ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 92 за 2022 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Н.С. Келлин

О существовании точек Штейнгауза. Элементарное рассмотрение

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Келлин Н.С. О существовании точек Штейнгауза. Элементарное рассмотрение // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 92. 36 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2022-92
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-92

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Н.С.Келлин

О существовании точек Штейнгауза. Элементарное рассмотрение

Москва – 2022

УДК: 511.528 + 514.74+374

О существовании точек Штейнгауза. Элементарное рассмотрение

Келлин Н.С.

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы, связанные с известной "квадратной" гипотезой Штейнгауза, уже трижды попадавшей в список нерешённых проблем Ричарда Гая. Рассмотрение ведётся исключительно элементарными методами. То есть только такими, которые и могли быть использованы в работе со школьниками на математических Проектах Международных компьютерных школ юных (МКШЮ - 4–7, 13–15). Полученные частные результаты весьма обширны: как на зимних, так и на летних сессиях МКШЮ ставилась задача получения максимально общих (с использованием элементарных методов) результатов при минимальных допущениях: исследуется система четырёх уравнений Пифагора с семью неизвестными.

Нумерация формул и лемм – по параграфам; нумерация рисунков и теорем – сквозная. Обозначения переменных в основном тексте согласованы с использованными в Приложении 1 и приводимыми в нём чертежами. Обозначения переменных и чертежи в Приложениях 2 и 3 следуют книге Штейнгауза "*Задачи и размышления* ".

Ключевые слова. Проблема Штейнгауза, уравнение Пифагора, решение в целых числах, ограниченная задача Штейнгауза, дискриминант, точка Штейнгауза, точка Бэрри, сравнение по модулю, рациональные расстояния.

UDC: 511.528 + 514.74+374

On the existence of Steinhaus points. Elementary analysis

Nickolai S. Kellin

Abstract. The paper discusses issues related to the well-known "square" Steinghaus hypothesis, which has already hit the list of Richard Guy's unsolved problems three times. Consideration is carried out exclusively by elementary methods. That is, only those that could be used in working with schoolchildren on mathematical projects of the International Computer Schools for the Young (ICSS - 4–7, 13–15). The particular results obtained are very extensive: both in the winter and summer sessions of the ICJJ, the task was to obtain the most general (using elementary methods) results with minimal assumptions: we study a system of four Pythagorean equations with seven unknowns.

The numbering of formulas and lemmas is by paragraphs; the numbering of picturies and theorems is through. The designations of the variables in the main text are consistent with those used in Appendix 1 and the drawings cited therein. Variable notations and drawings in Appendices 2 and 3 follow Steinhaus's book *Tasks and Thoughts*.

Keywords. Steinhaus problem, Pythagorean equation, integer solution, Steinhaus restricted problem, discriminant, Steinhaus point, Barry point, modulo comparison, rational distances.

Оглавление

<u>Введение (краткая история вопроса)</u>

Рассматриваемая здесь задача, по мнению Вацлава Серпинского [1] была поставлена незадолго до 1956 года: *Мы не знаем, имеет ли хотя бы одно решение в целых числах система четырёх уравнений* $x^2+y^2=z^2$, $(t+x)^2+y^2=u^2$, $x^2+(t+y)^2=v^2$, $(t+x)^2+(t+y)^2=w^2$. *Эта задача имеет следующую геометрическую трактовку. На плоскости дан квадрат, сторона которого равна* **1**. *Найдётся ли на плоскости точка, отстоящая от каждой из вершин заданного квадрата на расстояния, выраженные рациональными числами? Последняя проблема была поставлена недавно Г. Штейнгаузом.*

Итак, формально проблема Штейнгауза стоит вот уже 70 лет, попала в три издания списка актуальных задач [6] и, похоже, не собирается сдаваться. Вместе с тем в сети высказывалось мнение, не подкреплённое, однако, никакими ссылками [7], о том, что *Штейнгауз, вероятно, не первый поставил такую проблему*. Категоричность высказывания понятна: на эту проблему могли указать и Гаусс, и Эйлер (хозяин и по сей день гипотетического кирпича имени себя), ... и Эвклид. Пожалуй, "в отказе" здесь останется один Пифагор с его стремлением измерить ВСЁ одними рациональными числами [11].

Так или иначе, но *проблема рациональных расстояний*, как её именуют (не ссылаясь на Гуго Дионисия Штейнгауза) англоязычные издания, стала широко обсуждаться в них только с начала шестидесятых годов [12]. Ситуация выглядит комичной: создаётся впечатление, что эпигоны наполучали в своё время много "неудов" по функциональному анализу и не хотят боле вспоминать ни теорему Банаха-Штейнгауза, ни самого Штейнгауза.

Однако отказываясь далее как от использования столь разухабистых баек, так и апеллирования к случайности, приходим к практически единственно возможному объяснению столь поздней формулировки гипотезы: она изначально имела прикладной характер.

Сам Штейнгауз интересовался практически всей математикой своего времени и, разумеется, был знаком и с набиравшей в то время разгон вычислительной её частью, ставшей впоследствии ComputerSience [4]. Вполне возможно, что в беседе, например, с Борисевичем или с Янушем Микой, или Романом Беднарсом о контроле и минимизации вычислительной погрешности при численном решении уравнения переноса нейтронов (весьма актуальном в те времена), и, разумеется, сопряжённого ему уравнения для их ценности, вполне мог быть поставлен вопрос о выборе оптимальной сетки, сопряжённой с исходной.

Напомню, что с сегодняшней точки зрения времена те были былинные, патриархальные, когда сетки были квадратными, а схемы – алмазными. И оптимальной для контроля величины вычислительной погрешности вполне могла рассматриваться сопряжённая сетка, узлы которой удалены именно на рациональные расстояния от узлов исходной квадратной сетки...

Данная работа обобщает попытки решения как самой задачи Штейнгауза, так и многочисленных ослабленных её формулировок (с каким-либо дополнительным условием, кроме четырёх исходных уравнений Пифагора). Рассмотрение предполагалось вести исключительно элементарными методами; только они и доступны к использованию при работе со школьниками, начиная с 1970 года, когда во Второй школе эта задача стала популярной. Принёс её туда, видимо, Ю.Л.Климонтович: Ю.А.Данилов – один из постоянных участников его семинара на физфаке МГУ – как раз в те времена и являлся переводчиком книги Штейнгауза [2].

В дальнейшем она оставалась популярной и в ВМШ при Московском математическом обществе, и на нескольких Международных компьютерных школах юных. Сводкой доказательных результатов этих исследований (автор руководил работой проектов на МКШЮ – 4–7, 13–15) и является данная работа. При её оформлении выяснилось, что изначальное требование элементарности методов доказательств потребовало творческого к себе отношения.

Во-первых, уровни школьного образования в 1970 и 2020 годах сильно различны (сейчас обобщённая задача Штейнгауза – тема студенческих дипломов как у нас [15], [16], так и за рубежом [17]). А во-вторых, связь её с эллиптическими функциями стала очевидной [3]. И, хотя методы алгебраической геометрии пока пасуют перед самой проблемой Штейнгауза, не упомянуть о них (хотя бы в последнем разделе) представляется невозможным.

Постановка задачи

Более шестидесяти лет назад Штейнгаузом был задан следующий вопрос: существуют ли квадрат $\boldsymbol{ABCD}$ с целой длиной стороны $\boldsymbol{t}$ и точка $\boldsymbol{P}$ в его плоскости, такая, что все расстояния между нею и четырьмя вершинами квадрата – целые числа (см. [1]). Ученый специально отмечал, что не знает ответа на эту очень трудную с его точки зрения задачу (см. [2]). В данной статье исследуется следующая задача, эквивалентная исходной проблеме Штейнгауза.

Рассмотрим квадрат в плоской декартовой системе координат, четырьмя вершинами которого являются точки с координатами $(\pm t/2;\pm t/2)$. Существует ли такая точка на плоскости, что расстояния между ней и этими четырьмя вершинами являются рациональными числами? Точка, обладающая такими свойствами, называется точкой Штейнгауза (см. [3]). Пусть $P=(x;y)$ – одна из них; для неё мы имеем следующую систему уравнений Пифагора:

$$(t/2-x)^2+(t/2-y)^2=a^2, \qquad (1.1)$$
$$(t/2+x)^2+(t/2-y)^2=b^2, \qquad (1.2)$$
$$(t/2+x)^2+(t/2+y)^2=c^2, \qquad (1.3)$$
$$(t/2-x)^2+(t/2+y)^2=d^2. \qquad (1.4)$$

Здесь t, a, b, c, d – положительные рациональные числа.

Вычитая из второго и четвёртого уравнений первое, получаем выражения для x и y соответственно; последние также оказываются рациональными. Таким образом, как при поиске точек Штейнгауза, так и при доказательстве их отсутствия можно ограничиться рассмотрением точек с рациональными координатами. Для преобразования двух оставшихся уравнений в данной системе, во-первых, сложим первое с третьим, а второе с четвёртым, а во-вторых, исключим из них уже выраженные x и y. В результате получим систему:

$$x=(b^2-a^2)/2t \equiv (c^2-d^2)/2t, \quad (1.5)$$
$$y=(c^2-b^2)/2t \equiv (d^2-a^2)/2t, \quad (1.6)$$
$$(a^2+c^2)=(b^2+d^2) <=> (d^2-a^2)=(c^2-b^2) <=> (b^2-a^2)=(c^2-d^2), \quad (1.7)$$
$$(a^2+c^2)/2 = [(c^2-b^2)/2t]^2+[(b^2-a^2)/2t]^2+t^2/2 \equiv x^2+y^2+(0.5t\sqrt{2})^2 = (b^2+d^2)/2, \quad (1.8)$$

где уравнение (1.8) – это тождество параллелограмма как для ***(-P)APC***, так и для ***(-P)BPD***.

Отметим также, что уравнение (1.8) можно разрешить как относительно a, так и относительно c. Поскольку $a<c$, и (с учётом уравнения (1.7)) приходится решать одно и то же биквадратное уравнение $4x^4-4x^2(b^2+d^2)+[(b^2+d^2)-2t^2[^2+(b^2-d^2)^2=0$, то

$$2a^2=(b^2+d^2)-\sqrt{\{4b^2d^2-[2t^2-(b^2+d^2)]^2\}}\,; 2c^2=(b^2+d^2)+\sqrt{\{4b^2d^2-[2t^2-(b^2+d^2)]^2\}}, \quad (1.8')$$

и аналогично для второй пары диагональных переменных b и d.

Из соображений симметрии, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что

$$0<y<x<=>0<a<d<b<c=>ac<db \;\&\; (c^2-a^2)>(b^2-d^2) \;\&\; (c+a)<(b+d) \;\&\; (c-a)>(b-d). \quad (1.9)$$

Отметим, что равенство $y=x$ невозможно, так как в этом случае $c-a=t\sqrt{2}$. Равенство $y=0$ также невозможно; это доказывалось многократно; элементарное доказательство см. в **П.1.4**.

Переформулированная задача связана с исходной преобразованием подобия на плоскости $x0y$, при котором можно добиться не только целости параметров t, a, b, c, d, но и их взаимной простоты, из которой в силу уравнения (1.8) будет следовать взаимная простота их четвёрок. А при учёте также и уравнения (1.7) они оказываются взаимно простыми по 3.

