



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 89 за 2022 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**И.В. Попов, П.Е. Булатов**

## Определение типов разрывов в вычислительной газовой динамике

Статья доступна по лицензии  
Creative Commons Attribution 4.0 International



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Попов И.В., Булатов П.Е. Определение типов разрывов в вычислительной газовой динамике // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 89. 12 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-89>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-89>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М. В. Келдыша  
Российской академии наук**

**И. В. Попов, П. Е. Булатов**

**Определение типов разрывов  
в вычислительной газовой динамике**

**Москва — 2022**

*Попов И. В.<sup>1</sup>, Булатов П. Е.<sup>2</sup>*

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва

### **Определение типов разрывов в вычислительной газовой динамике**

В работе предлагается методика определения типов разрывов в задачах газовой динамики в переменных Эйлера. Эта методика позволяет определять разрывы решения без решения задачи Римана, что даёт возможность решать газодинамические задачи с произвольным уравнением состояния. Этот подход хорошо зарекомендовал себя при решении многомерных задач и может быть эффективно использован на параллельных вычислительных машинах, так как тип разрыва определяется локально в каждой расчётной ячейке. Данный метод позволяет адаптировать вычислительный алгоритм под области, занятые различными типами разрывов, что обеспечивает оптимальную искусственную вязкость для получения монотонных решений и обеспечения условия неубывания энтропии. В работе приводится пример разрисовки задачи газовой динамики, в которой присутствуют различные типы разрывов.

**Ключевые слова:** газовая динамика, контактные разрывы, ударные волны, волны разряжения.

*Igor Viktorovich Popov, Pavel Evgenyevich Bulatov*

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow

### **Definition of discontinuity types in computational gas dynamics**

The paper proposes a technique for determining the types of discontinuities in gas dynamics problems in Euler variables. This technique makes it possible to determine the discontinuities of the solution without involving the Riemann problem, which makes it possible to solve gas dynamics problems with an arbitrary equation of state. This approach works efficiently for multidimensional problems and can be effectively used on parallel computing machines, since the type of the discontinuity is determined locally in each computational cell. This method allows to adapt the computational algorithm to regions occupied by different types of discontinuities, which provides an optimal artificial viscosity for obtaining monotonic solutions and ensuring the condition of non-diminishing entropy. This paper gives an example of a gas dynamics problem, in which different types of discontinuities are present.

**Key words:** gas dynamics, contact discontinuities, shock waves, rarefaction waves.

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного фонда Болгарии, проект № 20-51-18004.

**Funding:** Work was funded by Russian Foundation for Basic Research (RFBR) and National Science Foundation of Bulgaria (NSFB), project number 20-51-18004.

---

<sup>1</sup> [piv2964@mail.ru](mailto:piv2964@mail.ru)

<sup>2</sup> [pbulatov1996@mail.ru](mailto:pbulatov1996@mail.ru)

## Введение

При расчётах задач газовой динамики с образованием разрывных решений необходимо определять типы разрывов. Это необходимо для оптимального выбора разностной схемы с точки зрения минимального количества точек на разрыве и удовлетворения условию устойчивого разрыва (это условие ещё называется условием неубывания энтропии за ударными волнами) [10].

При моделировании разрывных решений задач газовой динамики недостаточно обеспечить выполнение законов сохранения, аппроксимацию и устойчивость метода. Необходимо также обеспечить реальное поведение приближенного решения, особенно при взаимодействии этих разрывов между собой. Для выполнения перечисленных требований в настоящее время существует несколько подходов: метод характеристик, метод распада произвольного разрыва, метод конечных элементов, методы с искусственной вязкостью, методы с выделением разрывов и иные.

К современным методам сквозного счёта относятся TVD [1-3], WAF [4], WENO5, CWENO3 [5,6], которые основываются на методе С.К. Годунова [7] и др. Класс таких схем позволяет по одной методике исследовать поле течения для широкого круга задач, но приводит к размыванию разрывов решения.

К методам с выделением разрывов можно отнести, например, метод решения уравнений газовой динамики с использованием адаптивных сеток, динамически связанных с решением [8], однородный алгоритм расчета разрывных решений на адаптивных сетках [9], численное моделирование двумерных газодинамических течений на сетке переменной структуры [10] и многие другие. Методы в таком подходе хорошо отслеживают разрывы решения, но плохо обобщаются на многомерные задачи.

