|_{s+1, \mathcal{G}}^2. \end{aligned}$$

В качестве оператора \mathbb{P} рассмотрим ортогональный проектор $\mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\hat{\mathcal{F}})}: L_2(\hat{\mathcal{F}}) \rightarrow L_2(\hat{\mathcal{F}})$. Тогда по доказанному ранее $(\Upsilon^\circ)^{-1}\mathbb{P}\Upsilon^\circ$ есть $\mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F})}: L_2(\mathcal{F}) \rightarrow L_2(\mathcal{F})$. Получаем из (9.3), что для $f \in H^{s+1}(\mathcal{F})$, $s = 0, \dots, 3$ выполнено

$$\|(\text{Id} - \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F})})f\|_{L_2(\mathcal{F})} \leq C_{\text{ВН}, s+1} \text{diam}(\mathcal{F})^{s+1} |f|_{s+1, \mathcal{F}}. \quad (9.5)$$

То есть чем выше класс гладкости $s = 0, \dots, 3$ функции f , тем выше порядок точности приближения f многочленом $\mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F})}f$ третьей степени. При этом максимальный возможный порядок точности такого приближения равен 4. Для $\mathcal{G} = \mathcal{T}$ может быть получена аналогичная (9.5) оценка. Константа ошибки $C_{\text{ВН}, s}$ зависит только от s и d .

Теорема Соболева о следе

Следующий результат об оценке следа функции из пространства Соболева на границе области мы опять же сформулируем лишь в необходимой нам общности. Имеется более тонкий результат о непрерывности оператора следа в норме $H^{1/2}$. Однако данная норма хуже масштабируется при аффинных заменах чем используемая нами норма H^1 . За более полной формулировкой и доказательством данного утверждения можно обратиться к [25].

Теорема (Соболева о следе)

Пусть $\gamma_k: \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_k$ — аффинный изоморфизм. Тогда оператор $C^1(\tilde{\mathcal{F}}) \ni \hat{f} \mapsto \hat{f}|_{\hat{\mathcal{F}}_k} \circ \gamma_k \in C^1(\tilde{\mathcal{F}})$ ограничения функций на грань $\hat{\mathcal{F}}_k \subset \hat{\mathcal{F}}$ продолжается до линейного непрерывного оператора $H^1(\hat{\mathcal{F}}) \rightarrow L_2(\hat{\mathcal{F}})$. То есть существует такое $C_0 > 0$, что для всех $\hat{f} \in H^1(\hat{\mathcal{F}})$ выполнено неравенство

$$\|\hat{f}|_{\hat{\mathcal{F}}_k} \circ \gamma_k\|_{L_2(\hat{\mathcal{F}})} \leq C_0 \|\hat{f}\|_{H^1(\hat{\mathcal{F}})}. \quad (9.6)$$

Из (9.6) следует, что для всех $\hat{f} \in H^{s+2}(\hat{\mathcal{F}})$ выполнено

$$|\hat{f}|_{\hat{\mathcal{F}}_k} \circ \gamma_k|_{s+1, \hat{\mathcal{F}}}^2 \leq C_{s+1}^2 \left(|\hat{f}|_{s+1, \hat{\mathcal{F}}}^2 + |\hat{f}|_{s+2, \hat{\mathcal{F}}}^2 \right).$$

С помощью (9.1) и (9.2) получим, что для $\gamma_k = \Phi_{\mathcal{T}}^{-1} \circ \Psi_{\mathcal{F}}$ и $f \in H^{s+2}(\mathcal{T})$ имеется оценка

$$\begin{aligned} |f|_{\mathcal{F}}|_{s+1, \mathcal{F}}^2 &\leq \mu(\mathcal{F}) \|d\Psi_{\mathcal{F}}^{-1}\|^{2(s+1)} |(f \circ \Phi_{\mathcal{T}})|_{\hat{\mathcal{F}}_k} \circ \gamma_k|_{s+1, \hat{\mathcal{F}}}^2 \leq \\ &\leq C_{s+1}^2 \mu(\mathcal{F}) \|d\Psi_{\mathcal{F}}^{-1}\|^{2(s+1)} \left(|f \circ \Phi_{\mathcal{T}}|_{s+1, \hat{\mathcal{F}}}^2 + |f \circ \Phi_{\mathcal{T}}|_{s+2, \hat{\mathcal{F}}}^2 \right) \leq \\ &\leq C_{s+1}^2 \mu(\mathcal{F}) \mu(\mathcal{T})^{-1} (\|d\Psi_{\mathcal{F}}^{-1}\| \|d\Phi_{\mathcal{T}}\|)^{2(s+1)} \left(|f|_{s+1, \mathcal{T}}^2 + \|d\Phi_{\mathcal{T}}\|^2 |f|_{s+2, \mathcal{T}}^2 \right). \end{aligned}$$

