[ИПМ им.М.В.Келдыша РАН](https://keldysh.ru) • [Электронная библиотека](https://library.keldysh.ru)

[Препринты ИПМ](https://library.keldysh.ru/prep_qf.asp) • [Препринт № 82 за 2022 г.](https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-82)

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

М.Ш. Поташов, А.В. Юдин

Преобразование уравнения переноса к виду, удобному для расчёта в расширяющейся среде

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Поташов М.Ш., Юдин А.В. Преобразование уравнения переноса к виду, удобному для расчёта в расширяющейся среде // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 82. 11 с. **https://doi.org/10.20948/prepr-2022-82**
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-82

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Российской академии наук

М. Ш. Поташов, А. В. Юдин

Преобразование уравнения переноса к виду, удобному для расчёта в расширяющейся среде

Москва – 2022

М. Ш. Поташов, А. В. Юдин Преобразование уравнения переноса к виду, удобному для расчёта в расширяющейся среде

В работе изучается эффект “непрозрачности при расширении” (expansion opacity), в оболочках сверхновых звёзд. Между отдельными линиями разных частот, смещённых из-за доплеровского эффекта, происходит нелокальное радиационное взаимодействие. В случае большого числа связанно-связанных переходов непрозрачность усиливается, когда плазма расширяется с неоднородным полем скорости. Предложен способ преобразования уравнения переноса, позволяющий корректно рассчитывать средние величины, характеризующие поле излучения, а также усреднённые непрозрачности в таких средах.

Ключевые слова: сверхновые, непрозрачность, перенос излучения

M. Sh. Potashov, A. V. Yudin

Transformation of the transport equation to a form convenient for calculation in an expanding medium

The work analytically studies the effect of “expansion opacity” in the envelope of supernovae. Between separate lines of different frequencies, shifted due to the Doppler effect, nonlocal radiative interaction occurs. In the case of a large number of bound-bound transitions, opacity is increased when the plasma expands with a non-uniform velocity field. A method is proposed for transforming the transport equation, allowing correctly calculate the average values characterizing the radiation field, as well as the averaged opacity in such media.

Keywords: supernovae, opacity, radiation transfer

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 21-11-00362.

Оглавление

Задача вычисления непрозрачностей для разлетающейся плазмы в выбросе сверхновой (SN), в отличие от стационарных оболочек звёзд, усложняется необходимостью учёта градиента скорости между разными частями оболочки SN, поскольку эффект Доплера сдвигает частоты спектральных линий, относительно системы покоя на $\Delta\nu$. Под “градиентом скорости” понимается пространственная производная компоненты скорости вдоль общего направления расширения – для радиального течения это

$$\frac{du}{dr} \equiv \frac{\partial v_r}{\partial r}. \tag{1}$$

Между отдельными линиями разных частот, смещённых из-за доплеровского эффекта, происходит нелокальное радиационное взаимодействие. Для случаев, когда имеется много связанно-связанных переходов, т.е. большое количество линий способствует непрозрачности, последняя усиливается, когда плазма расширяется с неоднородным полем скорости. Скорость меняется от точки к точке, и значения сдвигов $\Delta\nu$ становятся зависимыми от положения и угла. Таким образом, необходимо суммировать вклад разных линий в разных точках на пути света в плазме. Прямой анализ уравнения переноса в таком случае становится *чрезвычайно* трудоёмким. Для проведения расчётов в таких ситуациях было введено приближение “непрозрачности при расширении” (expansion opacity), трактовка которого до сих пор остаётся дискуссионной.

1. Уравнение переноса излучения

Уравнение переноса в сопутствующей системе отсчёта для сферически-симметричного случая с точностью до членов $\mathcal{O}(u/c)$ записывается через дифференциальный оператор $\mathcal{D}_\mathcal{I}$ как (см. [1, ур. 14.130; 2, ур. 95.17]):

