



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Е.В. Зипунова, А.Ю. Перепёлкина

Разработка явных и
консервативных схем для
решеточных уравнений
Больцмана с адаптивным
переносом

Статья доступна по лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Зипунова Е.В., Перепёлкина А.Ю. Разработка явных и консервативных схем для решеточных уравнений Больцмана с адаптивным переносом // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 7. 20 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2022-7>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-7>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук

Е.В. Зипунова, А.Ю. Перепёлкина

**Разработка явных и консервативных
схем для решеточных уравнений
Больцмана с адаптивным переносом**

Москва
2022

Е.В. Зипунова, А.Ю. Перепёлкина

Разработка явных и консервативных схем для решеточных уравнений
Больцмана с адаптивным переносом

Метод решеточных уравнений Больцмана имеет ряд ограничений по скорости и температуре, которые можно обойти, рассматривая функции распределения в движущейся системе отсчета, как в методе PonD. В PonD значения функции распределения в узлы сетки переносятся из точек, не попадающих на узлы расчетной сетки, соответственно, требуется оценка этих значений, что приводит к неявности численной схемы и к проблемам с консервативностью. Ранее для одномерного случая был найден метод предсказания значения моментов, приводящий к явной и консервативной схеме. Данная работа продолжает этот подход в двумерном и трёхмерном случае. Консервативность такого подхода зависит от выбора аппроксимации значений в точках, не попадающих на узлы расчетной сетки. Изучены требования к шаблону интерполяции, квадратуре и степени разложения по полиномам Эрмита в методе RegPond, обеспечивающие совпадение моментов в разных системах отсчета, сохранение моментов и точный расчет моментов. Полученные схемы реализованы и протестированы на ряде задач.

Ключевые слова: метод решёточного уравнения Больцмана, регуляризация, сжимаемые жидкости, консервативность численных схем

E. Zipunova, A. Perepelkina

Development of Explicit and Conservative Schemes for Lattice Boltzmann
Equations with Adaptive Streaming

The Lattice Boltzmann Method (LBM) has several limitations for velocity and temperature. One can consider distribution function in moving frame to overcome these limitations as in PonD. In PonD, values of distribution functions are streamed from off-lattice points, so value estimation is needed. It leads to the implicit and non-conservative numerical scheme. Earlier, for the one-dimensional case, the approach of moments prediction was found, which leads to an explicit and conservative numerical scheme. We apply this approach to the two-dimensional and three-dimensional cases in this work. Requirements to interpolation stencil, quadrature, and Hermite polynomial expansion which guarantee moment matching, conservation, and exact calculation, were studied. The resulting schemes were implemented and tested on several tasks.

Keywords: Lattice-Boltzmann method, regularization, high Mach number, conservation property of numerical schemes

1 Введение

В последнее время метод решеточных уравнений Больцмана (Lattice Boltzmann Method — LBM) [1] стал действительно универсальным методом, решающим задачи как с турбулентностью [2, 3] и множеством фаз [4, 5, 6], так и со сжимаемыми течениями [7].

Задачи можно разделить на классы по значениям числа Маха: $Ma < 0.3$ несжимаемые течения; $Ma < 1$ — дозвуковые и околозвуковые; $1 < Ma < 2$ — сверхзвуковые. До сих пор с помощью LBM решались задачи с числом Маха не больше двух. Например, в начале 2000-х можно отметить первое использование слабосжимаемых LBM в индустрии: моделирование внешней аэродинамики машин для уменьшения сопротивления, моделирование внутренней термодинамики для контроля повреждения в связи с перегревом, моделирование аэроакустики для вентиляции системы [8, 9]. В 2010-х LBM применялся для моделирования авиационных и аэрокосмических задач: в исследовании неустойчивых нагрузок, оледенения, шумовых эффектов полёта [10, 11, 12].

В наше время интерес представляют задачи с ещё большим значением числа Маха: $5 < Ma < 10$ гиперзвуковые, $10 < Ma < 20$ задачи с гиперзвуковой скоростью и $1000 < Ma$ астрофизические постановки. Однако, даже несмотря на то, что с 2014 года известны примеры применения LBM для полномасштабного моделирования сверхзвуковой аэродинамики [13, 14, 15], зачастую такие расчеты не более эффективны, чем решение уравнения Навье-Стокса.

Как и для любого моделирования, при разработке численного метода основная цель — найти оптимальный баланс между стабильностью, точностью и скоростью расчетов для конкретной поставленной задачи. Чтобы понять, какими путями идут к этой цели разные методы, рассмотрим основы LBM.

В первую очередь для моментов функции распределения, для которой верно уравнение Больцмана, в приближении верны уравнения Навье-Стокса. То есть через первые три момента такой функции распределения можно выразить плотность, скорость и энергию потока.

Вторая основная идея — это дискретизация скорости. Выбирается множество значений скоростей, соответствующее точкам квадратуры Эрмита, суммируя значения в которых можно точно вычислить интеграл полинома заданного порядка, а значит, можно вычислить моменты функций распределения [16]. Чем больше точек в квадратуре, тем от большего порядка полинома можно вычислить интеграл точно, а соответственно, тем большего порядка момент можно вычислить. При этом предпочтение отдаётся тем квадратурам, чьи точки хорошо ложатся на расчетную сетку, чтобы за один шаг по времени перенос происходил из одной точки сетки в другую.

Следуя этой логике, для моделирования сжимаемых жидкостей необходимо выполнение уравнений Навье-Стокса для энергии, а значит, необходимы достаточно большие квадратуры, обеспечивающие интегрирование полиномов высокого порядка [17, 18, 16, 19, 20]. В такой квадратуре будет много квадратурных точек, особенно для 3D случая, что не способствует эффективности метода, в то время как допустимое число Маха растёт слабо, и остаются ограничения по температуре [21].

Для того чтобы сделать расчет более эффективным, зачастую вводят две функции распределения (методы Double Distribution Function — DDF) [22, 23]: одна на первые два уравнения, массы и импульса, вторая на коррекцию уравнения для энергии. Таким образом, для каждой из функций распределения понадобится меньшее количество квадратурных точек.

Также зачастую с возникающими ошибками разбираются уже в кинетических уравнениях, вводя корректирующие слагаемые [24, 25, 26].

Или используется гибридный метод: для массы и импульса расчеты ведутся с помощью LBM (например D3Q39), а для энергии записывают конечно-объемную или конечно-разностную схему [27, 28]. Последний вариант используется в коммерческих солверах Simulia PowerFLOW [13, 29] и ProLB [27, 30]. При этом допустимое число Маха в обоих солверах не превышает двойку. Эти гибридные методы очень эффективны, но не отличаются точностью полученных результатов. В частности, поэтому Simulia PowerFLOW снова начала использовать DDF-LBM подход для улучшения точности при больших значениях числа Маха [15].