Заметим, что $\|d\Psi_{\mathcal{F}}^{-1}\| \leq \|d\Phi_{\mathcal{T}}^{-1}\|$ и $\mu(\mathcal{F})\mu(\mathcal{T})^{-1} = 3h_{\mathcal{F}}^{-1} \leq 3\text{insec}(\mathcal{T})^{-1}$, поэтому при выполнении условия регулярности (2.1) и ввиду оценки (9.3) получаем

$$\begin{aligned} |f|_{\mathcal{F}}|_{s+1, \mathcal{F}} &\leq \\ &\leq C_{\text{TR}, s+1} r^{s+3/2} \text{diam}(\mathcal{T})^{-1/2} \left(|f|_{s+1, \mathcal{T}}^2 + \text{diam}(\mathcal{T})^2 |f|_{s+2, \mathcal{T}}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Здесь $C_{\text{TR}, s}$ — константа ошибки, зависящая только от s . Из (9.6) также можно получить оценку вида (9.7), взяв $s = -1$. Объединяя вместе (9.5) и (9.7), заключаем, что для $f \in H^{s+2}(\mathcal{T})$, $s = 0, 1, 2, 3$ и достаточно малых ячеек

$$\begin{aligned} \|(\text{Id} - \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F})})(f|_{\mathcal{F}})\|_{L_2(\mathcal{F})} &\leq \\ &\leq C_{\text{BH}, s+1} C_{\text{TR}, s+1} r^{s+3/2} \text{diam}(\mathcal{T})^{s+1/2} \|f\|_{H^{s+2}(\mathcal{T})}. \end{aligned}$$

10. Оценка точности метода СРР

Обозначим за $\mathfrak{T}^1 \subset \mathfrak{T}$ подмножество ячеек сетки, которые разрешимы на момент начала расчета, то есть те ячейки \mathcal{T} , освещенные границы $\partial\mathcal{T}_-$ которых целиком принадлежат освещенной границе $\partial\Omega_-$ расчетной области: $\partial\mathcal{T}_- \subset \partial\Omega_- = \partial(\cup\{\bar{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \in \mathfrak{T}\})_-$. Аналогично $\mathfrak{T}^2 \subset \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{T}^1$ состоит из тех ячеек \mathcal{T} , для которых $\partial\mathcal{T}_- \subset \partial(\cup\{\bar{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \in \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{T}^1\})_-$. И так далее. Вся сетка разбивается на N частей $\mathfrak{T}^1, \dots, \mathfrak{T}^N$. Ацикличность сетки в направлении ω гарантирует наличие элементов в множестве \mathfrak{T}^k на каждом шаге k . Ячейки \mathfrak{T}^k могут быть разрешены независимо друг от друга на k -м шаге расчета. Через $\Omega^1, \dots, \Omega^N$ будем обозначать внутренности объединений $\mathfrak{T}^1, \dots, \mathfrak{T}^N$:

$$\Omega^k = \text{Int}(\cup\{\bar{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \in \mathfrak{T}^k\}).$$

Заметим, что $\text{diam}_\omega(\Omega^k) = \max_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}^k} \text{diam}_\omega(\mathcal{T})$. Вместе с локальным условием регулярности (2.1) будем пользоваться следующим глобальным условием: при некотором $q > 0$ выполнено

$$\sum_{1 \leq k \leq N} \text{diam}_\omega(\Omega^k) \leq q \text{diam}_\omega(\Omega). \quad (10.1)$$

Пусть априори известно, что ограничения точного решения φ_{ex} задачи (2.2) принадлежат пространствам $H^{s+2}(\mathcal{T})$ для всех ячеек $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}$. Мы рассматриваем случаи $s = 0, 1, 2, 3$. Пусть выполнены оценки (2.3) и условия регулярности (2.1) и (10.1), а φ обозначает численное решение, полученное в ходе применения метода СРР. Оценим норму разности $\varphi_{\text{ex}} - \varphi$ на неосвещенной границе $\partial\Omega_+^k$. В силу неравенства треугольника имеем

$$\begin{aligned} & \|\varphi_{\text{ex}} - \varphi\|_{L_2(\partial\Omega_+^k, |\langle \mathbf{n}, \omega \rangle|)} \leq \\ & \leq \left(\sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}^k} \sum_{\mathcal{F} \subset \partial\mathcal{T}_+} |\langle \mathbf{n}_{\mathcal{F}}, \omega \rangle| \left\| (\text{Id} - \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F})}) \varphi_{\text{ex}} \right\|_{L_2(\mathcal{F})}^2 \right)^{1/2} + \\ & + \left(\sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}^k} \sum_{\mathcal{F} \subset \partial\mathcal{T}_+} |\langle \mathbf{n}_{\mathcal{F}}, \omega \rangle| \left\| \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F})} (\mathbb{T}_{\sigma_{\text{ex}}} - \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}) (\varphi_{\text{ex}}, F_{\text{ex}}) \right\|_{L_2(\mathcal{F})}^2 \right)^{1/2} + \\ & + \left(\sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}^k} \sum_{\mathcal{F} \subset \partial\mathcal{T}_+} |\langle \mathbf{n}_{\mathcal{F}}, \omega \rangle| \left\| \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F})} \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}} (\varphi_{\text{ex}} - \varphi_{\partial\mathcal{T}_-}, F_{\text{ex}} - F_{\mathcal{T}}) \right\|_{L_2(\mathcal{F})}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Последовательно оценим каждое из трех слагаемых, входящих в правую часть полученной оценки. Для первого слагаемого, пользуясь (2.1), (9.5) и (9.7), и учитывая $\text{diam}(\mathcal{T}) \leq r \text{diam}_\omega(\mathcal{T})$, получим