На основе анализа вышеперечисленных работ и монографии, написанной Б.Л. Рождественским и Н.Н. Яненко [11], а также трудов Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [12], были выписаны неравенства для определения областей, занятых различными разрывами, и обеспечения условий устойчивости разрывов.

Предложенная методика позволяет определить типы разрывов локально без решения задачи Римана и с определением только знака соответствующих неравенств, которые будут выписаны в этой работе. Это позволяет решать задачи газовой динамики эффективно на параллельных вычислительных машинах.

## 1. Постановка исходной задачи

Система уравнений газовой динамики имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \frac{\partial I_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(I_\alpha \mathbf{v}) + \operatorname{grad}_\alpha p = 0, \quad \alpha = \overline{1, D}, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}((E + p)\mathbf{v}) = 0, \end{array} \right.$$

где  $\rho$  – плотность,  $\mathbf{v}$  – скорость с компонентами  $v_\alpha$ ,  $I_\alpha = \rho v_\alpha$  – компоненты вектора импульса  $\mathbf{I} = \rho \mathbf{v}$ ,  $E = \rho \varepsilon + (\rho v^2)/2$  – полная энергия,  $\varepsilon$  – внутренняя энергия, связанная с давлением  $p$  уравнением состояния  $p = (\gamma - 1)\rho \varepsilon$ ,  $\gamma$  – показатель адиабаты Пуассона,  $D$  – размерность пространства.

Рассмотрим задачу о распаде начального разрыва. Первоначально в изотермическом газе её поставил и решил Риман [13]. Для политропных газов она рассмотрена Н. Е. Кочиным [14], а для нормальных газов — Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем [15].

Значения искоемых функций на разрыве находятся из соотношений Гюгонио (Ренкина–Гюгонио) или условия гидродинамической совместимости разрывов, которые имеют вид

$$\rho_1(u_1 - D) = \rho_2(u_2 - D) = W_m, \quad (1)$$

$$p_1 + \rho_1(u_1 - D)^2 = p_2 + \rho_2(u_2 - D)^2 = W_I, \quad (2)$$

$$\rho_1(u_1 - D) \left( \varepsilon_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{(u_1 - D)^2}{2} \right) = \rho_2(u_2 - D) \left( \varepsilon_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{(u_2 - D)^2}{2} \right) = W_e, \quad (3)$$

где  $D = D(t) = x'(t)$  – скорость движения разрыва,  $W_m$ ,  $W_I$ ,  $W_e$  – потоки массы, импульса и энергии соответственно, найденные в системе координат, движущейся со скоростью  $D$  относительно системы, в которой вычисляется скорость течения  $u$ . Эти соотношения справедливы для веществ с произвольными уравнениями состояний.

## 2. Определение областей разрывов и их типов в одномерном случае

На контактном разрыве (КР) поток массы должен быть равен нулю  $W_m = 0$ . Это условие обеспечивается выполнением двух равенств:

$$u_1 = u_2 \quad \text{и} \quad p_1 = p_2.$$

Для определения КР воспользуемся уравнением состояния. Для этого продифференцируем уравнение на размытых разрывах по координате. Для простоты возьмем уравнение состояния идеального газа  $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ , получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = (\gamma - 1) \frac{\partial}{\partial x} (\rho\varepsilon) = (\gamma - 1) \left( \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial x} \right).$$

Производные  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$  велики на КР, но из условия для давления  $p_1 = p_2$  следует, что скачок разности производных давления по пространственной переменной  $[p] = |p(x(t) - 0, t) - p(x(t) + 0, t)|$  равен нулю, а это означает, что изменение производной  $\frac{\partial p}{\partial x}$  конечно и должно быть приближенно равно нулю,

тогда  $\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \approx -\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial x}$ . Выразим из уравнения состояния внутреннюю энергию

$$\varepsilon = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}, \text{ тогда } \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\rho}{(\gamma - 1)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right).$$

Так как  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$  должны быть разных знаков вблизи контактного разрыва, то их произведение всегда отрицательно на нём. Получаем неравенство

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} < 0. \quad (4)$$

Справедливость этого неравенства можно показать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho^2} \left( \rho \frac{\partial p}{\partial x} - p \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - p \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2.$$

Так как на размытом контактном разрыве  $p_1 \approx p_2 > 0$ , то  $\frac{\partial p}{\partial x} \approx 0$  и  $-p \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 < 0$ , поэтому неравенство (4) выполняется.