Для дальнейшего расширения зоны применимости модели рассмотрим разные способы дискретизации скоростей. Функции распределения могут иметь очень разные формы в зависимости от макропараметров. Именно из-за этого приходится брать квадратуры с большим количеством точек, которые бы покрывали большой диапазон вариаций функций распределения. Вместо этого можно использовать метод DVM (discrete velocity method) [31, 32]. В данном методе для каждой расчетной зоны скорости сдвинуты на какой-то постоянный вектор средней скорости. Это позволяет точнее учитывать особенности потоков в разных зонах, используя меньшее количество квадратурных точек в качестве скоростей.

Этот подход был предложен для моделирования сверхзвуковых течений [33, 34] и применялся в рамках решеточных уравнений Больцмана как для моделирования уравнений Эйлера [35, 36], так и для моделирования уравнений Навье-Стокса [31].

Современные методы, использующие тот же подход, можно разделить на те, в которых предполагается оценка значений функций распределения вне точек заданной сетки и требуется итерирование для уточнения этой оценки

[37, 38], и те, в которых это не требуется [35, 36, 31, 32, 39].

В методах [37, 38] учитывается не только смещение функции распределения на величину скорости потока, но также её сужение или расширение в соответствии с локальным значением температуры. Поэтому скорости больше не переносят значения из одного узла сетки в другой, и приходится оценивать значение функции распределения вне точек сетки, например, с помощью интерполяции. Благодаря такому подходу удаётся снять ограничения также и на температуру и решать задачи с большим разбросом температур, в отличие от [32].

Однако снятие ограничений на значения скорости и температуры в PonD привели к снижению эффективности расчетов и отсутствию консервативности по умолчанию. Для увеличения точности, эффективности и стабильности PonD может сочетаться с многими другими подходами, упомянутыми ранее, такими как DDF, DBM, реконструкция в кинетическом уравнении и т.д. Также в методе могут применяться разные методы реконструкции функций распределения вне точек сетки, например: полиномы Лагранжа, B-сплайны [40]. Или DUGKS (Discrete unified gas kinetic Scheme) [41] — метод на основе дискретизации по пространству методом конечных элементов. Такой подход обеспечивает консервативность. Также консервативность обеспечивают B-сплайны. Для борьбы с осцилляциями и поддержки монотонности используются WENO методы интерполяции или (total variation diminishing) TVD.

Данная работа посвящена дальнейшему увеличению вычислительной эффективности, точности и устойчивости метода PonD [37]. В рамках увеличения эффективности расчетов в прошлом нами был разработан метод RegPond [38], устраняющий часть вычислительных сложностей, связанных с обращением матрицы для перекалибровки функций распределения. Также были получены результаты по обеспечению консервативности в одномерном случае [42]. В данной работе рассмотрен подход к оценке функции распределения вне точек заданной сетки. В результате получен алгоритм, обеспечивающий как консервативность, так и уход от итерационного процесса и повышение эффективности.

2 Описание метода

2.1 LBM, PonD и RegPond

Уравнение Больцмана для функции распределения записывается как:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t} + \boldsymbol{\xi} \frac{\partial f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \hat{\Omega},$$

где Ω – оператор столкновения, в данной работе БГК. Плотность ρ , скорость \mathbf{u} и температура T вычисляются как моменты функции распределения $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$. В трёхмерном случае:

$$\begin{aligned} m_{\alpha\beta\gamma} &= \int f \xi_x^\alpha \xi_y^\beta \xi_z^\gamma d\boldsymbol{\xi}, \\ \rho &= m_{000} = \int f d\boldsymbol{\xi}, \quad \rho \mathbf{u} = (m_{100}, m_{010}, m_{001})^T = \int f \boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\xi}, \\ \rho(u^2 + T) &= m_{200} + m_{020} + m_{002} = \int f \boldsymbol{\xi}^2 d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \quad (1)$$

Будем вычислять интегралы с помощью квадратуры Гаусса-Эрмита. Для этого возьмём приближение функции распределения в виде конечного разложения по полиномам Эрмита:

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) \approx f^{N_H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) = \omega(\boldsymbol{\xi}) \sum_{n=0}^{N_H} \frac{1}{n!} \mathbf{a}^{(n)}(\mathbf{x}, t) \mathcal{H}^{(n)}(\boldsymbol{\xi}),$$

где $\mathcal{H}^{(n)}$ — полиномы Эрмита, $\mathbf{a}^{(n)}$ — коэффициенты разложения, $\omega(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} e^{-\boldsymbol{\xi}^2/2}$ — весовая функция, D – размерность пространства.

Тогда $f_H^N/\omega(\boldsymbol{\xi})$ – полином порядка не больше N_H . С помощью квадратуры Эрмита, обеспечивающей точное интегрирование полинома порядка до E , моменты до порядка $N_m = (E - N_H)$ вычисляются как сумма:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{(n)}(\mathbf{x}, t) &= \int f^{N_H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) \boldsymbol{\xi}^n d\boldsymbol{\xi} = \int \omega(\boldsymbol{\xi}) \frac{f^{N_H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)}{\omega(\boldsymbol{\xi})} \boldsymbol{\xi}^n d\boldsymbol{\xi} = \\ &= \sum_{i=1}^Q \left(w_i \frac{f^{N_H}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_i, t)}{\omega(\mathbf{c}_i)} \right) \mathbf{c}_i^n = \sum_{i=1}^Q f_i^{\lambda_0}(\mathbf{x}, t) \mathbf{c}_i^n, \end{aligned}$$

где \mathbf{c}_i — точки квадратуры, они же набор дискретных скоростей, $\lambda_0 = \{0, 1\}$ — оригинальная калибровка, определяется значением скорости и температуры, $f_i^{\lambda_0}$ — дискретные функции распределения в оригинальной калибровке, $\mathbf{m}^{(n)}$ — набор тензоров, для которых суммарный покомпонентный порядок равен n . В трёхмерном случае тензор $\mathbf{m}^{(n)}$ состоит из компонент $m_{\alpha\beta\gamma}$, таких что $\alpha + \beta + \gamma = n$, и $m_{\alpha\beta\gamma}$ вычисляется как:

$$m_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{x}, t) = \int f^{N_H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) \xi_x^\alpha \xi_y^\beta \xi_z^\gamma d\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^Q f_i^{\lambda_0}(\mathbf{x}, t) c_{ix}^\alpha c_{iy}^\beta c_{iz}^\gamma.$$

Приведённые рассуждения используются в стандартном ЛВМ для дискретизации пространства скоростей [43]. При этом выбираются такие квадратуры, чтобы скорости за шаг по времени переносили функции распределения из одной точки расчетной сетки в другую.

