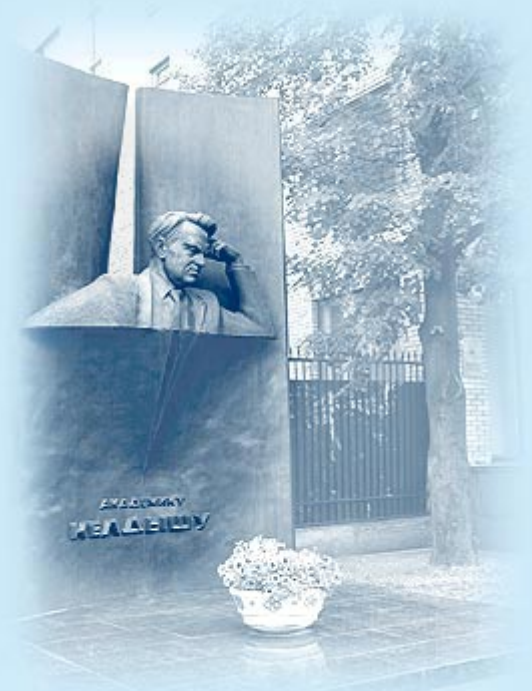




ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 90 за 2022 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Р.Р. Дадашев, [С.А. Шестаков](#)

Методика управления группой спутников на основе коммуникационных графов

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](#)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Дадашев Р.Р., Шестаков С.А. Методика управления группой спутников на основе коммуникационных графов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 90. 31 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-90>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-90>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Р.Р.Дадашев, С.А.Шестаков

Методика управления группой спутников
на основе коммуникационных графов

Москва — 2022

Дадашев Р.Р., Шестаков С.А.

Методика управления группой спутников на основе коммуникационных графов

Рассмотрены методы синтеза управления относительным движением группы космических аппаратов. При построении используется техника, основанная на применении графов различного типа для описания взаимодействия спутников. Представлено доказательство возможности устранения относительного дрейфа спутников с помощью метода, основанного на использовании ориентированного графа. Аналитические выкладки подкреплены численным исследованием представленных законов управления.

Ключевые слова: групповой полет, устранение дрейфа, граф

Rolan Raphaelevich Dadashev, Sergey Alekseevich Shestakov

Methods for formation flying control based on communication graph technique

Different methods for formation flying control based on communication graphs and digraphs are considered. Necessary and sufficient conditions for relative drift elimination are presented. Numerical study is conducted.

Key words: formation flying, drift elimination, graph

Введение

Современные миссии, включающие несколько космических аппаратов, открывают новые возможности для научного и технического развития и одновременно ставят новые задачи по обеспечению навигации, управления и взаимодействия аппаратов. Цель использования множества спутников в группе — выполнение единой задачи, что, в свою очередь, вызывает необходимость разработки и использования новых алгоритмов управления, в том числе относительно орбитальным и угловым движением. С точки зрения относительного орбитального движения основная проблема заключается в дрейфе каждого спутника относительно орбитальной системы координат, что влечёт за собой распад группы. Настоящая работа описывает два метода построения активного управления относительным движением космических аппаратов формации с целью нивелирования дрейфа. Для описания взаимодействия спутников в работе используется аппарат теории графов. Предложенная в работе методика базируется на известном способе представления взаимодействующих агентов как вершин, а самих взаимодействий — как рёбер в неориентированном графе [1]. Ранее эта методика была разобрана в работе [4], в настоящей же работе произведены численные исследования и подтверждение ранее полученных в [4] результатов, а также описана ситуация, в которой использование неориентированного графа для построения управления не обеспечивает сходимости дрейфа к нулю. Для решения этой проблемы разработан метод на основе взвешенных ориентированных графов (орграфов). Приведены основные определения и теоремы, продемонстрирован алгоритм построения управления. Проведены численный анализ и моделирование результатов работы алгоритма.

1. Постановка задачи

В работе рассматривается движение группы спутников — мы считаем, что группа состоит из $n \geq 2$ спутников. Предполагается, что спутники обращаются по низкой околоземной околокруговой орбите. Рассматривается движение спутников в ньютоновском потенциале с учётом влияния несферичности Земли, которая описывается второй гармоникой гравитационного потенциала J_2 [3].

Уравнения движения для каждого из n спутников в инерциальной системе координат (ИСК) имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_n = -\mu \frac{\mathbf{r}_n}{r_n^3} + \mathbf{a}_n,$$

где \mathbf{r}_n — радиус-вектор n -го спутника в ИСК, μ — гравитационный параметр Земли, \mathbf{a}_n — вектор ускорения n -го спутника, связанный с несферичностью Земли. В ИСК выражение для \mathbf{a}_n имеет вид [3]

$$\mathbf{a}_n = \frac{3\delta}{2} \frac{\mathbf{r}_n}{r_n^5} \left(\frac{5r_z^2}{r_n^2} - 1 \right) - \frac{3\delta}{r_n^5} \mathbf{R}_z,$$

$$\delta = J_2 \mu R_E^2,$$

где R_E — радиус Земли, $\mathbf{r}_n = (r_x, r_y, r_z)$, $\mathbf{R}_z = (0, 0, r_z)$, $J_2 = 1082.63 \cdot 10^{-6}$.

При исследовании задач, связанных с движением формации, удобно пользоваться моделями движения, описывающими лишь относительную динамику спутников в орбитальной системе координат (ОСК), изображенной на рисунке 1. Последняя обычно связывается с выделенным спутником группы — реальным или виртуальным — этот спутник мы будем называть главным. Все прочие спутники назовём ведомыми. Центр ОСК находится в центре масс главного спутника. Базисные векторы ОСК в ИСК задаются следующим

образом:

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0}{|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0|}, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3,$$

где \mathbf{r}_0 — радиус-вектор главного аппарата, \mathbf{v}_0 — его скорость.

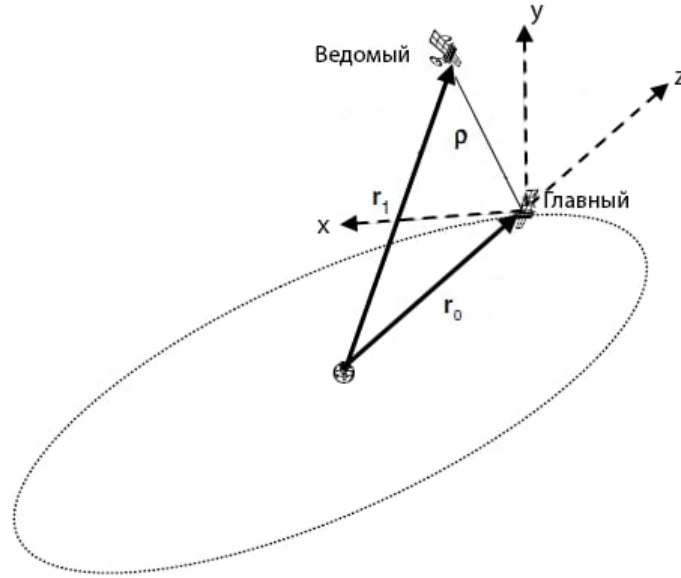


Рисунок 1 – Относительные координаты

В качестве модели относительного движения в работе используются уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшера (ХКУ) [6]. В модели ХКУ спутники подвержены только центральному ньютоновскому полю (без J_2), а главный спутник движется по круговой орбите. В ОСК уравнения имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega\dot{z} = 0, \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0, \\ \ddot{z} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Очевидно, что движение по оси Oy отделимо: оно происходит перпендикулярно