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{I}^k} \sum_{\mathcal{F} \subset \partial \mathcal{T}_+} |\langle \mathbf{n}_{\mathcal{F}}, \boldsymbol{\omega} \rangle| \| (\text{Id} - \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F})}) \varphi_{\text{ex}} \|_{L_2(\mathcal{F})}^2 \right)^{1/2} \leq \\
& \leq C_{\text{BH},s+1} \left(\sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{I}^k} \sum_{\mathcal{F} \subset \partial \mathcal{T}_+} \text{diam}(\mathcal{F})^{2(s+1)} |\varphi_{\text{ex}}|_{\mathcal{F}}^2_{s+1,\mathcal{F}} \right)^{1/2} \leq \\
& \leq \sqrt{3} C_{\text{BH},s+1} C_{\text{TR},s+1} r^{s+3/2} \times \\
& \times \left(\sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{I}^k} \text{diam}(\mathcal{T})^{2s+1} (|\varphi_{\text{ex}}|_{s+1,\mathcal{T}}^2 + \text{diam}(\mathcal{T})^2 |\varphi_{\text{ex}}|_{s+2,\mathcal{T}}^2) \right)^{1/2} \leq \\
& \leq \sqrt{3} C_{\text{BH},s+1} C_{\text{TR},s+1} r^{s+2} h^s \left(\text{diam}_{\boldsymbol{\omega}}(\Omega^k) \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{I}^k} \|\varphi_{\text{ex}}\|_{H^{s+2}(\mathcal{T})}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Для второго слагаемого в силу (1.8), (2.3) и (9.7) заключаем

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{I}^k} \sum_{\mathcal{F} \subset \partial \mathcal{T}_+} |\langle \mathbf{n}_{\mathcal{F}}, \boldsymbol{\omega} \rangle| \| \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F})} (\mathbb{T}_{\sigma_{\text{ex}}} - \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}) (\varphi_{\text{ex}}, F_{\text{ex}}) \|_{L_2(\mathcal{F})}^2 \right)^{1/2} \leq \\
& \leq \left(\sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{I}^k} \sum_{\mathcal{F} \subset \partial \mathcal{T}_+} |\langle \mathbf{n}_{\mathcal{F}}, \boldsymbol{\omega} \rangle| \| (\mathbb{T}_{\sigma_{\text{ex}}} - \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}) (\varphi_{\text{ex}}, F_{\text{ex}}) \|_{L_2(\mathcal{F})}^2 \right)^{1/2} = \\
& = \left(\sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{I}^k} \| (\mathbb{T}_{\sigma_{\text{ex}}} - \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}) (\varphi_{\text{ex}}, F_{\text{ex}}) \|_{L_2(\partial \mathcal{T}_+, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)}^2 \right)^{1/2} \leq \\
& \leq \left(\sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{I}^k} \|\sigma_{\text{ex}} - \sigma_{\mathcal{T}}\|_{L_{\infty}(\mathcal{T})}^2 2 \text{diam}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathcal{T})^2 \times \right. \\
& \quad \left. \times (\|\varphi_{\text{ex}}\|_{L_2(\partial \mathcal{T}_-, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)}^2 + \|F_{\text{ex}}\|_{L_2(\mathcal{T})}^2) \right)^{1/2} \leq \\
& \leq \sqrt{2} \varepsilon_{\sigma} \left(\sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{I}^k} \text{diam}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathcal{T})^2 (\|\varphi_{\text{ex}}\|_{L_2(\partial \mathcal{T}_-, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)}^2 + \|F_{\text{ex}}\|_{L_2(\mathcal{T})}^2) \right)^{1/2} \leq \\
& \leq \sqrt{2} \varepsilon_{\sigma} \left(\text{diam}_{\boldsymbol{\omega}}(\Omega^k) \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{I}^k} 3 C_{\text{TR},0}^2 r \|\varphi_{\text{ex}}\|_{H^1(\mathcal{T})}^2 + h \|F_{\text{ex}}\|_{L_2(\mathcal{T})}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Для третьего слагаемого в силу (1.4) видим, что