Все утверждения, вытекающие непосредственно из постановки задачи Штейнгауза и из симметрии квадрата, сформулируем кратко в виде **Леммы 1.1**.

Точки Штейнгауза имеют рациональные координаты (если это же верно для вершин самого квадрата). Их множество симметрично относительно осей симметрии квадрата, и их нет на самих осях. Рассмотрение целочисленного варианта проблемы Штейнгауза можно ограничить случаем размера квадрата и четвёркой расстояний взаимно простых по три.

Необходимые условия

А. Полученные соотношения (1.5)-(1.9) показывают, что для существования точки (восьми точек) Штейнгауза требуется выполнение ряда условий. Исследуем простейшие из них, связанные со взаимной простотой параметров t, a, b, c, d и их делимостью, а также – с разрешимостью в целых числах биквадратного уравнения, получающегося из (1.8).

Элементарный анализ уравнений (1.7) и (1.8) на делимость (см. приложение **П.1.1**) показывает, что t делится на 4 (и даже на 12), а $a{\cdot}d{\cdot}b{\cdot}c$ – нечётно (и не делится на 3), то есть все четыре числа имеют вид $(6k\pm1)$, а, следовательно, все числа a^2, b^2, c^2, d^2 имеют вид $(24k+1)$. В этом случае значение $r^2=x^2+y^2=(a^2+c^2-t^2)/2$ для точки Штейнгауза, вне зависимости от возможной нецелости значений координат x и y, получаемых из (1.5) и (1.6), также должно быть нечётным вида $(4k+1)$ и дающим остаток 1 при делении на 3, то есть иметь вид $(12k+1)$. В частности, если чётна (делится на 3) одна из координат, то другая (обязательно целая) нечётна (не делится на 3) и наоборот.

Воспользовавшись нечётностью r^2 и равенствами (1.5-6), можно оценить степени вхождения двойки сомножителем в $t=2^{\tau}T$ (T – нечётно) и в одну из скобок полуразностей $(b^2-a^2)/2=(c^2-d^2)/2=2^{\chi}X$ и $(c^2-b^2)/2=(d^2-a^2)/2=2^{\upsilon}Y$, где XY нечётно: $4^{\tau}T^2r^2=4^{\chi}X^2+4^{\upsilon}Y^2$. Если $\chi=\upsilon$, получаем противоречие: $2^{2\tau}T^2r^2=2^{2\mu+1}[(X^2+Y^2)/2]\equiv 2^{2\mu+1}[4k+1]$. Отсюда следует, что $\tau=\mu=\min(\chi,\upsilon)<\max(\chi,\upsilon)=M_2$. Аналогично доказывается, что максимальная степень вхождения 3 в разности квадратов расстояний строго больше минимальной, а последняя совпадает со степенью вхождения тройки в t. Про степени двойки можно сказать несколько больше.

Во-первых, преобразовав уравнение (1.1) в следующую довольно громоздкую форму: $\{2[a^2-(a^2-u^2)-(a^2-v^2)]t-[u(a^2-u^2)+v(a^2-v^2)]\}^2=[u(a^2-u^2)+v(a^2-v^2)]^2-[(a^2-u^2)^2+(a^2-v^2)^2]*[u^2+v^2-a^2]$, где $u=(b-t)$, а $v=(d-t)$, получаем, что $(a^2-u^2)(a^2-v^2)/2^{\tau+1}$ делится на нечётную степень 2.

Во-вторых, разность квадратов нечётных чисел делится на 8, поэтому, записав уравнение (1.1) в форме $(aT)^2=\{[(b\pm a)/2]\cdot[(b\mp a)/2^{\tau}]-2^{\tau-1}T^2\}^2+\{[(c\pm b)/2]\cdot[(c\mp b)/2^{\tau}]-2^{\tau-1}T^2\}^2$, можно, раскрывая скобки и выделяя из получающихся слагаемых заведомо чётные, прийти либо к $[((d^2-a^2)/2^{\tau+1})^2-(aT)^2]+((b^2-a^2)/2^{\tau+1})^2+2^{2\tau-1}T^4=T^2(c^2-a^2)/2$, либо к $[((b^2-a^2)/2^{\tau+1})^2-(aT)^2]+((d^2-a^2)/2^{\tau+1})^2+2^{2\tau-1}T^4=2^{\tau}T^2\{(b^2-a^2)/2^{\tau+1}+(d^2-a^2)/2^{\tau+1}\}$. Выбирая ту запись, в которой квадратная скобка кратна 8, а второе слагаемое слева – $2^{(M2-\tau)}$, получаем, что полуразность $(c^2-a^2)/2$ как минимум кратна 4, а записанная в виде фигурной скобки, показывает делимость строго на 2^{τ}. То есть при $\tau=2$ $M=\tau+1=3$, а при $\tau=3$ $M\geq 3$ соответственно. Итак, доказана

<u>**Лемма 2А1**</u>. *Пусть* $2^{\tau}T=t=3^{\omega}\Omega$, *причём* T *и* Ω *не кратны* 2 *и* 3 *соответственно. Тогда* $(rT)^2=(e_x o_x)^2+4^{M2-\tau}(e_y o_y)^2$ *либо* $(rT)^2=4^{M2-\tau}(e_x o_x)^2+(e_y o_y)^2$, *а* $(r\Omega)^2=(m_x n_x)^2+9^{\varphi}(m_y n_y)^2$ *либо* $(r\Omega)^2=9^{\varphi}(m_x n_x)^2+(m_y n_y)^2$. *Здесь* $o_x=(b\mp a)/2$, $o_y=(c\mp b)/2$ *и либо* $e_x=(b\pm a)/2^{\tau}$, $e_y=(c\pm b)/2^{M2}$, *либо* $e_x=(b\pm a)/2^{M2}$, $e_y=(c\pm b)/2^{\tau}$ *все не кратны* 2, *а* $m_x=(b\mp a)$, $m_y=(c\mp b)$ *и либо* $n_x=(b\pm a)/3^{\omega}$, $n_y=(c\pm b)/3^{\omega+\varphi}$, *либо* $n_x=(b\pm a)/3^{\omega+\varphi}$, $n_y=(c\pm b)/3^{\omega}$ *все не кратны* 3.

Про делимость t, a, b, c, d, на 5 можно сказать несколько меньше, чем про их (не)кратность 2 и 3. Приведённые в **П.1.1** рассуждения позволяют утверждать следующее.

<u>**Лемма 2А2**</u>. *Среди взаимно простых по три, удовлетворяющих уравнениям (1.7) и (1.8) чисел* t, a, b, c, d *найдётся либо одно, либо два, делящихся на* 5. *Если оно одно, то это –* t, *а квадраты произведений всех пар расстояний сравнимы с* 1 *по модулю* 5. *Если же два числа кратны* 5, *то* t *не кратно* 5, *они не составляют диагональные пары* (a,c) *и* (b,d), *а из четырёх оставшихся дополнительная к кратной* 5 *паре состоит из чисел вида* $(5h\pm 2)$, *если* $t=(5k\pm 1)$ *и, наоборот, вида* $(5h\pm 1)$ *при* $t=(5k\pm 2)$.

<u>**В**</u>. Пользуясь уже полученной нечётностью $a{\cdot}d{\cdot}b{\cdot}c$, общее решение уравнения (1.7) можно записать более компактно, нежели в [1] и [2] (подробнее см. в Приложении 1):

$$a=\varsigma p-\delta q,\quad d=\varsigma p+\delta q,\quad b=\varsigma q-\delta p,\quad c=\varsigma q+\delta p, \tag{2.1}$$

где только один из параметров чётен и только один из них кратен 3; $НОД(p;q)=1=НОД(\varsigma;\delta)$.

Ранее введённые величины выражаются через них так: $2ty=4\varsigma\delta qp$, $2tx=(\varsigma^2-\delta^2)(q^2-p^2)$, а $(a^2+c^2) = (b^2+d^2) = (\varsigma^2+\delta^2)(q^2+p^2)$, $(d-a) = 2\delta q$, $(d+a) = 2\varsigma p$, $(c-b)=2\delta p$, $(c+b) = 2\varsigma q$, $НОД((d-a);(c-b))=2\delta$, $НОД((d+a);(c+b))=2\varsigma$, $НОД((d+a);(c-b))=2p$, $НОД((d-a);(c+b))=2q$.

Неравенства (1.9) в переменных (p,q,ς,δ) с учётом разрешимости биквадратного уравнения (1.8), что равносильно непосредственно проверяемому неравенству, $c-a<d\sqrt{2}$, конкретизируются до следующей их системы:

$$\frac{\delta}{\varsigma}<\frac{q-p}{q+p}<(\sqrt{2}-1)<\frac{p}{q}<\frac{\varsigma-\delta}{\varsigma+\delta}<1<\frac{\varsigma+\delta}{\varsigma-\delta}<\frac{q}{p}<(\sqrt{2}+1)<\frac{q+p}{q-p}<\frac{\varsigma}{\delta}. \tag{2.2}$$

Их следует дополнить неравенствами $2\delta p<t$<= $2\delta q<t$<= $(\varsigma+\delta)(q-p)<t$; $\varsigma(q-p)-\delta(q+p)<t$ <= $(\varsigma-\delta)(q-p)<t$<=$\varsigma(q-p)+\delta(q+p)<t\sqrt{2}$ – следствиями из неравенств (1.9) и неравенства треугольника для BPC, DPA, APB; BPD, CPD и APC соответственно, и $4\delta p<t\sqrt{2}$.

А также следующими из **Леммы 2А2** двумя вариантами делимости ς, δ, q, p на 5: при t кратном 5 только одно из ς, δ, q, p делится на 5; на 5 делится также только одна из полусумм и полуразностей пар (ς,δ) и (p,q). При t, не кратном 5, кратными 5 должны быть либо оба числа любой (но только одной) из четырёх "греко-латинских" пар, порождающих x в (1.5). Либо кратными 5 должны быть обе полусуммы (или полуразности) чисел любой (но только одной) из четырёх "греко-латинских" пар, порождающих y в (1.6).