плоскости орбиты. Пусть поставлена задача Коши

$$\begin{cases} x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0, \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \dot{z}(0) = \dot{z}_0. \end{cases} \quad (2)$$

Решение задачи (1),(2) можно представить в виде

$$\begin{cases} x(t) = -3C\omega t + 2A \cos(\omega t) + 2B \sin(\omega t) + D, \\ y(t) = E \cos(\omega t) + F \sin(\omega t), \\ z(t) = 2C + A \sin(\omega t) - B \cos(\omega t), \end{cases} \quad (3)$$

где константа C является функцией начальных условий движения и выражается следующей формулой:

$$C = \frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0. \quad (4)$$

Параметр C отвечает за линейный дрейф ведомого спутника относительно опорной орбиты. Стоит отметить, что данные решения справедливы, в силу линейности модели, только на сравнительно небольших временах. Упомянутый выше дрейф приводит к неограниченному относительному движению и неизбежному распаду группы. Естественной целью потому является гашение относительного дрейфа, в том числе с помощью активного управления относительным движением аппаратов.

Модель ХКУ требует от главного спутника движения по круговой орбите и при этом не учитывает вторую гармонику геопотенциала Земли, которая существенно изменяет траекторию движения спутников. Рассмотрим формацию спутников на околоземной орбите. Ввиду постановки задачи начальное положение спутников таково, что существует хотя бы одна точка на круговой орбите, такая, что $\frac{\rho_i}{|\mathbf{r}_0|} \ll 1$ выполняется для каждого спутника (ρ_i — рас-

стояние от спутника номер i до начала ОСК). Тогда поместим в эту точку фиктивный аппарат, движение каждого спутника относительно этого фиктивного аппарата описывается решением уравнений ХКУ, но так как данные уравнения линейные и однородные, разность двух решений есть решение. Таким образом, для моделирования относительного движения на малых промежутках времени даже для формации, в которой ни один из спутников не обращается по круговой орбите, возможно использовать модель ХКУ.

2. Управление группой спутников на основе метода Ляпунова

Рассмотрим следующую методику построения управления формацией. Она базируется на том, что в ОСК в линейной модели за дрейф спутника отвечает только параметр C . Поэтому, в первом приближении, для поддержания формации необходимо каким-то образом изменять параметр C каждого спутника. Для синтеза управления будем использовать прямой метод Ляпунова. Опишем закон управления для одного спутника, который по необходимости далее обобщается на случай n спутников. Рассмотрим влияние вектора управляющего ускорения $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ на параметр дрейфа C . Пусть дано управляемое движение в модели ХКУ:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega\dot{z} = u_x, \\ \ddot{y} + \omega^2 y = u_y, \\ \ddot{z} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = u_z. \end{cases} \quad (5)$$

В каждый момент времени t параметр C может быть пересчитан согласно формуле (4). В этом случае производная C по времени имеет вид

$$\dot{C} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\omega} + 2z \right) = \frac{\ddot{x}}{\omega} + 2\dot{z}. \quad (6)$$

Подставим первое уравнение системы (5) в (6) и получим эволюцию параметра дрейфа спутника:

$$\dot{C} = \frac{u_x - 2\omega\dot{z}_0}{\omega} + 2\dot{z}_0 = \frac{u_x}{\omega}. \quad (7)$$

Для подавления дрейфа необходимо, чтобы параметр C каждого спутника был равен нулю. В таком случае сформируем кандидат-функцию Ляпунова для спутника номер i :

$$V_i = C_i^2.$$

Функция V_i всюду неотрицательна и равна нулю только при $C_i = 0$. Производная по t функции V_i с использованием (7) выглядит следующим образом:

$$\dot{V}_i = \frac{d}{dt} (C_i^2) = 2C_i\dot{C}_i = 2C_i \frac{u_{xi}}{\omega}. \quad (8)$$

Для обеспечения асимптотически устойчивого положения равновесия, ввиду теоремы Барбашина-Красовского, необходимо потребовать, чтобы функция \dot{V}_i была неположительной. Данное требование сформулируем так:

$$\dot{V}_i \leq 0 \Rightarrow \dot{V}_i = -2kC_i^2. \quad (9)$$

Здесь $C_i^2 \geq 0$, а $k = \text{const} > 0$. Тогда получим следующее соотношение:

$$u_{xi} = -C_i k \omega. \quad (10)$$

Выражение (10) задаёт управление, которое обеспечивает выполнимость

необходимых условий теоремы Барбашина-Красовского. Потребуем выполнения достаточных условий, а значит, и глобальной асимптотической устойчивости относительного движения спутника. Если $\dot{V}_i \leq 0$, то существует единственное решение: $C_i = 0$, которое и является искомым положением равновесия. Итого: мы получили управление, которое обеспечит глобальную асимптотическую устойчивость опорного движения.

На основании (8) и (9) управление i -го спутника задаётся уравнением

$$\dot{C}_i = -kC_i. \quad (11)$$

Применённое к каждому из спутников формации по отдельности управление сводит каждый параметр дрейфа к нулю.

3. Моделирование конфигурации спутников на основе неориентированного графа

Построенное выше управление позволяет обнулить все дрейфы спутников в группе, однако заметим, что сводить все дрейфы к нулю может быть слишком затратно и попросту бессмысленно. Логично рассматривать движение группы спутников в целом, и тогда задача заключается в том, чтобы свести параметр дрейфа всех спутников к одному, возможно ненулевому, значению. Следовательно, необходимо связать управление каждого спутника с параметрами движения других спутников в группе. Для этого введём вектор, состоящий из параметров дрейфа каждого спутника в группе:

$$\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_n)^T.$$

Ввиду того, что управление i -го аппарата строится на основе параметров дрейфа его соседей, необходимо ввести связь между дрейфами спутников в группе. Дрейф спутника номер j относительно спутника номер i равен $C_j - C_i$. Вместо управления (10) тогда рассмотрим

$$u_{xi} = -\bar{C}_i k \omega, \quad (12)$$

где под \bar{C}_i понимается средний дрейф прочих спутников в группе относительно спутника номер i .

Следующее ограничение касается того, движение каких из спутников группы должен учитывать спутник номер i . Пусть n аппаратов вращаются на близких околоземных околокруговых орбитах. Способ выведения их на орбиты таков, что в ОСК они все попадают в определенную окрестность начала координат. На борту каждого аппарата установлены датчики и бортовой комплекс, способный вычислять текущее положение а также скорость относительно главного спутника. Аппараты ведут связь между собой, причем важно отметить, что в зависимости от типа рассматриваемой далее конфигурации способы связи будут изменяться.

Спутники в группе делятся на два вида: материнские и дочерние. Отличие между видами заключается в том, что материнские спутники способны вести связь (принимать и отправлять сигнал) на любом расстоянии, а дочерние спутники ограничены в возможности принимать сигнал, но ограничения на отправку сигнала у них нет. Назовём максимальное расстояние, с которого дочерний спутник может принимать сигнал, радиусом видимости. Подобное описание динамики спутниковой формации приводит к необходимости рассматривать сложную математическую модель, учитывающую многообразие возможностей взаимодействия между отдельными спутниками.