$$\mathcal{D}_\mathcal{I}[I_\nu] = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu \ , \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mathcal{I}[I_\nu] = \\ = \frac{1}{c}\frac{DI_\nu}{Dt} + \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 I_\nu) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\left(1-\mu^2\right)\left[\frac{1}{r} + \frac{\mu}{c}\left(\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right)\right] I_\nu\right) - \\ -\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\nu\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{u}{cr} + \frac{\mu^2}{c}\frac{\partial u}{\partial r}\right] I_\nu\right) + \left[\left(3-\mu^2\right)\frac{u}{cr} + \frac{\left(1+\mu^2\right)}{c}\frac{\partial u}{\partial r}\right] I_\nu. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $I_\nu = I_\nu(t, r, \mu)$ – интенсивность излучения в сопутствующей системе, r – радиус лагранжего слоя, движущегося с радиальной скоростью $u(r)$ (ускорением – членами вида $\partial u/\partial t$, дающими вклад $\mathcal{O}(u/c)^2$, пренебрегают, [3, стр. 111; 4, стр. 437]), $D/Dt = \partial/\partial t + u\,\partial/\partial r$ – лагранжева производная по времени, μ – косинус угла между радиальным направлением и направлением распространения света, η_ν – изотропный коэффициент излучения, χ_ν – изотропный коэффициент непрозрачности (экстинкции), остальные обозначения стандартны.

Моменты Эддингтона определяются как:

$$[J_\nu, H_\nu, K_\nu, N_\nu] = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} I_\nu(t,r,\mu)\left[1,\mu,\mu^2,\mu^3\right]\mathrm{d}\mu\ . \tag{4}$$

Им соответствуют физические величины – плотность энергии, поток, тензор давления и тензор теплового потока излучения.

Взяв нулевой и первый моменты от уравнения (2), мы получим (см. [1, ур. 14.131а; 1, ур. 14.131б]):

$$\mathcal{D}_{\mathcal{J}}[J_\nu] = \eta_\nu - \chi_\nu J_\nu\ , \tag{5}$$

$$\mathcal{D}_{\mathcal{H}}[H_\nu] = -\chi_\nu H_\nu \tag{6}$$

соответственно. Здесь вводятся понятия дифференциальных операторов $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ как:

$$\begin{gathered} \mathcal{D}_{\mathcal{J}}[J_\nu] = \\ = \frac{1}{c}\frac{DJ_\nu}{Dt} + +\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^2 H_\nu) - \frac{u}{cr}(3K_\nu - J_\nu) + \\ + \frac{1}{cr^2}(J_\nu + K_\nu)\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u) + \\ + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\nu\left[\frac{u}{r}(3K_\nu - J_\nu) - \frac{1}{r^2}K_\nu\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u)\right]\right), \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \mathcal{H}_{\mathcal{J}}[J_\nu] = \\ = \frac{1}{c}\frac{DH_\nu}{Dt} + \frac{\partial K_\nu}{\partial r} + \frac{1}{r}(3K_\nu - J_\nu) + \frac{2}{c}\left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}\right)H_\nu + \\ + \frac{u}{cr}\cdot\frac{\partial}{\partial \nu}\left[\nu\left(3N_\nu - H_\nu\right)\right] - \frac{1}{c}\left(\frac{2u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}\right)\cdot\frac{\partial\left(\nu N_\nu\right)}{\partial \nu} + \\ = -\chi_\nu H_\nu\ . \end{gathered} \tag{8}$$

Вопрос замыкания системы (5 и 6) сейчас не важен и нами не рассматривается.

В статических звёздных атмосферах для решения уравнения переноса (2) (или моментных уравнений (5 и 6)) применяются в основном три метода для учёта многих линий: прямой расчёт интенсивности, выборочный расчёт (opacity sampling), расчёт при помощи функции распределения непрозрачности (opacity distribution function). Однако в движущихся средах только первый прямой метод даёт правильные результаты, но его использование сильно затруднено из-за большого времени численного расчёта. Поэтому используются методы усреднения уравнения переноса (см. [5]).

Обозначим усреднение на интервале частот $b = (\nu, \nu + \Delta\nu)$ некоторой функции f_ν как

$$\langle f_\nu \rangle_b = \frac{1}{\Delta\nu} \int\limits_{\nu}^{\nu+\Delta\nu} f_{\tilde{\nu}} d\tilde{\nu} \tag{9}$$

и перейдём от монохроматического рассмотрения нашей системы к многогрупповому. Проинтегрируем уравнения (5 и 6) по частотной группе b. Члены вида DF_ν/Dt, $\partial F_\nu/\partial r$ и F_ν перейдут соответственно в $D\langle F_\nu\rangle_b/Dt$, $\partial\langle F_\nu\rangle_b/\partial r$ и F_ν. Здесь под F_ν подразумеваются моменты интенсивности. А для членов вида $\nu\,\partial F_\nu/\partial\nu$ можно записать

$$\left\langle \nu \frac{\partial F_\nu}{\partial \nu} \right\rangle_b = \nu \frac{F_{\nu+\Delta\nu} - F_\nu}{\Delta\nu} - (F_{\nu+\Delta\nu} - \langle F_\nu \rangle_b). \tag{10}$$

Для диапазона частот, где значение F_ν относительно слабо отклоняется от своего среднего значения, последнее выражение в круглых скобках в (10) отбрасывается. Такое приближение выполняется в *видимом* и *инфракрасном* диапазоне спектра, где присутствует относительно малое число линий.