Вообще шесть гипербол, описывающих фиксированные разности расстояний от точки P до любой пары вершин исходного квадрата $ABCD$, связаны между собой пятнадцатью неравенствами, десять из которых непосредственно следуют из неравенств $a<d<b<c$ (для точки P в секторе $0<y<x$). Одно из них – $(c-a)>(b-d)$, – включённое в (1.9), влечёт за собой и $(c-a)>(b-d)$. Итак, ясно, что $c-b<c-d$, и неравенства (1.9) вкупе с неравенствами треугольника в переменных ς, δ, q, p принимают следующий вид:

$$\begin{gathered}2\leq 2\delta p=c-b<d-a=2\delta q<b-a=(\varsigma+\delta)(q-p)<c-a=\varsigma(q-p)+\delta(q+p)<t\sqrt{2}<c+a=\varsigma(q+p)-\delta(q-p);\\ \varsigma(q-p)-\delta(q+p)=b-d<c-d=(\varsigma-\delta)(q-p)<b-a=(\varsigma+\delta)(q-p)<t<b+a=(\varsigma-\delta)(q+p).\end{gathered} \tag{2.3}$$

Более сложны три оставшихся: $(c-b)\gtrless(b-d)$, $(c-d)\gtrless(d-a)$ и $(b-d)\gtrless(d-a)$. Знак их различен вблизи оси Ox и биссектрисы $x=y$:

$$\text{при } y\approx 0 \Rightarrow (c-b)<(d-a)<(b-d)<(c-d). \text{ А при } y\approx x\ (b-d)<(c-b)<(c-d)<(d-a). \tag{2.4}$$

В полярных координатах линии $(c–b)=(b–d)$, $(c–d)=(d–a)$ и $(b–d)=(d–a)$ имеют вид

$$\begin{aligned}&(c+d)=2b \Leftrightarrow 4(r/t+t/2r)(2\sin\varphi-\cos\varphi)=(2\sin\varphi-\cos\varphi)^2+4(\cos\varphi-\sin\varphi)^2,\\&(c+a)=2d \Leftrightarrow 4(r/t+t/2r)(\cos\varphi-\sin\varphi)=(\cos\varphi+\sin\varphi)^2+4(\cos\varphi-\sin\varphi)^2,\\&(b+a)=2d \Leftrightarrow 4(r/t+t/2r)(\cos\varphi-2\sin\varphi)=(\cos\varphi-2\sin\varphi)^2+4(\cos\varphi-\sin\varphi)^2,\end{aligned} \qquad (2.5)$$

а в декартовых –

$$\begin{aligned}&(c+d)=2b \Leftrightarrow 4(x^2+y^2+t^2/2)(2y-x)=t[(2y-x)^2+4(x-y)^2],\\&(c+a)=2d \Leftrightarrow 4(x^2+y^2+t^2/2)t(x-y)=t^2(x+y)^2+4t^2(x-y)^2,\\&(b+a)=2d \Leftrightarrow 4(x^2+y^2+t^2/2)(x-2y)=t[(x-2y)^2+4(x-y)^2],\end{aligned} \qquad (2.6)$$

что, согласно Пр.1.1, гарантирует взаимную простоту по два параметров t,a,b,c,d.

Итоги рассмотрений взаимных величин параметров задачи подведём в

Лемме 2B.1. *Решение уравнения (1.7) даётся формулами (2.1), параметры в которых с учётом неравенств (1.9) удовлетворяют условиям (2.2) и дополнительно при малых* y *(либо при больших* y*) условиям (2.4).*

С. Неравенства (1.9) с учётом **Леммы 2А2**, неравенств $(d–a)\geq(c–b)+2$ и $(b–a)\geq(c–d)+2$ и неравенств, приведённых в пункта **B**, в силу нечётности $a{\cdot}d{\cdot}b{\cdot}c$ конкретизируются (с учётом результатов раздела **4**) следующим образом:

$$\left\{\begin{aligned}&d \geq a+4 \Leftrightarrow \{\ y > 2/t \ \&\ y^2/4 - (2x-t)^2/(t^2-16) \geq 1\ \}\\&c \geq b+2 \Leftrightarrow \{\ y > 2/t \ \&\ y^2 - (2x+t)^2/(t^2-4) \geq 1\ \}\\&b \geq d+2 \Leftrightarrow \{x-y > 2/t \ \&\ (x-y)^2/2 - (x+y)^2/(t^2-2) \geq 1 \Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow [(\sqrt{(t^2-2)}+\sqrt{2})y-(\sqrt{(t^2-2)}-\sqrt{2})x]*[(\sqrt{(t^2-2)}-\sqrt{2})y-(\sqrt{(t^2-2)}+\sqrt{2})x]\geq 2(t^2-2)\}\\&b \geq a+6 \Leftrightarrow \{x > 8/t \ \&\ x^2/9 - (2y-t)^2/(t^2-36) \geq 1\ \}\\&c \geq d+4 \Leftrightarrow \{x > 8/t \ \&\ x^2/4 - (2y+t)^2/(t^2-16) \geq 1\ \}\\&c \geq a+6 \Leftrightarrow \{x+y > 18/t \ \&\ (x+y)^2/18 - (x-y)^2/(t^2-18) \geq 1 \Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow [(\sqrt{(t^2-18)}+\sqrt{18})y+(\sqrt{(t^2-18)}-\sqrt{18})x]*\\&*[(\sqrt{(t^2-18)}-\sqrt{18})y+[(\sqrt{(t^2-18)}+\sqrt{18})x]\geq 18(t^2-18)\ \}.\end{aligned}\right. \qquad (2.7)$$

Сильнейшие (как следует из результатов П.1.6) из полученных неравенств: $d\geq a+4$, $b\geq d+2$ и $c\geq d+4$ – определяют ограниченные частями гипербол подобласти в угле $0<y<x$, где заведомо не может быть точек Штейнгауза при фиксированном t, что и отражено на рис.1-2 (с.9-10). Дуги в их правых частях символизируют те окружности, квадрат радиуса которых нечётен, на которых только и могут быть расположены точки Штейнгауза.

Полученные ограничения сведём воедино в **Теореме 1**.

При заданном t *– размере квадрата – область поиска точек Штейнгауза может быть ограничена внутренностью сектора* $0<y<x$, *ограниченной частями гипербол* $y^2/4-(2x-t)^2/(t^2-16)=1$; $(x-y)^2/2-(x+y)^2/(t^2-2)=1$ и $y^2-(2x+t)^2/(t^2-4)=1$. *или даже* $y^2/36-(2x-t)^2/(t^2-144)=1$; $(x-y)^2/2-(x+y)^2/(t^2-2)=1$ и $y^2/9-(2x+t)^2/(t^2-36)=1$, *если учесть результат теоремы 2 в пункте 4.*

Более того, можно ограничиваться находящимися в ней дугами окружностей с центром в начале координат, квадраты радиусов которых – нечётные, не кратные трём числа.

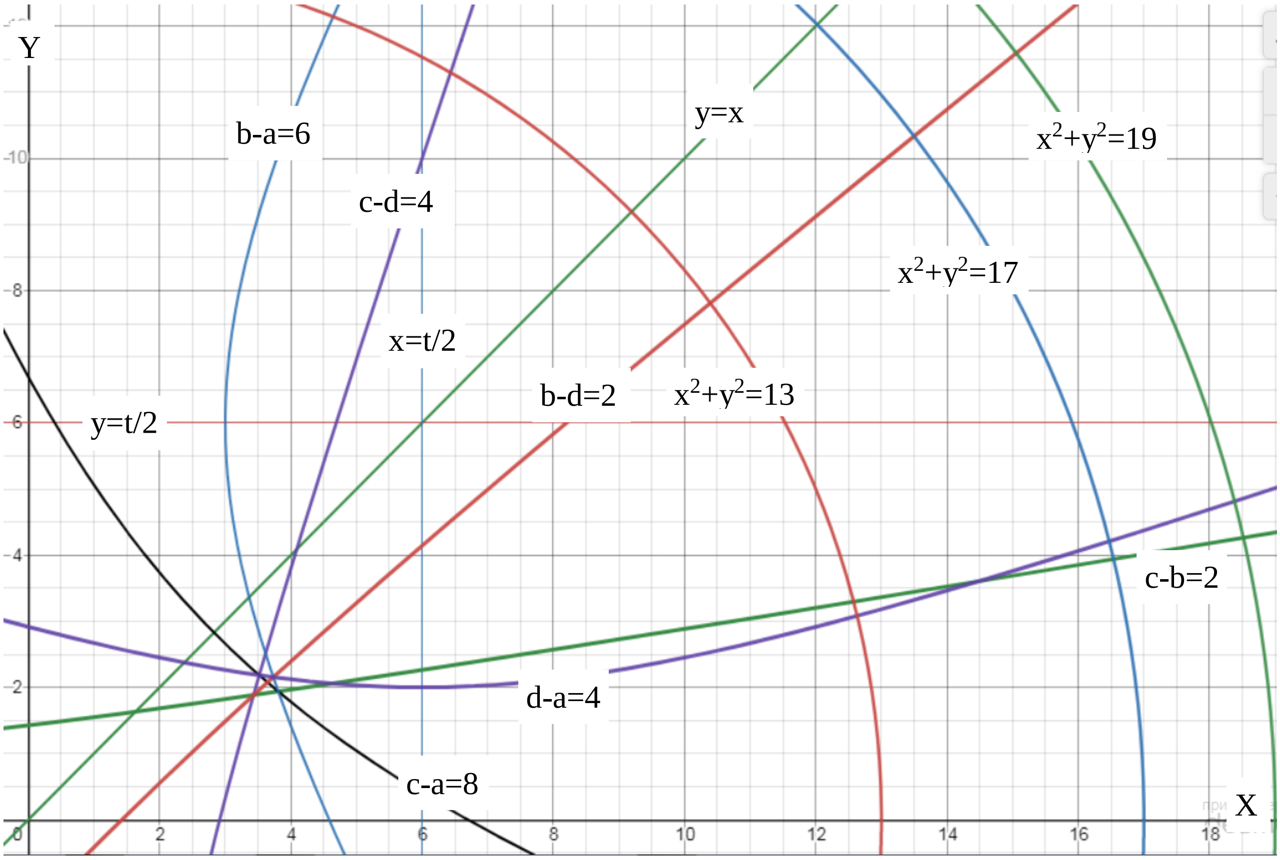

Рис.1. Область возможного нахождения точек Штейнгауза при *t=12*.

<u>Анализ биквадратного уравнения (1.8)</u>

<u>А</u>. Перепишем далее (1.8) в четырёх других эквивалентных формах:

$$\begin{cases} \boldsymbol{(t^2-(b^2+d^2)/2)^2=b^2d^2-(c^2-a^2)^2 \Leftrightarrow (t^2-(a^2+c^2)/2)^2=a^2c^2-(b^2-d^2)^2;} \\ \boldsymbol{2t^4+(c^2-b^2)^2+(b^2-a^2)^2=2(a^2+c^2)t^2 \Leftrightarrow 2t^4+2b^4+(c^4+a^4)=2(a^2+c^2)(t^2+b^2),} \end{cases} \qquad (3.1)$$

в первой и во второй из которых использованы основные пифагоровы тройки, если у их чисел нет общего нечетного простого делителя вида $\boldsymbol{(6k\pm1)}$. Причём, например, в случае второй тройки он не может быть общим для $\boldsymbol{a}$ и для $\boldsymbol{c}$, так как в этом случае в силу (3.1) он также должен входить и в $\boldsymbol{b}$, что противоречиво ранее отмеченной взаимной простоте параметров по три. Итак, либо первая пифагорова тройка – основная, либо на нечётное простое $\boldsymbol{\pi|k_1}$ делятся либо $\boldsymbol{\{a;2d^2-c^2;2t^2-c^2;\ 2b^2-c^2\}}$, либо $\boldsymbol{\{c;2d^2-a^2;2t^2-a^2;2b^2-a^2\}}$. Следовательно, в обоих случаях все три разности квадратов $\boldsymbol{(t^2-d^2)}$, $\boldsymbol{(t^2-b^2)}$ и $\boldsymbol{(b^2-d^2)}$ делятся на $\boldsymbol{\pi}$, причём на него делятся независимо друг от друга либо разности оснований, либо их суммы. А в случае второй тройки аналогичные рассуждения приводят к следующему: либо она – вторая пифагорова тройка – основная, либо на нечётное простое $\boldsymbol{\Pi|k_2}$ делятся либо $\boldsymbol{\{b;2c^2-d^2;2t^2-d^2;2a^2-d^2\}}$, либо $\boldsymbol{\{d;2c^2-b^2;2t^2-b^2;2a^2-b^2\}}$; в обоих случаях все три разности квадратов $\boldsymbol{(t^2-a^2)}$, $\boldsymbol{(t^2-c^2)}$ и $\boldsymbol{(c^2-a^2)}$ делятся на $\boldsymbol{\Pi}$, причём на него делится ровно по одной во всех трёх парах скобок: либо $\boldsymbol{(c-a)}$, либо $\boldsymbol{(c+a)}$;

либо $(t–c)$, либо $(t+c)$; либо $(t–a)$, либо $(t+a)$. Предположим теперь, что $\pi=P=\Pi$. Это будет означать, что ровно одна из переменных в каждой их паре – $(c;a)$ и $(b;d)$ – имеют P своим общим делителем, а, кроме того, (в силу равенства $b^2d^2–a^2c^2=[(c^2–a^2)/2]^2–[(b^2–d^2)/2]^2$) он делит ещё и суммы, и разности квадратов других элементов этих пар. То есть кратными P оказываются все четыре расстояния a, b, c, d. Это противоречие с ранее доказанной их взаимной простотой по три показывает, что $\pi\neq\Pi$. Последний результат в терминах k_1 и k_2 – параметров Пифагора обеих троек – записывается следующим образом: **Лемма 3А.1**. ***НОД(k_1;k_2)=1***. *То есть на любой простой их делитель* π_i *делится только одно из* a, b, c, d *и только одна из полусумм и полуразностей* $(c\pm a)/2$ *и* $(b\pm d)/2$. *Ни один из четырёх параметров* (p,q,ς,δ) *и ни одна из сумм и разностей* $(\varsigma\pm\delta)$ *и* $(q\pm p)$ *также не делятся на* π_i.