3.1. Построение управления на основе неориентированного графа

Качественным методом описания взаимодействия спутников в группе является моделирование его с помощью графов. Граф — это удобная конструкция для представления связей между конечным числом объектов системы, которая допускает к тому же графическое представление.

Рассмотрим случай связного ациклического неориентированного графа G . Симметричная квадратная матрица смежности A формируется по правилу

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если спутник номер } i \text{ взаимодействует со спутником номер } j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Диагональная матрица степеней вершин D формируется по правилу

$$D_{ii} = N_i, \text{ где } N_i \text{ — количество рёбер, инцидентных вершине номер } i.$$

Лапласиан графа по определению равен

$$L = D - A.$$

Лапласиан графа симметричен и положительно полуопределен [2], его собственные значения вещественны и могут быть упорядочены в виде

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Граф G связный тогда и только тогда, когда $\lambda_2 > 0$ [2].

Опираясь на уравнение (12), записанное для одного спутника, перейдем

к уравнению для группы спутников:

$$\dot{\mathbf{C}} = -kL\mathbf{C}. \quad (13)$$

Ввиду того, что решение системы (13) есть

$$\mathbf{C} = A_1 \mathbf{w}_1 e^{-\lambda_1 kt} + \dots + A_n \mathbf{w}_n e^{-\lambda_n kt},$$

где A_1, \dots, A_n — константы, сходимость движения определяется нулевым собственным значением λ_1 и собственным вектором \mathbf{w}_1 . Остальные компоненты решения экспоненциально затухают. Вектор \mathbf{w}_1 состоит из единиц, так как сумма элементов строки лапласиана равна нулю. Управление системой спутников построено, исследована сходимость движения при наличии управления, но возникает проблема. Она заключается в том, что лапласиан графа “нефизичен”. Описать смысл коэффициентов связи, построенных на основе лапласиана, не представляется возможным. Для лучшего понимания динамики системы желательно описать управление в понятных “физичных” терминах. В работе [4] рассматривается такое описание, переход к нему совершается в два этапа.

1) Вводится нормализованный лапласиан графа: $Q = D^{-\frac{1}{2}}LD^{-\frac{1}{2}}$. На основании теоремы, приведенной в [2], свойства решения спектральной задачи нормализованного лапласиана совпадают с таковой у лапласиана. Это значит, что

$$0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n.$$

Граф G связный тогда и только тогда, когда $\mu_2 > 0$. Нормализованный лапласиан симметричен.

2) Матрица управления выглядит следующим образом:

$$S = E - D^{-1}A = D^{-\frac{1}{2}}QD^{\frac{1}{2}}.$$

Собственные значения матрицы S и матрицы Q совпадают, в уравнении (13) можно заменить L на матрицу S , получая

$$\dot{C} = -kSC, \quad (14)$$

при этом экспоненциальная сходимость решений к вектору \mathbf{w}_1 из единиц сохранится.

Построение управления осуществляется по следующим шагам:

1. формирование матрицы смежности на основе положения спутников.
2. определение спутников, которые будут участвовать в управлении.
3. непосредственное нахождение управляющей силы.

Формирование матрицы смежности на основе положения спутников

Используются следующий алгоритм заполнения матрицы смежности A : все материнские спутники всегда взаимодействуют между собой, поэтому $a_{ij} = a_{ji} = 1$, где j, i — индексы материнских спутников. Каждый дочерний спутник i определяет ближайший к нему материнский спутник j , тогда $a_{ij} = a_{ji} = 1$. Остальные элементы матрицы равны нулю. Получившейся квадратной бинарной матрице A соответствует граф G .

Определение спутников, которые будут участвовать в управлении

На основе полученного графа G происходят поиск и формирование списка соседей каждого спутника. Матрица управления S имеет вид

$$S_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{N_i}, & i \neq j \text{ и } j\text{-й спутник входит в список соседей } i\text{-го,} \\ 0, & i \neq j \text{ и } j\text{-й спутник не входит в список соседей } i\text{-го,} \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

где N_i — количество соседей i -го спутника. Из рассуждений, приведённых в предыдущей главе, и определения матрицы управления S следует, что параметр дрейфа каждого спутника будет сходиться к среднему арифметическому начальных параметров дрейфа.

Поиск управляющей силы

Поскольку спутники имеют возможность определять свои координаты и скорости в ОСК, параметры C_i рассчитываются по формуле (10). Далее каждый спутник находит среднее арифметическое величин $C_{mean} = \frac{1}{N} \sum_i C_i$ его соседей. Тогда величина, которую необходимо устремить к нулю, равна $C_{res} = C_i - C_{mean}$. В этом случае управление выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} u_x = -kC_{res}, \\ u_y = 0, \\ u_z = 0, \end{cases}$$

где $k = \text{const}$.

3.2. Моделирование

Необходимо отметить, что линейная модель ХКУ применяется только для построения управления. Процесс моделирования движения космических аппаратов осуществляется в ИСК с помощью численного интегрирования уравнений движения методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Уравнение движения i -го спутника имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -\mu \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} + \mathbf{a}_i + \mathbf{u}_i. \quad (15)$$

В работе не рассматривается ограничение на управление. В процессе

моделирования учитывается, что вывод спутников на орбиту имеет случайную ошибку. Начальные координаты и скорости каждого спутника в ОСК задаются нормальным распределением с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_r = 1\text{м}$ и $\sigma_v = 0.001\frac{\text{м}}{\text{с}}$ соответственно. Начальные данные равны

$$\begin{cases} i_0 = 40^\circ, u_0 = 5^\circ, \Omega_0 = 20^\circ, R_0 = 500\text{км}, \\ \sigma_x = \pm 1\text{м}, \sigma_y = \pm 1\text{м}, \sigma_z = \pm 1\text{м}, \\ \sigma_{vx} = \pm 0.001\frac{\text{м}}{\text{с}}, \sigma_{vy} = \pm 0.001\frac{\text{м}}{\text{с}}, \sigma_{vz} = \pm 0.001\frac{\text{м}}{\text{с}}, \end{cases}$$

где i_0 , u_0 , Ω_0 — параметры фиктивной орбиты, относительно которой рассматривается движение остальных спутников.

Рассмотренный выше закон управления включает в себя коэффициент k . Этот коэффициент не зафиксирован и может изменяться в зависимости от условий задачи. На него влияют шаг интегрирования, механизмы управления, а также ограничения, накладываемые на управление в целом (например, отсутствие управляемости по одной из осей аппарата). Для подбора и анализа коэффициента k построим графики орбит относительно одного из спутников в группе в ОСК для различных k .

Результаты моделирования представлены на рисунке 2. Видно, что коэффициент управления $k = 10^{-5}$ обеспечивает ограниченное движение.

Управляющая сила \mathbf{u} представляет собой добавочное ускорение, вносимое в уравнение движения (15) каждому спутнику. Графики зависимости дрейфа и управляющей силы от времени при использовании алгоритма на основе неориентированного графа представлены на рисунках 3, 4.

