ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 91 за 2022 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

М.М. Краснов, М.Е. Ладонкина,
О.А. Неклюдова, В.Ф. Тишкин

О влиянии выбора численного потока на решение задач с ударными волнами разрывным методом Галеркина

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: О влиянии выбора численного потока на решение задач с ударными волнами разрывным методом Галеркина / М.М. Краснов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 91. 21 с. **https://doi.org/10.20948/prepr-2022-91**
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-91

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

М.М.Краснов, М.Е.Ладонкина, О.А.Неклюдова,
В.Ф.Тишкин

О влиянии выбора численного потока на решение задач с ударными волнами разрывным методом Галеркина

Москва — 2022

Краснов М.М., Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф.

О влиянии выбора численного потока на решение задач с ударными волнами разрывным методом Галеркина

В работе проведено сравнение различных численных потоков при расчете течений с наличием ударных волн схемами первого порядка и РМГ второго порядка на задачах из перечня Керка, а именно: Задаче Керка и ее модификациях, дифракции ударной волны на 90-градусном угле, задаче о двойном маховском отражении. Показано, что использование в расчетах численных потоков HLLC и Годунова чаще, чем при использовании других численных потоков, приводит к возникновению неустойчивости, потока Русанова-Лакса-Фридрихса – к высокой диссипации схемы. Наиболее универсальными при проведении производственных расчетов являются гибридные численные потоки, позволяющие подавить развитие неустойчивостей и сохранить точность метода.

Ключевые слова: гиперзвуковая газовая динамика, численные потоки, разрывный метод Галеркина

Mikhail Mikhailovich Krasnov, Marina Eugenievna Ladonkina, Olga Alexandrovna Nekliudova, Vladimir Fedorovich Tishkin

On the influence of the choice of the numerical flow on the solution of problems with shock waves by the discontinuous Galerkin method

The paper compares various numerical flows in the calculation of flows with the presence of shock waves by first-order schemes and second-order DG method on tasks from the Quirk’s list, namely: the Quirk problem and its modifications, shock wave diffraction at a 90 degree angle, the problem of double Mach reflection. It is shown that the use of HLLC and Godunov’s numerical flows in calculations can lead to instability, the Rusanov-Lax-Friedrichs flow leads to high dissipation of the calculation. The most versatile in carrying out production calculations are hybrid numerical flows, which allow suppressing the development of instabilities and maintaining the accuracy of the method.

Key words: hypersonic gas dynamics, numerical flux, discontinuous Galerkin method

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 20-01-00578.

Вычисления проведены с помощью гибридного суперкомпьютеров К60, К100 установленных в Суперкомпьютерном Центре коллективного пользования ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

Введение

При численном решении задач математической физики для получения численного решения, полностью соответствующего точному физическому решению, помимо необходимости использования качественной расчетной сетки и надежного высокоточного численного метода, крайне важно быть уверенным, что численный метод полностью соответствует решаемой задачи.

Известно, что при использовании разностных схем Годуновского типа в некоторых задачах, содержащих ударные волны, возникает развитие неустойчивости типа "карбункул" [3,4]. Условия появления данного вида неустойчивости – это высокие числа Рейнольдса и низко диссипативный численный поток. В работе [9] замечено, что при таких условиях могут возникать и другие типы неустойчивостей.

Большое количество работ посвящено изучению возникновения неустойчивости типа «карбункула», влияющую на профиль фронта ударной волны [10-17]. Одной из установленных причин возникновения данного типа неустойчивости являются используемые численные потоки. Как известно, наиболее подвержены возникновению этой неустойчивости потоки, обладающие низкой диссипацией, а использование высоко диссипативных потоков позволяет избежать возникновения «карбункул»-неустойчивости. По этой причине было предпринято несколько попыток разработки новых методов, подавляющих развития неустойчивостей, при этом обеспечивающих низкую диссипацию [18-21].

Данная работа направлена на исследование подверженности ударно-волновой неустойчивости конкретных численных потоков, реализованных в программном комплексе РАМЕГ3D [8]. Данный тип неустойчивости проверяется на тестовых задачах из перечня Керка [9]. Мы следовали постановкам, данным в работе [10]. В данной работе исследуются численные схемы первого порядка и схемы РМГ второго порядка с численными потоками Годунова [22], HLLC [2], Русанова-Лакса-Фридрихса [6,7] и гибридными потоками [1], используемые нами в расчетах.

Численные потоки, соответствующие системе уравнений Эйлера

Рассмотрим уравнения Эйлера в двумерном случае:

$$\partial_t \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{U}$ – вектор консервативных переменных и $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ – компоненты потоковых функций, для определения давления будем использовать уравнение состояния идеального газа.

Приближенное решение системы (1) в разрывном методе Галеркина ищется как решение следующей системы [23]:

$$\frac{d}{dt}\int_{T_j}\phi_k(\mathbf{x})\mathbf{U}_h(\mathbf{x},t)\,d\Omega+\oint_{\partial T_j}\phi_k(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}_F\left(\mathbf{U}_h^+,\mathbf{U}_h^-,\mathbf{n}\right)d\sigma-$$
$$-\int_{T_j}\left(\frac{\partial\phi_k(\mathbf{x})}{\partial x}\mathbf{F}_x\left(\mathbf{U}_h(\mathbf{x},t)\right)+\frac{\partial\phi_k(\mathbf{x})}{\partial y}\mathbf{F}_y\left(\mathbf{U}_h(\mathbf{x},t)\right)\right)d\Omega=0. \qquad (2)$$

Формула (2) выписана на сеточном элементе T_j, поэтому в коэффициентах и базисных функциях опущен индекс j. $\mathbf{U}_h(\mathbf{x},t)$ – вектор решения, n – вектор внешней единичной нормали к границе элемента ∂T_j, $\mathbf{h}_F(\mathbf{U}_h^+,\mathbf{U}_h^-,\mathbf{n})$ – потоковые функции, вычисленные на границе элемента ∂T_j. Величины, обозначенные через $\mathbf{U}_h^-$, вычисляются на границе ∂T_j элемента T_j по значениям внутри элемента T_j, в то время как величины, обозначенные через $\mathbf{U}_h^+$, вычисляются на границе ∂T_j по значениям в соседней к данному элементу T_j ячейке.

Для обеспечения монотонности решения, полученного данным методом, используются SLOP лимитер [24] или лимитер Кокбурна [23].

В уравнении (2) $\mathbf{h}_F(\mathbf{U}_h^+,\mathbf{U}_h^-,\mathbf{n})$ – численная потоковая функция, зависящая от значений приближенного решения по обе стороны границы элемента и от направления единичного вектора нормали $\mathbf{n}$, являющаяся монотонной и для которой выполнено условие согласования:

$$\mathbf{h}_\mathbf{F}\left(\mathbf{U}_h(\mathbf{x},\mathrm{t}),\mathbf{U}_h(\mathbf{x},\mathrm{t}),\mathbf{n}\right)=\mathbf{F}(\mathbf{U}_h(\mathbf{x},\mathrm{t}))\,. \qquad (3)$$

В наших работах, при численном моделировании с использованием программного комплекса РАМЕГ3D, наиболее часто используются численный поток Годунова, основанный на численном решении задачи Римана, численный поток HLLC и поток Русанова–Лакса–Фридрихса (RLF), гибридные потоки [1, 21].

Известно, что поток RLF (4) обладает более высокой диссипацией по сравнению с численными потоками Годунова и HLLC и обеспечивает наиболее устойчивую работу программного комплекса, однако его применение может сказываться на точности получаемого решения, понижая ее.

$$\mathbf{h}_\mathrm{F}\left(\mathbf{U}_h^+,\mathbf{U}_h^-,\mathbf{n}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{F}\left(\mathbf{U}_h^+\right)+\mathbf{F}\left(\mathbf{U}_h^-\right)-A\cdot\left(\mathbf{U}_h^+-\mathbf{U}_h^-\right)\right),$$
$$A=\max\left(\left|\mathbf{v}^+\right|+c^+,\left|\mathbf{v}^-\right|+c^-\right). \qquad (4)$$

Здесь используется обозначение, введенное выше, c^+ – скорость звука вычисленная на границе ∂T_j элемента T_j по значениям внутри элемента T_j, c^- – скорость звука, вычисленная на границе ∂T_j по значениям в соседней к данному элементу T_j ячейке, $\mathbf{v}$ – скорость.

В работе [1] построен гибридный численный поток, основная идея которого была предложена в работе [21]. Данный поток представляет собой линейную комбинацию одного из потоков (HLLC либо потока Годунова) и устойчивого потока Русанова-Лакса-Фридрихса (RLF).