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{I}^k} \sum_{\mathcal{F} \subset \partial \mathcal{T}_+} |\langle \mathbf{n}_{\mathcal{F}}, \boldsymbol{\omega} \rangle| \| \mathbb{P}_{\mathcal{P}_3(\mathcal{F})} \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}} (\varphi_{\text{ex}} - \varphi_{\partial \mathcal{T}_-}, F_{\text{ex}} - F_{\mathcal{T}}) \|_{L_2(\mathcal{F})}^2 \right)^{1/2} \leq \\
& \leq \left(\sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{I}^k} \sum_{\mathcal{F} \subset \partial \mathcal{T}_+} |\langle \mathbf{n}_{\mathcal{F}}, \boldsymbol{\omega} \rangle| \| \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}} (\varphi_{\text{ex}} - \varphi_{\partial \mathcal{T}_-}, F_{\text{ex}} - F_{\mathcal{T}}) \|_{L_2(\mathcal{F})}^2 \right)^{1/2} = \\
& = \left(\sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{I}^k} \| \mathbb{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}} (\varphi_{\text{ex}} - \varphi_{\partial \mathcal{T}_-}, F_{\text{ex}} - F_{\mathcal{T}}) \|_{L_2(\partial \mathcal{T}_+, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)}^2 \right)^{1/2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|\mathbb{T}_\sigma(\varphi_{\text{ex}} - \varphi, F_{\text{ex}} - F)\|_{L_2(\partial\Omega_+^k, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)} \leq \\
&\leq \|\varphi_{\text{ex}} - \varphi\|_{L_2(\partial\Omega_+^k, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)} + \text{diam}_\omega(\Omega^k) \|F_{\text{ex}} - F\|_{L_2(\Omega^k)} \leq \\
&\leq \|\varphi_{\text{ex}} - \varphi\|_{L_2(\partial\Omega_+^k, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)} + \hbar^{1/2} \left(\text{diam}_\omega(\Omega^k) \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}^k} \|F_{\text{ex}} - F_{\mathcal{T}}\|_{L_2(\mathcal{T})}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Собирая все вместе и пользуясь неравенством Коши-Буняковского, получаем, с учетом $1 + 3\text{diam}_\omega(\Omega^k) \leq e^{3\text{diam}_\omega(\Omega^k)}$, что

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{\text{ex}} - \varphi\|_{L_2(\partial\Omega_+^k, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)}^2 &\leq e^{3\text{diam}_\omega(\Omega^k)} \left(\|\varphi_{\text{ex}} - \varphi\|_{L_2(\partial\Omega_+^k, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)}^2 + \right. \\
&+ \hbar \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}^k} \|F_{\text{ex}} - F_{\mathcal{T}}\|_{L_2(\mathcal{T})}^2 + 6\varepsilon_\sigma^2 C_{\text{TR},0}^2 r \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}^k} \|\varphi_{\text{ex}}\|_{H^1(\mathcal{T})}^2 + \\
&+ 2\varepsilon_\sigma^2 \hbar \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}^k} \|F_{\text{ex}}\|_{L_2(\mathcal{T})}^2 + 3C_{\text{BH},s+1}^2 C_{\text{TR},s+1}^2 r^{2s+4} \hbar^{2s} \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}^k} \|\varphi_{\text{ex}}\|_{H^{s+2}(\mathcal{T})}^2 \left. \right).
\end{aligned}$$

Заметим, что неосвещенную границу области $\Omega \setminus \Omega^N$ можно получить из неосвещенной границы $\partial\Omega_+$, заменив участок $\partial\Omega_+^N$ на $\partial\Omega_-^N$. В неосвещенную границу области $\Omega \setminus \Omega^N$ входит участок $\partial\Omega_+^{N-1}$. Если его заменить на $\partial\Omega_-^{N-1}$, то получим неосвещенную границу области $\Omega \setminus (\Omega^N \cup \Omega^{N-1})$. Процесс можно продолжить. После прохождения всех слоев $\Omega^N, \Omega^{N-1}, \dots, \Omega^1$ в обратном порядке останется лишь освещенная граница $\partial\Omega_-$. Теперь получим оценку для нормы $\varphi_{\text{ex}} - \varphi$ на неосвещенной границе области $\partial\Omega_+$, воспользовавшись (10.1):