По данным, представленным на рисунке 3, можно сделать вывод, что через 30 минут после начала движения относительный дрейф каждого спутника погасился. Параметр C каждого спутника устремился к среднему арифметическому значению всех дрейфов спутников формации.

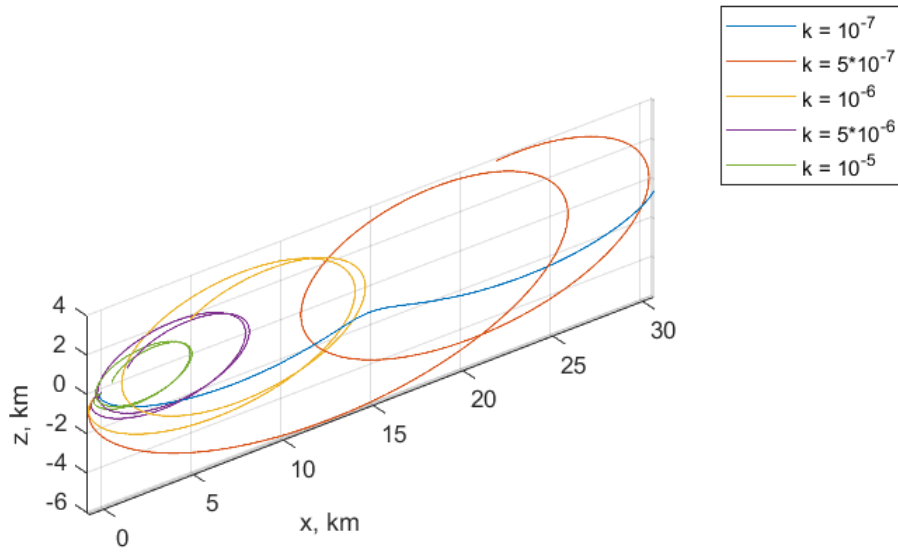


Рисунок 2 – Относительные орбиты в ОСК

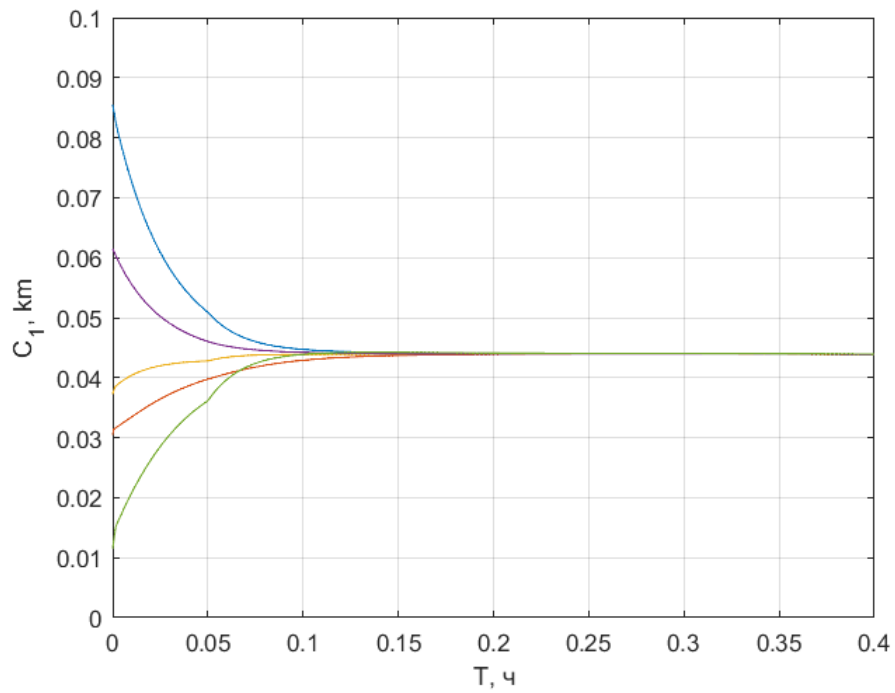


Рисунок 3 – Параметр дрейфа спутников в группе

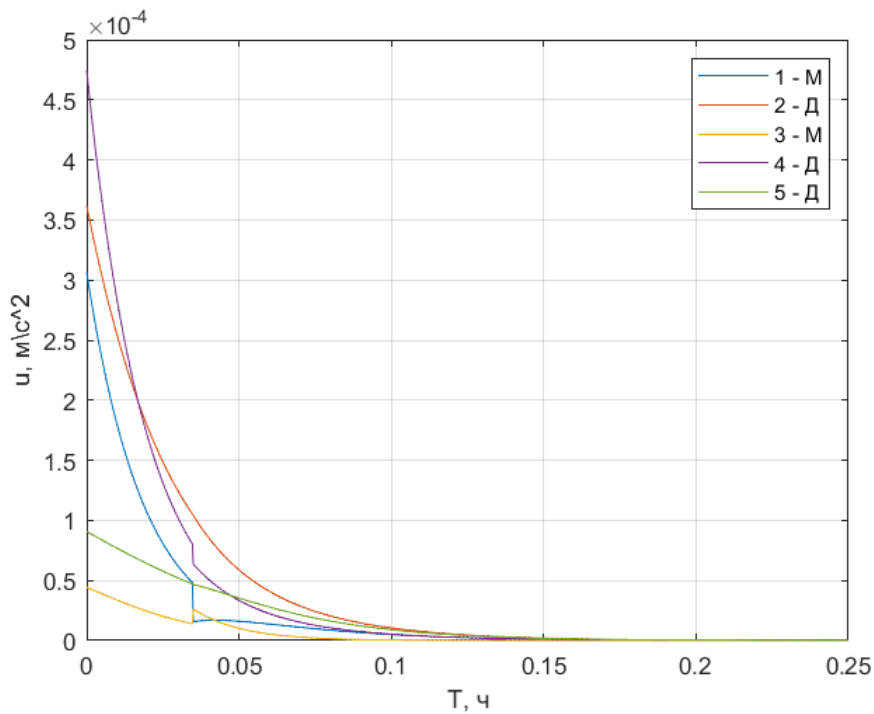


Рисунок 4 – Управляющее воздействие

Представленные графики управляющего воздействия на рисунке 4 для каждого спутника (М — материнский, Д — дочерний) показывают, что управление позволяет нивелировать дрейф лишь при условии специфических начальных значений координат и скоростей в ОСК. Сделав допущение о том, что один из дочерних спутников, ввиду непредвиденных ситуаций, мог быть выведен на орбиту с гораздо большей ошибкой, промоделируем движение со следующими начальными данными для одного из спутников:

$$\begin{cases} \sigma_x = \pm 1000\text{м}, \sigma_y = \pm 1000\text{м}, \sigma_z = \pm 1000\text{м}, \\ \sigma_{vx} = \pm 0.1 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \sigma_{vy} = \pm 0.1 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \sigma_{vz} = \pm 0.1 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \end{cases} \quad (16)$$

Результат моделирования представлен на рисунке 5, как можно заметить, что, хотя управление и нивелирует относительный дрейф, параметр дрейфа существенно изменяется со временем.