Направление скачка скорости определяет нормаль к ударной волне: когда граница ячейки совпадает с фронтом ударной волны, используется поток Годунова ($\mathbf{F}^{Godunov}$), а когда граница раздела перпендикулярна ударной волне, применяется поток Русанова-Лакса-Фридрихса ($\mathbf{F}^{RLF}$). Таким образом, увеличивается диссипация в направлении, совпадающем с ударной волной, и устраняется неустойчивость.

$$\hat{\mathbf{F}} = \theta \mathbf{F}^{HLLC} + (1-\theta)\mathbf{F}^{RLF} \tag{5}$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \theta \mathbf{F}^{Godunov} + (1-\theta)\mathbf{F}^{RLF} \tag{6}$$

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{|\Delta \mathrm{u} \cdot \mathrm{n}|}{|\Delta \mathrm{u}|} = \dfrac{|\Delta u n_x + \Delta v n_y + \Delta w n_z|}{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2}}, & |\Delta \mathrm{u}| > \varepsilon, \\ 1, & |\Delta \mathrm{u}| \le \varepsilon, \end{cases} \tag{7}$$

где ε – малая константа, чтобы избежать деления на ноль (например $\varepsilon = 10^{-6}$), n – нормаль к границе ячейки, а $\Delta\mathrm{u} = (u_L - u_\mathrm{R}, v_L - v_\mathrm{R}, w_L - w_\mathrm{R})$ – скачок вектора скорости через границу. Параметр θ вычисляется из нормали к границе ячейки и скачка скорости через поверхность границы ячейки.

Иной подход к построению гибридного потока заключается в добавлении диссипативного члена в областях, где это необходимо.

Для его построения перейдем в локальную систему координат с ортом $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)$, где $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к поверхности, через которую считается поток, $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ – любые единичные ортогональные друг другу вектора, лежащие на этой поверхности. Вектора $\mathbf{U}$ и $\mathbf{F}$ в этой системе координат (обозначенные индексом *) будут иметь вид

$$\begin{aligned} &\mathbf{U}^* = \left(\rho, \rho(\mathbf{u},\mathbf{n}), \rho(\mathbf{u},\boldsymbol{\tau}_1), \rho(\mathbf{u},\boldsymbol{\tau}_1), E\right)^T, \\ &\mathbf{F}^*(\mathbf{U}) = \Big(\rho(\mathbf{u},\mathbf{n}), \rho(\mathbf{u},\mathbf{n})u_n + p, \rho(\mathbf{u},\mathbf{n})u_{\tau_1}, \rho(\mathbf{u},\mathbf{n})u_{\tau_2}, (E+p)(\mathbf{u},\mathbf{n})\Big). \end{aligned} \tag{8}$$

С целью получения нового потока, обладающего большей диссипацией, чем поток Годунова (HLLC), и меньшей диссипацией, чем поток RLF, выберем некоторую скорость W в исходной системе координат и перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся с этой скоростью.

Обозначим Wmax максимальную скорость и Wmin – минимальную скорость (с учетом знака) волн, выработавшихся при распаде произвольного разрыва в случае использования потока Годунова (или при использовании потока HLLC). Заметим, что если W будет больше, чем Wmax, то значения газодинамических величин будут совпадать с U^+ и, после пересчета в исходную систему координат, этот поток будет равен соответственно для использования потока Годунова и потока HLLC

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^{*Godunov}\left(\mathbf{U}^{*+}\right) - W\mathbf{U}^{*+}, \qquad \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^{*HLLC}\left(\mathbf{U}^{*+}\right) - W\mathbf{U}^{*+}.$$

Соответственно, если –W будет меньше Wmin, то значения газодинамических величин будут совпадать с U^- и, после пересчета в исходную систему координат, этот поток будет равен

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^{*Godunov}\left(\mathbf{U}^{*-}\right) + W\mathbf{U}^{*-}, \qquad \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^{*HLLC}\left(\mathbf{U}^{*-}\right) + W\mathbf{U}^{*-}.$$

Взяв полусумму этих потоков, получим поток RLF. Если W=0, то соответственно получаются потоки Годунова (или HLLC).

Таким образом, если $0<W<W^*_{\max}$, где $W^*_{\max} = max\left(|\mathrm{W}_{\max}|,|\mathrm{W}_{\min}|\right)$ мы получаем новый поток, средний между потоком Годунова (HLLC) и потоком RLF и обладающего большей диссипацией, чем поток Годунова (HLLC) и меньшей диссипацией, чем поток RLF. Такого типа поток рассматривался в работе [25].

Используемый гибридный поток может быть получен следующим образом. Рассмотрим инерциальную систему координат, движущуюся со скоростью $W \cdot \mathbf{n}$ относительно исходной системы, и вычислим поток Годунова или HLLC, который затем пересчитаем в исходной системе координат. Полученное в результате значение обозначим через $\mathbf{U}^{*+}$. Аналогичную процедуру проведем со скоростью $-W \cdot \mathrm{n}$ и соответствующее значение обозначим $\mathbf{U}^{*-}$. Взяв полусумму таких потоков, приходим к формулам:

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{F}^{*Godunov}\left(\mathbf{U}^{*+}\right) + \mathbf{F}^{*Godunov}\left(\mathbf{U}^{*-}\right)}{2} - W\frac{\mathbf{U}^{*+} + \mathbf{U}^{*-}}{2}, \tag{9}$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{F}^{*HLLC}\left(\mathbf{U}^{*+}\right) + \mathbf{F}^{*HLLC}\left(\mathbf{U}^{*-}\right)}{2} - W\frac{\mathbf{U}^{*+} + \mathbf{U}^{*-}}{2}, \tag{10}$$

$$W = \theta W^*, \quad W^* = max\left(|\mathrm{u}+c|,|\mathrm{u}-c|\right), \tag{11}$$

$$\theta = \begin{cases} M \le M_{min}, & W = W^*, \\ M_{min} < M < M_{max}, & W = \dfrac{M_{max} - M}{M_{max} - M_{min}} W^*, \\ M \ge M_{max}, & W = 0 \end{cases} \quad (12)$$

где W^* – максимум модулей собственных значений матрицы $\dfrac{\partial \mathbf{F}^*(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}^*}$, θ – параметр [21].

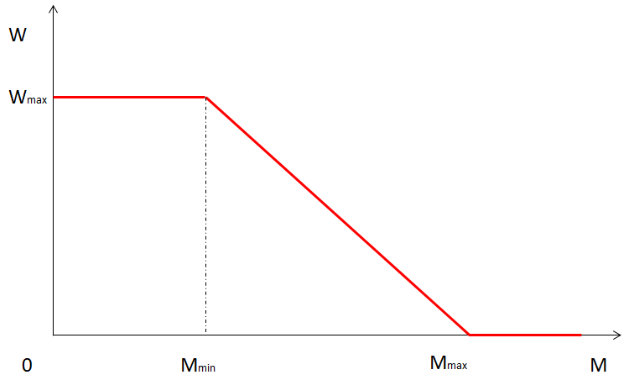


Рис. 1. Зависимость W от M при вычислении параметра θ в формуле (12)

Тестовые расчеты

В целях тестирования различных численных потоков, используемых в программном комплексе РАМЕГ3D, проведено исследование на серии тестовых двумерных задач, подробно описанных в работах, посвященных исследованию карбункул-неустойчивости [9,10].

Далее будем использовать следующие обозначения для схем первого порядка: P0God с потоком Годунова, P0HLLC с потоком HLLC, P0RLF с потоком Русанова-Лакса-Фридрихса, P0Hyb1 с гибридным потоком 1 типа, P0Hyb2 с гибридным потоком 2 типа с параметром (12), P0HybT с гибридным потоком 2 типа с параметром (7), для DGсхем с линейными базисными функциями: P1God, P1HLLC, P1RLF, P1Hyb1, P1Hyb2, P1HybT соответственно. GD1A1 – разрывный метод Галеркина с линейными полиномами и функцией лимитирования Кокбурна с параметром лимитирования, равным единице.