$$\begin{aligned}
&\|\varphi_{\text{ex}} - \varphi\|_{L_2(\partial\Omega_+, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)}^2 \leq \\
&\leq e^{3\text{diam}_\omega(\Omega^N)} \left(\|\varphi_{\text{ex}} - \varphi\|_{L_2(\partial(\Omega \setminus \Omega^N)_+, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)}^2 + \hbar \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}^N} \|F_{\text{ex}} - F_{\mathcal{T}}\|_{L_2(\mathcal{T})}^2 + \right. \\
&+ 6\varepsilon_\sigma^2 C_{\text{TR},0}^2 r \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}^N} \|\varphi_{\text{ex}}\|_{H^1(\mathcal{T})}^2 + 2\varepsilon_\sigma^2 \hbar \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}^N} \|F_{\text{ex}}\|_{L_2(\mathcal{T})}^2 + \\
&+ 3C_{\text{BH},s+1}^2 C_{\text{TR},s+1}^2 r^{2s+4} \hbar^{2s} \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}^N} \|\varphi_{\text{ex}}\|_{H^{s+2}(\mathcal{T})}^2 \left. \right) \leq \\
&\leq e^{3(\text{diam}_\omega(\Omega^N) + \text{diam}_\omega(\Omega^{N-1}))} \left(\|\varphi_{\text{ex}} - \varphi\|_{L_2(\partial(\Omega \setminus (\Omega^N \cup \Omega^{N-1}))_+, |\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)}^2 + \right. \\
&+ \hbar \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}^N \cup \mathfrak{T}^{N-1}} \|F_{\text{ex}} - F_{\mathcal{T}}\|_{L_2(\mathcal{T})}^2 + 6\varepsilon_\sigma^2 C_{\text{TR},0}^2 r \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}^N \cup \mathfrak{T}^{N-1}} \|\varphi_{\text{ex}}\|_{H^1(\mathcal{T})}^2 + \\
&+ 2\varepsilon_\sigma^2 \hbar \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}^N \cup \mathfrak{T}^{N-1}} \|F_{\text{ex}}\|_{L_2(\mathcal{T})}^2 + \\
&+ 3C_{\text{BH},s+1}^2 C_{\text{TR},s+1}^2 r^{2s+4} \hbar^{2s} \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}^N \cup \mathfrak{T}^{N-1}} \|\varphi_{\text{ex}}\|_{H^{s+2}(\mathcal{T})}^2 \left. \right) \leq \dots \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq e^{3q \text{diam}_\omega(\Omega)} \left(\|f_{\text{ex}} - f\|_{L_2(\partial\Omega_-, |\langle n, \omega \rangle|)}^2 + \hbar \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{I}} \|F_{\text{ex}} - F_{\mathcal{T}}\|_{L_2(\mathcal{T})}^2 + \right. \\
&\quad + 2\varepsilon_\sigma^2 \hbar \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{I}} \|F_{\text{ex}}\|_{L_2(\mathcal{T})}^2 + 6\varepsilon_\sigma^2 C_{\text{TR},0}^2 r \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{I}} \|\varphi_{\text{ex}}\|_{H^1(\mathcal{T})}^2 + \\
&\quad \left. + 3C_{\text{BH},s+1}^2 C_{\text{TR},s+1}^2 r^{2s+4} \hbar^{2s} \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{I}} \|\varphi_{\text{ex}}\|_{H^{s+2}(\mathcal{T})}^2 \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, можно сформулировать в виде теоремы полученный только что основной теоретический результат данной работы:

Теорема (о точности метода СРР)

Пусть ациклическая в направлении ω сетка \mathfrak{I} удовлетворяет условиям регулярности (2.1) и (10.1). Пусть точное решение φ_{ex} задачи (2.2) принадлежит пространству Соболева $H^{s+2}(\mathcal{T})$ в каждой ячейке сетки $\mathcal{T} \in \mathfrak{I}$, где s есть одно из чисел $0, 1, 2, 3$. Пусть заданы приближения данных задачи (2.4), удовлетворяющие неравенствам (2.3). Тогда численное решение φ , полученное методом СРР, удовлетворяет следующей оценке точности на неосвещенной границе области:

$$\begin{aligned}
&\|\varphi_{\text{ex}} - \varphi\|_{L_2(\partial\Omega_+, |\langle n, \omega \rangle|)}^2 \leq \\
&\leq e^{3q \text{diam}_\omega(\Omega)} \left(\varepsilon_f^2 + \hbar \varepsilon_F^2 + 2\varepsilon_\sigma^2 \hbar \|F_{\text{ex}}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \right. \\
&\quad + 6\varepsilon_\sigma^2 C_{\text{TR},0}^2 r \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{I}} \|\varphi_{\text{ex}}\|_{H^1(\mathcal{T})}^2 + \\
&\quad \left. + 3C_{\text{BH},s+1}^2 C_{\text{TR},s+1}^2 r^{2s+4} \hbar^{2s} \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{I}} \|\varphi_{\text{ex}}\|_{H^{s+2}(\mathcal{T})}^2 \right). \tag{10.2}
\end{aligned}$$