График на рисунке 5 интерпретируется следующим образом. Когда до-

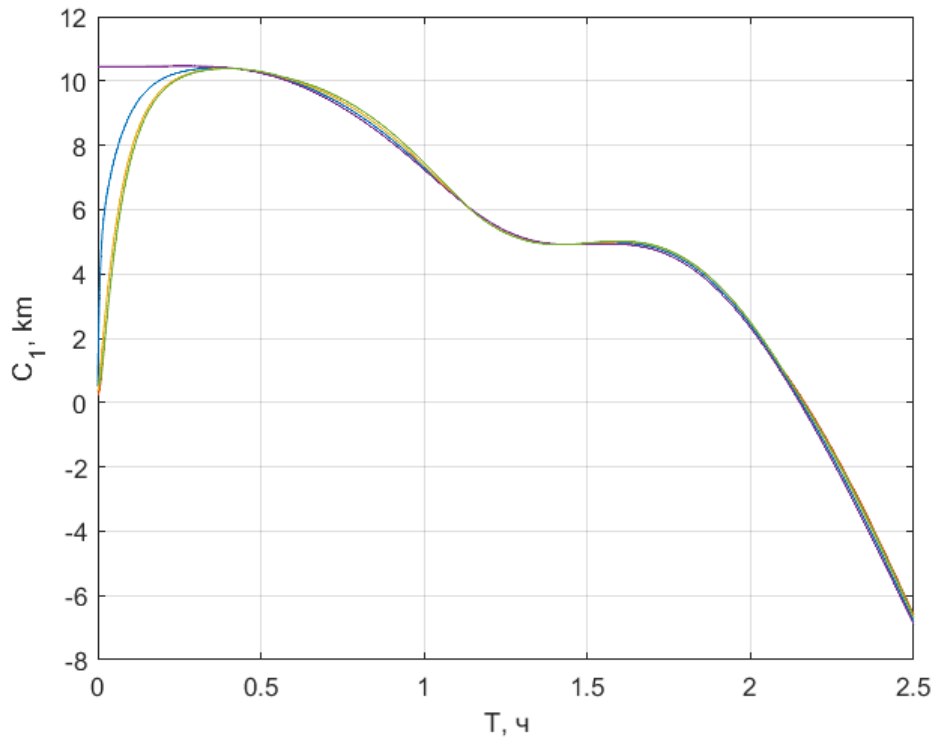


Рисунок 5 – Параметр дрейфа группы спутников

черный спутник находится достаточно далеко, остальные спутники в группе не могут получать параметры его движения, а значит, в формировании закона управления для них далёкий спутник не участвует. Как только удалённый спутник приближается достаточно близко, остальные спутники в группе получают информацию о его параметрах движения и начинают варьировать собственный дрейф таким образом, чтобы остановить относительный дрейф. Спутники не успевают свести относительный дрейф к среднему арифметическому и далее блуждающий аппарат пропадает из зоны влияния остальных спутников. Если при выведении аппаратов на орбиту отделился от группы только один спутник, ситуацию может исправить метод, основанный на взвешенном орграфе.

4. Моделирование конфигурации спутников на основе орграфа

Метод построения управления группой спутников значительно усложняется, если отказаться от приближения, что спутники на всём промежутке времени не удаляются за пределы сферы видимости. Коммуникация между материнскими спутниками не зависит от расстояния. Проблемы возникают с дочерними спутниками. С точки зрения космической навигации дочерние аппараты не ограничены в отправке сигнала, тогда как ограничение на принятие сигнала весьма существенно. В таком случае, выходя за пределы сферы видимости, материнский спутник способен определить расстояние до дочернего и подобрать управление таким образом, чтобы вместе с текущими активными дочерними спутниками восстановить связь с отставшим аппаратом. С математической точки зрения предыдущая задача обобщается с использованием орграфа. Для взаимодействующих материнских и дочерних спутников рёбра в орграфе направлены от материнского к дочернему и в обратном направлении. Связь между всеми материнскими спутниками поддерживается всегда, поэтому рёбра между материнскими спутниками направлены в обе стороны. Для дочернего спутника, вышедшего за сферу видимости, ребро направлено от него к ближайшему материнскому спутнику.

В предыдущей главе рассматривалось управление для каждого спутника только на основе параметра C спутников соседей. В данной постановке задачи, если спутники входили в сферу видимости, не имело значения, на какое расстояние они удалены. Предположим, что для более точного построения управления группой спутников необходимо учитывать расстояние до каждого спутника-соседа внутри сферы видимости. В этом случае граф становится ориентированным и взвешенным.

4.1. Построение управление на основе взвешенного орграфа

Анализ сходимости управления обобщается на случай взвешенного орграфа. Матрица смежности для взвешенного графа:

$$A_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{если спутник номер } j \text{ влияет на спутник номер } i, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $0 < \alpha_{ij} \leq 1$. Конкретное правило определения этих коэффициентов укажем позднее при описании процесса моделирования. Материнский спутник создаёт вокруг себя сферу коммуникации, в которую входят дочерние спутники. Тем самым материнский спутник влияет на движение только тех дочерних аппаратов, которые находятся в его сфере коммуникации, а также на движение остальных материнских. Поэтому нормированные элементы матрицы смежности взвешенного графа должны определяться с помощью параметров движения соседних спутников.

Аналогично случаю неориентированного графа определяются диагональная матрица степеней и лапласиан орграфа:

$$D_{ii} = \sum_j \alpha_{ij}, \quad L = D - A.$$

Рассмотрим систему

$$\dot{X}(t) = -LX(t). \quad (17)$$

Определение 1. Орграф является корневым деревом, если он не содержит ориентированного цикла и имеет вершину v_1 , такую, что для любой другой вершины $v_2 \in G$ существует путь от v_1 к v_2 .

Лемма 1 [1]. Пусть $L = PJ(\Lambda)P^{-1}$ — разложение Жордана лапласиана

орграфа G . Когда G содержит корневое дерево, матрицу P можно выбрать так, что

$$J(\Lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\lambda_n) \end{bmatrix},$$

где $\lambda_i (i = 2, \dots, n)$ имеют положительные действительные части, а $J(\lambda_i)$ — блок Жордана, связанный с собственным значением λ_i . Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-J(\Lambda)t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-Lt} = p_1 q_1^T, \quad (19)$$

где p_1 — первый столбец матрицы P , q_1^T — первая строка матрицы P^{-1} . Тогда $p_1^T q_1 = 1$.

Теорема 1 [1]. Для орграфа G , содержащего корневое дерево, траектория состояния, порожденная (17) с начальным условием $X(t_0) = X_0$, удовлетворяет

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = (p_1 q_1^T) X_0,$$

где p_1 и q_1 — правый и левый собственный вектор, связанные с нулевым собственным значением L , нормированные таким образом, что $p_1^T q_1 = 1$.

Определение 2. Орграф G называется слабо связным, если является

связным неориентированный граф, полученный из G удалением ориентации у рёбер.

Теорема 2 [1]. Траектория состояния (17) на основе орграфа ограничена для любого начального условия тогда и только тогда, когда граф содержит корневое дерево.

Доказательство

1) Достаточность. Так как орграф содержит корневое дерево, то в соответствии с Теоремой 1 траектория (17) ограничена.