Таким образом мы получим приближённую систему того же вида, что и (5 и 6):

$$\mathcal{D}_{\mathcal{J}}[\langle J_\nu \rangle_b] \approx \langle \eta_\nu \rangle_b - \langle \chi_\nu J_\nu \rangle_b \ , \tag{11}$$

$$\mathcal{D}_{\mathcal{H}}[\langle H_\nu \rangle_b] \approx -\langle \chi_\nu H_\nu \rangle_b \ . \tag{12}$$

В левых частях неизвестными уже станут средние моменты $\langle J_\nu\rangle_b$, $\langle H_\nu\rangle_b$, $\langle K_\nu\rangle_b$, $\langle N_\nu\rangle_b$. Производные по частоте в новой системе описывают переход энергии между группами за счёт доплеровского смещения. Следует обратить внимание, что в правых частях системы (11 и 12) всё ещё присутствуют не средние величины, а истинные. В следующем разделе указаны способы преобразования правых частей в функции от $\langle J_\nu\rangle_b$, $\langle H_\nu\rangle_b$.

2. Усреднение коэффициентов непрозрачности

Выпишем коэффициент полной экстинкции χ_ν [см$^{-1}$]:

$$\chi_\nu = \chi_\nu^c + \sum_i k_i^l \phi(\nu - \nu_i). \tag{13}$$

Здесь χ_ν^c – полный коэффициент непрозрачности в континууме, который есть

$$\chi_\nu^c = \chi_\nu^a + \chi_\nu^s, \tag{14}$$

где χ_ν^a – коэффициент истинного поглощения в континууме, χ_ν^s – коэффициент когерентного монохроматического изотропного рассеяния в континууме. В (13) k_i^l [сек$^{-1}$см$^{-1}$] – полный коэффициент поглощения в линии, а $\phi(\nu - \nu_i)$ [сек] – профиль поглощения в линии с максимумом в нуле (либо доплеровский для субординатных слабых линий, либо фойгтовский для резонансных сильных, таких как Lyα), нормированный так, что $\int \phi(\nu - \nu_i)\mathrm{d}\nu = 1$, ν_i – частота линии. Суммирование по i ведётся по всевозможным линиям.

Выпишем теперь уравнение для коэффициента излучения η_ν [г см сек$^{-2}$]:

$$\eta_\nu = \eta_\nu^c + \sum_i \eta_i^l \phi(\nu - \nu_i), \tag{15}$$

где, используя закон Кирхгофа, получим выражение для коэффициента теплового излучения в континууме η_ν^c

$$\eta_\nu^c = \chi_\nu^a B_\nu + \chi_\nu^s J_\nu. \tag{16}$$

Здесь B_ν – интенсивность излучения чёрного тела. В (15) η_i^l [г см сек$^{-3}$] – полный коэффициент излучения в линии i, а профиль излучения совпадает с профилем поглощения в силу предположения полного перераспределения по частотам.

Необходимо преобразовать правые части уравнений (11 и 12) в функции от $\langle J_\nu \rangle_b$, $\langle H_\nu \rangle_b$. Для этого в работе [5] были предложены усреднения для непрозрачностей на основе [6]:

$$\chi_b^J = \frac{\langle \chi_\nu J_\nu \rangle_b}{\langle J_\nu \rangle_b}, \quad \chi_b^H = \frac{\langle \chi_\nu H_\nu \rangle_b}{\langle H_\nu \rangle_b}. \tag{17}$$

Здесь $\chi_b^{J_1}$ – прямое среднее, а χ_b^H – потоковое среднее. Тогда правые части уравнений (11 и 12) будут выглядеть как $\langle \eta_\nu \rangle_b - \chi_b^J \langle J_\nu \rangle_b$ и $-\chi_b^H \langle H_\nu \rangle_b$ соответственно.