На ударной волне поток массы  $W_m \neq 0$  отличен от нуля, но выполняется условие непрерывности потока импульса. В этом случае условие (2) для соотношений Гюгонио можно переписать в виде

$$\begin{aligned} p_1 + W_m(u_1 - D) &= p_2 + W_m(u_2 - D), \\ p_1 + V_1 W_m^2 &= p_2 + V_2 W_m^2, \end{aligned}$$

$$W_m^2 = \frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2},$$

где  $V_k = 1/\rho_k$ ,  $k = 1, 2$ .

Из этих соотношений следует, что при переходе через ударный фронт давление возрастает либо убывает одновременно с плотностью. Другими словами, неравенство (4) имеет противоположный знак. Следовательно, когда

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} > 0, \text{ мы имеем либо ударную волну, либо волну разряжения.}$$

Для классификации ударной волны необходимо ввести неравенства с учетом требования возрастания энтропии в узкой области больших градиентов. В этой области на искомые функции оказывают огромное влияние диссипативные силы, вязкости и теплопроводности. Согласно законам термодинамики, эти силы приводят к росту энтропии. Требование роста энтропии тесно связано с условием устойчивости ударной волны. Это условие гласит, что энтропия газа, находящегося за ударной волной, должна быть больше энтропии газа перед ударной волной. В обозначениях в данной статье газ перед ударной волной обозначен цифрой 1, а за ней – цифрой 2, тогда условие устойчивости можно записать в виде неравенства

$$S_2 > S_1,$$

откуда следует, что скорость перед фронтом ударной волны должна быть меньше, чем за фронтом. Получаем неравенство вида

$$u_2 > u_1.$$

Более подробные обоснования можно найти в [11]. Таким образом, на ударной волне должно быть выполнено условие:

$$\frac{\partial u}{\partial x} < 0. \quad (5)$$

На волне разряжения это неравенство имеет противоположный знак:

$$\frac{\partial u}{\partial x} > 0.$$

Обоснование этого неравенства для волны разряжения дается в [15].

В заключение отметим, что при численных расчетах необходимо выявлять области осцилляции сеточной природы. Эти области принято определять из условия отрицательности произведения разностных производных

$$\frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{h_{k+1}} \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{h_k} < 0.$$

Данное условие означает, что в окрестности точки возникает численная осцилляция решения, следовательно, наблюдается его немонотонность, например, появляются локальные экстремумы плотности.

### 3. Определение областей разрывов в многомерных случаях

Для определения областей различного типа разрывов была выбрана искомая функция плотности, так как это единственная функция, которая меняется на всех разрывах. Введем в рассмотрение производную по направлению от градиента плотности  $\ell = \text{grad } \rho / |\text{grad } \rho|$ , которая является аналогом производной по пространству в одномерном случае.

Аппроксимация производных для соответствующих неравенств (4), (5) зависит от типа расчетных сеток и от определения искоемых функций на расчетных сетках, в узлах или в ячейках. Так, для ортогональных сеток в двумерном и трехмерном случаях аппроксимация в узлах подробно описана в работе [16], для неструктурированных треугольных и тетраэдральных сеток с аппроксимацией искоемых функций в ячейке — в работе [17]. Чтобы не повторяться, эти рассуждения и выкладки в данной работе не приводятся. Для других сеток каждый исследователь может предложить свой способ нахождения производных для определения областей различных типов разрывов, так как в современных численных методах решения задач газовой динамики существует огромное разнообразие расчетных сеток для конкретных практических задач.

Проверка на осцилляции численного решения в многомерном случае проводится по следующему критерию: если значение плотности в рассматриваемой ячейке больше или меньше, чем во всех ячейках, окружающих её, то полагается, что в этой ячейке локальный экстремум, и в ней вводится максимальная вязкость.

Сведем полученные неравенства для определения типов разрывов в одномерном и многомерном случае в табл. 1.