2) Необходимость. Предположим, что траектория (17) ограничена. Тогда, с учётом Леммы 1,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-L(G)t} X_0 = \text{const.} \quad (20)$$

Сходимость осуществляется по любой матричной форме. Поскольку правый и левый собственные векторы матрицы $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-L(G)t}$, когда она существует, должны быть собственными векторами $e^{-L(G)}$, которые, в свою очередь, являются левыми и правыми собственными векторами $L(G)$, тогда $\mathbf{1}$ — это левый и правый собственный вектор $L(G)$. Таким образом, $L(G)\mathbf{1} = 0$ и $L(G)^T\mathbf{1} = \alpha\mathbf{1}$. В то время как $\mathbf{1}^T L(G)^T \mathbf{1} = (L(G)\mathbf{1})^T \mathbf{1} = \alpha \mathbf{1}^T \mathbf{1}$, поэтому $\alpha = 0$. Следовательно, орграф имеет корневое дерево. Теорема доказана.

Также важно отметить, что из асимптотической сходимости следует, что нуль, как собственное значение лапласиана орграфа G , имеет алгебраическую кратность, равную единице. Следовательно, G слабо связный.

Если предположить в условии теоремы 2, что орграф является сбалансированным, то есть для каждой вершины входная и выходная степени равны, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-L(G)t} X_0 = \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T X_0,$$

где $\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ — матрица, состоящая из единиц. Сходимость в случае сбалансированного орграфа осуществляется к среднему от начальных условий.

Таким образом, решение уравнения (17) ограничено. Необходимо теперь связать лапласиан с матрицей управления. Если придать элементам матрицы смежности физический смысл, то лапласиан орграфа будет соответствовать матрице управления $L = S$. Таким образом, итоговое управление выглядит аналогично таковому при рассмотрении неориентированного графа:

$$\dot{\mathbf{C}} = -kS\mathbf{C}. \quad (21)$$

По Теореме 2 управление на основе лапласиана взвешенного орграфа в пределе сводит параметр дрейфа C каждого спутника в группе таким образом, чтобы группа оставалась связной. В случае если один из дочерних спутников окажется вне сферы коммуникации, ближайший материнский спутник начнёт управлять своей группой так, чтобы вернуть в сферу коммуникации выпавший спутник.

Дальнейшие рассуждения и построения метода управления аналогичны методу для неориентированного графа. Произведём численное моделирование метода управления на основе взвешенного орграфа и сравним результаты с методом на основе неориентированного графа.

4.2. Моделирование

Для сравнения моделей управления необходимо оставить без изменения коэффициент управления k . Начальные условия возьмём такими, что метод,

основанный на неориентированном графе, не гасит относительный дрейф:

$$\begin{cases} \sigma_{x5} = \pm 1000 \text{ м}, \\ \sigma_{y5} = \pm 1000 \text{ м}, \\ \sigma_{z5} = \pm 1000 \text{ м}. \end{cases}$$

Введём функцию разности максимального и минимального параметра дрейфа на каждом шаге интегрирования:

$$\Delta C = \max_{i=1\dots n} \{C_i\} - \min_{i=1\dots n} \{C_i\}.$$

График 6 зависимости функции разности от времени для случая одного удалённого спутника при использовании неориентированных графов демонстрирует неустойчивое поведение системы.

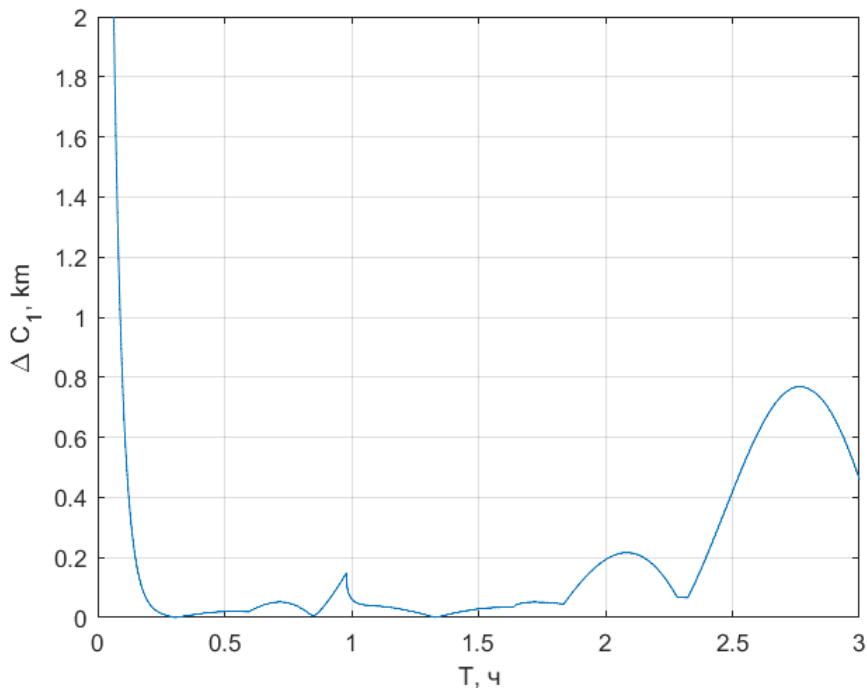


Рисунок 6 – Функция разности для неориентированного графа

Метод, построенный в главе 4.1, предполагает, что коэффициенты в мат-

рице смежности ограничены $0 < \alpha_{ij} \leq 1$, но правила их формирования могут быть заданы произвольным образом. Рассмотрим два процесса формирования элементов матрицы смежности на основе расстояния между спутниками в группе.

Первый способ формирования элементов построен на отношении текущего расстояния до соседнего аппарата и максимального расстояния до всех соседних аппаратов. Если i -й и j -й спутники — материнские, то $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = 1$. Если i -й спутник материнский, а j -й — дочерний, $\alpha_{ji} = \frac{S_{ij}}{S_{max}^i}$. S_{max}^i — максимальное расстояние между i -м спутником и остальными второстепенными аппаратами, входящими в сферу коммуникации i -го. S_{ij} — расстояние между i -м и j -м спутником. Графики зависимости параметра дрейфа и управляющего воздействия (М — материнский, Д — дочерний) и функции разности максимального и минимального параметра дрейфа в группе от времени представлены на рисунках 7, 8, 9.