Введённые средние непрозрачности (17) содержат монохроматические величины средней интенсивности и потока. Так как они неизвестны, то приходится заменить их на приближенные значения J_ν^* и H_ν^*. Тогда новым определением средних непрозрачностей будет:

$$\chi_b^J \approx \frac{\langle \chi_\nu J_\nu^* \rangle_b}{\langle J_\nu^* \rangle_b}, \quad \chi_b^H \approx \frac{\langle \chi_\nu H_\nu^* \rangle_b}{\langle H_\nu^* \rangle_b}. \tag{18}$$

Значения J_ν^* и H_ν^* можно определить из приближенного решения уравнения переноса (2), взяв моменты (4) этого решения.

В качестве одного из приближений можно взять диффузионное приближение, рассмотренное в работе [6; 7, стр. 97], являющееся частным случаем квазиоднородного приближения, характерного для оптически толстых подфотосферных слоёв:

$$J_\nu^*(t,r) = B_\nu(t,r), \qquad H_\nu^*(t,r) = -\frac{1}{3\chi_\nu^{\mathrm{exp}}}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial r}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (34), получим итоговые средние непрозрачности.

Здесь вводится понятие χ_ν^{exp} – монохроматической непрозрачности при расширении. Для χ_ν из (13) в случае $\phi(\nu-\nu_i) = \delta(\nu-\nu_i)$ он записывается как:

$$\chi_{\mathrm{exp}}^{-1}(\nu) = (\chi_{N_\nu-1}^c)^{-1}\left[1 - e^{-s_{N_\nu-1}(1-\nu/\nu_{N_\nu})}\right] + \\ + \sum_{i=N_\nu}^{N_{\max}} (\chi_i^c)^{-1}\left[1 - e^{-s_i(\nu/\nu_i - \nu/\nu_{i+1})}\right] \exp\left\{-\sum_{j=N_\nu}^{i}\left[s_{j-1}\left(\frac{\nu}{\nu_{j-1}} - \frac{\nu}{\nu_j}\right) + \tau_j\frac{\nu}{\nu_j}\right]\right\}. \tag{20}$$

Число N_ν – номер первой линии из заданного списка, которая может повлиять на наблюдателя благодаря красному смещению при расширении, а χ_i^c из (14) – средняя непрозрачность в континууме между соседними линиями ν_i и ν_{i+1}, $s_i \equiv ct\chi_i^c$ – параметр непрозрачности при расширении “expansion opacity”, а

$$\tau_j = \frac{ct}{\nu_j}k_j^l \tag{21}$$

– соболевская толща линии i в условиях свободного разлёта. Континуум может образовываться за счёт свободно-связанных, свободно-свободных переходов, электронного рассеяния и накладывающегося на него квазиконтинуума, образованного “лесом” линий за счёт различных механизмов уширения в системе покоя. Значения параметра s_i между линиями могут различаться из-за различий χ_i в континууме. Принято, что в последней сумме по j значение ν_{j-1} считается равным ν при $j = N_\nu$. Все величины χ_i^c относятся к моменту времени $t(\nu/\nu_i)$, а s_j и τ_j – при $t(\nu/\nu_j)$.

Рассмотрим пример других приближений для средних непрозрачностей, но только для уравнения потока. В работе [8] был предложен такой вариант усреднения (EP – Eastman Pinto):

$$\chi_b^{EP} \approx \chi_c + \frac{\nu}{\Delta\nu}\frac{1}{ct}\sum_i(1 - e^{-\tau_i}). \tag{22}$$

Этот результат получен из следующих простых эвристических соображений. Средний коэффициент экстинкции в интервале $b = (\nu, \nu + \Delta\nu)$ – это среднее число взаимодействий фотона с линиями по мере доплеровского смещения на $\Delta\nu$, делённое на пройденное расстояние $\sim ct\Delta\nu/\nu$. Такая же формула ещё раньше была получена в работе [9] Френда и Кастора (1983) на основе пуассоновского распределения сил линий в интервале частот $\Delta\nu$. В работе [5] это приближение было получено другим способом – так называемым приближением изолированных линий.