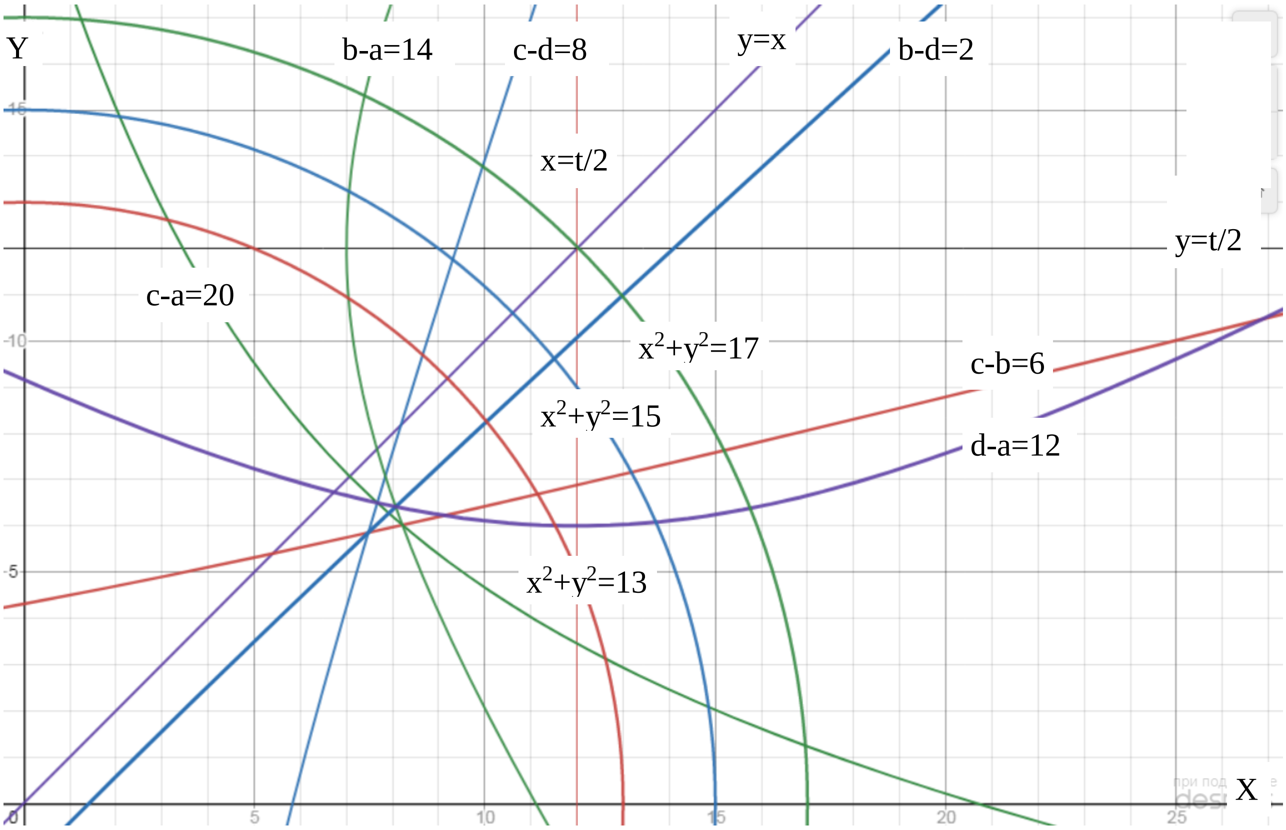

Рис.2. Область возможного нахождения точек Штейнгауза при *t=24* (с учётом результатов пункта 4).

Пусть далее оба числа одной из пар $(c;a)$ или $(b;d)$ кратны $\pi\in\mathbb{P}$. Тогда из (3.1) следует, что (t^4+b^4) и (t^4+d^4) или (t^4+a^4) и (t^4+c^4) кратны π, а по доказанному $(t^4–b^4)=(t^2–b^2)(t^2+b^2)$ и $(t^4–d^4)=(t^2–d^2)(t^2+d^2)$ или $(t^4–a^4)=(t^2–a^2)(t^2+a^2)$ и $(t^4–c^4)=(t^2–c^2)(t^2+c^2)$ тоже кратны π. Таким образом, в обоих случаях все t, a, b, c, d кратны π. Полученное противоречие приводит к **Лемме 3А.2**: *тройки* $(c;a;k_1)$ *и* $(b;d;k_2)$ *образованы взаимно простыми числами*.

Пусть далее одна из пифагоровых троек в (3.1) основная. Для определённости – с диагональю ac. В этом случае, складывая и вычитая ac с $t^2–(a^2+c^2)/2$, получим систему уравнений: $\{(c–a)^2+4\alpha^2=2t^2$ & $(c+a)^2=4\beta^2+2t^2\}$, где ***НОД(α;β)=1*** и $\alpha\beta$ чётно – параметры Пифагора. В этом случае, как следует из **Леммы 2А2**, когда t не кратно 5, из выписанной системы уравнений следует система сравнений $\{2\alpha^2\equiv\pm1(\mathrm{mod}5)\ \&\ 2\beta^2\equiv\mp1(\mathrm{mod}5)\}$ или $\{2\beta^2\equiv\pm1(\mathrm{mod}5)\ \&\ 2\alpha^2\equiv\mp1(\mathrm{mod}5)\}$, которые, очевидно противоречивы. Со второй пифагоровой тройкой ситуация аналогична. Таким образом, доказана **Лемма 3А.3**:

Тождество параллелограмма (1.8) может задавать в формуле (3.1) основной пифагоров треугольник только при t, *кратном пяти, и* a, b, c, d, *не кратных пяти.*

В. Уравнение (3.1) разрешим как квадратное относительно t^2:

$$(t^2)_{1,2}=(a^2+c^2)/2\pm\sqrt{[D]}\equiv(b^2+d^2)/2\pm0.5\sqrt{[4b^2d^2-(c^2-a^2)^2]}\equiv(r^2+t^2/2)\pm|r^2-t^2/2|. \tag{3.2}$$

Таким образом, для точек P внутри окружности $x^2+y^2=t^2/2$ имеем $t^2=(a^2+c^2)/2+\sqrt{(D)}$, а ***второй*** корень – посторонний (чётное t^2 не может быть равно нечётному r^2), а для точек P вне этого круга, наоборот, ***первый*** корень посторонний, и $t^2=(a^2+c^2)/2-\sqrt{(D)}$. Точки P самой окружности $x^2+y^2=t^2/2$ не являются точками Штейнгауза, что очевидно в силу чётности. Отметим, что $(\sqrt{2}\pm1)$ присутствует в (2.2) как граница между корнями уравнения (3.2) – $r=t/\sqrt{2}$, на ней $D=0$, а неравенства (2.2) обеспечивают его положительность.

Для дискриминанта D есть два разложения: $D=(a^2c^2-((b^2-d^2)/2)^2)=(b^2d^2-((c^2-a^2)/2)^2)$. Скобки здесь упорядочены следующим образом: $bd-(c^2-a^2)/2<ac-(b^2-d^2)/2<ac+(b^2-d^2)/2<bd+(c^2-a^2)/2$. Таким образом, получаем необходимое условие на расстояния от точки Штейнгауза до вершин квадрата: D обязан быть полным квадратом, поэтому скобки должны быть связаны следующими соотношениями:

$$\begin{cases} bd\pm(c^2-a^2)/2=k_1(w_\pm)^2,\\ ac\pm(b^2-d^2)/2=k_2(z_\pm)^2,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2-a^2=k_1[(w_+)^2-(w_-)^2]\,\&\,bd=k_1[(w_+)^2+(w_-)^2]/2,\\ b^2-d^2=k_2[(z_+)^2-(z_-)^2]\,\&\,ca=k_2[(z_+)^2+(z_-)^2]/2,\end{cases} \tag{3.3}$$

где числа $k_1\geq1$ и $k_2\geq1$ свободны от квадратов и все параметры, входящие в (3.3), нечётны. Показать, что $k_1\neq1\neq k_2$, анализируя исходные параметры, затруднительно, поэтому выражение для дискриминанта D преобразуем к следующей форме:

$$4D=[(\varsigma^2-\delta^2)+2\varsigma\delta][2qp+(q^2-p^2)][(\varsigma^2-\delta^2)-2\varsigma\delta][2qp-(q^2-p^2)]\equiv D_1D_2D_3D_4, \tag{3.4}$$

где $2bd-(c^2-a^2)=D_3D_4>0$; $2ac-(b^2-d^2)=D_1D_4>0$; $2ac+(b^2-d^2)=D_2D_3$; $2bd+(c^2-a^2)=D_1D_2$. При этом

$$\begin{aligned}&(t^2)_{1,2}=(\varsigma^2+\delta^2)(q^2+p^2)/2\pm0.5\sqrt{\{[(\varsigma^2-\delta^2)^2-(2\varsigma\delta)^2][(2qp)^2-(q^2-p^2)^2]\}}\equiv\\ &\equiv(b^2+d^2)/2\pm\sqrt{(D)}\Leftrightarrow[4t^2-\sqrt{(D_1^2+D_3^2)}\cdot\sqrt{(D_2^2+D_4^2)}\pm2\sqrt{(D_1D_3)}\sqrt{(D_2D_4)}]*\\ &*[4r^2-\sqrt{(D_1^2+D_3^2)}\cdot\sqrt{(D_2^2+D_4^2)}\mp2\sqrt{(D_1D_3)}\sqrt{(D_2D_4)}].\end{aligned} \tag{3.2'}$$

Далее рассмотрим два случая последовательно: а) (q,p) – чётно-нечётная пара. Тогда

$$\begin{aligned}&D=2\{2[(\varsigma+\delta)/2]\cdot[(\varsigma-\delta)/2]+[(\varsigma+\delta)/2]^2-[(\varsigma-\delta)/2]^2\}\cdot[2qp+(q^2-p^2)]*\\ &*2\{2[(\varsigma+\delta)/2]\cdot[(\varsigma-\delta)/2]-[(\varsigma+\delta)/2]^2+[(\varsigma-\delta)/2]^2\}\cdot[2qp-(q^2-p^2)];\end{aligned} \tag{3.5}$$

б) (ς,δ) – чётно-нечётная пара. Тогда преобразования симметричны предыдущим:

$$D=2[(\varsigma^2-\delta^2)+2\varsigma\delta]\cdot\{[(q+p)/2]^2-[(q-p)/2]^2+2[(q+p)/2]\cdot[(q-p)/2]\}*$$
$$*2[(\varsigma^2-\delta^2)-2\varsigma\delta]\cdot\{[(q+p)/2]^2-[(q-p)/2]^2-2[(q+p)/2]\cdot[(q-p)/2]\}. \qquad (3.5')$$

В обоих случаях равенство пар невозможно. Действительно, предположим противное – $(q,p)=((\varsigma+\delta),(\varsigma-\delta))$ либо $(\varsigma,\delta)=((q+p),(q-p))$. В обоих случаях в противоречие с неравенствами (2.2) получаем равенства $\frac{\delta}{\varsigma}=\frac{q-p}{q+p}$ & $\frac{p}{q}=\frac{\varsigma-\delta}{\varsigma+\delta}$.