Задача 1. Тестовая задача Керка

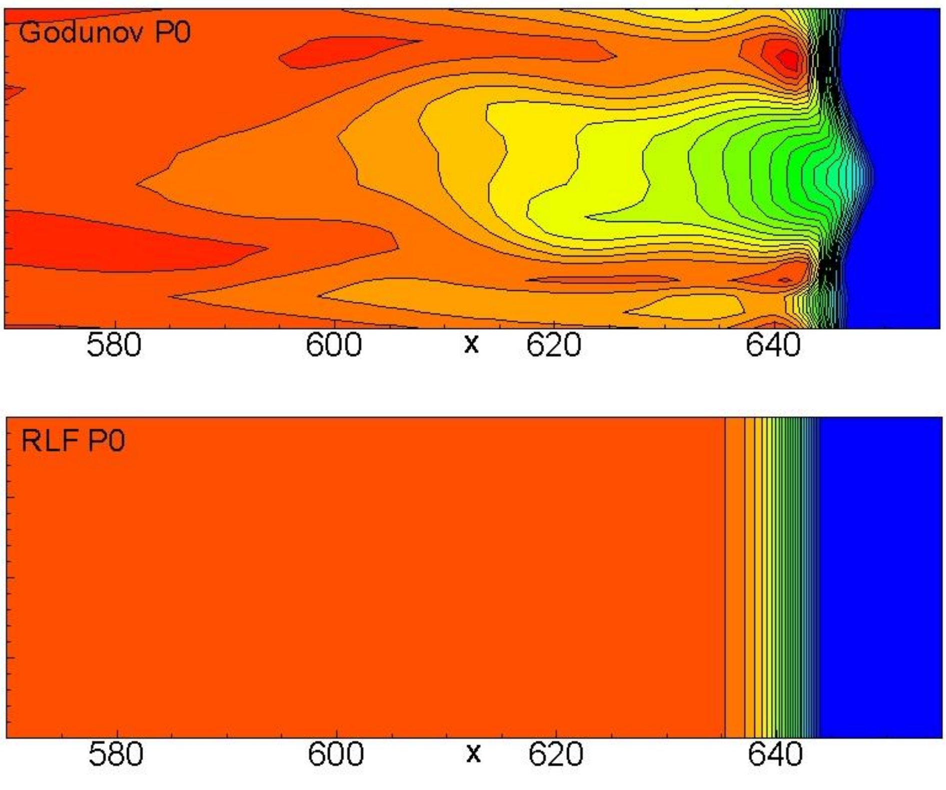
В тестовой задаче Керка рассчитывается ударная волна, распространяющаяся вдоль прямоугольного канала. Расчетная область [0, 800]x[0, 20] в плоскости xy покрывается регулярной сеткой, состоящей из квадратных ячеек с шагом $h_x = h_y = 1$. Неустойчивость плоской ударной волны инициируется малым возмущением одной горизонтальной центральной линии сетки: $y^{new}_{i,jmid} = y_{i,jmid} + \delta(-1)^i$, где i,j – сеточные индексы, в продольных и поперечных сечениях, j_{mid}=10, δ=10^{-6}. Начальное состояние газа в расчетной области: плотность, давление, скорость – заданы $(\rho_0, p_0, u_{x0}, u_{y0}) = (1,1,0,0)$. На верхней и нижней границах сетки задано условие непротекания. Слева при x=0 задается условие втекающего потока с параметрами (ρ, p, u_x, u_y), которые определяются числом Маха $M_s = 6$ и показателем адиабаты $\gamma = 1,4$.

$$u_1 = u_s \frac{2(M_s^2 - 1)}{(\gamma+1)M_s^2}, \quad \rho_1 = \frac{(\gamma+1)M_s^2}{(\gamma-1)M_s^2 + 2}, \quad p_1 = \frac{2\gamma M_s^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma+1)},$$

где $u_s = \sqrt{\gamma} M_s$ – скорость распространения ударной волны по неподвижному газу.

Возникающая неустойчивость в этой задаче четко определяется визуально при расчете схемой P0God (рис. 2). На этом же рисунке приведены результаты расчетов для схем P0RL, P0Hyb. На графиках, полученных по остальным схемам, степень отклонения решения от одномерного потока по изолиниям не определяется. Следуя работе [10], степень отклонения решения от одномерного потока будем определять по формулам

$$\varepsilon_0 = \max_{i,j}\left(\left|\rho_{i,j} - \bar{\rho}_i\right|\right), \quad \bar{\rho}_i = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} \rho_{i,j} .$$



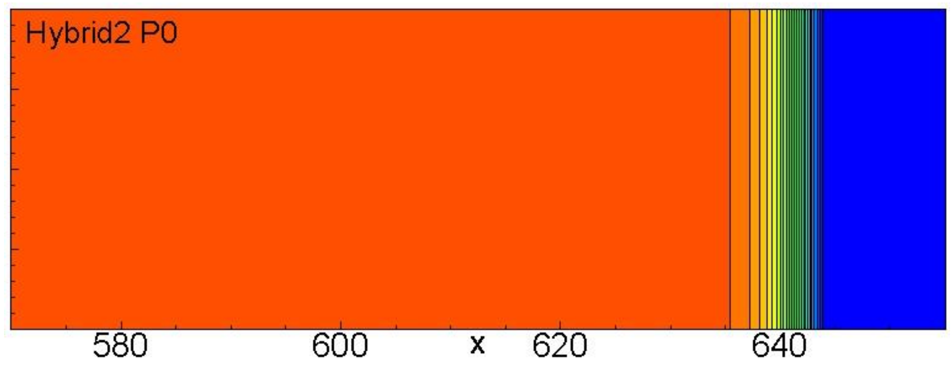


Рис. 2. Задача 1. Изолинии плотности с 1.5 до 5.5 с шагом 0.16

На рисунке 3 показаны величины $\varepsilon_0\left(x_s\right)$, где x_s – расстояние, пройденное ударной волной, $x_s = u_s t$, $u_s = \sqrt{\gamma} M_s$ для схем первого и второго порядка с различными численными потоками на одной задаче Керка 1 с числом Маха $M_s = 6$.

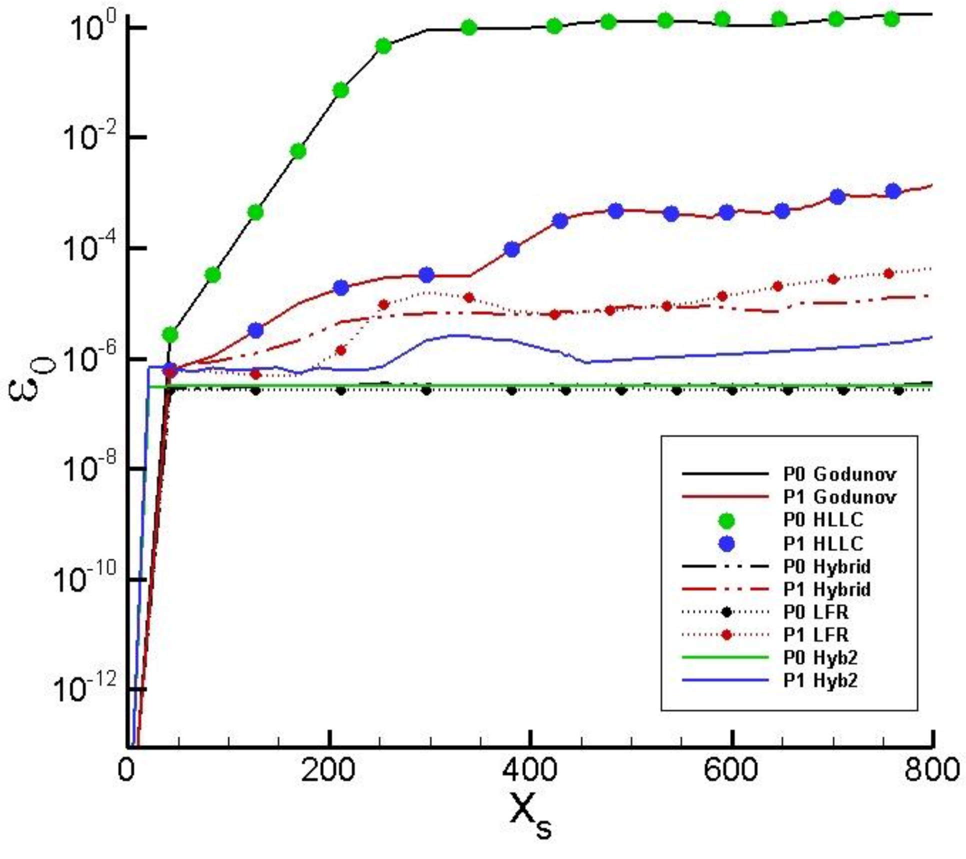


Рис. 3. Задача 1. Зависимость $\varepsilon_0\left(x_s\right)$ в схемах P0 и P1 с численными потоками типа Годунова, HLLC, Русанова-Лакса-Фридрихса, Гибридным 1 типа, Гибридным 2 типа

Расчеты, выполненные схемами P0God и P0HLLC, соответственно P1God и P1HLLC, практически совпадают и показывают наибольшую динамику роста возмущений. Наименьшее отклонение от одномерно потока показали схемы как первого, так и второго порядка с гибридным численным потоком типа 2P0Hyb2, P1Hyb2, P0RLF, P0Hyb. Для схем второго порядка P1God и P1HLLC наибольшее отклонение наблюдается около момента прохождения ударной волной точки x_s=500, на графиках с изолиниями это отклонение не определяется.