Однако для расширения применимости метода можно рассматривать дискретные функции распределения в других калибровках. Выберем калибровку $\lambda = \{\mathbf{u}, T\}$, а скорость в движущейся системе отсчета, соответствующей этой калибровке, обозначим \mathbf{v} . Тогда $\boldsymbol{\xi} = \sqrt{T}\mathbf{v} + \mathbf{u}$ подставляем в выражение для моментов и проинтегрируем относительно \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{(n)}(\mathbf{x}, t) &= \int f^{NH}(\mathbf{x}, \sqrt{T}\mathbf{v} + \mathbf{u}, t) (\sqrt{T}\mathbf{v} + \mathbf{u})^n d(\sqrt{T}\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \\ &= \sum_{i=1}^Q \left(\sqrt{T}^D w_i \frac{f(\mathbf{x}, \sqrt{T}\mathbf{c}_i + \mathbf{u}, t)}{\omega(\mathbf{c}_i)} \right) (\sqrt{T}\mathbf{c}_i + \mathbf{u})^n = \sum_{i=1}^Q f_i^\lambda (\sqrt{T}\mathbf{c}_i + \mathbf{u})^n, \end{aligned}$$

где f_i^λ — дискретные функции распределения в калибровке λ . На таком приближении основывается метод PonD. Так как теперь нет гарантий, что перенос происходит из одной точки сетки в другую, то при переносе оцениваются значения функций распределения вне точек сетки и потом переносом собираются в одной точке. При этом положение точки, из которой происходит перенос, определяется из значений будущей температуры и скорости. Таким образом, схема неявная и требует итераций.

В оригинальном PonD [37] требуется обращение матрицы при перекалибровке функций распределений. В [38] был предложен альтернативный алгоритм, где функция распределения вычислялась из разложения по полиномам Эрмита в движущейся системе отсчета сразу в нужной калибровке:

$$f_i^\lambda = w_i \sum_{n=0}^{N_H} \frac{1}{n!} \mathbf{d}^{(n)}(\mathbf{x}, t) \mathcal{H}^{(n)}(\mathbf{c}_i), \quad \mathbf{d}^{(n)}(\mathbf{x}, t) = \int \sqrt{T}^D f(\mathbf{x}, \sqrt{T}\mathbf{v} + \mathbf{u}, t) \mathcal{H}^{(n)}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (2)$$

Коэффициенты разложения $\mathbf{d}^{(n)}$ можно выразить через моменты $\mathbf{m}^{(n)}$ рекуррентно. Введём верхние индексы у компонент $\mathbf{d}^{(n)}$ следующим образом:

$$d_{\alpha\beta\gamma}^{000} = d_{\alpha\beta\gamma}, \quad d_{\alpha\beta\gamma}^{ijk} = \sum_l \epsilon_l m_{\alpha_l+i\beta_l+j\gamma_l+k},$$

тогда:

$$d_{\alpha\beta\gamma}^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{T}} \left(d_{\alpha-1\beta\gamma}^{i+1jk} - u_x d_{\alpha-1\beta\gamma}^{ijk} \right) - (\alpha-1) d_{\alpha-2\beta\gamma}^{ijk}. \quad (3)$$

Последовательное вычисление моментов из дискретных функций распределения и дискретных функций распределения через моменты в разложение по полиномам Эрмита в рамках данной статьи будет называться регуляризацией. В методе RegPonD вся информация хранится в моментах \mathbf{m} , при переносе из \mathbf{m} вычисляются моменты \mathbf{d} , из \mathbf{d} собираются f^λ . Как и в PonD, требуется оценка значений вне точек сетки и итерационный процесс.

2.2 Предсказание моментов

2.2.1 Интерполяция многочленом

В алгоритме PonD и RegPonD перенос происходит со скоростью $\mathbf{e}_q = \sqrt{T}\mathbf{c}_q + \mathbf{u}$, где T — температура и \mathbf{u} — скорость потока на следующем временном слое. Они вычисляются из значений моментов. Моменты вычисляются с помощью квадратуры Гаусса-Эрмита как полином от скорости \mathbf{e}_q . Для удобства будем рассматривать перенос в точку, совпадающую с началом координат, тогда в трёхмерном случае:

$$m_{\alpha\beta\gamma}(t + \delta t) = \sum_{q=0}^{Q-1} f_q(-\mathbf{e}_q) e_{qx}^{\alpha} e_{qy}^{\beta} e_{qz}^{\gamma}.$$

Значения, перенесенные в эту точку из точек $-\mathbf{e}_q$, каким-то образом оцениваются, к примеру интерполируются с помощью многочлена Лагранжа:

$$f_q(-\mathbf{e}_q) = \sum_i^L \mathcal{L}_i(-\mathbf{e}_q) f_q(\mathbf{r}_i),$$

где $\mathcal{L}_i(-\mathbf{e}_q)$ — коэффициент интерполяции перед значением ДФР в точке шаблона.

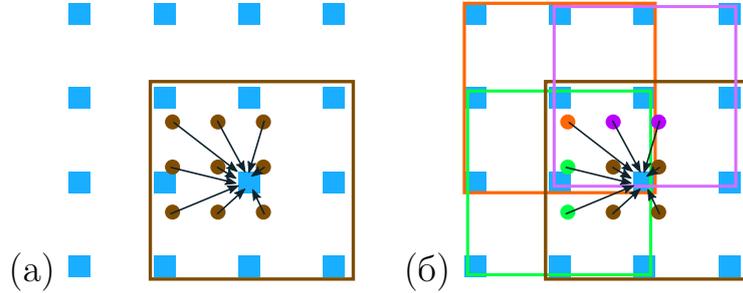


Рис. 1: Шаблоны интерполяции функции распределения f_i^λ : (а) фиксированный относительно x_j и (б) нефиксированный.

Шаблон интерполяции может быть фиксированным относительно точки, в которую происходит перенос, и нефиксированным, то есть плавающим вместе с точкой, из которой происходит перенос (рис. 1).

Пусть коэффициенты интерполяции перед значениями ДФР в точках шаблона представимы в виде полинома компонент скорости \mathbf{e}_q :

$$\mathcal{L}_i(-\mathbf{e}_q) = \sum_l A_l e_{qx}^{\alpha_l} e_{qy}^{\beta_l} e_{qz}^{\gamma_l}.$$

Тогда, если подставить коэффициенты интерполяции в виде полинома, раскрыть скобки и просуммировать по скоростям квадратуры, то получим следующую зависимость [42]:

$$\begin{aligned}
m_{\alpha\beta\gamma}(t + \delta t) &= \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_i^L \left(\sum_l A_l e_{qx}^{\alpha_l} e_{qy}^{\beta_l} e_{qz}^{\gamma_l} \right) f_q(\mathbf{r}_i) e_{qx}^{\alpha} e_{qy}^{\beta} e_{qz}^{\gamma} = \\
&= \sum_i^L \sum_l A_l m_{\alpha+\alpha_l, \beta+\beta_l, \gamma+\gamma_l}(\mathbf{r}_i).
\end{aligned}$$

Для одномерного случая рассмотрим фиксированный шаблон из трёх точек (рис. 2). Для удобства рассмотрим перенос в точку, совпадающую с началом координат, и сетку с единичным шагом. Тогда коэффициенты интерполяции в точке $-e_q$ будут выражаться как:

$$\mathcal{L}_i(x) = \prod_{k=1, i \neq k}^L \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)},$$

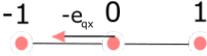
$$\mathcal{L}_0(-e_q) = 1 - e_q^2, \quad \mathcal{L}_1(-e_q) = \frac{1}{2}(e_q^2 - e_q), \quad \mathcal{L}_{-1}(-e_q) = \frac{1}{2}(e_q^2 + e_q).$$


Рис. 2: Фиксированный шаблон интерполяции функции распределения в одномерном случае.