Приведём наконец ещё один способ усреднения, который рассматривался в работе [10]. Там средняя непрозрачность по интервалу $\Delta\nu$ определялась как обратное среднему пробегу (FP – free path):

$$\chi_b^{FP} = \langle \chi_{\mathrm{exp}}^{-1} \rangle^{-1} \tag{23}$$

Сравним поведение (22, 23 и 34) только для сильных линий. Следуя [3, стр. 130], рассмотрим случай, когда все линий одной силы и их соболевские толщины $\tau > 1$. Будем считать, что они расположены равномерно на всем диапазоне частот с промежутками $\delta\nu$. А также будем полагать, что $s\delta\nu/\nu \ll 1$. В этом случае, используя (13, 19 и 20), получим

$$\chi_b^H \approx \chi_c + \tau \frac{2}{ct} \frac{\nu}{\delta\nu} \approx \langle \chi_\nu \rangle_b, \tag{24}$$

$$\chi_b^{EP} \approx \chi_c + \frac{1}{ct} \frac{\nu}{\delta\nu}, \tag{25}$$

$$\chi_b^{FP} \approx \chi_c + \frac{2}{ct} \frac{\nu}{\delta\nu}, \tag{26}$$

при $\tau \gg 1$. Фактор 2 возникает из-за выбора равномерного разбиения по частоте [3, стр. 130].

Как видно, в случае сильных линий усреднённая непрозрачность χ_b^H равна средней (с точностью до фактора 2) непрозрачности $\langle \chi_\nu \rangle_b$, и будет расти при росте сил линий. В тоже время увеличения τ непрозрачности χ_b^{EP}, χ_b^{FP} приходят в насыщение. Указанное противоречие в поведении различных видов усреднения непрозрачностей для потока, по крайней мере для сильных линий, требуется ещё разрешить.

3. Преобразованное уравнение переноса

В секции (1) мы указывали, что в уравнении (10) можно пренебречь выражением в круглых скобках тогда, когда значение интенсивности или её момента слабо отклоняется от её среднего значения.

Однако это не так в случае *ультрафиолетового* диапазона, где в спектре присутствует множество линий металлов, и значение интенсивности меняется на порядки. В этом случае можно предложить другое преобразование для уравнения переноса (2).

Введём новый оператор

$$\{f_\nu\} = \int\limits_{\nu}^{\infty} f_{\tilde{\nu}} d\ln\tilde{\nu}. \tag{27}$$

Умножая уравнение (2) на $d\ln\tilde{\nu}$ и интегрируя его по диапазону частот от ν до бесконечности, мы получим новое уравнение для интегральной интенсивности

$$\mathcal{D}_{\mathcal{I}}[\{I_\nu\}] = \{\eta_\nu\} - \{\chi_\nu I_\nu\}\ , \tag{28}$$

где учтено, что интенсивность на бесконечности обращается в ноль. Здесь важно отметить, что в отличие от уравнения (10) члены вида $\nu\,\partial I_\nu/\partial\nu$ переходят после преобразования (27) в $\{\nu\,\partial I_\nu/\partial\nu\}$ точно. Так, используя интегрирование по частям и формулу Лейбница, можно показать, что

$$\left\{\nu\,\frac{\partial I_\nu}{\partial\nu}\right\} = \nu\,\frac{\partial\{I_\nu\}}{\partial\nu} = -I_\nu. \tag{29}$$

То есть взятие производной от интегральной интенсивности и последующее умножение результата на частоту даст истинную интенсивность со знаком минус.

Укажем на физический смысл интегральной интенсивности $\{I_\nu\}$. Поле излучения можно описывать с помощью функции распределения фотонов ψ (см. [11, стр. 161; 1, стр. 17, том 1]), которая определяется следующим образом: $\psi(\mathbf{r},\mathbf{n},\nu,t)\,d\omega d\nu$ есть число фотонов в единице объёма около точки $\mathbf{r}$ в момент t с частотами в интервале $(\nu,\nu+d\nu)$, которые распространяются со скоростью c в пределах телесного угла $d\omega$ около направления $\mathbf{n}$. При этом каждый фотон имеет энергию $h\nu$. Тогда

$$I_\nu = c\,h\nu\,\psi_\nu.$$

И, следовательно,

$$\{I_\nu\} = ch\int\limits_{\nu}^{\infty} \psi_{\tilde{\nu}} d\tilde{\nu} = chN_\nu, \tag{30}$$

где N_ν – число фотонов в единице объёма около точки $\mathbf{r}$ в момент t с частотами большими, чем ν, которые распространяются со скоростью c в пределах телесного угла $d\omega$ около направления $\mathbf{n}$.

Функция интегральной интенсивности $\{I_\nu\}$, в отличие от сильно осциллирующей функции I_ν, ступенчатая, и поэтому описывается разностной схемой с меньшей ошибкой при том же числе точек.