Таблица 1.1

	К.Р.	В.Р.	У.В.
1D	$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} < 0$	$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} > 0$	
		$\frac{\partial v}{\partial x} > 0$	$\frac{\partial v}{\partial x} < 0$

Если определить направление разрыва (аналог нормали к линии плоскости разрыва) как  $\ell = \text{grad } \rho / |\text{grad } \rho|$ , то неравенства переписутся в виде

Таблица 1.2

	К.Р.	В.Р.	У.В.
1D-3D	$\frac{\partial}{\partial \ell} \left( \frac{p}{\rho} \right) < 0$	$\frac{\partial}{\partial \ell} \left( \frac{p}{\rho} \right) > 0$	
		$\frac{\partial v_\ell}{\partial \ell} > 0$	$\frac{\partial v_\ell}{\partial \ell} < 0$

#### 4. Численные эксперименты

Рассмотрим задачу 17 из работы [18] о распадах четырех разрывов. Она решалась в единичном квадрате, разделённом на четыре равных квадрата, в каждом из которых были заданы свои постоянные начальные значения функций. Значения функций представлены в табл.2.

Таблица 2

Задача		левый				правый				Время
		$p$	$\rho$	$u$	$v$	$p$	$\rho$	$u$	$v$	$T$
17	верхний	1.0	2.0	0.0	-0.3	1.0	1.0	0.0	-0.4	0.3
	нижний	0.4	1.0625	0.0	0.2145	0.4	0.5197	0.0	-1.1259	

В задаче 17 после распада разрыва образовывались два контактных разрыва, ударная волна и волна разряжения. Расчёты проводились по методу адаптивной искусственной вязкости (метод АИВ) [19] и сравнивались с методом WENO5.

Расчёты по методу АИВ проводились на неструктурированной треугольной сетке с числом расчётных элементов, равным 176316. Результаты по методу WENO5 получены на ортогональной четырехугольной сетке с числом расчетных точек, равным 400x400. В методе АИВ минимальная вязкость вводится на ударных волнах, а максимальная — на осцилляциях численной природы. На волнах разрежения и контактных разрывах искусственная вязкость не вводилась, так как они устойчивы и потому обеспечивается минимальное их размывание.

На рисунке 1А представлен расчёт по методу АИВ, на рисунке 1В — по методике WENO5. На этих рисунках цветом изображается давление, изолиниями — плотность и линиями со стрелками — направление течения газа. На рисунке 1С представлены маркеры, где вводится искусственная вязкость в методе АИВ, зеленым цветом — минимальная вязкость, красным — максимальная вязкость и синим цветом — области, где искусственная вязкость не вводится. На рисунке 1D представлен фрагмент расчетной треугольной неструктурированной сетки, на которой производился расчёт по методу АИВ.