Таким образом, в начальную точку переносятся значения ДФР, выражающиеся через значения в точках шаблона, следующим образом:

$$f_q(-e_q) = \mathcal{L}_0 f_q(0) + \mathcal{L}_1 f_q(1) + \mathcal{L}_{-1} f_q(-1).$$

Тогда моменты на следующем временном слое после переноса в точке $x = 0$:

$$m_{\alpha}(0, t + \delta t) = \sum_{q=0}^{Q-1} (\mathcal{L}_0 f_q(0) + \mathcal{L}_1 f_q(1) + \mathcal{L}_{-1} f_q(-1)) e_q^{\alpha}.$$

Обозначим моменты порядка α в точке x_i как m_{α}^i . Тогда, суммируя по q функции распределения, получим:

$$m_{\alpha}^0(t + \delta t) = m_{\alpha}^0 + \frac{1}{2}(m_{\alpha+1}^{-1} - m_{\alpha+1}^1) + \frac{1}{2}(m_{\alpha+2}^{-1} + m_{\alpha+2}^1 - 2m_{\alpha+2}^0).$$

Если шаблон интерполяции фиксированный, то выражение имеет одинаковый вид для всех точек. Так как выражение симметричное, то исходящий поток для одной точки будет соответствовать входящему потоку для другой точки. Таким образом обеспечивается консервативность для рассмотренной схемы. При этом для предсказания моментов до второго порядка необходимо знать моменты до четвертого порядка.

Для двумерного случая попробуем проделать аналогичные выкладки на примере интерполяции, приведенной в [37]. Но нас интересует симметричный относительно центральной точки $(0, 0)$ фиксированный шаблон, поэтому рассмотрим фиксированный шаблон размером 3×3 . Расчет моментов для двумерного случая:

$$m_{\alpha\beta}(t + \delta t) = \sum_{q=0}^{Q-1} f_q(-\mathbf{e}_q) e_{qx}^\alpha e_{qy}^\beta, \quad f_q(-\mathbf{e}_q) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 \mathcal{L}_{ij}(-\mathbf{e}_q) f_q(i, j).$$

Полином Лагранжа:

$$\mathcal{L}_{ij}(\mathbf{r}) = \prod_{l=-1, l \neq i}^1 \frac{x-l}{(i-l)} \prod_{m=-1, m \neq j}^1 \frac{y-m}{(j-m)}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{00}(-\mathbf{e}_q) &= (1 - e_{qx})(e_{qx} + 1)(1 - e_{qy})(e_{qy} + 1), \\ \mathcal{L}_{\pm 10}(-\mathbf{e}_q) &= \frac{1}{2} e_{qx} (e_{qx} \mp 1) (1 - e_{qy})(e_{qy} + 1), \\ \mathcal{L}_{0\pm 1}(-\mathbf{e}_q) &= (1 - e_{qx})(e_{qx} + 1) \frac{1}{2} e_{qy} (e_{qy} \mp 1), \\ \mathcal{L}_{\pm 1\pm 1}(-\mathbf{e}_q) &= \frac{1}{2} e_{qx} (e_{qx} \mp 1) \frac{1}{2} e_{qy} (e_{qy} \mp 1). \end{aligned}$$

Подставляя всё в выражение для момента и суммируя по квадратурным точкам, получаем выражение для предсказания значений моментов:

$$\begin{aligned} m_{00}^{00}(t + \delta t) &= m_{00}^{00} + \frac{1}{2}(m_{10}^{-10} - m_{10}^{10}) + \frac{1}{2}(m_{01}^{0-1} - m_{01}^{01}) + \\ &\quad + \frac{1}{4}(m_{11}^{11} + m_{11}^{-1-1} - m_{11}^{-11} - m_{11}^{1-1}) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}m_{02}^{01} + \frac{1}{2}m_{02}^{0-1} - m_{02}^{00}\right) + \left(\frac{1}{2}m_{20}^{10} + \frac{1}{2}m_{20}^{-10} - m_{20}^{00}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{4}(m_{12}^{10} - m_{12}^{-10}) + \frac{1}{4}(m_{12}^{-11} - m_{12}^{11}) + \frac{1}{4}(m_{12}^{-1-1} - m_{12}^{1-1}) + \\ &\quad + \frac{1}{4}(m_{21}^{01} - m_{21}^{0-1}) + \frac{1}{4}(m_{21}^{1-1} - m_{21}^{11}) + \frac{1}{4}(m_{21}^{-1-1} - m_{21}^{-11}) + \\ &\quad + \left(m_{22}^{00} - \frac{1}{2}\left(m_{22}^{10} + m_{22}^{-10} + m_{22}^{01} + m_{22}^{0-1}\right) + \frac{1}{4}\left(m_{22}^{11} + m_{22}^{1-1} + m_{22}^{-11} + m_{22}^{-1-1}\right)\right). \end{aligned}$$

Полученная для предсказания моментов формула симметрична и подходит для создания консервативной схемы, хотя и потребует поддержания вычисления моментов суммарного четвёртого порядка для сохранения массы и суммарного шестого для сохранения энергии, что накладывает условие на минимальную квадратуру.

Для трёхмерного случая, если использовать интерполяцию, аналогичную предыдущей, шаблон будет выглядеть как куб $3 \times 3 \times 3$, мы получим схему интерполяции из 27 точек, и будет необходимо вычисление моментов до суммарного шестого порядка для сохранения массы и суммарного восьмого порядка для сохранения энергии.

Рассмотрим шаблон меньшего размера, содержащий только часть точек из куба $3 \times 3 \times 3$. Минимальным таким шаблоном представляется шаблон крест (рис. 3). На первый взгляд, чем меньше точек в шаблоне, тем меньше порядок моментов, необходимых для предсказания. Однако в случае, когда шаблон — не полностью заполненный куб, полином Лагранжа нельзя расщепить по компонентам, как в (4).

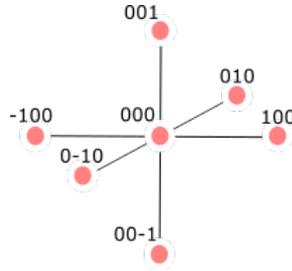


Рис. 3: Фиксированный шаблон интерполяции функции распределения вида крест в трёхмерном случае.