Задача 2. Модификация 1 задачи Керка

Расчетная область отличается от области в задаче 1 увеличением размера области по направлению y: [0, 800]x[0, 50]. Сетка остается регулярной, состоящей из квадратных ячеек ($h_x = h_y = 1$). В отличие от задачи 1, меняется способ инициирования неустойчивостей ударной волны: добавляется возмущенная вертикальная граница $x_{i0,j}^{new} = x_{i0,j} + \delta\left(2RND_j - 1\right)$, где i=$i0$=10 – сеточные индексы в поперечном сечении, RND_j – случайные числа, генерируемые в интервале [0, 1] с использованием встроенного генератора случайных чисел языка C++, δ=10^{-4}. На верхней и нижней границах области поставлено условие периодического течения.

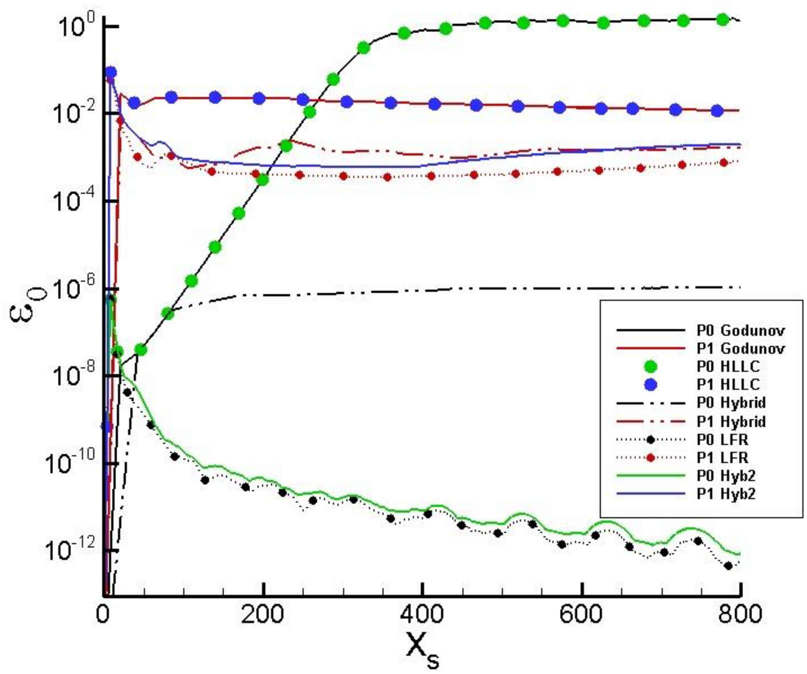


Рис. 4. Задача 2. Зависимость $\varepsilon_0\left(x_s\right)$ в схемах P0 и P1 с численными потоками типа Годунова, HLLC, Русанова-Лакса-Фридрихса, Гибридным 1типа, Гибридным 2 типа.

Задача 3. Модификация 2 задачи Керка: отраженная ударная волна

Расчетная область отличается от расчетной области в предыдущей задаче 2 граничными условиями. На левой границе x=0 задано условие непроницаемой стенки, на правой границе x=800 – втекающий поток с параметрами $\left(\rho, p, -u_x, u_y\right)$ из первой задачи.

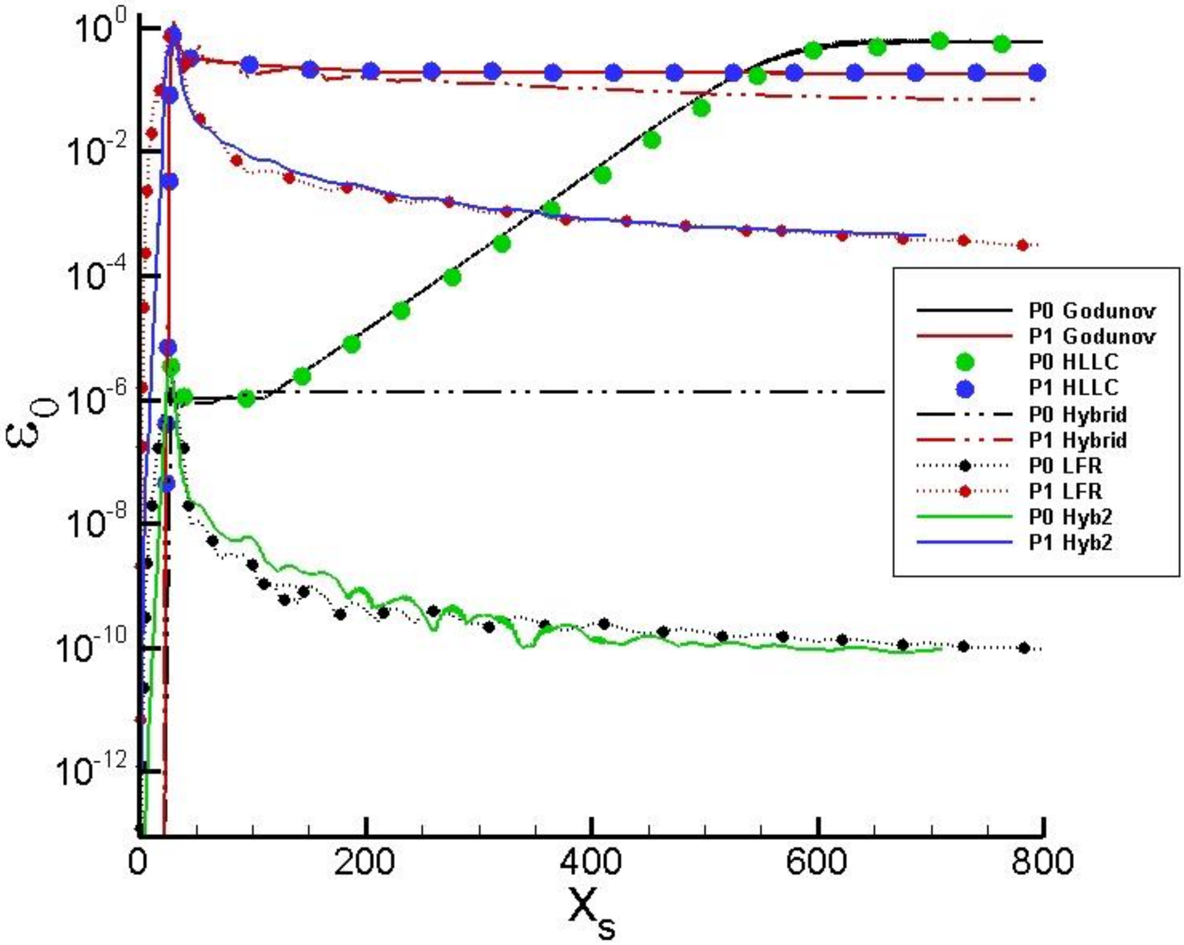


Рис. 5. Задача 3. Зависимость $\varepsilon_0\left(x_s\right)$ в схемах P0 и P1 с численными потоками типа Годунова, HLLC, Русанова-Лакса-Фридрихса, Гибридным 1 типа, Гибридным 2 типа.

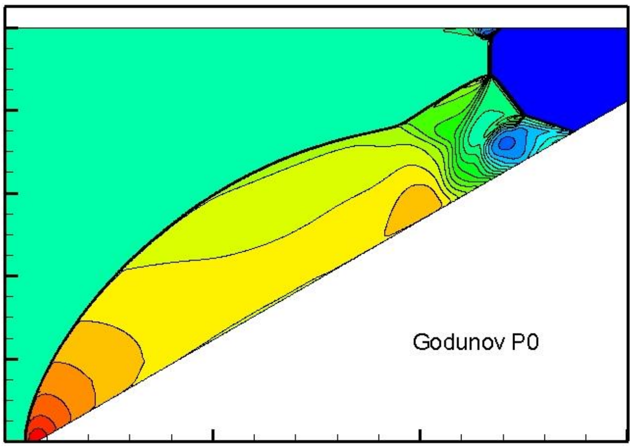
Результаты задач 1-3 полностью согласуются между собой. Обратим внимание, что если сравнивать между собой схемы первого порядка, то можно увидеть, что наибольшее отклонение наблюдается при использовании потока Годунова, HLLC, т.е. потоков, обладающих низкой диссипацией. Поток Русанова-Лакса-Фридрихса показывает наименьшее отклонение, что является закономерным вследствие высокой диссипативности потока. Такие же результаты наблюдаются при использовании гибридного потока типа 2. Для схем второго порядка картина меняется: практически все схемы показали высокую вероятность возникновения неустойчивостей вследствие более высокого порядка точности схемы. Также наиболее подвержены возникновению неустойчивости схемы с численными потоками Годунова, HLLC и гибридный поток 1 типа. Так же как и в случае использования схем первого порядка, схемы P1RLF и P1Hyb2 менее подвержены возникновению неустойчивостей.