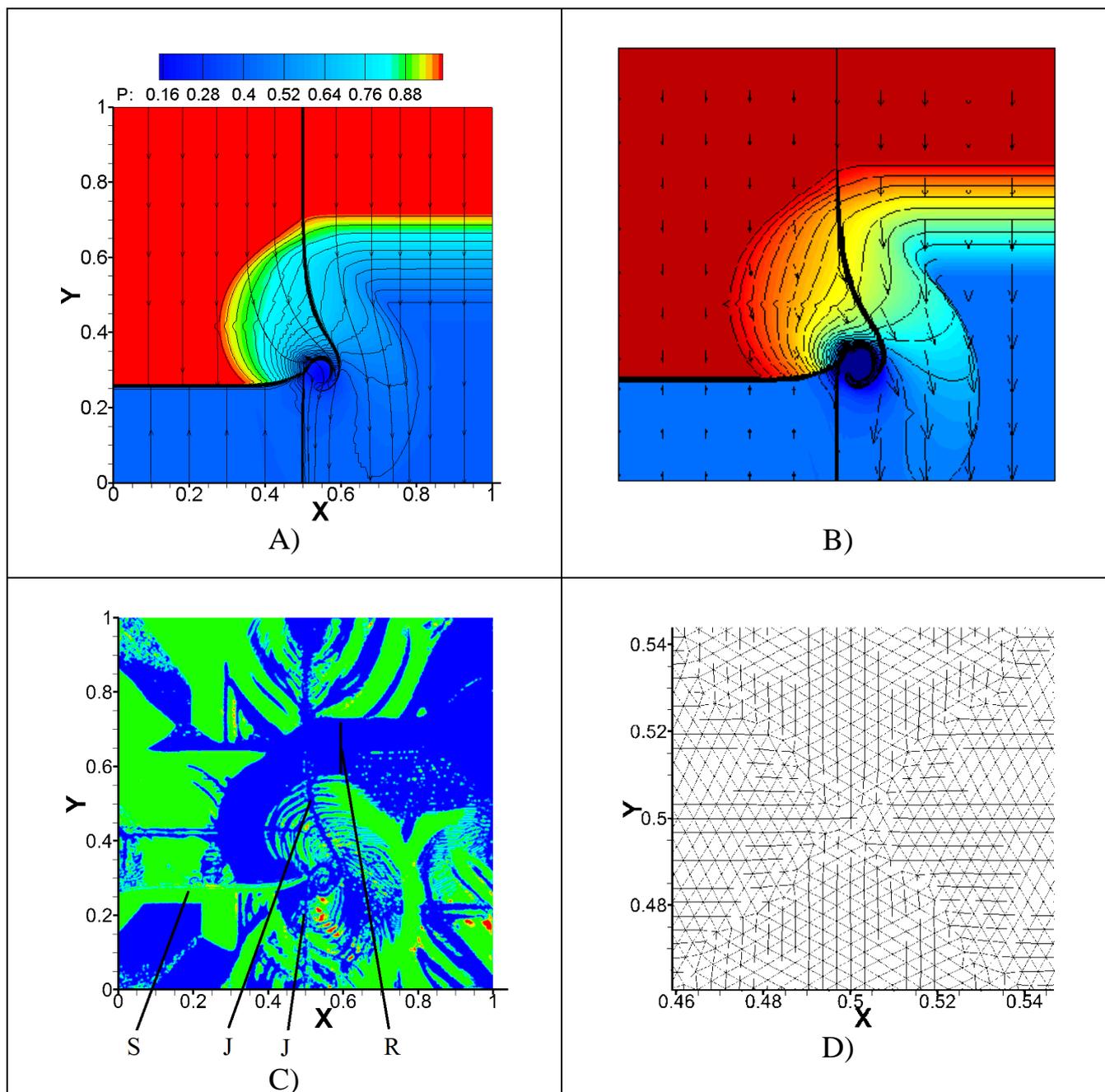


Рис.1. Результаты расчетов (задача 17).

## Заключение

В работе описан метод определения типов разрывов для задач газовой динамики с разрывными решениями. Этот способ позволяет использовать произвольные уравнения состояния, а также гибридные разностные схемы в зависимости от значений искомых функций. Предложенный метод может быть эффективно использован для многомерных задач на произвольных сетках.

Выписанные неравенства позволяют выделять численные решения, которые удовлетворяют требованию неубывания энтропии.