Введём новые переменные следующим образом: чётно-нечётную пару из (q,p) и (ς,δ) обозначим через (u_1,v_1), а нечётно-нечётную – через $((u_2+v_2),(u_2-v_2))$, то есть так, чтобы пара (u_2,v_2) также оказывалась бы чётно-нечётной с сохранением условий $НОД(u_2;v_2)=1$ и $u_2>v_2$. В результате неравенства (2.2), равенство (2.1) и основное выражение (3.2) для t^2 при этом перейдут в следующие.

$$(t^2)_{1,2}=(u_1^2+v_1^2)(u_2^2+v_2^2)\pm\sqrt{\{[(2u_2v_2)^2-(u_2^2-v_2^2)^2][(2u_1v_1)^2-(u_1^2-v_1^2)^2]\}}. \qquad (3.2'')$$

Случай чётно-нечётной пары (q,p) (обе квадратные скобки в (3.2'') положительны):

$$0<\frac{u_2-v_2}{u_2+v_2}<\frac{u_1-v_1}{u_1+v_1}<(\sqrt{2}-1)<\frac{v_1}{u_1}<\frac{v_2}{u_2}<1<\frac{u_2}{v_2}<\frac{u_1}{v_1}<(\sqrt{2}+1)<\frac{u_1+v_1}{u_1-v_1}<\frac{u_2+v_2}{u_2-v_2}, \qquad (3.6)$$

Случай чётно-нечётной пары (ς,δ) (обе квадратные скобки в (3.2'') отрицательны):

$$\frac{v_1}{u_1}<\frac{v_2}{u_2}<(\sqrt{2}-1)<\frac{u_2-v_2}{u_2+v_2}<\frac{u_1-v_1}{u_1+v_1}<1<\frac{u_1+v_1}{u_1-v_1}<\frac{u_2+v_2}{u_2-v_2}<(\sqrt{2}+1)<\frac{u_2}{v_2}<\frac{u_1}{v_1}. \qquad (3.6')$$

В обоих случаях выражения для расстояний a, d, b, c через новые параметры преобразуются от (2.1) к (3.7):

$$\begin{aligned} &b=(u_1u_2+v_1v_2)+(u_1v_2-v_1u_2), && d=(u_1u_2+v_1v_2)-(u_1v_2-v_1u_2),\\ &c=(u_1v_2+v_1u_2)+(u_1u_2-v_1v_2), && a=|(u_1v_2+v_1u_2)-(u_1u_2-v_1v_2)|, \end{aligned} \qquad (3.7)$$

Из формул (3.7) следует, в частности, что разности (b^2-d^2) и (c^2-a^2) либо одновременно делятся только на $2^{(\mu+2)}$, где μ – это минимум вхождения двойки сомножителем в v_i и в u_j (в том случае, когда степень вхождения 2 в сомножители v_i и u_j разная), либо (когда степень вхождения 2 в сомножители v_i и u_j равная). Одна из этих разностей делится строго на $2^{(\mu+3)}$, а другая – на заведомо большую степень двойки. С другой стороны, согласно п. **2.A**, $(b^2-d^2)=(b^2-a^2)-(d^2-a^2)=2^{\chi+1}X-2^{\upsilon+1}Y$, а $(c^2-a^2)=(c^2-b^2)+(b^2-a^2)=2^{\chi+1}X-2^{\upsilon+1}Y$, где XY нечётно и $\mu=\min(\chi,\upsilon)=\tau<\max(\chi,\upsilon)$. Аналогичен вывод и про степень вхождения тройки в v_i и в u_j.

Результаты исследования уравнения (3.1) подведём в **Лемме 3В.1**.

I. Уравнение (1.8) <=> (3.1) разрешимо в натуральных числах только тогда, когда при некотором фиксированном целом k *у уравнения* $kz^2=x^4-6x^2y^2+y^4$ *есть как минимум два различных нетривиальных решения, то есть у которых упоря-*

доченные пары (x_i,y_i) *не совпадают; причём заведомо* (Великая теорема Ферма [10] при $n=4$) $k \neq \pm 1$.

II. Делимость на **2** *и на* **3** *разностей квадратов расстояний в диагональных парах совпадает с соответствующей делимостью* **t**.

Анализ делимости частей биквадратного уравнения (3.1) на 7

Подставляя наименьшие возможные значения параметров p и q, получаем следующее:

П0. $p=1 \Rightarrow q=2\ \&\ 3<\varsigma \Rightarrow ((2t^2)_{1,2} - 5(\varsigma^2+\delta^2))^2 = 7[(\varsigma^2+\delta^2)^2 - 7\varsigma^2\delta^2 - \varsigma^2\delta^2]$,

$p=2 \Rightarrow q=3\ \&\ 5<\varsigma \Rightarrow ((2t^2)_{1,2} - 13(\varsigma^2+\delta^2))^2 = 17{*}7[(\varsigma^2+\delta^2)^2 - 7\varsigma^2\delta^2 - \varsigma^2\delta^2]$.

П1. $(c-b)=2\delta p=2 \Rightarrow \delta=1=p \Rightarrow q=2\ \&\ (d-a)=2\delta q=4\ \&\ 3<\varsigma$; см. П0 при $\delta=1=p$.

П2. $(d-a)=2\delta q=2 \Rightarrow \delta=1=q \Rightarrow q=1\ \&\ p<q$; stop.

П3. $(d-a)=2\delta q=4 \Rightarrow \delta=1\ \&\ q=2\ \&\ p<q \Rightarrow p=1\ \&\ 3<\varsigma$; см. П0 при $\delta=1=p$.

П4. $(c-b)=2\delta p=4 \Rightarrow \delta=1\ \&\ p=2 \Rightarrow q=3\ \&\ 5<\varsigma$; см. П0 при $\delta=1=p$;

либо $\delta=2\ \&\ p=1 \Rightarrow q=2=\delta$; stop.

Рассмотрим случай П0 при $\delta=1=p$, а следовательно, при $q=2$ и ς, кратном **3** и нечётном. Убедимся (пользуясь таблицами в П.1.7), что он невозможен, как и случаи П2 и П4.

$$(2t^2 - 2.5(\varsigma^2+1))^2 = 7((\varsigma^2-1)/2)+\varsigma)((\varsigma^2-1)/2)-\varsigma) \Leftrightarrow (2t^2)_{1,2} = 5(\varsigma^2+1) \pm \sqrt{7[(\varsigma^2+1)^2 - 7\varsigma^2 - \varsigma^2]}. \quad (4.1)$$

Предположим, что при некоторых t и ς выполнено равенство (4.1). Учтём, что $НОД((\varsigma^2-1)/2;\varsigma)=1$. Квадратная скобка в (4.1) обязана (для целочисленного извлечения корня) быть кратной 7, а потому при $\varsigma=7k+2$ либо $\varsigma=7k+3$ кратным 7 будет $(\varsigma^2+2\varsigma-1)$, а при $\varsigma=7k+4$ либо $\varsigma=7k+5$ – $(\varsigma^2-2\varsigma-1)$. В свою очередь, полагая $t=7h\pm 2$ при $\varsigma=7k\pm 3$, либо $t=7h\pm 3$ при $\varsigma=7k\pm 2$, добиваемся делимости левой части (3.1) на 49. Теперь воспользуемся результатами **П.1.3** при $\pi=7$: $(\varsigma^2-1)/2=(7m^2+n^2)/2$. При $\varsigma=7k\pm 2$ отсюда следует, что $n^2\equiv 3(mod7)$. Противоречие. В результате доказана **<u>Лемма 4.1</u>**. *Для разрешимости уравнения (4.1) необходимо, чтобы* $\varsigma\equiv\pm 3(mod7)$ *и* $t\equiv\pm 2(mod7)$ *соответственно. При этом* $\varsigma=|7m^2-n^2|/2$, *где* $n\equiv\pm 1(mod7)$.

Далее следует воспользоваться тем, что t кратно 12, то есть $t=84\tau+i$, а $\varsigma=84\sigma+j$. Здесь $j=3;\ 39;\ 45;\ 81$, а $i=12;\ 72$. После деления на 49 уравнение (4.1) принимает вид $(R_{ij})^2=P_j\cdot Q_j$, со взаимно простыми (а следовательно, являющимися точными квадратами) P_j и Q_j. При этом $R_{ij}=[(84\tau+i)^2-2.5\cdot((84\sigma+j)^2+1)]/7$; а $7P_jQ_j=\{[(84\sigma+j)^2-1]/2+(84\sigma+j)\}\cdot\{[(84\sigma+j)^2-1]/2-(84\sigma+j)\}$. Во втором и третьем случаях величина $P_j\cdot Q_j$ оказывается равной $[2(42\xi+20)^2-1]\cdot[(24\xi+11)^2-2(6\xi+3)^2]$ либо $[2(42\xi-20)^2-1]\cdot[(24\xi-11)^2-2(6\xi-3)^2]$. В первом и четвёртом случаях квадратные скобки примут вид $[2(42\xi+1)^2-1]\cdot[(24\xi+1)^2-2(6\xi)^2]$ либо $[2(42\xi-1)^2-1]\cdot[(24\xi-1)^2-2(6\xi)^2]$. Здесь $\xi=\sigma$ при $j=3,\ 39$, и $\xi=\sigma+1$ при $j=45,\ 81$. Во всех случаях, воспользовавшись результатами П.1.2, получаем следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} 2(42\xi\pm 20)^2-1 = (A_\pm)^2 \Rightarrow ((A_\pm)^2+1) \equiv 8Ы+2 = 8(21\xi\pm 10)^2 \Rightarrow \text{противоречие;} \\ (24\xi\pm 11)^2-2(6\xi\pm 3)^2=(B_\pm)^2 \Rightarrow (24\xi\pm 11)^2-(B_\pm)^2\equiv 8Ы=18(2\xi\pm 1)^2 \Rightarrow \text{противоречие.} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} 2(42\xi\pm1)^2-1=(A_\pm)^2 \Rightarrow 42\xi\pm2(l-k)\cdot{}^{min}{}_{max}(k,l)=0 \;\&\; (l^2-2lk-2k^2)=1. \text{ Здесь } l>k \text{ и } lk \text{ чётно.} \\ (24\xi\pm1)^2-2(6\xi)^2=(B_\pm)^2 \Rightarrow 36\xi=(m^2-2mn+2n^2) \;\&\; \pm6=(-m^2+2mn-2n^2). \text{ Здесь } m \text{ чётно.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Равенство $36\xi=(m-n)^2+n^2$ невозможно при m чётном, а n нечётном. Таким образом, доказана **Теорема 2**. *Значения параметров* $p=1=\delta$, и $q=2$ *в формулах (2.2) для расстояний от точки Штейнгауза до вершин исходного квадрата – запрещённые.*