Оценка (10.2) показывает, что наибольший вклад в ошибку метода вносит погрешность ε_σ кусочно-постоянного приближения коэффициента поглощения. Погрешности ε_f и ε_F кусочно-полиномиальных приближений граничного условия и источника при дополнительных предположениях о гладкости f_{ex} и F_{ex} можно также оценить сверху при помощи (9.5), пользуясь той или иной интерполяцией соответственно третьего и второго порядков для задания этих приближений. А именно, если $F_{\text{ex}} \in H^s(\mathcal{T})$ и $f_{\text{ex}} \in H^s(\mathcal{F})$ ($s = 0, 1, 2, 3$) для всех $\mathcal{T} \subset \Omega$ и $\mathcal{F} \subset \partial\Omega_-$, то можно считать, что

$$\varepsilon_f^2 \leq C_{\text{BH},s}^2 \hbar^{2s} \sum_{\mathcal{F} \subset \partial\Omega_-} \|f_{\text{ex}}\|_{H^s(\mathcal{F})}^2, \quad \varepsilon_F^2 \leq C_{\text{BH},s}^2 \hbar^{2s} \sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{I}} \|F_{\text{ex}}\|_{H^s(\mathcal{T})}^2.$$

Если по каким-либо априорным предположениям мы можем пренебречь погрешностью ε_σ , то в правой части оценки (10.2) останутся только члены с ε_f , ε_F и $\sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}} \|\varphi_{\text{ex}}\|_{H^{s+2}(\mathcal{T})}^2$. При наилучшем стечении обстоятельств:

$$\varepsilon_\sigma \approx 0, \quad \varphi_{\text{ex}} \in H^5(\mathcal{T}), \quad F_{\text{ex}} \in H^3(\mathcal{T}), \quad f_{\text{ex}} \in H^3(\mathcal{F}),$$

и при выполнении остальных условий теоремы метод будет иметь третий порядок точности по h . В худшем случае при условиях:

$$\varepsilon_\sigma \gg 0, \quad \sigma_{\text{ex}} \in C^1(\bar{\mathcal{T}}), \quad \varphi_{\text{ex}} \in H^3(\mathcal{T}),$$

$$F_{\text{ex}} \in H^1(\mathcal{T}), \quad f_{\text{ex}} \in H^1(\mathcal{F}),$$

имеется первый порядок точности по h .

В (10.2) мы привели оценку точности для $\varphi_{\text{ex}} - \varphi$ на неосвещенной границе $\partial\Omega_+$. Тем же самым способом мы могли бы оценить $\varphi_{\text{ex}} - \varphi$ на неосвещенной границе любой из областей $\Omega \setminus (\Omega^N \cup \Omega^{N-1} \cup \dots \cup \Omega^{k+1})$. В итоге мы имеем возможность выделять оценки $\varphi_{\text{ex}} - \varphi$ по норме $L_2(\mathcal{F}, |\langle \mathbf{n}_{\mathcal{F}}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)$ на любых гранях \mathcal{F} . Отметим, что сеточные величины $\text{Ev}_{\mathcal{F}, y_i} \varphi$, $\text{Dr}_{\mathcal{F}, y_i \rightarrow y_j} \varphi$, $\text{Av}_{\mathcal{F}} \varphi$ используются нами лишь для хранения численного решения φ на гранях \mathcal{F} и в большинстве своем не имеют смысла для точного решения φ_{ex} . Однако, $\text{Av}_{\mathcal{F}}$, являясь линейным непрерывным функционалом на $L_2(\mathcal{F})$, удовлетворяет неравенству

$$|\text{Av}_{\mathcal{F}}(\varphi_{\text{ex}} - \varphi)| = \mu(\mathcal{F})^{-1} \left| \int_{\mathcal{F}} (\varphi_{\text{ex}} - \varphi) d\mu \right| \leq \mu(\mathcal{F})^{-1/2} \|\varphi_{\text{ex}} - \varphi\|_{L_2(\mathcal{F})}.$$

Далее, поскольку выполнено

$$\mu(\mathcal{F}) = 3\mu(\mathcal{T})h_{\mathcal{F}}^{-1} \geq 4\pi(\text{insc}(\mathcal{T})/2)^3 \text{diam}(\mathcal{T})^{-1} \geq r^{-3} \text{diam}(\mathcal{T})^2,$$

то можно заключить, что

$$|\langle \mathbf{n}_{\mathcal{F}}, \boldsymbol{\omega} \rangle \text{Av}_{\mathcal{F}}(\varphi_{\text{ex}} - \varphi)| \leq r^{3/2} \text{diam}(\mathcal{T})^{-1} \|\varphi_{\text{ex}} - \varphi\|_{L_2(\mathcal{F}, |\langle \mathbf{n}_{\mathcal{F}}, \boldsymbol{\omega} \rangle|)}.$$

Данная оценка показывает, что поток численного решения $\langle \mathbf{n}_{\mathcal{F}}, \boldsymbol{\omega} \rangle \text{Av}_{\mathcal{F}} \varphi$ на грань сетки \mathcal{F} является осмысленной величиной, приближающей реальное значение $\langle \mathbf{n}_{\mathcal{F}}, \boldsymbol{\omega} \rangle \text{Av}_{\mathcal{F}} \varphi_{\text{ex}}$. Порядок точности такого приближения на единицу меньше порядка точности метода СРР.