## Список литературы

1. *P.L. Roe*. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes // *J. Comp. Phys.*, 1981, 43, 357-372.
2. *G. Sod*. A Survey of Several Finite Difference Methods Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Zaws. - *J. Comput. Phis*, 1978, v.27, p.1-31.
3. *B. Van Leer*. Lect. Notes Phys. 1982, v.170, p.507-512 .
4. *E.F. Toro*. College of Aeronatics Report № 8907 June 1989. TVD regions for the weighted average flux (WAF) method as applied to a model hyperbolic conservation law.
5. *Guan-Shan Jiang and Chi-Wang Shu*. Efficient implementation of weighted eno schemes. *J. Comp. Phys.*, 1996, 126, p.202–228.
6. *A. Harten, S. Osher*. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes // *SIAM J. Numer. Anal.*, 1987, 24:279–309.
7. *С. К. Годунов*. Разностный метод расчета ударных волн, *УМН*, 12:1(73) (1957), 176–177
8. *Н.А. Дарьин, В.И. Мажукин, А. А. Самарский*. Конечноразностный метод решения уравнений газовой динамики с использованием адаптивных сеток, динамически связанных с решением // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1988, т.28, №8, с.1210–1225. *N.A. Darin, V.I. Mazhukin, A.A. Samarskii*. Konechnoraznostnyi metod resheniia uravnenii gazovoi dinamiki s ispolzovaniem adaptivnykh setok, dinamicheskii sviazannykh s resheniem // *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, 1988, t.28, №8, s.1210–1225
9. *В.И. Похилко, В.Ф. Тишкин*. Однородный алгоритм расчета разрывных решений на адаптивных сетках // *Матем. моделирование*. 1994, т.6, №11, с.25–40. *V.I. Pokhilko, V.F. Tishkin*. Odnorodnyi algoritm rascheta razryvnykh reshenii na adaptivnykh setkakh // *Mat. modelirovanie*, 1994, t.6, №11, s.25–40.
10. *Н.В. Михайлова, В.Ф. Тишкин, Н.Н. Тюрина, А.П. Фаворский, М.Ю. Шапков*. Численное моделирование двумерных газодинамических течений на сетке переменной структуры // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1986, т.26, №9, с.1392–1406. *N.V. Mikhailova, V.F. Tishkin, N.N. Tiurina, A.P. Favorskii, M.Iu. Shashkov*. Chislennoe modelirovanie dvumernykh gazodinamicheskikh techenii na setke peremennoi struktury // *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, 1986, t.26, №9, s.1392–1406.
11. *Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко*. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1968. *B.L. Rozhdestvenskii, N.N. Ianenko*. Sistemy kvazilineinykh uravnenii i ikh prilozheniia k gazovoi dinamike. – М.: Nauka, 1968.
12. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц*. Гидродинамика. Теоретическая физика: т. VI. – М.: Наука, 1986. *L.D. Landau, E.M. Lifshitz*. Fluid Mechanics 2nd edition. Course of Theoretical Physics, v.6. – New York: Butterworth-Heinemann, 1987
13. *Б. Риман*. О распространении плоских волн конечной амплитуды, Сочинения, Гостехиздат, 1948, 376-395. *Riemann, B.*, Über die Fortpflanzung

- ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, Gött. Abh. Math. Cl. 8 (1860)
14. *Н.Е. Кочин*. К теории разрывов жидкости / Собрание сочинений, 1948, т.2, с.5-42. *N.E. Kochin*. К теории разрывов жидкости / Собрание сочинений, 1948, т.2, с.5-42.
  15. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц*. Механика сплошной среды. – М-Л.: Гостехиздат, 1954. *L.D. Landau, E.M. Lifshitz*. Continuum Mechanics. M-L: Gostekhizdat, 1954.
  16. *И.В. Попов, И.В. Фрязинов*. Адаптивная искусственная вязкость для многомерной газовой динамики в эйлеровых переменных в декартовых координатах // Матем. моделирование, 2010, т.22, № 1, с.32–45. *I.V. Popov, I.V. Fryazinov*. Adaptive Artificial Viscosity for Multidimensional Gas Dynamics for Euler Variables in Cartesian Coordinates // Mathematical Models and Computer Simulations, 2010, v. 2, No. 4, p.429-442.
  17. *И.В. Попов, И.В. Фрязинов*. Метод адаптивной искусственной вязкости для уравнений газовой динамики на треугольных и тетраэдральных сетках // Матем. моделирование, 2012, т.24, №6, с.109–127. *I.V. Popov, I.V. Fryazinov*. Method of adaptive artificial viscosity for gas dynamics equations on triangular and tetrahedral grids // Math. Models Comput. Simul., 2013, v.5, №1, p.50–62
  18. *R. Liska, B. Wendroff*. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations, 2001, November 22, p.1-57, <http://www.math.ntnu.no/conservation/>
  19. *И.В. Попов, И.В. Фрязинов*. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. – М.: КРАСАНД, 2014, 288 с., 18 п.л. *I.V. Popov, I.V. Fryazinov*. Method of adaptive artificial viscosity for the numerical solution of equations of gas dynamics. – М.: KRASAND, 2014, 288 p., 18 p.s.

## Оглавление

Введение .....	3
1. Постановка исходной задачи .....	4
2. Определение областей разрывов и их типов в одномерном случае .....	4
3. Определение областей разрывов в многомерных случаях .....	7
4. Численные эксперименты .....	7
Заключение.....	9
Список литературы.....	10