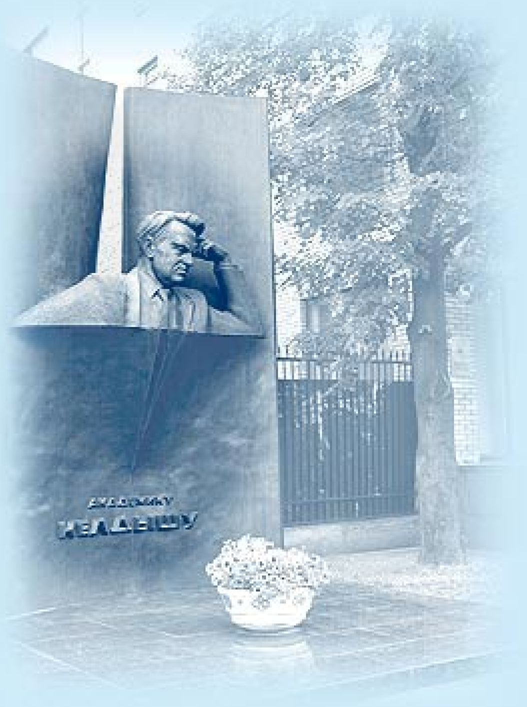
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 8 за 2022 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

О.Р. Рагимли, Ю.А. Повещенко,
С.Б. Попов, В.О. Подрыга,
П.И. Рагимли

Двухслойные полностью консервативные схемы газовой динамики с узловой аппроксимацией и адаптивной регуляризацией решения в переменных Эйлера

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Двухслойные полностью консервативные схемы газовой динамики с узловой аппроксимацией и адаптивной регуляризацией решения в переменных Эйлера / О.Р. Рагимли [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 8. 19 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2022-8
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-8

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

О.Р. Рагимли, Ю.А. Повещенко, С.Б. Попов,
В.О. Подрыга, П.И. Рагимли

Двухслойные полностью консервативные схемы газовой динамики с узловой аппроксимацией и адаптивной регуляризацией решения в переменных Эйлера

Москва — 2022

Рагимли О.Р., Повещенко Ю.А., Попов С.Б., Подрыга В.О., Рагимли П.И.

Двухслойные полностью консервативные схемы газовой динамики с узловой аппроксимацией и адаптивной регуляризацией решения в переменных Эйлера

В работе исследована устойчивость семейства двухслойных по времени полностью консервативных разностных схем с профилированными по пространству временными весами для системы уравнений газовой динамики в переменных Эйлера с использованием адаптивной искусственной вязкости. Предложена регуляризация дивергентных потоков массы, импульса и внутренней энергии уравнений газодинамики с помощью адаптивной искусственной вязкости, не нарушающая свойств полной консервативности схем данного класса. Регуляризированные потоки делают схему квазимонотонной. Результаты численно протестированы на основе задач Эйнфельдта и расчетов ударных волн.

Ключевые слова: полностью консервативные разностные схемы, газовая динамика, адаптивная искусственная вязкость, узловая аппроксимация

Orkhan Rahim ogly Rahimly, Yuri Andreevich Poveshchenko, Sergey Borisovich Popov, Viktoriia Olegovna Podryga, Parvin Ilgar gizi Rahimly

Two-layer completely conservative gas dynamics schemes with nodal approximation and adaptive regularization of the solution in Euler variables

The paper investigates the stability of a family of two-layer in time completely conservative difference schemes with space-profiled time weights for the system of equations of gas dynamics in Euler variables using adaptive artificial viscosity. Regularization of divergent flows of mass, momentum and internal energy of the equations of gas dynamics using adaptive artificial viscosity that does not violate the properties of complete conservatism of schemes of this class is proposed. Regularized flows make the scheme quasi-monotonic. The results are numerically tested based on Einfeldt problems and shock wave calculations.

Key words: completely conservative difference schemes, gas dynamics, adaptive artificial viscosity, nodal approximation

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного фонда Болгарии № 20-51-18004.

The reported study was funded by RFBR and National Science Foundation of Bulgaria (NSFB), project number 20-51-18004.

1. Введение

В работе проводится численный анализ семейства двухслойных по времени полностью консервативных разностных схем (ПКРС) с профилированными по пространству временными весами для системы уравнений газовой динамики в переменных Эйлера с использованием адаптивной искусственной вязкости [1-3].

Предложена регуляризация дивергентных потоков массы, импульса и внутренней энергии уравнений газодинамики с помощью адаптивной искусственной вязкости, не нарушающая свойств полной консервативности схем данного класса. Рассмотрены анализ амплитуды этой регуляризации и возможность её использования на неравномерных сетках.

Регуляризированные потоки делают схему квазимонотонной и обеспечивают согласование балансов импульса, кинетической и внутренней энергии (с корректной энтропийной эволюцией), сохраняя свойство полной консервативности. При этом в построенном классе дивергентных разностных схем, в согласии с законами термодинамики, отсутствуют "аппроксимационные" постоянно действующие источники (или стоки) внутренней энергии. Схемы имеют второй порядок точности. В работе описывается аппроксимация искусственной вязкости ПКРС с узловой аппроксимацией сеточных функций. Излагается устройство итерационных ПКРС-алгоритмов с динамически формируемыми вязкими накоплениями в дискретной среде.

Тестирование разработанного алгоритма проводилось на основе известных задач о распространении ударных волн и задачи Эйнфельдта [4-7] о распространении двух симметричных волн разрежения в противоположные стороны. Численные расчеты с разработанным применительно к ПКРС классом дивергентных адаптивных вязкостей показывают значительное улучшение качества полученных приближенных решений в плане их "высокочастотной" монотонизации и сохранения энтропийных свойств. Энтропийные пики в температурных профилях исчезают с измельчением пространственной сетки.

2. Постановка задачи

Запишем течение сжимаемой жидкости в эйлеровых переменных, в декартовой системе координат. Пусть $\vec{u}$ – скорость течения, плотность потока массы обозначим $\vec{\mu} = \rho \cdot \vec{u}$ (ρ – плотность среды). Тогда систему уравнений для течения среды в общем виде можно записать следующим образом:

$$\frac{D}{Dt}\left(dM\right) = -dV div\vec{\mu}, \qquad (2.1)$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\vec{u}dM\right) = -dVgradP - dVdiv\left(\vec{\mu}\vec{u}\right) + d\vec{f}\ , \qquad (2.2)$$

закон сохранения внутренней энергии

$$\frac{D}{Dt}\left(\varepsilon dM\right) = -PdVdiv\vec{u} - dVdiv\left(\vec{\mu}\varepsilon\right) + dQ\,. \qquad (2.3)$$

Здесь используются термодинамические переменные P – давление, ε – удельная внутренняя энергия. Принята традиционная модель среды и соответствующие обозначения [8]: частица массы dM заключена в объем dV, через границы которого протекает поток массы $\vec{\mu}$, несущий импульс $\vec{\mu}\vec{u}$ и внутреннюю энергию $\vec{\mu}\varepsilon$. На эту частицу за время Dt действует импульс внешней силы $Dtd\vec{f}$ и сообщается энергия $DtdQ$.

Так как в работе исследуется пространственно-одномерный случай, уравнения газовой динамики (2.1) - (2.3) перепишем для плоского случая:

$$\frac{D}{Dt}\left(dM\right) = -dV\frac{\partial\mu}{\partial x}, \qquad (2.4)$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\vec{u}dM\right) = -dV\frac{\partial P}{\partial x} - dV\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\vec{u}\right) + d\vec{f}\ , \qquad (2.5)$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\varepsilon dM\right) = -PdV\frac{\partial u}{\partial x} - dV\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\varepsilon\right) + dQ\,. \qquad (2.6)$$

Теперь для системы (2.4) - (2.6) выпишем соответствующую двухслойную по времени полностью консервативную разностную схему. На рис. 1 представлена разностная сетка, введенная по пространству, ω – узлы разностной сетки, Ω – ее ячейки. Символ ∂ здесь идентифицирует граничные ячейки и узлы. Здесь величины плотность – ρ, давление – P, скорость – $\vec{u}$, внутренняя энергия – $E = \rho\varepsilon$, а также v – объем приузлового домена $d(\omega)$ и его масса $m = \rho v$ относятся к узлам ω. Объем ячейки V относится к соответствующей ячейке Ω. Здесь $h_{i-1/2}$ – размер ячейки Ω_i между узлами ω_{i-1} и ω_i. Ω^* и ω^* – фиктивная ячейка (нулевого размера) и узел соответственно.