Ограниченная задача Штейнгауза

А. В том частном случае, когда помимо системы уравнений (1.1-4) предполагается выполненным какое-либо дополнительное условие, например, точка Штейнгауза ищется на осях симметрии исходного квадрата или же на множестве точек с иррациональными координатами, будем говорить об *ограниченной задаче Штейнгауза*. Обе они, упомянутые ещё в п.1, решаются отрицательно. На эту тему в сети есть много материалов; см., например, [7], где как ограничение рассматривалось гипотетическое расположение точек Штейнгауза на некоторых окружностях. Доказанные в пп.2-3 утверждения позволяют добавить к этим элементарным фактам, например, следующее. Рассмотрим прямую $y=(k/(2n+1))x+h/(2n+1)$ с рациональными коэффициентами. Тогда в случае $2\nmid k$ и $2|h$, как следует из **Леммы 2А.1**, на ней нет точек Штейнгауза. Таким образом, точек Штейнгауза заведомо нет на прямых $y\pm x=\pm kt/2$ – параллельных диагональным осям симметрии исходного квадрата.

В. Далее будет приведено элементарное доказательство отсутствия точек Штейнгауза на сторонах исходного квадрата и на их продолжениях; доказательство, использующее факты из теории эллиптических кривых и демонстрирующее тесную связь с ними исходной задачи, см. в [3]. Оригинальное доказательство эквивалентного утверждения (задача 13) приведено самим Штейнгаузом в [2].

Итак, пусть точка Штейнгауза $P=(x;y)$, где $x=(b^2-a^2)/2t\equiv(\varsigma+\delta)(q+p)(\varsigma-\delta)(q-p)/2t$, а $y=(d^2-a^2)/2t\equiv4\varsigma\delta qp/2t$, лежит на стороне исходного квадрата, то есть $t=d+a$, $x=t/2$, $y=t/2-a$, либо на её продолжении, то есть $t=b-a$, $y=t/2$, $x=t/2+a$. Выразим t в обоих случаях через числа ς, δ, q и p (только один из них чётен и только один кратен трём). Получим либо $t=2\varsigma p$, либо $t=(q-p)(\varsigma+\delta)$. Подставив эти выражения в уравнение (1.8), получим либо $(\varsigma^2-\delta^2)(q^2-p^2)=4\varsigma^2p^2$, либо $(\varsigma^2-\delta^2)(q^2-p^2)=4\varsigma p\delta q$. Оба полученных выражения сводятся одно к другому. В самом деле, обозначив суммы и разности либо как новые ς', δ', $2q'$ и $2p'$, либо как новые $2\varsigma'$, $2\delta'$, q' и p', как и ранее, имеем $НОД(p';q')=1=НОД(\varsigma';\delta')$, их значения для чётно-нечётной пары нечётны, а для нечётно-нечётной одна из них делится только на два, а другая – минимум на четыре. Второе соотношение при этом переходит в первое. Итак, (не)существование точек Штейнгауза на сторонах исходного квадрата или на их продолжениях эквивалентно (не)существованию решений уравнения $[(\varsigma^2-\delta^2)/p^2]*[(q^2-p^2)/\varsigma^2]=4$, с дополнительными условиями: $t/2=\varsigma p$ кратно 6, а обе квадратные скобки – целые числа. Анализ именно этого условия и приводит к уравнению $z^2=x^4+3x^2y^2+y^4$, согласно Поклингтону [5], неразрешимому.

Упростим доказательство, приведённое в [2], следующим образом. Доказательство того что квадратные скобки – целые числа следует из попарной взаимной простоты входящих в них параметров. Система $\{\varsigma^2-\delta^2=2p^2 \& q^2-p^2=2\varsigma^2\}$ неразрешима, поскольку только один из входящих в неё параметров чётен. А система $\{\varsigma^2-\delta^2=p^2 \& q^2-p^2=4\varsigma^2\}$ – ввиду попарной взаимной простоты их "греко-латинских" пар, гарантирующей примитивность обеих пифагоровых троек (ς,p,δ) и $(q,p,2\varsigma)$, чему противоречит как чётность, так и нечётность ς.

Что касается последнего возможного варианта системы – $\{\ \varsigma^2-\delta^2=4p^2 \ \&\ q^2-\varsigma^2=p^2\ \}$, – то, выразив переменные в обоих её уравнениях через параметры Пифагора, имеем следующее:

$$\begin{matrix} 2p=2MN,\ \varsigma=M^2+N^2,\ \delta=|M^2-N^2|,\ 2|MN,\ НОД(M;N)=1 \\ p=2\mu\nu,\ \varsigma=\mu^2-\nu^2,\ q=\mu^2+\nu^2,\ 2|\mu\nu,\ НОД(\mu;\nu)=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mu^2=\nu^2+M^2+N^2 \Rightarrow (\text{П.1.4}) \Rightarrow N=2m, \\ M=(l^2+m^2)/n-n,\ \nu=2l,\ \mu=(l^2+m^2)/n+n. \end{matrix} \qquad (5.1)$$

Воспользовавшись равенством $2\mu\nu=p=MN$, получаем, что $n^2=(l^2+m^2)(m-2l)/(m+2l)$. Отсюда следует, что $\mu=2m\sqrt{[(l^2+m^2)/(m^2-4l^2)]}$, а $M=4l\sqrt{[(l^2+m^2)/(m^2-4l^2)]}$. Учтём теперь, что сумма (l^2+m^2) не может быть нечётной, ибо в этом случае нечётным обязано быть и n, а потому M и μ станут чётными в противоречие с (5.1). Если lm не кратно 2, то n^2 кратно 2 и не кратно 4, что противоречиво. Итак, $m=2^{\varphi+1}m_1$, а $l=2^{\varphi}l_1$, где $\varphi>0$, а m_1l_1 – нечётно. Тогда $\mu=m_1\sqrt{\{(l_1^2+4m_1^2)/[(m_1^2-l_1^2)/4^{\varphi+1}]\}}$, а $M=l_1\sqrt{\{(l_1^2+4m_1^2)/[(m_1^2-l_1^2)/4^{\varphi+1}]\}}$. Нечётность полученных значений требует, чтобы $(m_1\pm l_1)$ нацело делилось только на $2^{2\varphi+1}$, а $(m_1\mp l_1)$ было не кратно 4. В этом случае $n=(m/2-l)\sqrt{[(l_1^2+4m_1^2)/(m_1^2-l_1^2)]}$.

Кроме того, согласно **П.1.2**, $M=zu$, $N=2^{\varphi+2}wv$, $\mu=wu$, $\nu=2^{\varphi+1}zv$. Здесь z, w, u и v в силу (5.1) нечётны, попарно взаимно просты и только одно из них кратно трём; $НОД(M;\mu)=u$, $НОД(\nu;N)=v$ и $m_1=wv$, а $l_1=zv$. Отсюда следует, что $n=u(w-z)/2$ и $u=\sqrt{\{5w^2v^2/[(w^2-z^2)/4^{\varphi+1}]-4^{\varphi+1}v^2\}}$ будут целыми только когда $5v^24^{\varphi+1}$ делится на (w^2-z^2), а взаимная простота v и u будет при делимости (w^2-z^2) на v^2 нацело.

С учётом того, что и корень должен извлекаться нацело, приходим либо к системе $\{\ u^2-5z^2=4(2^{\varphi+1}v)^2 \ \&\ 5w^2-u^2=(2^{\varphi+1}v)^2\ \}$, первое уравнение которой неразрешимо при нечётных z и u ввиду некратности 8 его левой части, либо к системе $\{\ u^2-z^2=4(2^{\varphi+1}v)^2 \ \&\ w^2-(2^{\varphi+1}v)^2=u^2\ \}$, которая эквивалентна изначально исследуемой: $\{\ \varsigma^2-\delta^2=4p^2 \ \&\ q^2-\varsigma^2=p^2\ \}$, но обязана иметь решением числа z, w, u и v строго меньшие искомых ς, δ, q и p.

Таким образом, проведён метод бесконечного спуска (**П.1.4**) и неразрешимость последней из трёх систем доказана.

С. Итогом анализа ограниченной задачи Штейнгауза станет

Теорема 3. *Точек Штейнгауза нет на:*

I. На прямых $(2n+1)y=(2k+1)x+2h$ *и, в частности, на прямых, параллельных диагоналям исходного квадрата на расстояниях* $kt/2$ *от одной из них.*

II. На сторонах исходного квадрата и на их продолжениях.

III. На осях координат, а также на прямых вне исходного квадрата, удалённых на расстояние $3t/2$ *от осей координат (та же задача 13 из [2], с.78).*

(В Приложении 3 пункт III Теоремы 3 ещё несколько усилен.)

<u>Оценка расстояний a, b, c, d</u>

В последнем разделе будет рассмотрен следующий вопрос: как далеко/близко к вершине исходного квадрата может располагаться его точка Штейнгауза? Пусть $\boldsymbol{a}$ мало по сравнению с $\boldsymbol{t}$. В таком случае $b\approx d\approx t$, а $c\approx t\sqrt{2}$. Уточним эти оценки с помощью соотношений (1.1-4) и **Теоремы 3.II**: $t-a<d<\sqrt{(t^2+at\sqrt{2}+a^2)}$; $\sqrt{(t^2-at\sqrt{2}+a^2)}<b<t+a$. Поскольку $\boldsymbol{t}$ кратно $\boldsymbol{2}$, а $a{\cdot}d{\cdot}b$ – нечётно, то при $a=1$ получаем $t+1\leq d<\sqrt{\{(t+1)^2-2t+t\sqrt{2}\}}$, что противоречиво. Итак, $a<<t$ или даже просто $a<t/2$ и либо $a=(6\alpha-1)$, либо $a=(6\alpha+1)$, где $\alpha\geq 1$. В первом случае при наименьшем возможном $a=5$ имеем только $(t\pm 1)$ в качестве возможных значений для $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}$. То есть согласно (1.9) $b=(t+1)$, а $d=(t-1)$. Запишем уравнение (3.1) в форме $2t^4+2a^4+(b^4+d^4)=2(d^2+b^2)(t^2+a^2)$, то есть $t^2=24^2/34$. Иррациональность полученной для $\boldsymbol{t}$ величины показывает, что $a\neq 5$. Аналогично приведённому, во втором случае при наименьшем возможном $a=7$ имеем только $(t\pm 1)$ и $(t\pm 5)$ в качестве возможных значений для $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}$. То есть согласно (1.9) рассмотрению подлежат пары $(b,d) = ((t-1),(t-5))$; $((t+1),(t-5))$; $((t+5),(t-5))$; $((t+1),(t-1))$; $((t+5),(t-1))$; $((t+5),(t+1))$. Они приводят к следующим значениям для дискриминанта квадратного (слагаемые с t^4 и t^3 сокращаются) уравнения, получающегося из (3.2), которое должно решиться в целых $\boldsymbol{t}$ при подстановке данного $\boldsymbol{a}$ и полученных $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}$: $31{*}48^2$, $48^2{*}41$, $168^2{*}2$, $336^2{*}2$, $48^2{*}41$, $31{*}48^2$. Ни один из них не является полным квадратом. Поэтому $\alpha\geq 2$.