Задача 4. Задача о двойном маховском отражении

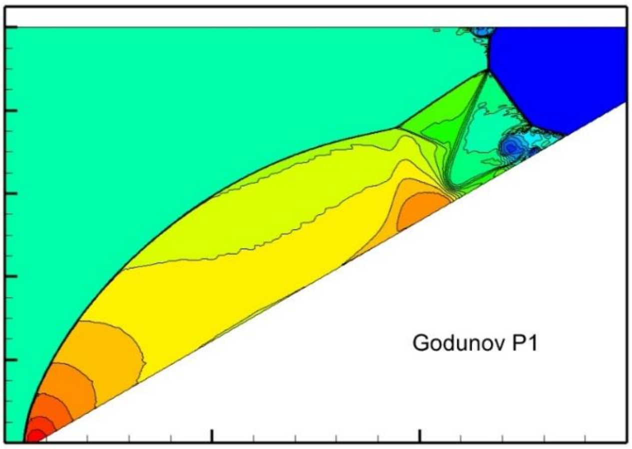
Расчетная область в плоскости xy представляет собой прямоугольник [0, 1.5]×[0, 1], отсеченный прямой y = (x − 0.075) tg(30°); она покрывается регулярной сеткой с количеством ячеек J×I = 800×800. Начальное состояние идеального газа с $\gamma = 1.4$ в расчетной области следующее: $(\rho, p, u_x, u_y,) = (1, 1/\gamma, 0, 0)$. На левой границе области заданы граничные условия свободно втекающего потока с параметрами, соответствующими числу Маха $M_s = 5{,}5$.

На правой границе x = 1,5, нижней y = (x − 0.075) tg(30°) и верхней y = 1 границах области задано условие непротекания. Задача рассчитывается до момента времени t = 0.18.

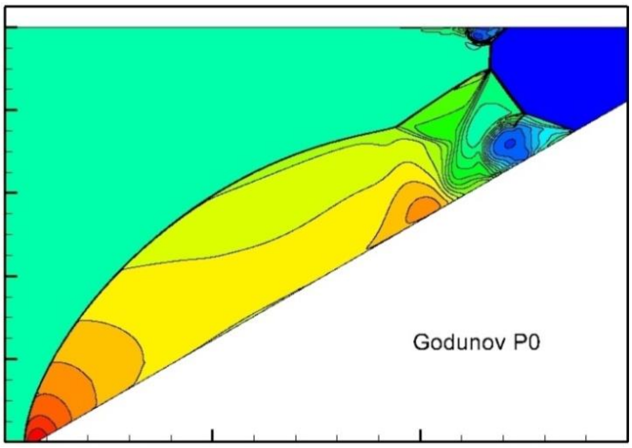
На рисунках 6-9 представлены результаты расчетов данной задачи с различными численными потоками. При расчетах схемами первого порядка при использовании потоков Годунова и HLLC возникает неустойчивость, деформирующая фронты ударных и отраженных волн, при использовании потока RLF и гибридных потоков возникновения неустойчивостей не наблюдается. Кроме того, можно отметить более четкие профили ударных и отраженных волн во всех случаях, кроме расчета с использованием потока RLF. При расчетах DG1A1 можно отметить возникновение неустойчивости при использовании схемы P1God. Это можно объяснить использованием в схеме жесткого лимитера Кокбурна [23] с параметром лимитирования, равным единице, использование которого понижает порядок схемы до первого [26-28]. При расчетах схемой P1RLF (рис.7) можно также отметить неустойчивое поведение решения в виде возникновения мелких осцилляций, сохраняющееся при измельчении шага по пространству. Нам этот факт не до конца понятен, возможно, это связано с повышением порядка схемы за счет линейных полиномов. В работе Родионова [5] также отмечается возможность возникновения такого рода неустойчивости при использовании численных схем порядка точности выше первого. Именно поэтому при расчете схемой P1Hyb2, где в качестве одного из потоков используется поток RLF, также можно заметить возникновение осцилляций решения.



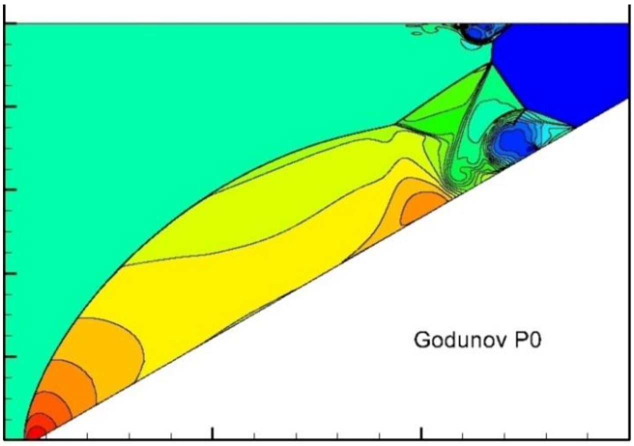
а



г



б



в

Рис. 6. Задача 4. Изолинии плотности от 2 до 12 с шагом 0.5. а – P0God на сетке 800*800, б – P0God на сетке 1600*1600, в – P0God на сетке 3200*3200, г – P1God на сетке 800*800