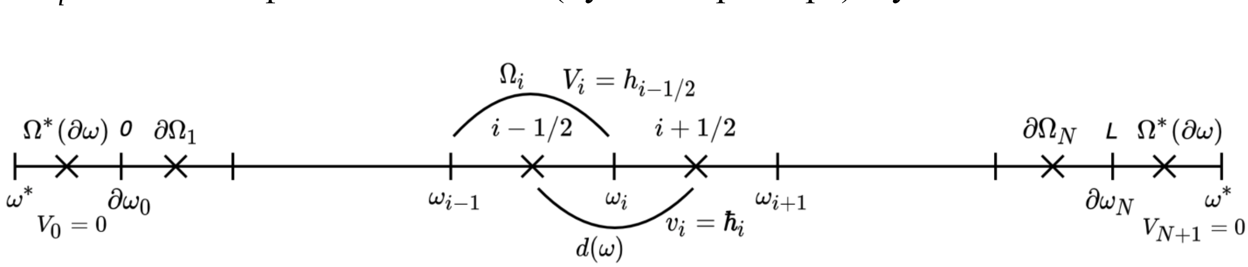


Рис.1. Схема узлов и ячеек сетки по пространству. $s_{\Omega(i+1)}(\omega_i) = +1$, $s_{\Omega(i)}(\omega_i) = -1$, $\hbar_i = \left(h_{i-1/2} + h_{i+1/2}\right)/2$.

$$m_t = -v\,DIN_D\,\vec{\mu}_D^{\sim}\;, \tag{2.7}$$

$$\left(mu\right)_t = -v\,GRAD_\sigma\,\pi^{\sim} - vDIT_D\left(\vec{\mu}_D^{\sim}\cdot u_D^{\sim}\right), \tag{2.8}$$

$$\left(m\varepsilon\right)_t = -\frac{1}{2}\sum_{\Omega(\omega)}(\pi^{\sim}V\,DIV_\sigma\,\vec{u}^{\sim})_\Omega - v\,DIN_D(\vec{\mu}_{ED}^{\sim} + \vec{\chi}_D^{\sim})\,. \tag{2.9}$$

При этом выполнен баланс кинетической энергии:

$$\left(m\,\frac{\vec{u}^2}{2}\right)_t = -v\,(u^{\sim}, GRAD_\sigma\,\pi^{\sim}) - v\;DIN_D\left(\vec{\mu}_D^{\sim}\;\frac{\vec{u}_D^{2\sim}}{2}\right). \tag{2.10}$$

Здесь

$$\vec{\mu} = \rho\vec{u}\,,\quad \vec{\mu}_E = \varepsilon\vec{\mu} = E\vec{u}\,,\quad E = \rho\varepsilon\,,$$

$$\mu^{\sim}_D = \mu^{\sim}_{0D} - v^{\sim}\,GRAN_D\,\rho^{\sim}\,,\quad \mu^{\sim}_{0D} = 1/2\sum\nolimits_{\omega(\Omega)}(\rho_\omega u_\omega)^{(0.5)}\,,$$

$$\mu^{\sim}_{ED} = \mu^{\sim}_{0ED} - v_E^{\sim}\,GRAN_D\,(\rho^{\sim}\,\varepsilon^{(\psi_\varepsilon)}),\quad \rho^{\sim} = \rho^{(\psi_\rho)}\,,$$

$$\pi_\Omega^{\sim} = P_\Omega^{(0.5)} - v_u^{\sim}\,DIV_\sigma(\rho^{\sim}\vec{u}^{(\psi_u)})\,,$$

$$\text{где}\;\; P_\Omega = 1/2\sum\nolimits_{\omega(\Omega)}P_\omega\,,\; P_{i+1/2} = \left(P_i + P_{i+1}\right)/2\,,$$

$$\vec{\chi}_D^{\sim} = \left\{\vec{\chi}_{\varepsilon D}^{\sim}\,|\,\vec{\chi}_{ED}^{\sim}\right\},\quad \chi_{\varepsilon D}^{\sim} = -k_\varepsilon GRAN_D\hat{\varepsilon}\,,\quad \chi_{ED}^{\sim} = -k_E GRAN_D\hat{E}\,.$$

Под $\mu_{0ED}^{\sim} = 1/2\sum\nolimits_{\omega(\Omega)}\left(E_\omega u_\omega\right)^{0.5}$ и $\mu_{0D}^{\sim}$ понимаются некоторые аппроксимации потока внутренней энергии и потока массы в ячейке Ω_{i+1} соответственно. Потоковый член $\vec{\chi}_D^{\sim}$ характеризует теплопроводность в газе и пропорционален коэффициенту теплопроводности k. Также в ячейке, образованной узлами ω и ω', введены величины: $\vec{u}_D^{\sim} = \left(\vec{u}_\omega^{(\delta_\omega)} + \vec{u}_{\omega'}^{(\delta_{\omega'})}\right)/2, \vec{u}_D^{2\sim} = \left(\vec{u}_\omega^{(\delta_\omega)}, \vec{u}_{\omega'}^{(\delta_{\omega'})}\right)$.

Разностные аналоги дивергенции и градиента выглядят следующим образом:

$$DIN_D\,\vec{\mu}_D = \frac{1}{v}\sum_{\Omega(\omega)} s_\Omega(\omega)\mu_D(\Omega),\qquad DIN_D:(\Omega)\to(\omega),$$

$$DIT_D\left(\vec{\mu}_D\cdot\vec{u}_D\right) = \frac{1}{v}\sum_{\Omega(\omega)} s_\Omega(\omega)\mu_D(\Omega)\vec{u}_D(\Omega),\qquad DIT_D:(\Omega)\to(\omega),$$

$$GRAN_D P = \frac{1}{V}\Delta_D P\,,\ \Delta_D P = -\sum_{\omega(\Omega)} s_\Omega(\omega) P_\omega = P_{\omega^*} - P_\omega,\ GRAN_D P : (\omega) \to (\Omega),$$

$$GRAD_\sigma \pi = \frac{1}{v}\Delta_\sigma \pi\,,\ \Delta_\sigma \pi = \sum_{\Omega(\omega)} s_\Omega(\omega)\pi_\Omega + s_{\partial\omega}\pi_{\partial\omega},\ GRAD_\sigma : (\Omega) \to (\omega),$$

$$DIV_\sigma \vec{u} = -\frac{1}{V}\sum_{\omega(\Omega)} s_\Omega(\omega) u_\omega,\ DIV_\sigma : (\omega) \to (\Omega),$$

где $s_\Omega(\omega)$ – знаковая функция, отвечающая нормали к границе приузлового домена узла ω, равная +1, если соответствующая граничная нормаль направлена из домена, и равная -1 в противном случае (см. Рис.1). В выражении для $\Delta_\sigma \pi$, если узел $\omega = \partial\omega$ – граничный, добавлено слагаемое с величиной $\pi_{\partial\omega}$ на границе и знаковой функцией $s_{\partial\omega} = \pm 1$ в зависимости от направления граничной нормали.

На временных слоях t и $\hat{t} = t + \tau$ ($\tau > 0$ – шаг по времени) введены разностные производные по времени и пространственно-точечные временные интерполяции: $a_t = (\hat{a} - a)/\tau$, $a^{(\delta)} = \delta\,\hat{a} + (1-\delta)\,a$. Здесь интерполяционный вес δ может зависеть от узла пространственной сетки Ω, например, по закону: $\delta = \sqrt{\hat{m}}\,/\,(\sqrt{\hat{m}} + \sqrt{m})$. ψ – постоянные интерполяционные веса по времени.

Отметим, что под произвольной интерполяцией по времени сеточных функций $a, \hat{a}$ между слоями t и $\hat{t}$ будем понимать некоторую сеточную величину $a^{\sim}$. Для скорости полагается $u^{\sim} = u^{(\delta)}$.