Аналогично убеждаемся, что $a\neq 11$; 13. Дальнейшая численная проверка (разумеется, при фиксированном $\boldsymbol{a}$) не сложна, но требует применения ЭВМ. Необходимая её часть – это исследование дискриминанта получающегося из (1.1) квадратного уравнения $4(u^2+v^2-a^2)t^2-4t[u(a^2-u^2)+v(a^2-v^2)]+[u^4+v^4-2a^2(u^2+v^2-a^2)]=0$: $D=(2a^2-(u-v)^2)(a^2-u^2)(a^2-v^2)$, который обязан быть полным квадратом. Здесь $u=b-t\in(\sqrt{[t^2-at\sqrt{2}+a^2]}-t,\ a)$; $d-t=v\in(-a,\ \sqrt{[t^2+at\sqrt{2}+a^2]}-t)$. Учтём, что, согласно пунктам ***1*** и ***2A***, $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ имеют вид $(6k\pm 1)$ и $u\geq v+2$, а $\sqrt{[t^2+at\sqrt{2}+a^2]}-t<a-4$, $\sqrt{[t^2\pm at\sqrt{2}+a^2]}-t \lessgtr a\pm 4$. Действуя таким образом, например, с использованием стандартных возможностей Excel можно достичь $a=10001$ и получить следующий результат.

<u>Лемма 6.1</u>: *точек Штейнгауза нет на расстояниях, меньших, чем* ***10000*** *от вершин исходного квадрата.*

Разумеется, эту оценку можно усиливать программными средствами, добравшись вычислениями до очередной нетривиальной (не лежащей на осях координат) точки Бэрри [19] треугольника ***ABD*** и проверив на (ир)рациональность расстояние до четвёртой вершины квадрата. Например, $P=(57;6)$, для квадрата с вершинами $(\pm 78;\pm 78)$; в этом случае $A=75$, $B=153$, $C=159$, $D=\sqrt{7497}$. (Не утверждаю, что минимальные расстояния).

Из **Леммы 6.1** элементарно следует **<u>Теорема 4</u>**: *Целочисленные точки Штейнгауза могут быть внутри квадратов только с длинами сторон* ***t****, большей* ***14142***. (Изначально полагалось, что $a<t/2$, а $14142<10^4\sqrt{2}$.)

Возможные направления для дальнейшего анализа

Остаётся выполнить данное во введении обещание и обозначить связь между исследованием точек Штейнгауза элементарными методами и теми, которые при изучении данной проблемы используют свойства эллиптических кривых. Перепишем уравнения (1.1-4) в форме, использованной в разделе 6 и в пункте 2А, где по-прежнему $u=(b-t)$, $v=(d-t)$, а $U=(c-t)$ и $V=(a-t)$; все они нечётны и не кратны трём, а $t=2^{\tau}T$ делится как минимум на 12.

$$\{2[a^2-(a^2-u^2)-(a^2-v^2)]t-[u(a^2-u^2)+v(a^2-v^2)]\}^2 =(2a^2-(u-v)^2)(a^2-u^2)(a^2-v^2),$$
$$\{2[c^2-(c^2-u^2)-(c^2-v^2)]t-[u(c^2-u^2)+v(c^2-v^2)]\}^2 =(2c^2-(u-v)^2)(c^2-u^2)(c^2-v^2),$$
$$\{2[d^2-(d^2-U^2)-(d^2-V^2)]t-[U(d^2-U^2)+V(d^2-V^2)]\}^2=(2d^2-(U-V)^2)(d^2-U^2)(d^2-V^2),$$
$$\{2[b^2-(b^2-U^2)-(b^2-V^2)]t-[U(b^2-U^2)+V(b^2-V^2)]\}^2=(2b^2-(U-V)^2)(b^2-U^2)(b^2-V^2).$$

Это позволяет связать с каждой точкой Штейнгауза пару эллиптических кривых вида

$$\{(b+d)X-[2(u^2+v^2)(b+d)-2uv(u+v)]\}^2=Y^2=(X-(u-v)^2)(X-2u^2)(X-2v^2), \quad (7.1)$$
$$\{(a+c)X-[2(U^2+V^2)(a+c)-2UV(U+V)]\}^2=Y^2=(X-(U-V)^2)(X-2U^2)(X-2V^2), \quad (7.2)$$

где $X=2a^2$ и $X=2c^2$ в (7.1) и $X=2b^2$ и $X=2d^2$ в (7.2) являются абсциссами целых точек на соответствующих *кривых Штейнгауза*. Дискриминант кривой (7.1) равен $4[u^{12}-14u^{10}v^2+63u^8v^4-100u^6v^6+63v^8u^4-14v^{10}u^2+v^{12}]=\Delta=4[u^2-v^2]^2*[(2uv)^2-(u^2-v^2)^2]^2$, и аналогично для кривой (7.2).

Правые их части – дискриминанты квадратных уравнений в (1.1-4) – должны быть полными квадратами. То есть каждая точка Штейнгауза соответствует паре эллиптических кривых $Y^2=X(X-S_1)(X-S_2)$, и $Y^2=X(X-Q_1)(X-Q_2)$, где $S_1=u^2+2uv-v^2$, $S_2=v^2+2uv-u^2$, $Q_1=U^2+2UV-V^2$, $Q_2=V^2+2UV-U^2$ – числа чётно-нечётные. На них должно быть как минимум по две целые точки с чётно-нечётными X-координатами: $(2a^2-(u-v)^2)$, $(2c^2-(u-v)^2)$ на кривой E_s и $(2d^2-(U-V)^2)$, $(2b^2-(U-V)^2)$ на кривой E_q. Их Y-координаты делятся как минимум на 32.

Точки $(0,0)$, $(S_1,0)$, $(S_2,0)$ суть целые точки второго порядка на кривой E_s, а точки $(0,0)$, $(Q_1,0)$, $(Q_2,0)$ – на E_q. Они образуют группу Кляйна – $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ – подгруппу групп кручения и для кривой E_s, и для кривой E_q. Более того, для них обеих верна следующая

Теорема 5: *группы кручения кривых* E_s *и* E_q *совпадают с группой Кляйна.*

Доказательство проводим, основываясь на результатах Барри Мазура [14]. Поскольку $\mathbf{Tors}E(\mathbb{Q})\supseteq\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$, из списка Мазура исключаются тривиальная и все десять циклических групп. Остались четыре: $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_6$, и $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_8$. Из них третья исключается, если на кривой отсутствуют рациональные точки порядка три, а вторая и четвёртая, если отсутствуют рациональные точки порядка четыре. Дальнейшие выкладки проводим для кривой E_s, заданной в (7.1); в случае кривой E_g, заданной в (7.2), рассмотрения аналогичны.

Лемма 7.1. На кривых E_s и E_q нет рациональных точек порядка три. В противном случае, как показано в П.1.5, точка порядка три (точка перегиба кривой) удовлетворяет уравнению $3\{z^4-2(S_1^2/3-S_2)z^2-3[(2S_1/3)^3-2(2S_1/3)S_2+4S_3]z - 3[(S_1/3)^2-(S_2/3)]^2\}=0$, где $z=(x-S_1/3)$ или $Z^4=6(S_1^2-3S_2)Z^2+3[4S_1-36S_1S_2+$

$108S_3]Z+3[S_1^2-3S_2]^2$. Здесь $Z=(3x-S_1)\equiv(3x+2uv-3u^2-3v^2)=(3K\pm1)$, поскольку рациональное решение данного уравнения должно быть целым, а величины S_2 и S_3 равны соответственно $(4u^2v^2(u-v)^2)$ и $(4u^2v^2+2(u^2+v^2)(u-v)^2)$. Как u, так и v имеют вид $(6k\pm1)$, и в случае разных знаков S_2 и S_3 сравнимы с 1 по модулю 3. В случае одинаковых знаков $S_2\equiv0(\mathrm{mod}3)$, а $S_3\equiv1(\mathrm{mod}3)$. В обоих случаях левая часть уравнения, дающая остаток 1 при делении на 3, не может быть равна его правой части, являющейся суммой трёх слагаемых, кратных трём. Это противоречие доказывает лемму 7.1.

Лемма 7.2. На кривых E_s и E_q нет рациональных точек порядка четыре. В противном случае, они удвоенные будут иметь порядок два и, поэтому, должны совпадать с одной из точек $(X_3=\max(2u^2,2v^2,(u-v)^2);0)$, $(X_2=2u^2+2v^2+(u-v)^2-X_3-X_1;0)$ или $(X_1=\min(2u^2,2v^2,(u-v)^2);0)$. Две последние исключаются, так как касательные к кривым Штейнгауза не могут иметь с ними ещё две точки пересечения. Уравнения касательных, проходящих через $(X_3;0)$, – $y=K_\pm(x-X_3)$ – дают явные формулы для абсцисс обеих точек касания: $\xi_\pm=X_3\pm\sqrt{[(X_3-X_1)(X_3-X_2)]}$. Квадратный корень должен извлекаться нацело, что приводит к трём диофантовым уравнениям в зависимости от возможных равенств $X_3=2u^2$, $X_3=2v^2$ либо $X_3=(u-v)^2$. Третий вариант приводит к уже рассмотренному уравнению $w^2=4u^2v^2-(u^2-v^2)^2$, которое решений не имеет.

Два первых приводят к уравнениям $w^2=(2u^2-2v^2)(2u^2-(u-v)^2)$ и $w^2=(2v^2-2u^2)(2v^2-(u-v)^2)$, которые переходят друг в друга. Рассмотрим первое из них. Без ограничения общности можно полагать, что $\Delta=НОД(u;v)=1$: уравнение однородно и Δ^2 выносится из-под корня. Поскольку uv не кратно 2, то $НОД((2u^2-(u-v)^2);(u+v))=НОД((2u^2-(u-v)^2);(u-v))=НОД((u+v);(u-v))=2$. Таким образом, при взаимно простых u и v, не кратных 2 и 3, имеем $z=4xy\cdot\sqrt{[2x^2y^2+x^4-y^4]}$. Здесь нечётное $x^2=(u+v)/2$, чётное $y^2=(u-v)/2$ и вся квадратная скобка под корнем также взаимно просты, только одно из них – y – кратно 2 и только оно же кратно 3 (иначе $2x^2y^2+x^4-y^4$ не будет полным квадратом).