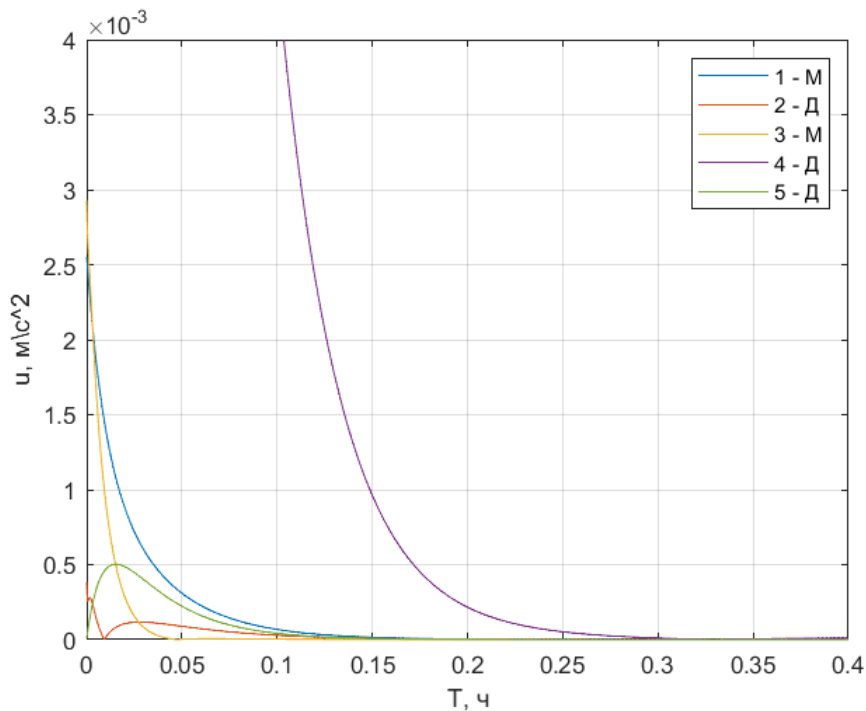


Рисунок 7 — Управляющее воздействие

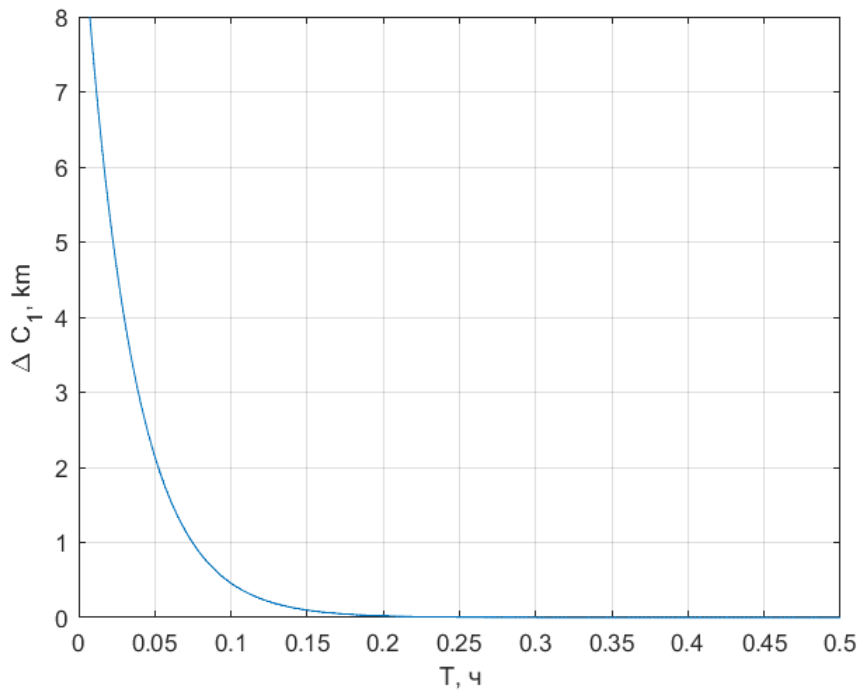


Рисунок 8 – Функция разности максимального и минимального параметра дрейфа в группе

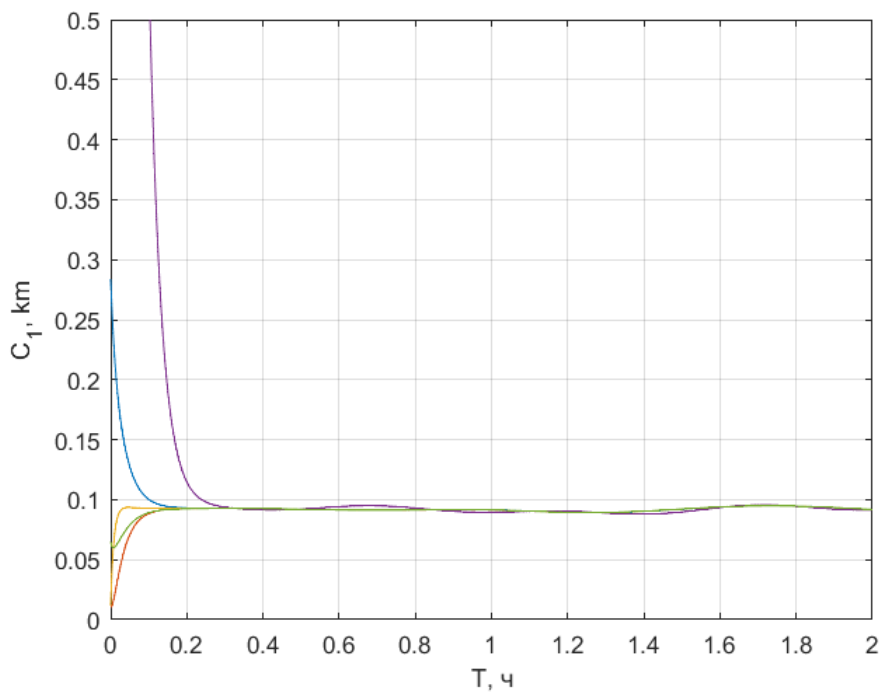


Рисунок 9 – Параметр дрейфа группы спутников

Второй способ формирования элементов построен на отношении текущего расстояния до соседнего аппарата и суммы расстояний до всех соседних аппаратов. Если i -й и j -й спутники — материнские, то $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = 1$. Если i -й спутник материнский, а j -й — дочерний, $\alpha_{ji} = \frac{S_{ij}}{\sum_j S_{ij}}$, S_{ij} — расстояние между i -м и j -м спутником. Графики зависимости параметра дрейфа и управляющего воздействия (М — материнский, Д — дочерний) и функции разности максимального и минимального параметра дрейфа в группе от времени представлены на рисунках 10, 11, 12.