Можно было бы увеличить точность метода СРР, разрешив более подробные равномерные приближения коэффициента поглощения σ_{ex} в ячейках. Например, в виде многочленов второй степени для достижения безусловного третьего порядка точности метода. Однако такое изменение повлекло бы существенное осложнение программной реализации, основанное на

безнадежности аналитического вычисления элементов матриц $\hat{U}^{k,l}, \hat{V}^k$ при больших оптических толщинах. Чисто математически учесть пространственное распределение коэффициента поглощения представляется возможным, однако с практической точки зрения это, во-первых, сильно удорожает вычислительную стоимость метода, во-вторых, требует знания распределения газодинамических параметров в ячейке с тем же порядком, что, скорее всего, невозможно.

Из (10.2) можно заметить, что для достижения максимального (третьего при некоторых условиях) порядка точности метода аппроксимацию правой части F_{ex} достаточно проводить многочленами второй степени (изначально предполагалось, что эта степень должна быть третья). Этот важный теоретический результат позволяет на практике значительно сократить затраты времени и памяти, сохранив при этом точность.

В качестве следующего шага в работе отметим реализацию итераций по рассеянию. Предлагается приближать интеграл рассеяния с помощью тех или иных кубатурных формул на сфере. Потребуется рассмотрение наряду с разрешающим оператором (1.4) \mathbb{T}_σ также и оператора (1.3) \mathbb{S}_σ нахождения решения задачи переноса внутри ячейки, а также ортогонального проектора $\mathbb{P}_{\mathcal{P}_2(\hat{\mathcal{J}})}: L_2(\hat{\mathcal{J}}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\hat{\mathcal{J}})$.

Выводы

В работе описан проекционно-характеристический метод решения задачи переноса излучения для заданного углового направления на неструктурированной сетке из тетраэдров. Метод основан на использовании оператора ортогонального проектирования функций, заданных на гранях сетки, на пространство многочленов степени не выше третьей. Для данного метода доказана устойчивость, получены и исследованы оценки погрешности в случае достаточно высокой гладкости точного решения. Показан третий порядок сходимости при дополнительных условиях.

В отличие от интерполяционно-характеристических схем [3,4] высокого порядка предлагаемый метод обладает рядом преимуществ, сохраняя достоинства интерполяционных схем. Во-первых, сохраняется однократное вычисление экспоненты для каждой ячейки. Во-вторых, по-прежнему работает быстрый алгоритм обхода ячеек. В-третьих, предлагаемый метод ориентирован на привязку решения к граням и не предполагает согласованности на общих элементах, поэтому не возникает проблем нахождения «нормалей» в вершинах при реализации условий отражения. При этом имеет место однозначность в использовании коэффициентов поглощения и отражения для данной ячейки (в схемах [3,4] предполагалась согласованность численного решения на общих элементах соседних ячеек, в связи с чем возникала неоднозначность).

Список литературы

1. *Shilkov A.V.*, “Generalized Multigroup Approximation and Lebesgue Averaging Method in Particle Transport Problems”, *Transp. Theory and Stat Physics*, 1994, v.23, No 6, p.781-814.
2. *Е. Н. Аристова, М. Н. Герцев, А. В. Шильков*, “Метод лебеговского осреднения в серийных расчетах атмосферной радиации”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2017, 57:6, С. 1033–1047.
3. *Е. Н. Аристова, Г. О. Астафуров*, “Метод коротких характеристик второго порядка для решения уравнения переноса на сетке из тетраэдров”, *Математическое моделирование*, 2016, т. 28, № 7, с. 20-30.
4. *Е. Н. Аристова, Г. О. Астафуров*, “Характеристическая схема для решения уравнения переноса на неструктурированной сетке с барицентрической интерполяцией”, *Математическое моделирование*, 2018, т.30, № 9, с. 33-50.
5. *Yabe T., Aoki T., Sakaguchi G.*, "The compact CIP (cubic-interpolated pseudo-particle) method as a general hyperbolic solver", *Computers & Fluids*, 1991, 19(3/4), P. 421-431.
6. *Tsai T.L. Chiang S.W. and Yang J.G.*, "Characteristics method with cubic-spline interpolation for open channel flow computation", *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, 2004, 46, P. 663–683.
7. *Yabe T., Xiao F., Utsumi T.*, "The constrained interpolation profile method for multiphase analysis", *Journal of Computational Physics*, 2001, 169(2), 556–593
8. *T. Aoki*, "Stability and accuracy of the cubic interpolated propagation scheme", *Comput. Phys. Commun.*, 1997, 101(1-2), P. 9-20.
9. *В. И. Голубев, И. Б. Петров, Н. И. Хохлов*, “Компактные сеточно-характеристические схемы повышенного порядка точности для трехмерного линейного уравнения переноса”, *Математическое моделирование*, 2016, т. 28, № 2, с. 123-132.
10. *И. Б. Петров, А. В. Фаворская, Н. И. Хохлов*, “Сеточно-характеристический метод на системах вложенных иерархических сеток и его применение для исследования сейсмических волн”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2017, 57(11), С. 1804–1811.
11. *Е. Н. Аристова, Г. И. Овчаров*, “Эрмитова характеристическая схема для неоднородного линейного уравнения переноса”, *Математическое моделирование*, 2020, т.32, №3, с. 3-18.
12. *Е. Н. Аристова, Г. О. Астафуров*, “Сравнение диссипативно-дисперсионных свойств компактных разностных схем для численного решения уравнения адвекции”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2021, т.61, № 11, с.1747-1758.
13. *Б. В. Рогов, М. Н. Михайловская*, "Бикомпактные схемы четвертого порядка аппроксимации для гиперболических уравнений," *ДАН*, 2010, т.430, №4, с.470-474.
14. *Б. В. Рогов, М. Н. Михайловская*, “Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса”, *Матем. моделирование*, 2011, 23:6, С. 98–110.