Полином Лагранжа для шаблона крест:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{000}(-\mathbf{e}_q) &= (1 - e_{qx}^2)(1 - e_{qy}^2)(1 - e_{qz}^2), \\ \mathcal{L}_{100}(-\mathbf{e}_q) &= \frac{1}{2}e_{qx}^5(e_{qx} - 1)(1 - e_{qy}^2)(1 - e_{qz}^2), \\ \mathcal{L}_{-100}(-\mathbf{e}_q) &= \frac{1}{2}e_{qx}^5(e_{qx} + 1)(1 - e_{qy}^2)(1 - e_{qz}^2), \\ \mathcal{L}_{010}(-\mathbf{e}_q) &= \frac{1}{2}e_{qy}^5(e_{qy} - 1)(1 - e_{qx}^2)(1 - e_{qz}^2), \\ \mathcal{L}_{0-10}(-\mathbf{e}_q) &= \frac{1}{2}e_{qy}^5(e_{qy} + 1)(1 - e_{qx}^2)(1 - e_{qz}^2), \\ \mathcal{L}_{001}(-\mathbf{e}_q) &= \frac{1}{2}e_{qz}^5(e_{qz} - 1)(1 - e_{qx}^2)(1 - e_{qy}^2), \\ \mathcal{L}_{00-1}(-\mathbf{e}_q) &= \frac{1}{2}e_{qz}^5(e_{qz} + 1)(1 - e_{qx}^2)(1 - e_{qy}^2).\end{aligned}$$

Расчет моментов для трёхмерного случая:

$$m_{\alpha\beta\gamma}(t + \delta t) = \sum_{q=0}^{Q-1} f_q(-\mathbf{e}_q) e_{qx}^\alpha e_{qy}^\beta e_{qz}^\gamma, \quad f_q(-\mathbf{e}_q) = \sum_i^L \mathcal{L}_i(-\mathbf{e}_q) f_q(\mathbf{r}_i).$$

Тогда, подставив коэффициенты интерполяции в выражение для моментов,

раскрыв скобки и просуммировав по квадратурным точкам, получим выражение из моментов в разных точках шаблона:

$$\begin{aligned}
m_{000}^{000}(t + \delta t) = & \left(-m_{222}^{000} + m_{022}^{000} + m_{202}^{000} + m_{220}^{000} - m_{200}^{000} - m_{020}^{000} - m_{002}^{000} + m_{000}^{000} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \left(m_{622}^{100} - m_{620}^{100} - m_{602}^{100} - m_{522}^{100} + m_{600}^{100} + m_{502}^{100} + m_{520}^{100} - m_{500}^{100} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \left(m_{622}^{-100} - m_{620}^{-100} - m_{602}^{-100} + m_{522}^{-100} + m_{600}^{-100} - m_{502}^{-100} - m_{520}^{-100} + m_{500}^{-100} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \left(m_{262}^{010} - m_{260}^{010} - m_{062}^{010} - m_{252}^{010} + m_{060}^{010} + m_{052}^{010} + m_{250}^{010} - m_{050}^{010} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \left(m_{262}^{0-10} - m_{260}^{0-10} - m_{062}^{0-10} + m_{252}^{0-10} + m_{060}^{0-10} - m_{052}^{0-10} - m_{250}^{0-10} + m_{050}^{0-10} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \left(m_{226}^{001} - m_{206}^{001} - m_{026}^{001} - m_{225}^{001} + m_{006}^{001} + m_{025}^{001} + m_{205}^{001} - m_{005}^{001} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \left(m_{226}^{00-1} - m_{206}^{00-1} - m_{026}^{00-1} + m_{225}^{00-1} + m_{006}^{00-1} - m_{025}^{00-1} - m_{205}^{00-1} + m_{005}^{00-1} \right).
\end{aligned}$$

То есть, чтобы предсказать температуру $T(t + \delta t)$, требуется вычислять моменты суммарно до 12-го порядка. Кроме того, в отличие от одномерного случая, выражение в правой части не представляется в виде красивой, симметричной комбинации потоков и не обеспечивает консервативность.

2.2.2 Аппроксимация заданного вида

Имея в одномерном случае успешный пример предсказания моментов, приводящего к консервативной схеме, рассмотрим такой вид правой части предсказания моментов, который бы заведомо соответствовал наблюдаемым в одномерном примере свойствам. То есть правая часть выглядит как некая симметричная сумма потоков. Предположительный вид предсказания моментов:

$$m_{000}^{000}(t + \delta t) = Am_{000}^{000} - B(m_{100}^{100} - m_{100}^{-100}) - B(m_{010}^{010} - m_{010}^{0-10}) - B(m_{001}^{001} - m_{001}^{00-1}) + \dots,$$

где A, B — коэффициенты, определяемые из условия аппроксимации. Такой вид выражения для предсказания моментов достигается следующим выражением для аппроксимации ДФР в точках $-\mathbf{e}_q$:

$$f_q|_{-\mathbf{e}_q} = A f_q|_{000} - B e_{qx} (f_q|_{100} - f_q|_{-100}) - B e_{qy} (f_q|_{010} - f_q|_{0-10}) - B e_{qz} (f_q|_{001} - f_q|_{00-1}) \dots$$

Для определения условий аппроксимации разложим ДФР $f_q|_{000}, f_q|_{100}, f_q|_{010}, f_q|_{001}, f_q|_{-100}, f_q|_{0-10}, f_q|_{00-1}$ в точке $-\mathbf{e}_q$ в ряд Тейлора и подставим в соответствующее выражение. Далее для удобства обозначим:

$$f = f_q|_{-\mathbf{e}_q}, \quad \mathbf{e}_q = \mathbf{e}, \quad f_x = \left. \frac{\partial f_q}{\partial x} \right|_{-\mathbf{e}_q}, \quad f^{ijk} = f_q|_{(ijk)}.$$

Тогда разложение в ряд Тейлора для центральной точки:

$$f^{000} = f_q|_{-\mathbf{e}_q+\mathbf{e}_q} = f + e_x f_x + e_y f_y + e_z f_z + \frac{e_x^2}{2} f_{xx} + \frac{e_y^2}{2} f_{yy} + \frac{e_z^2}{2} f_{zz} + e_x e_y f_{xy} + e_y e_z f_{yz} + e_x e_z f_{xz} + O(e^3).$$

Теперь необходимо найти такие комбинации ДФР в соседних точках, что все члены кроме f будут скомпенсированы.

$$f^{\pm 100} = f_q|_{-\mathbf{e}_q+(\pm 100)+\mathbf{e}_q} = f + (\pm 1 + e_x) f_x + e_y f_y + e_z f_z + \frac{1 \pm 2e_x + e_x^2}{2} f_{xx} + \frac{e_y^2}{2} f_{yy} + \frac{e_z^2}{2} f_{zz} + e_x e_y f_{xy} \pm e_y f_{xy} + e_y e_z f_{yz} + e_x e_z f_{xz} \pm e_z f_{xz} + O(e^3).$$