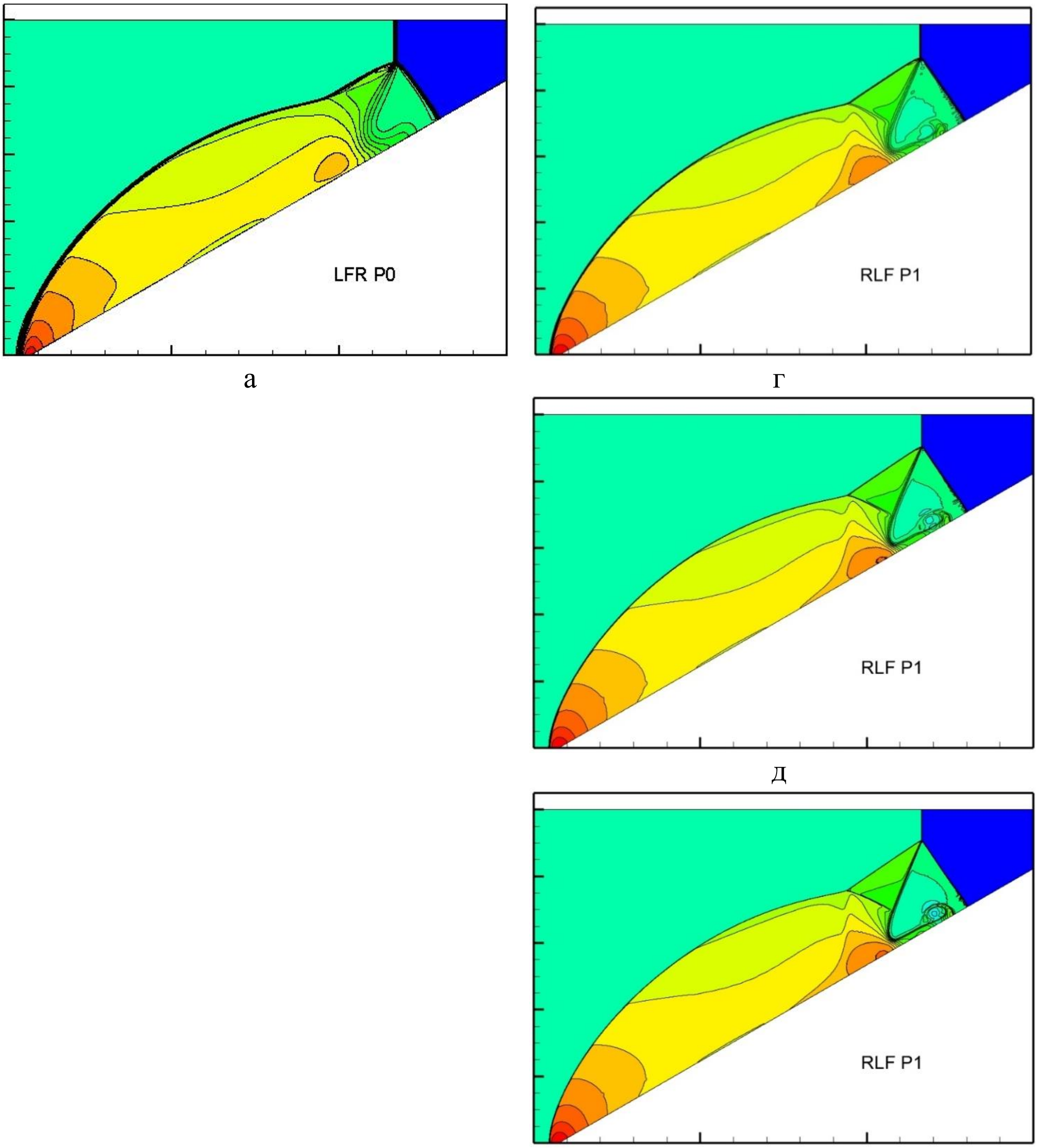


Рис. 7. Задача 4. Изолинии плотности от 2 до 12 с шагом 0.5. а – P0RLF на сетке 800*800, г – P1RLF на сетке 800*800, д – P1RLF на сетке 1600*1600, е – P1RLF на сетке 3200*3200.

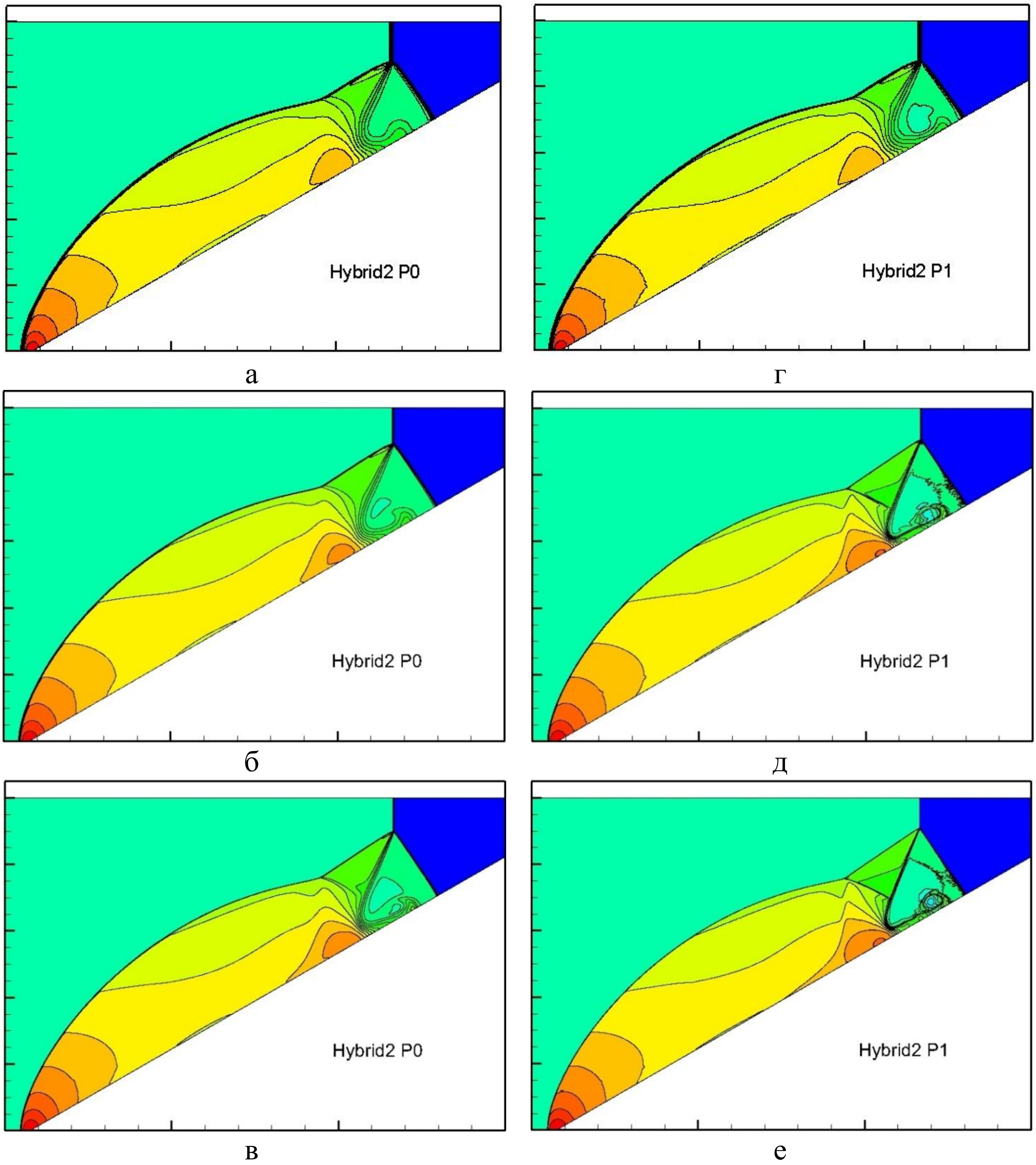
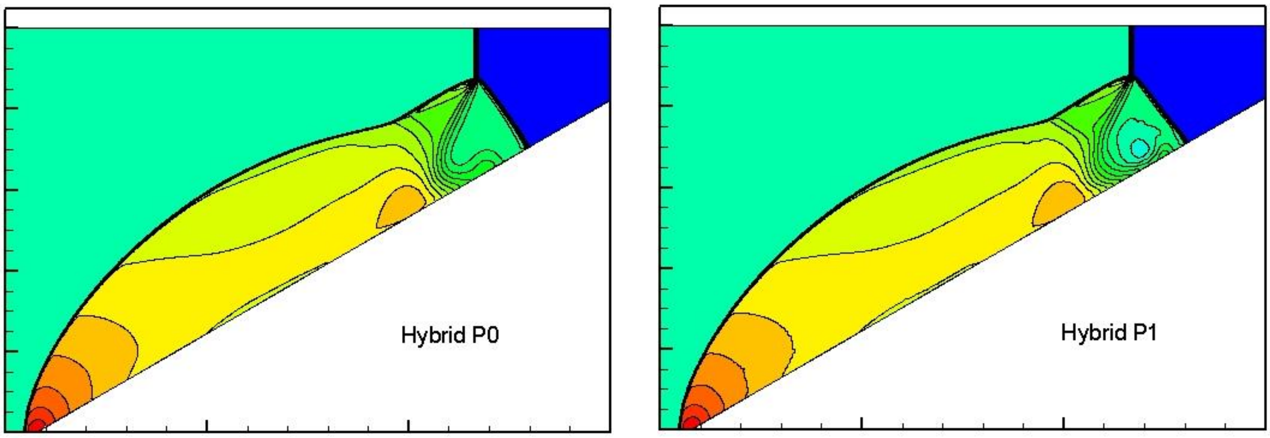


Рис. 8. Задача 4. Изолинии плотности от 2 до 12 с шагом 0.5.
а – P0Hyb2 на сетке 800*800, б – P0Hyb2 на сетке 1600*1600,
в – P0Hyb2 на сетке 3200*3200, г – P1Hyb2 на сетке 800*800,
д – P1Hyb2 на сетке 1600*1600, е – P1Hyb2 на сетке 3200*3200