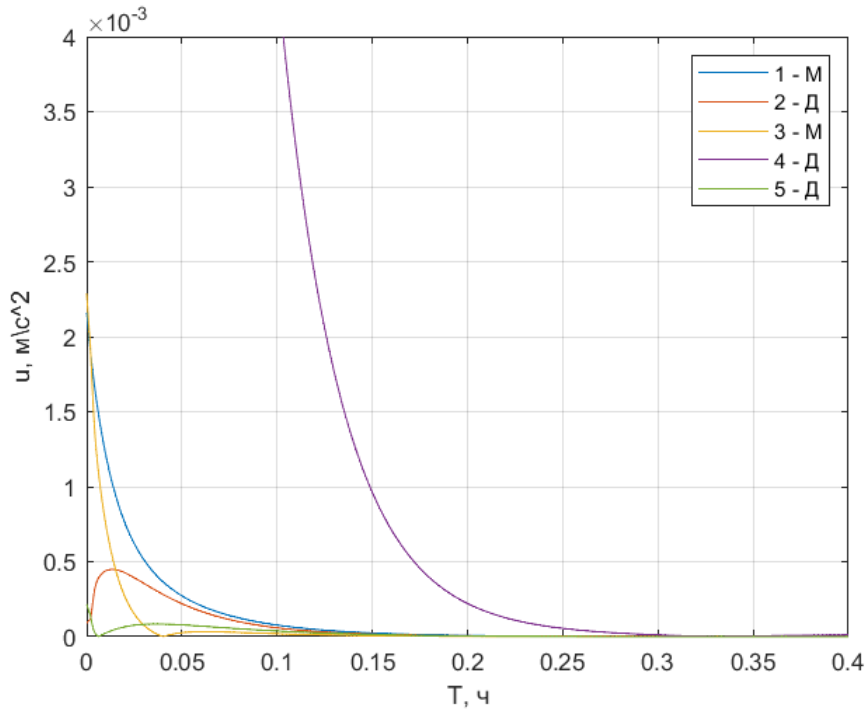


Рисунок 10 – Управляющее воздействие

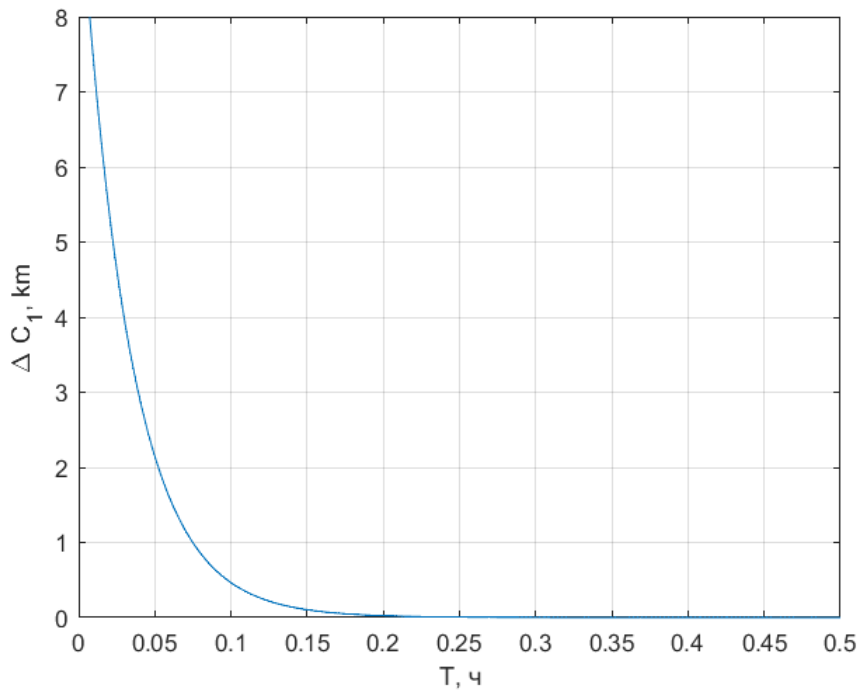


Рисунок 11 – Функция разности максимального и минимального параметра дрейфа в группе

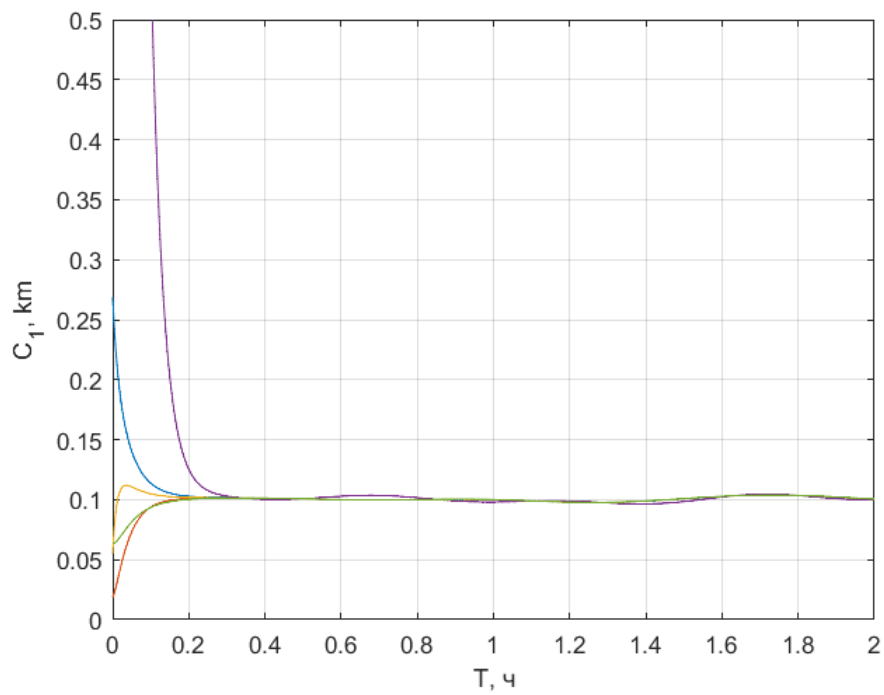


Рисунок 12 – Параметр дрейфа группы спутников

Представленные графики позволяют сделать вывод, что предположение о влиянии относительных расстояний между материнскими и дочерними спутниками, которые формируют элементы матрицы смежности, оказалось верным. Необходимо отметить, что важным условием выполнения теоремы о сходимости движения под влиянием управления является наличие корневого дерева. Оно образуется только при условии отделения одного спутника. Иначе возникает простейшая ситуация, в которой алгоритм на основе взвешенного орграфа не даст сходящегося движения и гашения относительного дрейфа: удаление от группы одновременно двух и более аппаратов. Таким образом, если начальные условия допускают отделение двух и более аппаратов от группы, то разработанное управление, вероятно, не позволит обеспечить нивелирование относительного дрейфа всех аппаратов.

Заключение

В ходе проделанной работы были рассмотрены две модели управления относительным движением группы спутников. Результаты моделирования показали, что для управления на основе неориентированных графов существуют условия, когда данное управление не влечёт сходимости относительного дрейфа к нулю. Для ослабления этих условий был разработан метод управления на основе взвешенных орграфов. В результате проведённого аналитического исследования оказалось, что данное управление обеспечивает сходимости относительного дрейфа спутников в группе при наличии одного отделившегося аппарата. В работе рассмотрены условия сходимости дрейфа при использовании орграфов, проведено численное моделирование.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Mesbahi M., Egerstedt M. Graph theoretic methods in multiagent networks // Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks. — Princeton University Press, 2010.
- [2] Chung F. R. K. Spectral graph theory. — American Mathematical Soc., 1997. — Т. 92.
- [3] Мирер С. А. Механика космического полета. Орбитальное движение // М.: Резолит. — 2007.
- [4] Monahova U., Ivanov D., Mashtakov Y., Shestakov S. Approaches to studying the performance of swarm decentralized control algorithms // Proceedings of the International Astronautical Congress, IAC, C1.
- [5] Alfriend K. T. et al. Spacecraft formation flying: Dynamics, control and navigation. — Elsevier, 2009. — Т. 2.
- [6] Clohessy W. H., Wiltshire R. S. Terminal guidance system for satellite rendezvous // Journal of the Aerospace Sciences. — 1960. — Т. 27. — №. 9. — С. 653-658.

Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи	4
2. Управление группой спутников на основе метода Ляпунова	7
3. Моделирование конфигурации спутников на основе неориентированного графа	9
3.1. Построение управления на основе неориентированного графа . . .	11
3.2. Моделирование	14
4. Моделирование конфигурации спутников на основе орграфа	19
4.1. Построение управление на основе взвешенного орграфа	20
4.2. Моделирование	23
Заключение	29
Список использованных источников	30