Скомбинируем $f^{\pm 100}$ и f^{000} симметричным образом, чтобы скомпенсировать максимальное количество членов:

$$\begin{aligned} f^{100} - f^{-100} &= 2f_x + 2e_x f_{xx} + 2e_y f_{xy} + 2e_z f_{xz}, \\ f^{100} + f^{-100} - 2f^{000} &= f_{xx}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{\pm 1 \pm 10} &= f + (\pm 1 + e_x) f_x + (\pm 1 + e_y) f_y + e_z f_z + \frac{1 \pm 2e_x + e_x^2}{2} f_{xx} + \frac{1 \pm 2e_y + e_y^2}{2} f_{yy} + \frac{e_z^2}{2} f_{zz} + (\pm \pm 1 \pm e_x \pm e_y + e_x e_y) f_{xy} + e_y e_z f_{yz} \pm e_z f_{yz} + e_x e_z f_{xz} \pm e_z f_{xz} + O(e^3). \end{aligned}$$

Проводим аналогичную операцию для $f^{\pm 1 \pm 10}$:

$$f^{110} + f^{-1-10} - 2f^{000} = 2f_{xy}, \quad f^{-110} + f^{1-10} - 2f^{000} = -2f_{xy}.$$

Тогда для аппроксимации f второго порядка получаем выражение:

$$\begin{aligned} f &= f^{000} - \frac{1}{2} e_x (f^{100} - f^{-100}) - \frac{1}{2} e_y (f^{010} - f^{0-10}) - \frac{1}{2} e_z (f^{001} - f^{00-1}) + \\ &+ \frac{1}{2} e_x^2 (f^{100} + f^{-100} - 2f^{000}) + \frac{1}{2} e_y^2 (f^{010} + f^{0-10} - 2f^{000}) + \\ &+ \frac{1}{2} e_z^2 (f^{001} + f^{00-1} - 2f^{000}) + \frac{1}{4} e_x e_y (f^{110} + f^{-1-10} - f^{1-10} - f^{-110}) + \\ &+ \frac{1}{4} e_z e_y (f^{011} + f^{0-1-1} - f^{01-1} - f^{0-11}) + \\ &+ \frac{1}{4} e_x e_z (f^{101} + f^{-10-1} - f^{10-1} - f^{-101}), \end{aligned} \tag{5}$$

и выражение для предсказания моментов:

$$\begin{aligned}
m_{\alpha\beta\gamma} = & m_{\alpha\beta\gamma}^{000} - \frac{1}{2}(m_{\alpha+1\beta\gamma}^{100} - m_{\alpha+1\beta\gamma}^{-100}) - \frac{1}{2}(m_{\alpha\beta+1\gamma}^{010} - m_{\alpha\beta+1\gamma}^{0-10}) - \\
& - \frac{1}{2}(m_{\alpha\beta\gamma+1}^{001} - m_{\alpha\beta\gamma+1}^{00-1}) + \\
& + \frac{1}{2}(m_{\alpha+2\beta\gamma}^{100} + m_{\alpha+2\beta\gamma}^{-100} - 2m_{\alpha+2\beta\gamma}^{000}) + \frac{1}{2}(m_{\alpha\beta+2\gamma}^{010} + m_{\alpha\beta+2\gamma}^{0-10} - 2m_{\alpha\beta+2\gamma}^{000}) + \\
& + \frac{1}{2}(m_{\alpha\beta\gamma+2}^{010} + m_{\alpha\beta\gamma+2}^{0-10} - 2m_{\alpha\beta\gamma+2}^{000}) + \\
& + \frac{1}{4}(m_{\alpha+1\beta+1\gamma}^{110} + m_{\alpha+1\beta+1\gamma}^{-1-10} - m_{\alpha+1\beta+1\gamma}^{1-10} - m_{\alpha+1\beta+1\gamma}^{-110}) + \\
& + \frac{1}{4}(m_{\alpha\beta+1\gamma+1}^{011} + m_{\alpha\beta+1\gamma+1}^{0-1-1} - m_{\alpha\beta+1\gamma+1}^{01-1} - m_{\alpha\beta+1\gamma+1}^{0-11}) + \\
& + \frac{1}{4}(m_{\alpha+1\beta\gamma+1}^{101} + m_{\alpha+1\beta\gamma+1}^{-10-1} - m_{\alpha+1\beta\gamma+1}^{10-1} - m_{\alpha+1\beta\gamma+1}^{-101}). \tag{6}
\end{aligned}$$

В выбранном шаблоне это не единственная аппроксимация со схожими свойствами. Все они отличаются слагаемыми в последних трёх скобках в уравнении (6).

2.3 PoMPonD

На основе приведённых выше рассуждений был разработан метод PoMPonD. Ниже приведён его алгоритм. В узлах сетки хранятся моменты $m^{(n)}$, $n = \overline{0, N_m}$. Для перехода с временного слоя $t - \Delta_t$ на временной слой t для каждого узла сетки \mathbf{x} выполняются следующие действия:

- Предсказываются моменты $m^{(0)}, m^{(1)}, m^{(2)}$ в момент времени t из моментов $m^{(0)}, \dots, m^{(4)}$ на момент времени $t - \Delta_t$ по формуле (6). Из моментов вычисляется нужная калибровка $\lambda'(\mathbf{x}, t)$ по формуле (1).
- Для каждой дискретной скорости \mathbf{c}_i в точке $\mathbf{x} - (\sqrt{T}\mathbf{c}_i + \mathbf{u})$:
 - рассчитываются моменты $m^{(n)}$, по формуле, аналогичной (5)
 - вычисляются $d^{(n)}$ из $m^{(n)}$ рекуррентно (3)
 - вычисляется $f_i^{\lambda'}$ из $d^{(n)}$ из разложения по полиномам Эрмита до порядка N_H (2)
 - полученные функции распределения $f_i^{\lambda'}$ собираются в точке \mathbf{x} и изменяются в соответствии с членом столкновения
- Вычисляются новые значения моментов $m^{(n)}$ (1)

2.4 Требования к квадратуре и разложению по полиномам Эрмита

Рассмотрим требования к квадратуре (E — суммарный порядок полинома, интеграл которого можно вычислить точно с помощью квадратуры) и степени разложения по полиномам Эрмита (N_H) для точного предсказания моментов n -порядка, соответствующих массе ($n = 0$), импульсу ($n = 1$) и энергии ($n = 2$). Вид аппроксимации по пространству функции распределения выбран, см. уравнение 5.

1. Для того чтобы значения моментов до суммарного порядка N_m совпадали в разных системах отсчета (выполнялся *moment matching*), требуется при регуляризации использовать все моменты до суммарного порядка N_m . Таким образом, требуется выполнение неравенства $N_H \geq N_m$ в уравнении 2.
2. Для предсказания моментов порядка n требуется на прошлом временном шаге точно рассчитать моменты $N_m = n + 2$ порядка (6). А при вычислении моментов после столкновения (1) порядок подынтегрального выражения состоит из порядка момента и порядка ФР как полинома, то есть требуется точно рассчитать интеграл от полинома максимального суммарного порядка $N_H + N_m$. Значит, для вычисления моментов до N_m порядка требуется квадратура, обеспечивающая $E \geq N_H + N_m \geq 2N_m = 2(n + 2)$.