Укажем также на приблизительную связь между интегральной интенсивностью и средней:

$$\{I_{\nu+\Delta\nu}\} - \{I_\nu\} = \{I_\nu\}_b = \int\limits_{\nu}^{\nu+\Delta\nu} I_{\tilde{\nu}} d\ln\tilde{\nu} \approx \frac{\Delta\nu}{\nu}\langle I_\nu\rangle_b. \tag{31}$$

Таким образом, разница значений интегральной интенсивности всего в двух точках на концах интервала частот $b = (\nu, \nu + \Delta\nu)$ даст нам приблизительную среднюю интенсивность на b.

Перейдём теперь к моментным уравнениям. Взяв нулевой и первый момент от уравнения (28), мы получим

$$\mathcal{D}_{\mathcal{J}}[\{J_\nu\}] = \{\eta_\nu\} - \{\chi_\nu J_\nu\}\ , \tag{32}$$

$$\mathcal{D}_{\mathcal{H}}[\{H_\nu\}] = -\{\chi_\nu H_\nu\} \tag{33}$$

соответственно. В отличие от системы (11 и 12), равенства в (32 и 33) точные. Взяв теперь моменты от (29 и 31), мы получим выражения для $\{J_\nu\}$ и $\{H_\nu\}$, позволяющие рассчитывать истинные и усреднённые величины средней интенсивности и потока. Моменты уравнения (30) дают физический смысл средней интенсивности и потока в терминах фотонного газа.

Однако в правых частях системы (32 и 33) всё ещё присутствуют не интегральные величины, а истинные. Подобно разделу (2) можно предложить следующие замены:

$$\chi_\nu^J \approx \frac{\{\chi_\nu J_\nu^*\}}{\{J_\nu^*\}}, \quad \chi_\nu^H \approx \frac{\{\chi_\nu H_\nu^*\}}{\{H_\nu^*\}}. \tag{34}$$

Но теперь это не средние по диапазону b величины, а монохроматические функции частоты. В качестве одного из приближений для J_ν^* и H_ν^* можно использовать диффузионное приближение (19). В ультрафиолетовой области частот это приближение будет выполняться на всем диапазоне.

4. Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 21-11-00362.

Список литературы

1. *Михалас Д.* Звёздные атмосферы: В 2-х частях. — Москва : Мир, 1982. — (Цит. на с. 3, 4, 9).
2. *Mihalas D., Mihalas B. W.* Foundations of radiation hydrodynamics. — 1984. — (Цит. на с. 3).
3. *Castor J. I.* Radiation hydrodynamics. — Cambridge University Press, 2004. — С. 355. — (Цит. на с. 4, 8).
4. *Hubeny I., Mihalas D.* Theory of Stellar Atmospheres. — Princeton University Press, 2014. — С. 923. — (Цит. на с. 4).
5. *Potashov M. S., Baklanov P. V., Blinnikov S. I.* Modification of the radiation transfer equations to take into account NLTE effects in the simulations of supernova light curves by the radiation hydrodynamic code STELLA // Keldysh Institute Preprints. — 2021. — Вып. 87. — С. 1—26. — DOI: `10.20948/prepr-2021-87`. — (Цит. на с. 5, 6, 8).
6. *Blinnikov S. I.* The opacity of an expanding medium // Astronomy Letters. — 1996. — Т. 22. — С. 79—84. — (Цит. на с. 6, 7).
7. *Блинников С. И.* Нестационарные радиационные и гидродинамические процессы в сверхновых звездах : диссертация / Блинников Сергей И. — 2000. — (Цит. на с. 7).
8. *Eastman R. G., Pinto P. A.* Spectrum formation in supernovae - Numerical techniques // The Astrophysical Journal. — 1993. — Авг. — Т. 412. — С. 731. — DOI: `10.1086/172957`. — (Цит. на с. 7).
9. *Friend D. B., Castor J. I.* Stellar winds driven by multiline scattering // The Astrophysical Journal. — 1983. — Сент. — Т. 272. — С. 259. — DOI: `10.1086/161289`. — (Цит. на с. 8).
10. *Potashov M. S., Blinnikov S. I., Sorokina E. I.* Непрозрачность разлетающегося вещества в расчетах кривых блеска сверхновых // Письма в астрономический журнал: Астрономия и космическая астрофизика. — 2021. — Т. 47, № 04. — С. 239—249. — DOI: `10.31857/S0320010821030062`. — (Цит. на с. 8).
11. *LeVeque R. J., Mihalas D., Muller M. E., Dorfi E.A.* Computational Methods for Astrophysical Fluid Flow. — Berlin: Springer Verlag, 1998. — (Цит. на с. 9).