15. *Б. В. Rogov, М. Н. Михайловская*, “Монотонные компактные схемы бегущего счета для систем уравнений гиперболического типа”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2012, 52:4, С. 672–695.
16. *Е. Н. Аристова, Б. В. Rogov*, “О реализации граничных условий в бикомпактных схемах для линейного уравнения переноса,” Матем. моделирование, 2012, 24:10, С. 3–14.
17. *E. N. Aristova and B. V. Rogov*, “Bicom pact scheme for the multidimensional stationary linear transport equation” Appl. Numer. Math., 2015, 93, С. 3–14.
18. *Е. Н. Аристова, Б. В. Rogov, А. В. Чикиткин*, “Оптимальная монотонизация высокоточной бикомпактной схемы для нестационарного многомерного уравнения переноса”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2016, 56:6, С. 973–988.
19. *Chikitkin A. V., Rogov B. V.*, “Family of central bicom pact schemes with spectral resolution property for hyperbolic equations”, Applied Numerical Mathematics, 2019, Vol. 142, P. 151–170.
20. *О. В. Николаева*, “Нодальная сеточная схема для уравнения переноса излучения на неструктурированной тетраэдральной сетке”, Матем. моделирование, 2015, 27:5, С. 80–96.
21. *V. Agoshkov*, Boundary Value Problems for Transport Equation, Springer, 1998.
22. *В. С. Владимиров*, “Математические задачи односкоростной теории переноса частиц”, Тр. МИАН СССР, 61, Изд-во АН СССР, М., 1961, С. 3–158.
23. *Дасгунта С., Пападимитриу Х., Вазирани У.*, Алгоритмы, МЦНМО, 2014.
24. *Г. О. Астафуров*, “Алгоритм обхода ячеек в характеристических методах решения уравнения переноса”, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2018, 193, 24 с.
25. *Adams R., Fournier J.*, Sobolev Spaces, Canada, Elsevier, 2003.
26. *Ciarlet P.*, The finite element method for elliptic problems, Classics in applied mathematics, 2002.

Оглавление

Список обозначений.....	3
Введение	5
1. Разрешающий оператор задачи переноса в выпуклой области.....	7
Краевая задача переноса.....	7
Обоснование замены переменных в поверхностном интеграле.....	10
О приближении коэффициента поглощения постоянной функцией.....	11
Постановка задачи.....	13
3. Обозначения, сеточные величины и полиномиальные базисы	15
Баричесентрические координаты.....	15
Мономиальные базисы	16
Сеточные величины	17
Биортогональные базисы.....	19
4. Матрицы и проекционные операторы	20
Матрицы \hat{C} и \hat{D}	20
Матрица \hat{G}^{-1} и ортогональные проекторы $P_{P_3(\hat{F})}$	21
Матрицы $\hat{C}^l(\mu)$ и $\hat{D}^k(v)$	22
Специальные функции ${}_1F_1^{\text{reg}}$ и ${}_2F_2^{\text{reg}}$	26
Матрицы $\hat{V}^l(t)$	27
Матрицы $\hat{U}^{k,n}(t)$	28
5. Разрешение ячеек первого типа.....	29
Матричные формулы для программной реализации.....	31
6. Разрешение ячеек третьего типа.....	35
Матричные формулы для программной реализации.....	35
7. Разрешение ячеек второго типа	37
Матричные формулы для программной реализации.....	38
8. Порядок разрешения ячеек.....	42
9. Необходимые сведения о пространствах Соболева	43
Масштабирование соболевских полунорм при аффинных заменах координат	44
Лемма Брамбла-Гильберта	45
Теорема Соболева о следе	46
10. Оценка точности метода СРР.....	48
Выводы	53
Список литературы.....	54