В трёхмерном случае для сохранения массы как минимум требуется $N_m = 2$, $N_H = 2$, $E = 4$, а значит, квадратура D3Q13, для сохранения импульса $N_m = 3$, $N_H = 3$, $E = 6$, квадратура D3Q27, для сохранения энергии $N_m = 4$, $N_H = 4$, $E = 8$, квадратура D3Q45 (рис. 4).

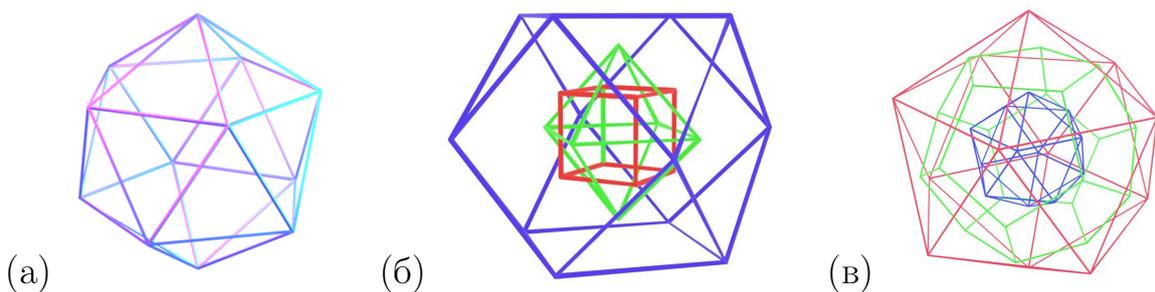


Рис. 4: Минимальная квадратура в трёхмерном случае в PoMPonD, необходимая для сохранения: (а) массы D3Q13, (б) импульса D3Q27 и (в) энергии D3Q45

3 Результаты расчетов адвекции вихря

Для расчетов использовалась квадратура D3Q45 (рис. 4), разложение по полиномам Эрмита $N_H = 4$, хранятся моменты до $N_m = 4$. Время релаксации $\tau = 1$, размер области $200 \times 200 \times 4$, периодические граничные условия, двумерный вихрь движется по диагонали. На рисунке 5 изображены изолинии постоянной плотности $\rho = \{0.0058, 0.0056, 0.0055, 0.0054, 0.0053, 0.0052\}$: слева начальные условия, справа вихрь, прошедший всю область по диагонали и вернувшийся на начальную позицию. Видно, что форма вихря не искажилась. Из таблицы 1 видно, что все моменты за время расчета сохранились.

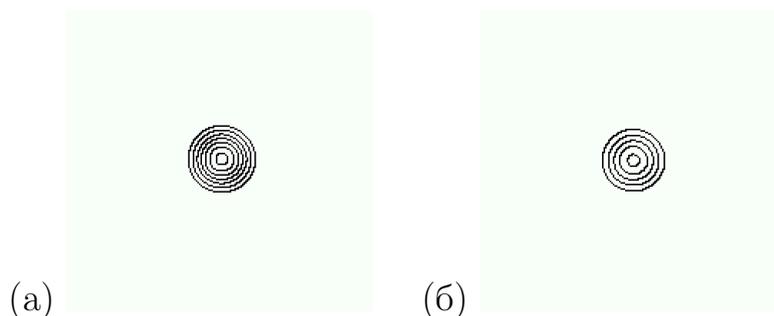


Рис. 5: Распределение плотности движущегося вихря (а) в начале расчета и (б) на момент 1984 шага по времени.

Таблица 1: Суммарные значения макропараметров в начале и в конце расчета.

Номер шага	0	1984
Масса	969.051697	969.051697
Импульс	(96.9051727, 96.9051667, 1.24e-14)	(96.9051727, 96.9051667, 2.46e-11)
Энергия	116.500723	116.500723
Максимальная скорость	0.220979231	0.205102329

4 Выводы

Разработан метод PoMPonD как явный и консервативный вариант метода RegPonD. PoMPonD более эффективный, чем RegPonD и PonD, так как схема явная и итераций не требуется. Для тестирования PoMPonD был разработан программный код. PoMPonD демонстрирует адекватные результаты на задаче адвекции вихря и точное сохранение массы, импульса и энергии.

Работа поддержана грантом РФФИ # 18-71-10004.

Список литературы

- [1] The lattice Boltzmann method / Timm Krüger, Halim Kusumaatmaja, Alexandr Kuzmin et al. // Springer International Publishing. — 2017. — Vol. 10, no. 978-3. — P. 4–15.
- [2] Simulation of turbulent flows with the entropic multirelaxation time lattice Boltzmann method on body-fitted meshes / Giovanni Di Ilio, Benedikt Dorschner, Gino Bella et al. // Journal of Fluid Mechanics. — 2018. — Vol. 849. — P. 35–56.
- [3] High-order semi-Lagrangian kinetic scheme for compressible turbulence / Dominik Wilde, Andreas Krämer, Dirk Reith, Holger Foysi // Physical Review E. — 2021. — Vol. 104. — P. 025301.
- [4] H Huang M Sukop X Lu. Multiphase lattice Boltzmann methods: Theory and application. — John Wiley & Sons, 2015.
- [5] Predictive modeling of laser and electron beam powder bed fusion additive manufacturing of metals at the mesoscale / Andrey Zakirov, Sergei Belousov, Maria Bogdanova et al. // Additive Manufacturing. — 2020. — Vol. 35. — P. 101236. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214860420306084>.
- [6] Simulating fast electron beam melting with a parallel thermal free surface lattice Boltzmann method / Regina Ammer, Matthias Markl, Ulric Ljungblad et al. // Computers & Mathematics with Applications. — 2014. — Vol. 67, no. 2. — P. 318–330.
- [7] Succi Sauro. The lattice Boltzmann equation: for complex states of flowing matter. — Oxford University Press, 2018.
- [8] Aeroacoustic simulation of automotive ventilation outlets / Jean-Luc Adam, Denis Ricot, Flavien Dubief, Christine Guy // Journal of the Acoustical Society of America. — 2008. — Vol. 123, no. 5. — P. 3250.
- [9] Adam Jean-Luc, Menoret Arnaud, Ricot Denis. Direct Aeroacoustic Source Identification Based on Lattice Boltzmann Simulation and Beamforming Technique // Conference: 15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (30th AIAA Aeroacoustics Conference). — 2009.
- [10] Simulations of LAGOON landing-gear noise using Lattice Boltzmann Solver / Alois Sengissen, Jean-Christophe Giret, Christophe Coreixas, Jean-François Boussuge // Conference: AIAA Aviation 21st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference At: Dallas. — 2015.