Положим $v_u^{\sim} = v^{\sim}$. Тогда из уравнений (2.7) и (2.8) следует вязко-скоростное уравнение, определяющее эволюцию скорости в узлах ω:

$$\begin{gathered}\rho^{(1-\psi_u)}\left(u\right)_t + (\rho u \nabla u)^{\sim}_{\Delta} + GRAD_\sigma P^{(0.5)}_{\Omega} - GRAD_\sigma[\rho^{\sim}_{\pm}(v^{\sim} DIV_\sigma\, u^{(\psi_u)})] - \\ -DIT_D[(v^{\sim} GRAD_D\, \rho^{\sim})\cdot u^{\sim}_D] = 0,\end{gathered} \tag{2.11}$$

$$(\rho u \nabla u)^{\sim}_{\Delta} = DIT_D\left(\mu^{\sim}_{0D}\cdot u^{\sim}_D\right) - u^{(\psi_u)} DIN_D\, \mu^{\sim}_{0D}.$$

Для простоты здесь и в дальнейшем в рассматриваемом пространственно одномерном случае обозначение вектора будем опускать.

Также при $v_E^{\sim} = v^{\sim}$ из уравнений (2.7) и (2.8) следует вязко-температурное уравнение, определяющее в узлах ω внутреннюю массово-энергетическую эволюцию в системе:

$$\begin{gathered}\rho^{(1-\psi_u)}\left(\varepsilon\right)_t + (\rho u \nabla \varepsilon)^{\sim}_{\Delta} + (\pi\, div u)^{\sim}_{\Delta} - DIN_D(\rho^{\sim}_{\pm} v^{\sim} GRAN_D\, \varepsilon^{(\psi_\varepsilon)}) + \\ +DIN_D \chi^{\sim}_D = 0,\end{gathered} \tag{2.12}$$

$$(\rho u\nabla\varepsilon)_{\Delta}^{\sim} = DIN_D\ \mu_{0ED}^{\sim} - \varepsilon^{(\psi_\varepsilon)} DIN_D\, \mu_{0D}^{\sim},$$

$$(\pi divu)_{\Delta}^{\sim} = \frac{1}{2v}\sum\nolimits_{\Omega(\omega)} (\pi\cdot V\cdot DIV_{\sigma}u^{\sim})_{\Omega}.$$

Индексами $\pm$ у плотности обозначаются соседние пространственные узлы сетки по отношению к центральному ω, в котором записаны уравнения (2.11), (2.12).

Сравнивая уравнения (2.8) и (2.11), видим, что коэффициент $\nu^{\sim}$ в них одновременно определяет диссипацию как импульса в (2.8), так и скорости в (2.11), представленных нестационарными членами.

Аналогично из (2.9) и (2.12) следует, что тот же коэффициент вязкости $\nu^{\sim}$ в них одновременно определяет диссипации как объёмной внутренней энергии $E=\rho\varepsilon$, связанной с давлением газа, так и энергии единицы массы ε, связанной с его температурой. Это диссипируемые вязкостью функции также стоят под производными по времени в соответствующих уравнениях (2.9) и (2.12).

3. Устойчивость вязко-массового уравнения (неразрывности)

Исследуем уравнение (2.7) при фиксированном распределении скорости вещества. Перепишем в узле ω_k (2.7) в виде:

$$v\left(\hat{\rho}-\rho\right) - \tau v DIN_D\left(\nu^{\sim} GRAN_D \rho^{\sim}\right) + \tau v DIN_D \mu_{0D}^{\sim} = 0$$

и представим полученное уравнение в форме

$$\hat{C}_{\rho k}^{\sim}\hat{\rho}_k = \hat{A}_{\rho k}^{\sim}\hat{\rho}_{k-1} + \hat{B}_{\rho k}^{\sim}\hat{\rho}_{k+1} + C_{\rho k}^{\sim}\rho_k + A_{\rho k}^{\sim}\rho_{k-1} + B_{\rho k}^{\sim}\rho_{k+1},$$

$$\hat{C}_{\rho k}^{\sim} = \hbar_k + \tau\psi_{\rho}\left(\bar{\nu}_{-1/2}^{\sim} + \bar{\nu}_{1/2}^{\sim}\right), \qquad C_{\rho k}^{\sim} = \hbar_k - \tau\bar{\psi}_{\rho}\left(\bar{\nu}_{-1/2}^{\sim} + \bar{\nu}_{1/2}^{\sim}\right),$$

$$\hat{A}_{\rho k}^{\sim} = \tau\left(\psi_{\rho}\bar{\nu}_{-1/2}^{\sim} + \hat{u}_{k-1}/4\right),\ A_{\rho k}^{\sim} = \tau\left(\bar{\psi}_{\rho}\bar{\nu}_{-1/2}^{\sim} + u_{k-1}/4\right),$$

$$\hat{B}_{\rho k}^{\sim} = \tau\left(\psi_{\rho}\bar{\nu}_{1/2}^{\sim} - \hat{u}_{k+1}/4\right), \qquad B_{\rho k}^{\sim} = \tau\left(\bar{\psi}_{\rho}\bar{\nu}_{1/2}^{\sim} - u_{k+1}/4\right).$$

Здесь $\bar{\nu}^{\sim} = \nu^{\sim}/h,\ h = V$ – размер ячейки Ω. Под $\bar{\nu}_{\pm 1/2}^{\sim}$ понимается $\bar{\nu}_{k\pm 1/2}^{\sim}$, т.е. соответствующий коэффициент вязкости в ячейке $\Omega_{k\pm 1/2}$. $\bar{\psi}_{\rho} = 1-\psi_{\rho}$. Положим $\psi_{\rho} = 1/2$, тогда коэффициенты $\hat{A}_{\rho k}^{\sim}, A_{\rho k}^{\sim}, \hat{B}_{\rho k}^{\sim}, B_{\rho k}^{\sim}$ будут положительны при

$$\bar{\nu}_{\Omega}^{\sim} > 1/2 \max_{\omega(\Omega)}\left\{\left|\hat{u}_{\omega}\right|, \left|u_{\omega}\right|\right\}.$$

Введём число Куранта в ячейке Ω

$$kr_{\Omega}^{\sim} = \tau / h_{\Omega} \cdot [1/2 \max_{\omega(\Omega)} \{|\hat{u}_{\omega}|, |u_{\omega}|\} + \varepsilon]$$

и перепишем последнее неравенство в виде

$$\bar{v}_{\Omega}^{\sim} > kr_{\Omega}^{\sim} \cdot h_{\Omega} / \tau, \qquad (3.1)$$

$\varepsilon > 0$ – малый параметр. Далее из условия $C_{\rho k}^{\sim} > 0$ следует $\frac{1}{2}\left(\bar{v}_{-1/2}^{\sim} + \bar{v}_{1/2}^{\sim}\right) < \hbar_k / \tau$. Это выполнено, если потребовать

$$\bar{v}_{\Omega}^{\sim} < 1 \cdot h_{\Omega} / \tau. \qquad (3.2)$$

Объединяя (3.1) и (3.2), получим

$$kr_{\Omega}^{\sim} \cdot h_{\Omega} / \tau < \bar{v}_{\Omega}^{\sim} < 1 \cdot h_{\Omega} / \tau \qquad (3.3)$$

или

$$kr_{\Omega}^{\sim} < \beta_{\Omega}^{\sim} < 1$$

в представлении коэффициента вязкости $\bar{v}_{\Omega}^{\sim}$ через вязкое наполнение $\beta_{\Omega}^{\sim}$ как $\bar{v}_{\Omega}^{\sim} = \beta_{\Omega}^{\sim} h_{\Omega} / \tau$.

Неравенство $\tilde{C}_{\rho k} > 0$ очевидно, однако диагональное преобладание, требуемое для обеспечения устойчивости по плотности уравнения (2.7), выполняется лишь на постоянном скоростном фоне ($u = const$, $\mathrm{D}_{\rho k}^{\sim} = 0$) и понимается в акустическом смысле, поскольку имеет место равенство:

$$\mathrm{D}_{\rho k}^{\sim} = \hat{C}_{\rho k}^{\sim} - (\hat{A}_{\rho k}^{\sim} + \hat{B}_{\rho k}^{\sim} + C_{\rho k}^{\sim} + A_{\rho k}^{\sim} + B_{\rho k}^{\sim}) = \frac{\tau}{4}[(\hat{u}_{k+1} - \hat{u}_{k-1}) + (u_{k+1} - u_{k-1})].$$

Итак, требуемым условием на выбор вязкости для обеспечения устойчивости по плотности в уравнении (2.7) является неравенство (3.3).