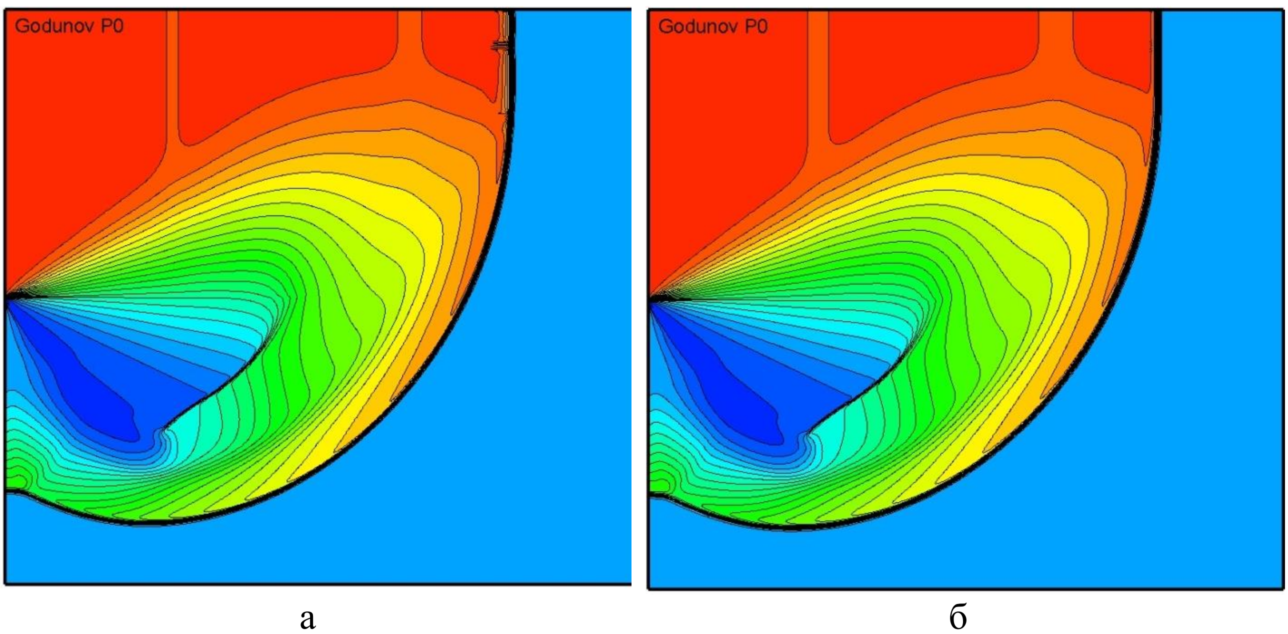


а б

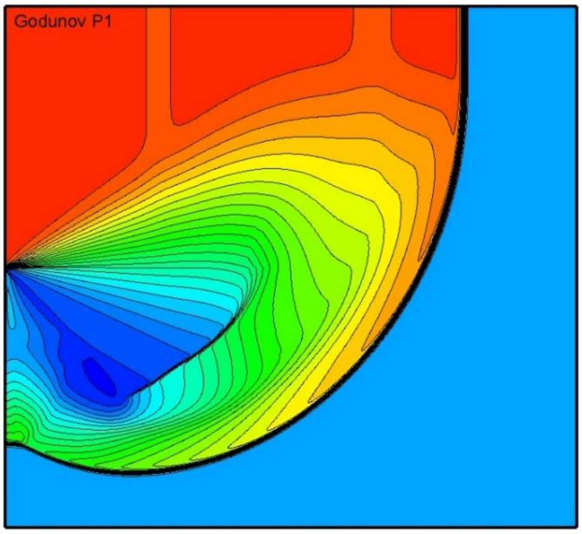
Рис. 9. Задача 4. Изолинии плотности от 2 до 12 с шагом 0.5.
а – P0Hyb на сетке 800*800, б – P1Hyb на сетке 800*800

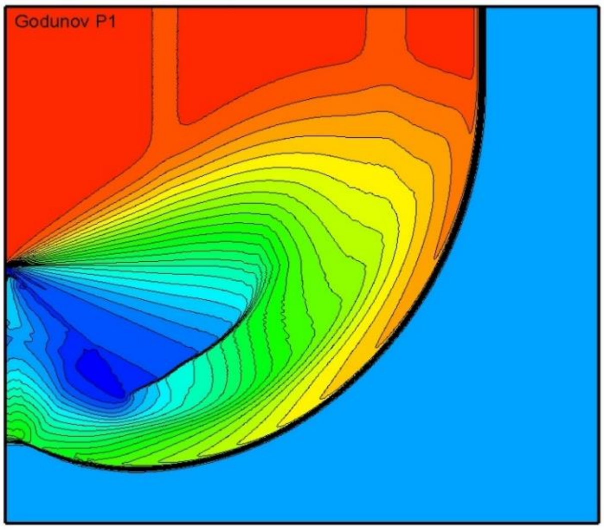
Задача 5. Дифракция ударной волны на 90-градусном угле

Еще одной задачей из работы Керка является расчет дифракции ударной волны на 90-градусном угле. Расчетная область [0, 1]×[0, 1] в плоскости xy покрывается регулярной сеткой с $J \times I = 600 \times 600$; начальное состояние газа (γ = 1.4) в расчетной области следующее (ρ, p,u_x, u_y,) = (1, 1/γ, 0, 0). В верхней y= 1, нижней y= 0, правой x=1частях границы задается условие непротекания. На левой границе x=0: в нижней части левой границы (y < 0.5) задается непроницаемая стенка, в верхней части (y > 0.5) задается втекающий поток с параметрами, соответствующий ударно-волновому числу Маха M_S = 5.09. Задача рассчитывается до момента времени $t = 0.8 / M_S$.



а б



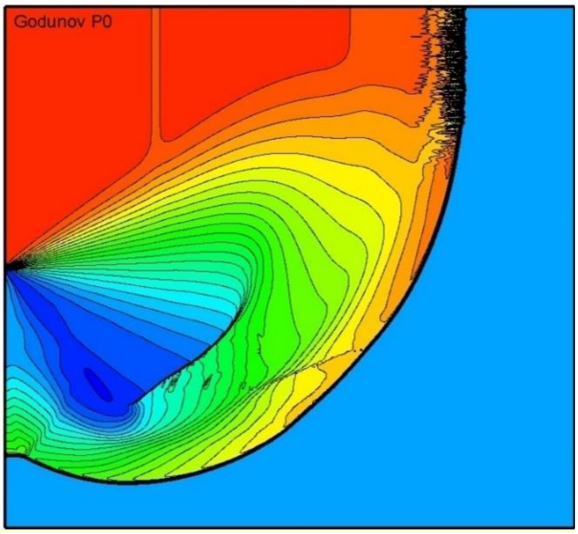


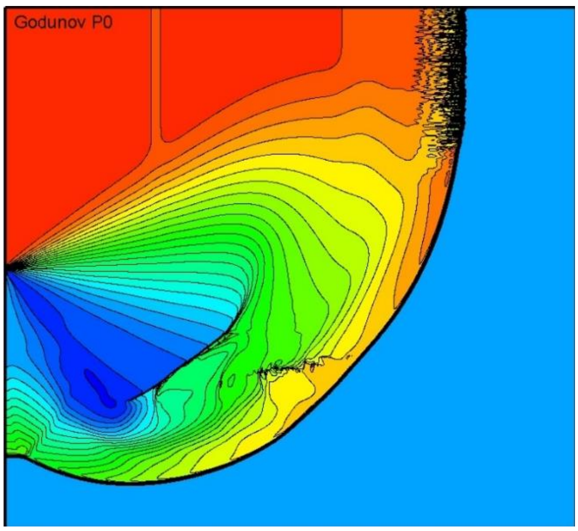
в г

Рис. 10. Задача 5. Изолинии плотности от 0.2 до 5.2 с шагом 0.2 при использовании численного потока Годунова на сетке 1/600.

В результате расчетов данной задачи по схемам Годунова (рис. 10а) на ударной волне, где плоская ударная волна выровнена по сетке, образуется неустойчивость, что согласуется с результатами расчетов многих авторов. Но при измельчении шага по времени в два раза эта неустойчивость пропадает (рис. 10б). При расчетах по P1God (два нижних рисунка 10в, 10г), причем при использовании лимитеров с различной степенью лимитирования такой неустойчивости не наблюдается.

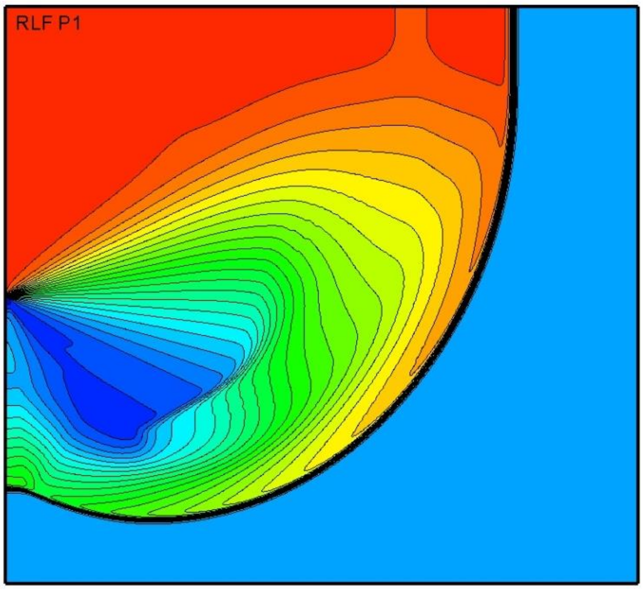
Повторив эту серию расчетов на сетке в два раза мельче по каждому направлению, наблюдаем неустойчивость, описанную в литературе многими авторами [4,5,9-13].