- [11] Evaluation of the Lattice Boltzmann Method for Aero-acoustic Simulations of Industrial Air Systems / Sebastien Bocquet, Denis Ricot, Alois Sengissen et al. // Conference: 25th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. — 2019.
- [12] Astoul Thomas. Towards improved lattice Boltzmann aeroacoustic simulations with non-uniform grids: application to landing gears noise prediction. : Ph.D. thesis / Thomas Astoul ; Aix-Marseille Université. — 2021. — 6.
- [13] Validation of a Lattice-Boltzmann Approach for Transonic and Supersonic Flow Simulations / Ehab Fares, Michael Wessels, Raoyang Zhang et al. // Conference: 52nd Aerospace Sciences Meeting. — 2014.
- [14] Casalino D., Hazir A., Mann A. Turbofan Broadband Noise Prediction Using the Lattice Boltzmann Method // Conference: 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. — 2017.
- [15] Lattice-Boltzmann Very Large Eddy Simulations of Fluidic Thrust Vectoring in a Converging/Diverging Nozzle / Avinash Jammalamadaka, Gregory M. Laskowski, Yanbing Lia et al. // Conference: AIAA AVIATION 2020 FORUM. — 2020.
- [16] X Shan XF Yuan H Chen. Kinetic theory representation of hydrodynamics: a way beyond the Navier–Stokes equation // Journal of Fluid Mechanics. — 2006. — Vol. 550. — P. 413–441.
- [17] SS Chikatamarla IV Karlin. Lattices for the lattice Boltzmann method // Physical Review E. — 2009. — Vol. 79, no. 4. — P. 046701.
- [18] X Shan X He. Discretization of the velocity space in the solution of the Boltzmann equation // Physical Review Letters. — 1998. — Vol. 80, no. 1. — P. 65.
- [19] Frapolli Nicolò, Chikatamarla Shyam S, Karlin Iliya V. Entropic lattice Boltzmann model for compressible flows // Physical Review E. — 2015. — Vol. 92, no. 6. — P. 061301.
- [20] Frapolli Nicolò, Chikatamarla Shyam S, Karlin Ilya V. Entropic lattice Boltzmann model for gas dynamics: Theory, boundary conditions, and implementation // Physical Review E. — 2016. — Vol. 93, no. 6. — P. 063302.
- [21] Nicolò Frapolli Shyam Chikatamarla, Karlin Ilya. Theory, Analysis, and Applications of the Entropic Lattice Boltzmann Model for Compressible Flows // Entropy. — 2020. — Vol. 22. — P. 370.

- [22] X He S Chen G Doolen. A novel thermal model for the lattice Boltzmann method in incompressible limit // J. Comp. Phys. — 1998. — Vol. 146. — P. 282–300.
- [23] D’Orazio A Succi S. Simulating two-dimensional thermal channel flows by means of a lattice Boltzmann method with new boundary conditions // FUTURE GENERATION COMPUTER SYSTEMS. — 2004. — Vol. 20, no. 6. — P. 935–944.
- [24] Extended lattice Boltzmann model for gas dynamics / MH Saadat, SA Hosseini, B Dorschner, IV Karlin // Physics of Fluids. — 2021. — Vol. 33, no. 4. — P. 046104.
- [25] Dellar Paul J. Lattice Boltzmann algorithms without cubic defects in Galilean invariance on standard lattices // Journal of Computational Physics. — 2014. — Vol. 259. — P. 270–283.
- [26] Prasianakis Nikolaos I., Karlin Iliya V. Lattice Boltzmann method for simulation of compressible flows on standard lattices // Phys. Rev. E. — 2008. — Vol. 78. — P. 016704.
- [27] An efficient lattice Boltzmann method for compressible aerodynamics on D3Q19 lattice. Journal of Computational Physics / S. Guo, Yongliang Feng, Jérôme Jacob et al. // Journal of Computational Physics. — 2020. — Vol. 418. — P. 109570.
- [28] Improved compressible hybrid lattice Boltzmann method on standard lattice for subsonic and supersonic flows / Florian Renard, Yongliang Feng, Jean-François Boussuge, Pierre Sagaut // Computers & Fluids. — 2021. — Vol. 219. — P. 104867.
- [29] Gonzalez-Martino Ignacio, Casalino Damiano. Fan Tonal and Broadband Noise Simulations at Transonic Operating Conditions Using Lattice-Boltzmann Methods // Conference: 2018 AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. — 2018.
- [30] Grid refinement in the three-dimensional hybrid recursive regularized lattice Boltzmann method for compressible aerodynamics / Y. Feng, S. Guo, J. Jacob, P. Sagaut // Phys. Rev. E. — 2020. — Vol. 101. — P. 063302.
- [31] Sun Chenghai, Hsu Andrew T. Three-dimensional lattice Boltzmann model for compressible flows // Physical review E. — 2003. — Vol. 68, no. 1. — P. 016303.
- [32] Coreixas Christophe, Latt Jonas. Compressible lattice Boltzmann methods with adaptive velocity stencils: An interpolation-free formulation // Physics of Fluids. — 2020. — Vol. 32, no. 11. — P. 116102.

- [33] Nadiga B. T. An Euler solver based on locally adaptive discrete velocities // Journal of Statistical Physics. — 1995. — Vol. 81. — P. 129–146.
- [34] A Thermal LBGK Model for Large Density and Temperature Differences / Jian Huang, Feng Xu, Michel Vallières et al. // International Journal of Modern Physics C. — 1997. — Vol. 08, no. 04. — P. 827–841.
- [35] Sun Chenghai. Lattice-Boltzmann models for high speed flows // Physical review E. — 1998. — Vol. 58, no. 6. — P. 7283.
- [36] Sun Chenghai. Adaptive lattice Boltzmann model for compressible flows: viscous and conductive properties // Physical review E. — 2000. — Vol. 61, no. 3. — P. 2645.
- [37] Dorschner B., Bosch F., Karlin I.V. Particles-on-Demand for Kinetic Theory // Physical review letters. — 2019. — Vol. 12, no. 13. — P. 130602.
- [38] Regularization and the particles-on-demand method for the solution of the discrete Boltzmann equation / E.Zipunova, A.Perepelkina, A.Zakirov, S.Khilkov // Journal of Computational Science. — 2021. — Vol. 53. — P. 101376.
- [39] Latt Jonas. Hydrodynamic limit of lattice Boltzmann equations : Ph.D. thesis / Jonas Latt ; University of Geneva. — 2007. — 03/09. — Access mode: <https://nbn-resolving.org/urn:nbn:ch:unige-4641>.
- [40] Ehsan R. Dorschner B. Karlin I.V. Particles-on-Demand for high Mach number flows // presented at DSFD 30. — 2021. — Access mode: <https://youtu.be/QKayqbJkKM0>.
- [41] Kallikounis N.G. Dorschner B. Karlin I. V. DUGKS-in-PonD: A finite volume implementation of Particles on Demand method // presented at DSFD 30. — 2021. — Access mode: <https://youtu.be/QKayqbJkKM0>.
- [42] On the conservativity of the particles-on-Demand method for the solution of the Discrete Boltzmann Equation / V Levchenko, A Perepelkina, A Zakirov, B Korneev // Keldysh Institute Preprints. — 2019. — Vol. 35. — P. 19.
- [43] Xiaowen S., Xue-feng Y., Chen H. Kinetic theory representation of hydrodynamics: a way beyond the Navier–Stokes equation // J. Fluid Mech. — 2006. — Vol. 550. — P. 413–441.