4. Устойчивость уравнения движения

Исследуем аппроксимацию по скорости на фоне заданных термодинамических параметров вещества.

Перепишем в узле ω_k (2.8) в виде:

$$\hat{\rho}\hat{u}-\rho u-\frac{\tau}{\hbar_k}\left[\bar{\nu}^{\sim}_{u,1/2}\left(\rho_+^{(\psi_\rho)}u_+^{(\psi_u)}-\rho^{(\psi_\rho)}u^{(\psi_u)}\right)-\bar{\nu}^{\sim}_{u,-1/2}\left(\rho^{(\psi_\rho)}u^{(\psi_u)}-\rho_-^{(\psi_\rho)}u_-^{(\psi_u)}\right)\right]+$$

$$+\frac{\tau}{2\hbar_k}\left[\mu^{\sim}_{D,1/2}\left(\delta\cdot\hat{u}+\bar{\delta}\cdot u+\delta_+\cdot\hat{u}_++\bar{\delta}_+\cdot u_+\right)-\mu^{\sim}_{D,-1/2}\left(\delta\cdot\hat{u}+\bar{\delta}\cdot u+\delta_-\cdot\hat{u}_-+\bar{\delta}_-\cdot u_-\right)\right]=$$

$$=\tau GRAD_\sigma P_\Omega^{(0.5)}.$$

Здесь $\bar{\nu}^{\sim}_u=\nu^{\sim}_u/h$, $h=V$ – размер ячейки Ω. $\bar{\delta}=1-\delta$. Представим полученное уравнение в форме

$$\hat{C}^{\sim}_{uk}\hat{u}_k=\hat{A}^{\sim}_{uk}\hat{u}_{k-1}+\hat{B}^{\sim}_{uk}\hat{u}_{k+1}+C^{\sim}_{uk}u_k+A^{\sim}_{uk}u_{k-1}+B^{\sim}_{uk}u_{k+1}-\tau GRAD_\sigma P_\Omega^{(0.5)},$$

$$\hat{C}^{\sim}_{uk}=\hat{\rho}+\frac{\tau}{\hbar_k}\psi_u\rho^{(\psi_\rho)}\left(\bar{\nu}^{\sim}_{u,-1/2}+\bar{\nu}^{\sim}_{u,1/2}\right)+\frac{\tau}{2\hbar_k}\left(\mu^{\sim}_{D,1/2}-\mu^{\sim}_{D,-1/2}\right)\delta,$$

$$C^{\sim}_{uk}=\rho-\frac{\tau}{\hbar_k}\bar{\psi}_u\rho^{(\psi_\rho)}\left(\bar{\nu}^{\sim}_{u,-1/2}+\bar{\nu}^{\sim}_{u,1/2}\right)-\frac{\tau}{2\hbar_k}\left(\mu^{\sim}_{D,1/2}-\mu^{\sim}_{D,-1/2}\right)\bar{\delta},\quad \bar{\psi}_u=1-\psi_u.$$

Полагая $\psi_\rho=\psi_u=1/2$ и $\nu^{\sim}_u=\nu^{\sim}$, $\bar{\nu}^{\sim}=\nu^{\sim}/h$, преобразуем остальные коэффициенты к виду

$$\hat{A}^{\sim}_{uk}=\frac{\tau}{2\hbar_k}\left[\bar{\nu}^{\sim}_{-1/2}\left(\rho_-^{(0.5)}-\delta_-\cdot\Delta_{D,-1/2}\rho^{(0.5)}\right)+\delta_-\mu^{\sim}_{0D,-1/2}\right],$$

$$A^{\sim}_{uk}=\frac{\tau}{2\hbar_k}\left[\bar{\nu}^{\sim}_{-1/2}\left(\rho_-^{(0.5)}-\bar{\delta}_-\cdot\Delta_{D,-1/2}\rho^{(0.5)}\right)+\bar{\delta}_-\mu^{\sim}_{0D,-1/2}\right],$$

$$\hat{B}^{\sim}_{uk}=\frac{\tau}{2\hbar_k}\left[\bar{\nu}^{\sim}_{1/2}\left(\rho_+^{(0.5)}+\delta_+\cdot\Delta_{D,1/2}\rho^{(0.5)}\right)-\delta_+\mu^{\sim}_{0D,1/2}\right],$$

$$B^{\sim}_{uk}=\frac{\tau}{2\hbar_k}\left[\bar{\nu}^{\sim}_{1/2}\left(\rho_+^{(0.5)}+\bar{\delta}_+\cdot\Delta_{D,1/2}\rho^{(0.5)}\right)-\bar{\delta}_+\mu^{\sim}_{0D,1/2}\right].$$

Здесь $\Delta_{D,\pm1/2}\rho$ – приращение плотности в узлах ячейки, аналогичное введенному ранее $\Delta_D P=-\sum_{\omega(\Omega)}s_\Omega(\omega)P_\omega$.

Для обеспечения устойчивости по скорости уравнения (2.8) потребуем выполнение (вообще говоря, при достаточно малых шагах по времени $\tau\to0$) условия

$$R^{\sim}_\Omega=min^{\sim}_\Omega\left\{\rho_\pm^{(0.5)}/2\pm\delta^{\sim}_\pm\Delta_{D,\pm1/2}\rho^{(0.5)}\right\}\geq0. \tag{4.1}$$

Введём также удельный объём единицы массы ячейки Ω как

$$\eta^{\sim}_\Omega=max^{\sim}_\Omega\left\{2\delta^{\sim}_\pm/\rho_\pm^{(0.5)}\right\}.$$

Минимумы и максимумы в ячейке Ω вычисляются через значения плотности в узлах $\omega\left(\Omega\right)$ её образующих

$$\{min_{\Omega}^{\sim} \mid max_{\Omega}^{\sim}\}\Big(\omega\left(\Omega\right)=\pm\omega,\delta^{\sim}=\left\{\delta,\bar{\delta}\right\}\Big).$$

При выполнении условий для коэффициента вязкости в ячейке Ω

$$\bar{\nu}_{\Omega}^{\sim} > \eta_{\Omega}^{\sim}\cdot\left|\mu_{0D}^{\sim}\right|+\varepsilon = kr_{u\Omega}^{\sim}\cdot h_{\Omega}/\tau. \tag{4.2}$$

коэффициенты $\hat{A}_{uk}^{\sim}, A_{uk}^{\sim}, \hat{B}_{uk}^{\sim}, B_{uk}^{\sim}$ будут положительными. Здесь также вводится скоростное число куранта $kr_{u\Omega}^{\sim}$. $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Далее коэффициент $C_{uk}^{\sim}$ с учётом уравнения неразрывности $m_t = -\nu DIN_D\, \mu_D^{\sim} = -(\mu_{D,1/2}^{\sim} - \mu_{D,-1/2}^{\sim})$ может быть представлен как

$$C_{uk}^{\sim} = \rho^{(\bar{\delta}/2)}\{1-\tau/\hbar_k[2\overline{\psi}_u\rho^{(\psi_\rho)}/\rho^{(\bar{\delta}/2)}]\cdot[1/2(\bar{\nu}_{u,-1/2}^{\sim}+\bar{\nu}_{u,1/2}^{\sim})]\}.$$

Потребовав для некоторого $1 > \beta_{\Omega}^{\sim} > kr_{u\Omega}^{\sim}$ в ячейках Ω выполнение условий

$$\bar{\nu}_{\Omega}^{\sim} < \beta_a^{\sim} h_{\Omega}/\tau, \tag{4.3}$$

будем иметь $1/2(\bar{\nu}_{u,-1/2}^{\sim}+\bar{\nu}_{u,1/2}^{\sim}) < \beta_a^{\sim}\hbar_k/\tau$ и при $\psi_\rho = \psi_u = 1/2$ получим

$$\tau/\hbar_k[2\overline{\psi}_u\rho^{(\psi_\rho)}/\rho^{(\bar{\delta}/2)}]\cdot[1/2(\bar{\nu}_{u,-1/2}^{\sim}+\bar{\nu}_{u,1/2}^{\sim})] < \beta_a^{\sim}\rho^{(0.5)}/\rho^{(\bar{\delta}/2)}.$$

Отсюда видим $C_{uk}^{\sim} > 0$ при

$$\beta_a^{\sim}\rho^{(0.5)}/\rho^{(\bar{\delta}/2)} < 1, \tag{4.4}$$

а последнее выполнено для достаточно малых $\tau \to 0$ и $\beta_a^{\sim} < 1$.