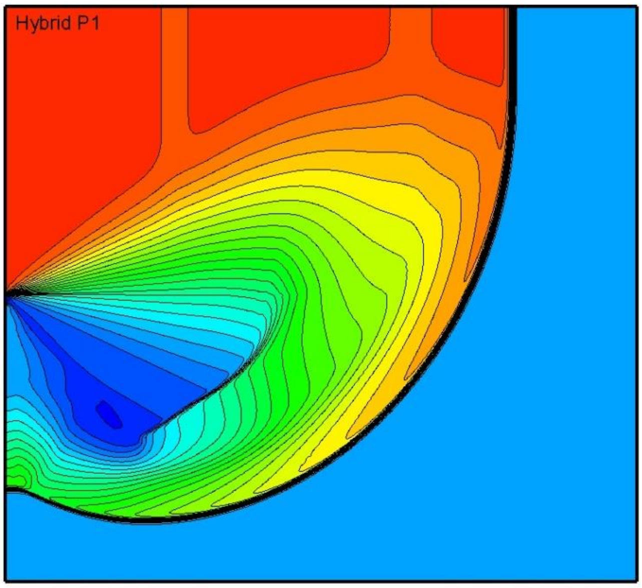


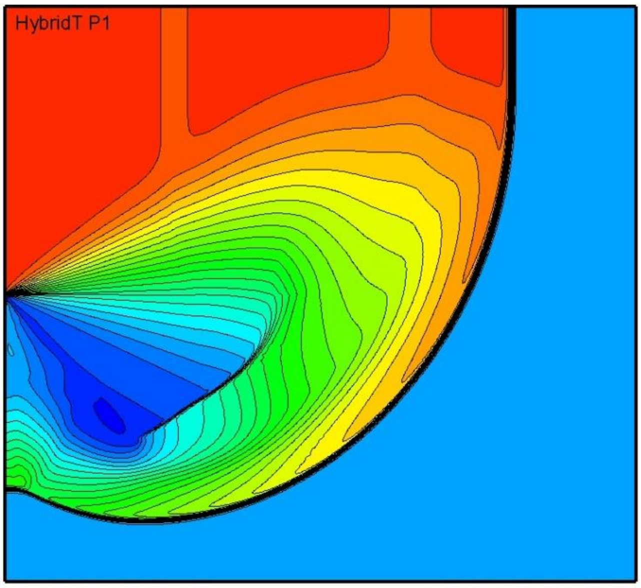
а б

Рис. 11. Задача 5. Изолинии плотности от 0.2 до 5.2 с шагом 0.2 приисползовании численного потока Годунова на сетке 1/1200.



а





б в

Рис. 12. Задача 5. Изолинии плотности от 0.2 до 5.2 с шагом 0.2 при расчетах схемами P1RLF, P1Hyb, P1Hyb2.

При расчетах схемами как первого, так и второго порядка P0RLF, P0Hyb, P0Hyb2 (на рисунках не приведены), P1RLF, P1Hyb, P1Hyb2 с различными вариантами определения параметра θ возникновения неустойчивости не наблюдалось. На рис. 12 видно, что при расчетах P1Hyb, P1HybT дает более четкие фронты ударных волн и более точную картину течения, чем при использовании P1RLF.

Полученные результаты

В работе проведено исследование различных численных потоков при моделировании течений с наличием ударных волн. Результаты расчетов на серии тестовых задач из перечня Керка согласуются с результатами других авторов. Использование в расчетах численного потока Годунова или HLLC может привести к возникновению неустойчивости, потока Русанова-Лакса-Фридрихса – к высокой диссипации схемы и понижению точности расчета. Показано, что применение гибридных потоков позволяет подавить развитие неустойчивости, деформирующей профили волн, и сохранить точность метода.

Список литературы

1. Краснов М.М., Кучугов П.А., Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. Разрывный метод Галёркина на трёхмерных тетраэдральных сетках. Использование операторного метода программирования // Матем. моделирование, 2017, v.29:2, p.3–22;p.529–543.
2. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics // Springer, Third Edition, 2010.
3. Peery K.M., Imlay S.T. Blunt body flow simulations // AIAA Paper No. 88-2924. – 1988.
4. Родионов А.В. Искусственная вязкость для подавления ударно-волновой неустойчивости в схемах типа Годунова повышенной точности. - ФГУП "Российский федеральный ядерный центр ВНИИЭФ", 2018, препринт №116, 51 с.
5. Rodionov Alexander V. Simplified artificial viscosity approach for curing the shock instability, Computers&Fluids, V. 219, 1-17.
6. Русанов В.В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // ЖВМиМФ, 1961, т.I, №2, с. 267-279.
7. Lax P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Communications on Pure and Applied Mathematics, 1954, v.7, №1, p.159-193.
8. Краснов М.М., Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. Программный комплекс РАМЕГ3D для численного моделирования задач аэротермодинамики на высокопроизводительных вычислительных системах, Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №RU2021615026, 02.04.2021.
9. QuirkJ. J. A contribution to the great Riemann solver debate // ICASE Report No. 92-64. – 1992; Int. J. Numer. Meth. Fluids. – 1994. – V. 18. – P. 555–574.
10. Родионов А.В. Разработка методов и программ для численного моделирования неравновесных сверхзвуковых течений в приложении к аэрокосмическим и астрофизическим задачам / Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Саров, 2019.
11. Pandolfi M. and D’Ambrosio D. Numerical instabilities in Upwind Methods: Analysis and Cures for the “Carbuncle” Phenomenon // Journal of Computational Physics, 2001, v.166, p. 271–301.

12. Dumbser M., Moschetta J.-M., Gressier J. A matrix stability analysis of the carbuncle phenomenon // J. Comput. Phys. – 2004. – V. 197. – P. 647–670.
13. Roe P., Nishikawa H., Ismail F., Scalabrin L. On carbuncles and other excrescences // AIAA Paper No. 2005-4872. – 2005.
14. Menart J.A., Henderson S.J. Study of the issues of computational aerothermodynamics using a Riemann solver // AFRL Report No. 2008-3133. – 2008.
15. Kitamura K., Shima E. Towards shock-stable and accurate hypersonic heating computations: A new pressure flux for AUSM-family schemes // J. Comput. Phys. 2013. V. 245. P. 62–83.
16. Xie W., Li W., Li H., Tian Z., Pan S. On numerical instabilities of Godunov-type schemes for strong shocks // J. Comput. Phys. – 2017. – V. 350. – P. 607–637.
17. Gressier J., Moschetta J.-M. Robustness versus accuracy in shock-wave computations // Int. J. Numer. Meth. Fluids. – 2000. – V. 33. – P. 313–332.
18. Nishikawa H. and Kitamura K. Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers // Journal of Computational Physics, 2008, v.227, p.2560–2581.
19. GuoS.and TaoW.-Q. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 2018, v.73, p.33–47.
20. Hu L.J. and Yuan L. A robust hybrid hllc-force scheme for curing numerical shock instability // Applied Mechanics and Materials, 2014, v.577, p.749–753.
21. Ferrero A. and D’Ambrosio D. An Hybrid Numerical Flux for Supersonic Flows with Application to Rocket Nozzles // 17TH International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, 23-28 September 2019, Rhodes, Greece.
22. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник, 1959, т.47(89):3, с.271-306.
23. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations // Lecture Notes in Mathematics, 1998, v.1697, p.151-268.
24. Yasue K., Furudate M., Ohnishi N. and Sawada K. Implicit Discontinuous Galerkin Method for RANS Simulation Utilizing Pointwise Relaxation Algorithm // Commun. Comput. Phys., 2010, v.7, №3, p.510-533, doi: 10.4208/cicp.2009.09.055.
25. Woodward P., Colella Ph. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. of Comp. Phys., 1984, v.54, №1, p.115-173.
26. Ладонкина М. Е. , Неклюдова О. А. , Остапенко В. В. , Тишкин В. Ф. О точности разрывного метода Галеркина при расчете ударных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2018,58:8, 148–156.
27. Ладонкина М. Е., Неклюдова О. А., Тишкин В. Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Матем. моделирование, 2012, 24:12, 124–128.

28. Ладонкина М. Е., Неклюдова О. А., Тишкин В. Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2012, № 34, 31 с.

Оглавление