Выполнив аналогичные преобразования, получим положительность коэффициента

$$\hat{C}_{uk}^{\sim} = \rho^{(1-\delta/2)} + \tau/\hbar_k\psi_u\rho^{(\psi_\rho)}(\bar{\nu}_{u,-1/2}^{\sim}+\bar{\nu}_{u,1/2}^{\sim}) > 0.$$

Однако диагональное преобладание, требуемое для обеспечения устойчивости по скорости уравнения (2.8), выполняется лишь на постоянном плотностном фоне ($\rho = const,\ \mathrm{D}_{uk}^{\sim} = 0$) и понимается в акустическом смысле, поскольку имеет место равенство:

$$\mathrm{D}_{uk}^{\sim} = \hat{C}_{uk}^{\sim} - (\hat{A}_{uk}^{\sim} + \hat{B}_{uk}^{\sim} + C_{uk}^{\sim} + A_{uk}^{\sim} + B_{uk}^{\sim}) =$$
$$= \frac{\tau}{\hbar_k}\left[\bar{\nu}_{u,-1/2}^{\sim}\left(\rho^{(\psi_\rho)} - \rho_-^{(\psi_\rho)}\right) + \bar{\nu}_{u,1/2}^{\sim}\left(\rho^{(\psi_\rho)} - \rho_+^{(\psi_\rho)}\right)\right].$$

Отметим также, что для приращения плотности в ячейке Ω $\Delta_{D,\pm 1/2}\rho^{(0.5)}$ в выражении (4.1) для достаточно малых $\tau \to 0$ и $\beta^{\sim} \to 1-0$ выполнено $|\Delta_D \hat{\rho}| \le |\Delta_D \rho|$ для любых сеток в представлении коэффициента вязкости как $\bar{\nu}^{\sim} < \beta^{\sim} h / \tau$. Сетки, для которых при этом в процессе расчета шагов по времени еще $\Delta_D \hat{\rho} \to 0$, будем называть вязко-регулярными. Таковыми являются пространственно невырожденные сетки, в частности равномерная, геометрическая прогрессия и т.п.

Итак, требуемыми условиями на выбор вязкости для обеспечения устойчивости по скорости в уравнении (2.8) являются неравенства (4.2) и (4.3) при выполнении ограничений в плотностных распределениях (4.1) и (4.4).

5. Устойчивость вязко-температурного уравнения

Исследуем устойчивость относительно функции ε вязко-температурного уравнения (2.12) при фиксированных остальных параметрах вещества. Полагая $\psi_\rho = \psi_u = \psi_\varepsilon = 1/2$, $\bar{\psi} = 1-\psi$, $\nu_E^{\sim} = \nu_u^{\sim} = \nu^{\sim}$, $\bar{\nu}^{\sim} = \nu^{\sim} / h$, перепишем это уравнение в узле ω_k в виде:

$$\nu\rho^{(0.5)}\left(\hat{\varepsilon} - \varepsilon\right) - \tau\nu DIN_D(\rho_{\pm}^{(0.5)}\nu^{\sim} GRAN_D\, \varepsilon^{(0.5)}) +$$

$$+\tau\nu[DIN_D \mu_{0ED}^{\sim} - \varepsilon^{(0.5)} DIN_D \mu_{0D}^{\sim}] = -\tau\nu[(\pi divu)_{\Delta}^{\sim} + DIN_D \chi_D^{\sim}].$$

Далее в виде разложения по ε_k в узлах ω_k представим последнее уравнение как

$$\hat{C}_{\varepsilon}^{\sim}\hat{\varepsilon}_k = \hat{A}_{\varepsilon k}^{\sim}\hat{\varepsilon}_{k-1} + \hat{B}_{\varepsilon k}^{\sim}\hat{\varepsilon}_{k+1} + C_{\varepsilon k}^{\sim}\varepsilon_k + A_{\varepsilon k}^{\sim}\varepsilon_{k-1} + B_{\varepsilon k}^{\sim}\varepsilon_{k+1} - \tau\nu[(\pi divu)_{\Delta}^{\sim} + DIN_D \chi_D^{\sim}],$$
$$\hat{C}_{\varepsilon k}^{\sim} = \hbar_k \rho^{(0.5)} + 0.5\tau[(\rho_{-}^{(0.5)}\bar{\nu}_{-1/2}^{\sim} + \rho_{+}^{(0.5)}\bar{\nu}_{1/2}^{\sim}) - \hbar_k DIN_D \mu_{0D}^{\sim}],$$
$$C_{\varepsilon k}^{\sim} = \hbar_k \rho^{(0.5)} - 0.5\tau[(\rho_{-}^{(0.5)}\bar{\nu}_{-1/2}^{\sim} + \rho_{+}^{(0.5)}\bar{\nu}_{1/2}^{\sim}) - \hbar_k DIN_D \mu_{0D}^{\sim}],$$
$$\hat{A}_{\varepsilon k}^{\sim} = 0.5\tau[(\rho_{-}^{(0.5)}\bar{\nu}_{-1/2}^{\sim} + 0.5\hat{\rho}_{-}\hat{u}_{-}),\ A_{\varepsilon k}^{\sim} = 0.5\tau(\rho_{-}^{(0.5)}\bar{\nu}_{-1/2}^{\sim} + 0.5\rho_{-}u_{-}),$$
$$\hat{B}_{\varepsilon k}^{\sim} = 0.5\tau(\rho_{+}^{(0.5)}\bar{\nu}_{1/2}^{\sim} - 0.5\hat{\rho}_{+}\hat{u}_{+}),\ B_{\varepsilon k}^{\sim} = 0.5\tau(\rho_{+}^{(0.5)}\bar{\nu}_{1/2}^{\sim} - 0.5\rho_{+}u_{+}).$$

При выполнении условий для коэффициента вязкости в ячейке Ω

$$\bar{\nu}_{\Omega}^{\sim} > kr_{\varepsilon\Omega}^{\sim} \cdot h_{\Omega} / \tau = 1/2 \cdot [\max_{\omega(\Omega)}(1/\rho_{\omega}^{(0.5)} \cdot \max\{\hat{\rho}|\hat{u}|, \rho|u|\}_{\omega}) + \varepsilon] \qquad (5.1)$$

коэффициенты $\hat{A}_{\varepsilon k}^{\sim}, A_{\varepsilon k}^{\sim}, \hat{B}_{\varepsilon k}^{\sim}, B_{\varepsilon k}^{\sim}$ будут положительными. Здесь также вводится температурное число Куранта $kr_{\varepsilon\Omega}^{\sim}$, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Далее из условия $C_{\varepsilon k}^{\sim} > 0$ следует

$$0.5[\rho_{-}^{(0.5)}\bar{\nu}_{-1/2}^{\sim} + \rho_{+}^{(0.5)}\bar{\nu}_{1/2}^{\sim}] < \hbar_k / \tau(\rho^{(0.5)} + \tau DIN_D \mu_{0D}^{\sim}).$$

Это выполнено, если

$$\bar{\beta}^{\sim} < \hbar / \hbar_{\rho}[1 + (\tau / \rho^{(0.5)}) DIN_D \mu_{0D}^{\sim}]. \quad (5.2)$$

Здесь введено вязкое наполнение в узле $\bar{\beta}_{\omega}^{\sim} = \max\limits_{\Omega(\omega)} \beta_{\Omega}^{\sim}$ для $\bar{\nu}_{\Omega}^{\sim} = \beta_{\Omega}^{\sim} h_{\Omega} / \tau$.

Очевидно, при $\beta_{\Omega}^{\sim} = \beta_a$ также и $\bar{\beta}_{\omega}^{\sim} = \beta_a$. Определён плотностной размер узлового домена как

$$\hbar_{\rho} = 0.5[\rho_{-}^{(0.5)} h_{-1/2} + \rho_{+}^{(0.5)} h_{1/2}] / \rho^{(0.5)}.$$

Диагональное преобладание имеет место в виде:

$$\mathrm{D}_{\varepsilon k}^{\sim} = \hat{C}_{\varepsilon k}^{\sim} - (\hat{A}_{\varepsilon k}^{\sim} + \hat{B}_{\varepsilon k}^{\sim} + C_{\varepsilon k}^{\sim} + A_{\varepsilon k}^{\sim} + B_{\varepsilon k}^{\sim}) =$$
$$= 1/4 \cdot \tau[(\hat{\rho}_{+}\hat{u}_{+} - \hat{\rho}_{-}\hat{u}_{-}) + (\rho_{+}u_{+} - \rho_{-}u_{-})] - \tau\hbar_k DIN_D \mu_{0D}^{\sim} = 0.$$

Итак, требуемыми условиями на выбор вязкости для обеспечения устойчивости вязко-температурного уравнения (2.12) являются неравенства (5.1), (5.2).

Объединяя результаты исследования устойчивости для плотности ρ (раздел 3), скорости u (раздел 4) и массовой внутренней энергии ε (раздел 5), получим, что нижняя граница коэффициента вязкости $\bar{\nu}_{\Omega}^{\sim}$ определяется максимумом чисел Куранта $kr_{\max\Omega}^{\sim} = \max\{kr_{\Omega}^{\sim}, kr_{u\Omega}^{\sim}, kr_{\varepsilon\Omega}^{\sim}\}$ из неравенств (3.1), (4.2) и (5.1). В то же время верхняя граница для $\bar{\nu}_{\Omega}^{\sim} = \beta_{\Omega}^{\sim} h_{\Omega} / \tau$ определяется вязким наполнением $\beta_{\Omega}^{\sim}$ из $\beta_{\min\Omega}^{\sim} = \min\{1, \beta_a, \beta_{\Omega}^{\sim}(\bar{\beta}_{\omega\pm})\}$ согласно (3.2), (4.4), (5.2) соответственно. Кроме того, требуется выполнение ограничений в плотностных распределениях (4.1) и (4.4).

6. Численный эксперимент

Рассмотрим результаты численных экспериментов для модельных задач Эйнфельдта [4-7] (распад разрыва) и пространственного распространения ударной волны (УВ). Определим качество исследуемой разностной схемы и предложенного алгоритма. Изучим, насколько адаптивная искусственная вязкость хорошо передает движение УВ и существенно улучшает аппроксимацию термодинамических величин в задаче Эйнфельдта. Отметим, что для обоих расчетов выполняется уравнение состояния идеального газа.

Как отмечается в работе [9], методы, основанные только на дивергентном сохранении полной энергии, часто приводят к плохому предсказанию поведения внутренней энергии в режимах, где кинетическая энергия доминирует. Эта проблема актуальна, в частности, при численном решении задачи Эйнфельдта [4, 10, 11].

6.1. Задача Эйнфельдта

В задаче Эйнфельдта происходит распространение двух симметричных волн разрежения в противоположные стороны. При этом особенность численного решения связана с поведением внутренней энергии: в центре расчетной области появляется нефизический экстремум (пик) температуры, высота которого остается конечной для других разностных схем при измельчении пространственной сетки, если не применить специальные методы сглаживания. Аналитически решение ищется как частный случай задачи о распаде разрыва. В качестве расчетной области используется отрезок [-1, 1]. Разрыв располагается в центре этого отрезка – в точке x = 0. Начальные условия представлены в таблице 1. За систему единиц измерения в расчетах принята СИ.

Таблица 1

Левая область (x<0)			Правая область (x>0)		
ρ	u	p	ρ	u	p
1	-2	0.4	1	2	0.4

Со временем в центре области образуется расширяющийся неподвижный участок (плато) с постоянными значениями плотности и давления газа, которые являются достаточно малыми. Удельная внутренняя энергия также остается постоянной на данном участке. Численные решения этой задачи на основе многих известных методов неудовлетворительно передают поведение удельной внутренней энергии. Мы покажем, что предложенная ПКРС устраняет нефизический пик без всяких специальных методов сглаживания [7] и монотонизирует появившиеся осцилляции в центре расчетной области с помощью предложенного метода выбора АИВ.

Для эксперимента начальный момент времени выбран $t = 0.01c$. Расчеты с близкими к нулю начальными моментами (вблизи сингулярной особенности решения) увеличивают амплитуду осцилляций, но не порождают энтропийного пика (ЭП) для данного семейства разностных схем. Для моментов времени (например, $t = 0.1c$), где пространственная «полка» уже успела образоваться, не представляют практический интерес, поскольку такие решения без всяких сглаживаний ведут себя монотонно.

На рисунке 2 представлены три кривые: красная линия – аналитическая, зеленая – для количества узлов, равного 1000, и синяя линия соответствует $N = 10000$. Рисунок 3 есть увеличенная версия второго рисунка в центре.

Расчет проведен, начиная с момента $t = 0.01c$ до момента t=0.1c. Отметим, что здесь при решении численной задачи были отключены всякие методы сглаживания. Из рисунков видно, что нефизичные пики не имеют места, а присутствуют только осцилляции, частота которых увеличивается с измельчением сетки. При наличии искусственной вязкости для случая $N = 1000$ получим следующий результат (см. рис. 4). Как видно, осцилляции в профиле температуры полностью сгладились. Для скорости и остальных термодинамических величин кривые также имеют монотонный характер (рис. 5–7).

Отметим, что одной из известных работ по оптимизации энтропийного следа является [7], в которой для решения задачи используется дискретный метод Галеркина. В этой работе наблюдается заметное уменьшение ЭП, однако эффект окончательного его сглаживания не наблюдается при измельчении сетки вплоть до $N = 5000$ ячеек. При этом в данном алгоритме использовались специальные приемы сглаживания решения.

6.2. Ударная волна

Рассматривается отрезок $L = 100м$. На левом конце отрезка (на входе) задаются давление, плотность и скорость: p_A, ρ_A, u_A. На правом конце (на выходе) задаются: p_B, ρ_B, u_B.

Рассматривается идеальный газ с адиабатой γ = 1.233446 и молекулярным весом M=16 *кг/кмоль*. Выбирая параметры перед и за фронтом УВ из соотношений Гюгонио, для термодинамических величин и скорости получим условия, которые представлены в таблице 2, а для скорости УВ: $D = 1.533026$.

Таблица 2

За фронтом			Перед фронтом		
ρ_1	u_1	p_1	ρ_0	u_0	p_0
1.740648	0.652304	2	1	0	1

Эти параметры задавались в качестве соответствующих граничных условий:

$$p_A = p_1;\ \rho_A = \rho_1;\ u_A = u_1;\ p_B = p_0;\ \rho_B = \rho_0;\ u_B = u_0\,.$$

На начальный момент задается однородное фоновое покоящееся состояние: $p = p_0$, $\rho = \rho_0$, $u = u_0 = 0$. Число узлов в расчетной сетке по пространству N.

На рисунках 8–11 представлены полученные в расчетах с N=200, τ=0.05 профили плотности, давления, скорости и внутренней энергии единицы массы. Результаты соответствуют двум моментам времени: t=30 с (зеленый цвет) и 60 с (синий). Коэффициенты искусственной вязкости ν выбирались из условий волны сжатия и зоны осцилляций, предложенных в [1]: в зоне УВ полагалось $\nu = \lambda \nu_{\min}$, λ=1.2, а в зоне осцилляций по плотности полагалось $\nu = k\nu_{max}$, $k = 0.33$. Здесь $\nu_{\min}$, $\nu_{\max}$ – нижняя и верхняя границы диапазона устойчивости для коэффициента вязкости ν, полученные в оценках разделов 3-5.

В расчетах наблюдаются небольшие осцилляции на профиле плотности (см. рис. 8б с увеличенным масштабом, на котором видны осцилляции с амплитудой меньше 0.002), тогда как осцилляции на профилях давления и скорости практически отсутствуют.

Заметим, что увеличение коэффициента λ не приводит к уменьшению амплитуды отмеченных осцилляций по плотности (и даже может их увеличить). Уменьшение шага по времени на отмеченные осцилляции по плотности влияет слабо. Увеличение k может привести к уменьшению амплитуды осцилляций, но одновременно может увеличить их частоту (см. рис. 12).

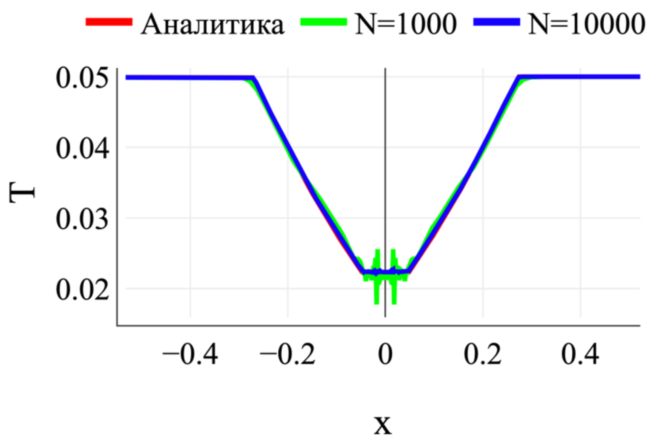


Рис. 2. Температура для момента времени *t=0.1c*.

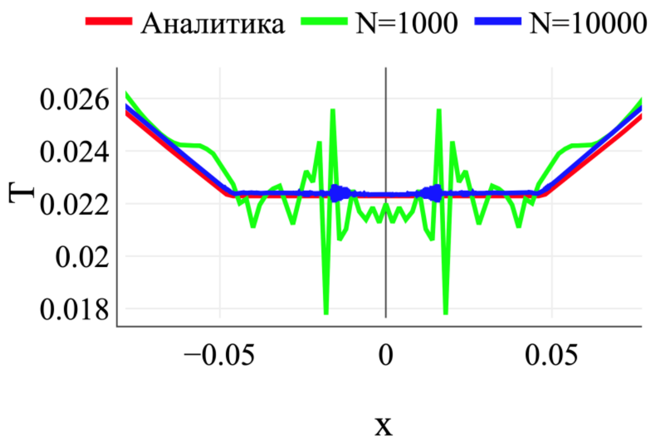


Рис. 3. Температура для момента времени *t=0.1c*. Увеличение в центре для рис. 2.

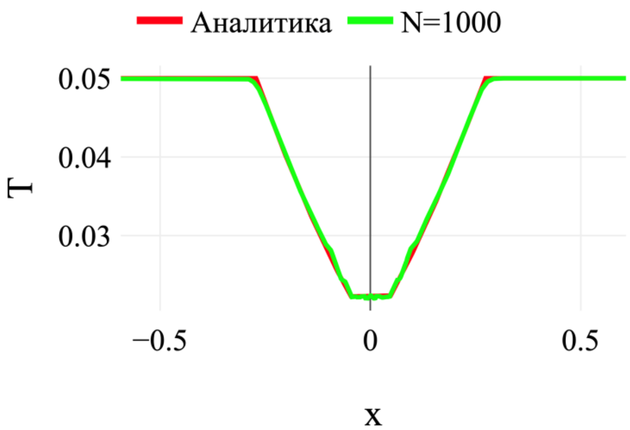


Рис. 4. Температура с АИВ для момента времени *t=0.1c*.

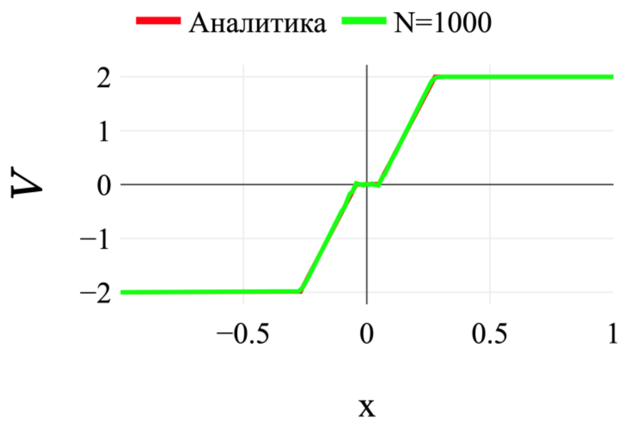


Рис. 5. Скорость для момента времени *t=0.1c*.

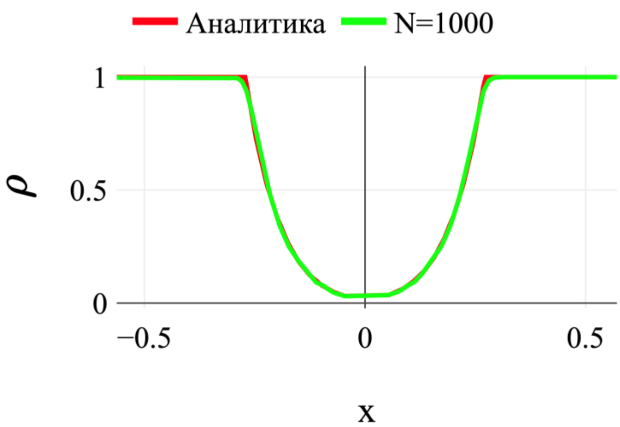


Рис. 6. Плотность для момента времени *t=0.1c*.

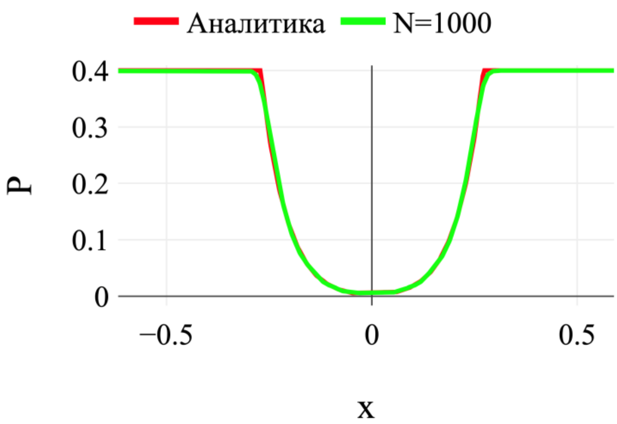


Рис. 7. Давление для момента времени *t=0.1c*.

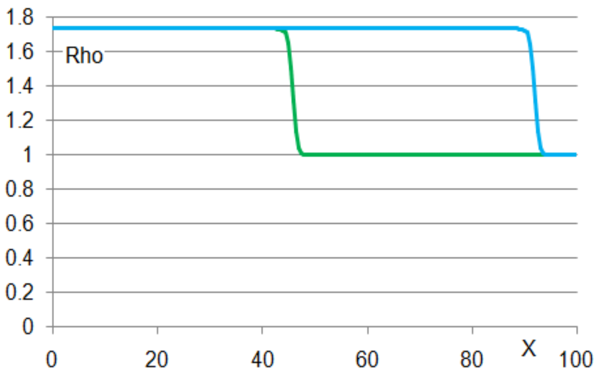


Рис. 8а. Плотность для моментов времени *t*=30, 60с.

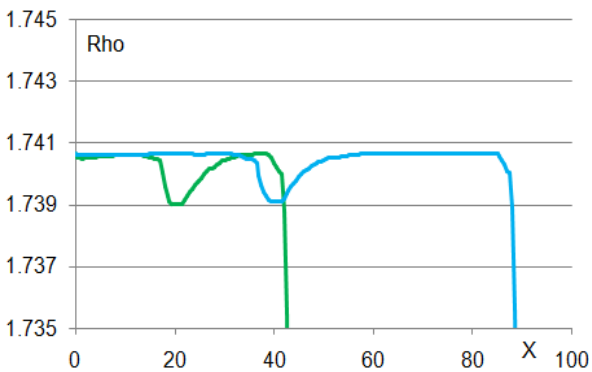


Рис.8б. Плотность, увеличение на фронте. *t*=30, 60с.

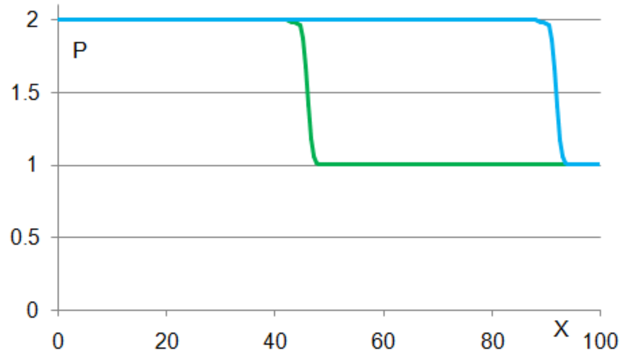


Рис. 9а. Давление для моментов времени t=30, 60с.

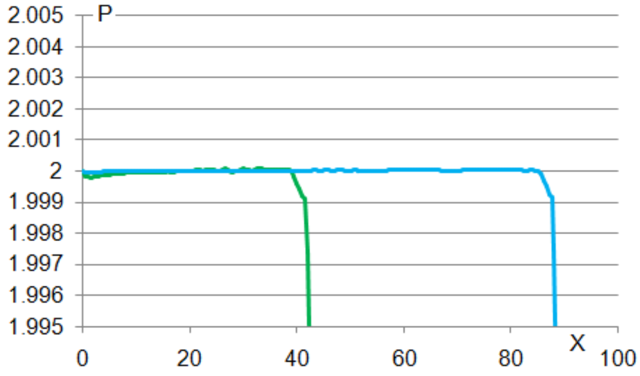


Рис. 9б. Давление, увеличение на фронте. *t*=30, 60*с.*

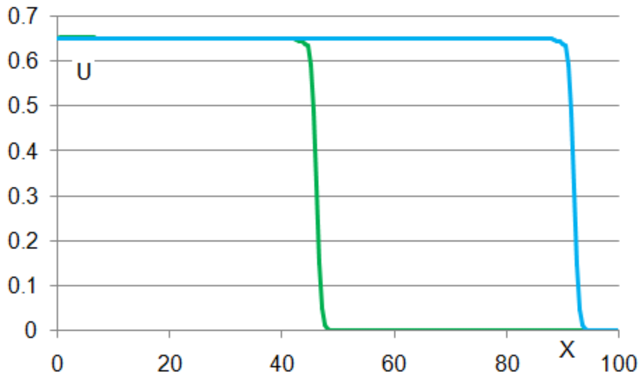


Рис. 10а. Скорость для моментов времени *t*=30, 60с.

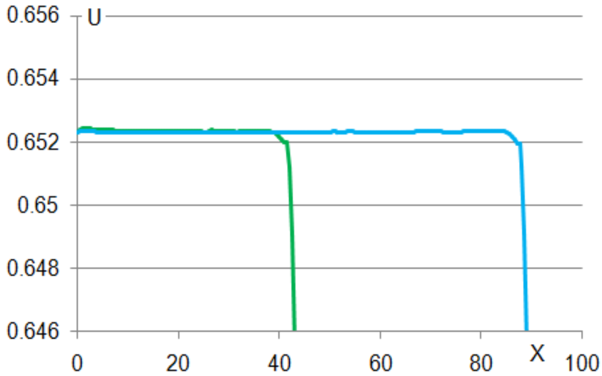


Рис. 10б. Скорость, увеличение на фронте. *t*=30, 60с.

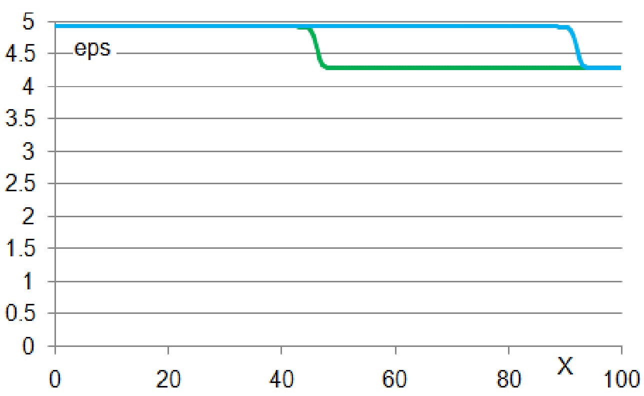


Рис. 11а. Внутренняя энергия для моментов времени *t*=30, 60с.

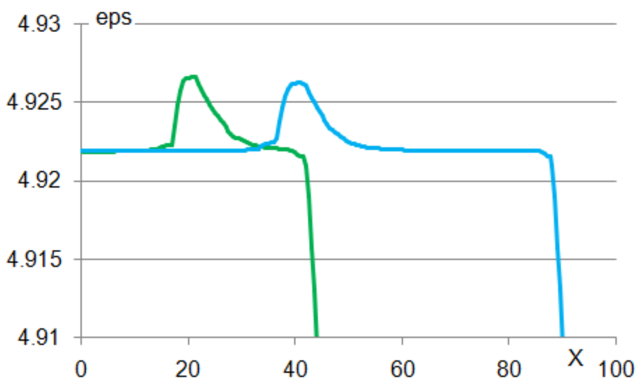


Рис. 11б. Внутренняя энергия, увеличение на фронте. t=30, 60*с.*

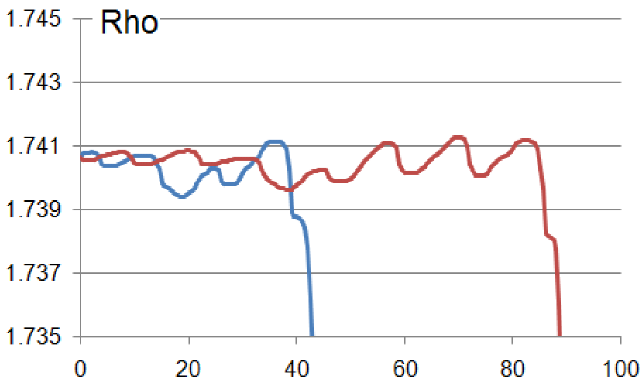


Рис. 12. Фронт УВ по плотности, τ=0.1, *k*=0.5, *t*=30с (синяя), 60с (красная).

7. Заключение

Целью настоящей работы является построение полностью консервативной разностной схемы второго порядка аппроксимации с регуляризирующими добавками в виде адаптивной искусственной вязкости для системы одномерных уравнений газовой динамики в переменных Эйлера. Схемы имеют второй порядок точности и реализуются с помощью простых итерационных процессов. Теоретически получены условия устойчивости решения, и результаты численно протестированы на основе задач Эйнфельдта и расчетов ударных волн.

Библиографический список

1. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. М.: Красанд. 2015. 288 с.
2. Повещенко Ю.А., Ладонкина М.Е., Подрыга В.О., Рагимли О.Р., Шарова Ю.С. Об одной двухслойной полностью консервативной разностной схеме газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризацией // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша. 2019. №14. 23 с.
3. Rahimly O., Podryga V., Poveshchenko Yu., Rahimly P., Sharova Yu. Two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in Eulerian variables with adaptive regularization of solution // In: Lirkov I., Margenov S. (eds) Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2019. Lecture Notes in Computer Science. 2020. V. 11958. P. 618–625.
4. Брагин М.Д., Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф. Обеспечение энтропийной устойчивости разрывного метода Галеркина в газодинамических задачах // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. №51. 22 с.

5. Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф. Вариационная энтропийная регуляризация разрывного метода Галеркина для уравнений газовой динамики // Матем. Моделирование. 2019. Т. 31, № 5. С. 69–84.
6. Cockburn B. An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems // Lecture Notes in Mathematics. 1997. V. 1697. P. 150–268.
7. Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф. Численное решение задачи Эйнфельдта на основе разрывного метода Галеркина // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. №90. 22 с.
8. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. Двухслойные полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // ЖВМиМФ. 1987. Т. 27, № 5. С. 779–784.
9. Robinson A.C. et. al. ALEGRA: An arbitrary Lagrangian-Eulerian multimaterial, multiphysics code // 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 7-10 January 2008, Reno, Nevada. AIAA 2008-1235. https://doi.org/10.2514/6.2008-1235
10. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Использование усреднений для сглаживания решений в разрывном методе Галеркина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. №89. 32 с.
11. Einfeldt B., Munz C.D., Roe P.L., Sjogren B. On Godunov-type methods near low densities // Journal of Computational Physics. 1991. V. 92, № 2. P. 273–295.

Оглавление