Итак, доказательство Леммы 7.2 свелось к вопросу о разрешимости в целых взаимно простых числах уравнения $z^2=2x^2y^2+x^4-y^4$, где zx нечётно, а y кратен 6. Его неразрешимость также следует из результатов Поклингтона [5], но проще доказывается непосредственно, ибо оно (в форме $z^2=(x^2+y^2)^2-2y^4$) рассмотрено в П.1.2; его примитивные, нас и интересующие, решения таковы: $\{ z=|2m^2-n^2|, y^2=2mn, x^2+y^2=(2m^2+n^2) \}$. Здесь $НОД(m;n)=1$, и n – нечётно. Заменив в равенстве $y^2=2mn$ взаимно простые сомножители на $(2\mu)^2$ и v^2 соответственно, получаем окончательно $\{ z=|(2\mu)^4/2-v^4|, y^2=(2\mu)^2v^2, x^2+y^2=((2\mu)^4/2+v^4) \}$. Отсюда следует $x^2=(2\mu^2-v^2)^2+(2\mu^2)^2$, то есть уравнение Пифагора. Для пифагоровых параметров α и β (разумеется, меньших, чем исходные величины) получаются следующие соотношения: либо $v^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^4$, либо $v^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\beta^4$. В обоих случаях приходим к уравнению, эквивалентному исходному. Таким образом, проведён метод бесконечного спуска (П.1.4) и неразрешимость всех трёх уравнений доказана.

Итак, группы кручения кривых E_s и E_q совпадают с группой Кляйна.

Что касается их ранга, то, по-видимому, он может быть различным в двенадцати областях задания гипотетической точки Штейнгауза кривой $\boldsymbol{E_s}$ (см. рис.3) и в пятнадцати областях задания гипотетической точки Штейнгауза кривой $\boldsymbol{E_q}$. Можно утверждать только то, что он больше нуля. В самом деле, точки $\boldsymbol{P_4=(2u^2+2v^2, \pm 2uv(u+v))}$ и $\boldsymbol{\underline{P}_4=(2U^2+2V^2, \pm 2UV(U+V))}$ являются целыми на кривых $\boldsymbol{E_s}$ и $\boldsymbol{E_q}$ соответственно, что проверяется непосредственной подстановкой. В силу теоремы 5 порядок их бесконечен.

Далее рассматриваем уравнения, заданные в (7.1) и (7.2), причём из их правых и левых частей извлекаем квадратные корни. Тогда $\boldsymbol{2a^2}$ и $\boldsymbol{2c^2}$ – это два значения аргумента как для модуля в левой их части, так и для эллиптической функции в правой. В зависимости от того, где (в какой из зон на рис.3) будет расположена точка $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{X_0=[2u^2+2v^2-2uv(u+v)/(d+b)]}$ – нуль модуля – и корни эллиптической функции $\boldsymbol{(u-v)^2}$, $\boldsymbol{2u^2}$ и $\boldsymbol{2v^2}$ будут больше или меньше друг друга и нумерация их $\boldsymbol{X_0{}^{<}?_{>}X_1{}^{<}?_{>}X_2{}^{<}?_{>}X_3}$ будет различной. А из неравенства треугольника для $\boldsymbol{APD}$ и $\boldsymbol{APB}$ и, разумеется, из тождества параллелограмма (1.8) следует принадлежность точек с абсциссами $\boldsymbol{2a^2}$ и $\boldsymbol{2c^2}$ некомпактной (правой) части кривой $\boldsymbol{E_s}$ (7.1) (см. рис.4-5).

Многократно доказывалось (см., в частности, [20]), что на внешних границах области $\boldsymbol{0<y<x}$ нет точек Штейнгауза. Также их нет на отрезке $\boldsymbol{[A_3;A]}$ и на луче $\boldsymbol{[A_1;A_{10};\infty)}$. На кривых $\boldsymbol{[A_1;A;A_7]}$ и $\boldsymbol{[A_4;A;A_9]}$ точек Штейнгауза нет в силу их определения, включающего в себя сомножитель $\boldsymbol{\sqrt{2}}$. Дуги окружностей $\boldsymbol{[A_2;A]}$ и $\boldsymbol{[A_8;A]}$, то есть $\boldsymbol{b=t}$ и $\boldsymbol{d=t}$ соответственно, не содержат точек Штейнгауза ввиду нечётности $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}$ и чётности $\boldsymbol{t}$. Дуга $\boldsymbol{[A_5;A]}$ окружности $\boldsymbol{x^2+y^2=t^2/2}$ не имеет точек Штейнгауза ввиду доказанной нечётности $\boldsymbol{r}$.

Остаётся рассмотреть (на предмет отсутствия точек Штейнгауза на границах всех двенадцати зон) дугу эллипса $\boldsymbol{[A_6;A]}$. Подставляя его определение – $\boldsymbol{b+d=2t}$ – в уравнение (1.8), получаем после упрощений $\boldsymbol{[(2a)^2-2(b^2+d^2)]^2+(b-d)^4=4b^2d^2}$. Учтя уравнение (1.7), приходим к $\boldsymbol{[(c^2-a^2)/2]^2+[(b-d)/2]^4=b^2d^2}$, то есть к уравнению Пифагора, в котором $\boldsymbol{(b-d)/2}$ нечётно, а параметр $\boldsymbol{k=1}$, так как иначе $\boldsymbol{НОД(b;a;d)>1}$ в противоречие с леммой 1.1. Итак, $\boldsymbol{bd=m^2+n^2}$, а $\boldsymbol{(b-d)^2=4(m^2-n^2)}$, откуда $\boldsymbol{(b+d)^2=8m^2}$, что противоречиво.

Элементарными, хотя и трудоёмкими, вычислениями получаем следующие результаты.

В зонах 1-6 внутри эллипса $\boldsymbol{u<v}$, а в областях вне него – 7-12 – $\boldsymbol{u>v}$.

В зонах 1-5 внутри основного круга и в областях вне эллипса 7-12 $\boldsymbol{X_0>(u-v)^2}$.

В зоне 6 (внутри эллипса, но вне основного круга) $\boldsymbol{X_0<(u-v)^2}$.

В зонах 1-2 (внутри круга $\boldsymbol{b<t}$) и в зонах правее основного квадрата 4-12 $\boldsymbol{X_0>2v^2}$.

В единственной оставшейся зоне 3 $\boldsymbol{X_0<2v^2}$.

В зонах 1-8 (внутри круга $\boldsymbol{d<t}$) и в зонах выше основного квадрата 11-12 $\boldsymbol{X_0>2u^2}$.

В оставшихся зонах (9-10) $\boldsymbol{X_0<2u^2}$.

В зонах (5-9) $\boldsymbol{|v|\sqrt{2}<|u-v|}$, а в зонах (1-4) и (10-12) $\boldsymbol{|v|\sqrt{2}>|u-v|}$.

В зонах (2-7) $\boldsymbol{|u|\sqrt{2}<|u-v|}$, а в зонах 1 и (8-12) $\boldsymbol{|u|\sqrt{2}>|u-v|}$.

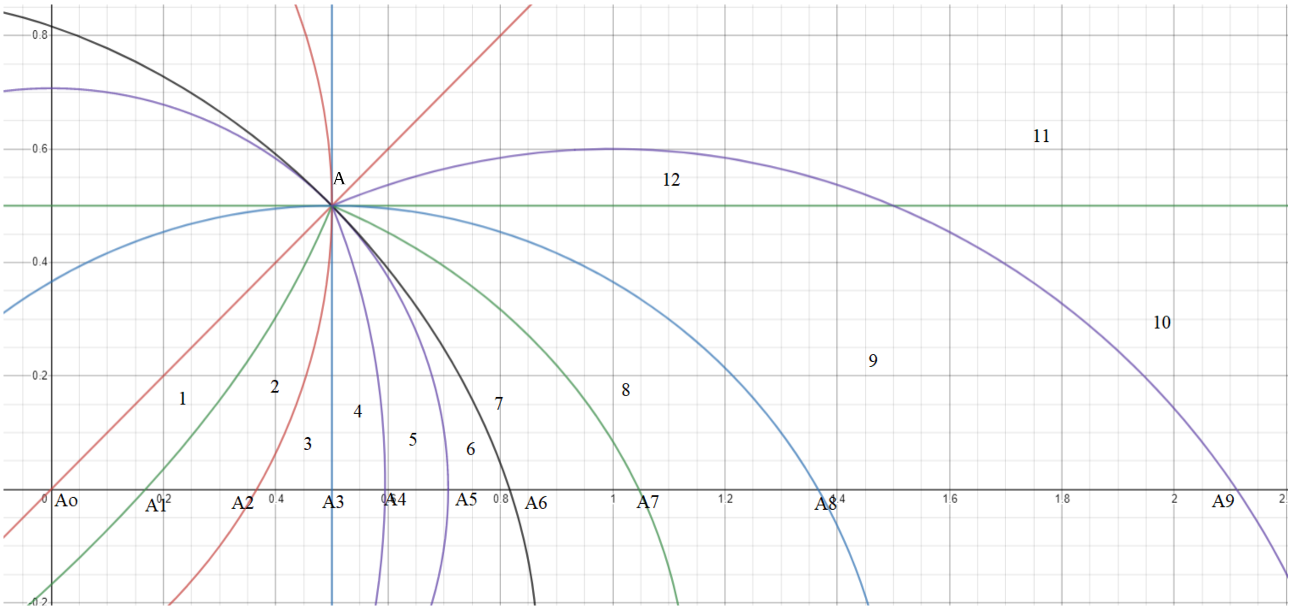

Рис. 3. Общий вид и список 12 зон $0<y<x$.
$x=0.5t$: отрезок A_3A; $y=0.5t$: луч $A\infty$; $y=x$: луч $0A\infty$; $x^2+y^2=0.5t^2$: дуга окружности AA_5; $b+d=2t$: дуга эллипса AA_6; $(t/2-x)^2+(t/2-y)^2=a^2$: дуга окружности с центром в A (нет на рис.); $(t/2+x)^2+(t/2-y)^2=b^2$: дуга окружности AA_2; $(t/2+x)^2+(t/2+y)^2=c^2$: дуга окружности с центром в C (нет на рис.); $(t/2-x)^2+(t/2+y)^2=d^2$: дуга окружности AA_8; $(b-d)=|b-t|\sqrt{2}$: дуги AA_1 и AA_7; $(b-d)=|d-t|\sqrt{2}$: дуги AA_4 и AA_9.

Полученные неравенства (в обозначениях П.1.5) представим в виде таб.1:

Таблица 1. Сравнение коэффициентов и нулей в (7.1) и с X_μ, и с X_{in}.

зона	**Распределение нулей и коэффициентов по возрастанию**	$2a^2$ и $2c^2$ лежат на	X_0 >?< X_μ >?< X_{in}
01	$X_{min}=(u-v)^2=X_1<X_2=2u^2<2v^2=X_3<X_0=X_{Max}$	двух лучах модуля	$X_\mu<X_{0>}{}^{<}X_{in}>X_\mu$
02	$X_{min}=2u^2=X_1<X_2=(u-v)^2<2v^2=X_3<X_0=X_{Max}$	двух лучах модуля	$X_{0>}{}^{<}X_\mu<X_{in>}{}^{<}X_0$
03	$X_{min}=2u^2=X_1<X_2=(u-v)^2<X_0<2v^2=X_3=X_{Max}$	одном луче модуля?	$X_0<X_\mu<X_{in}$
04	$X_{min}=2u^2=X_1<X_2=(u-v)^2<2v^2=X_3<X_0=X_{Max}$	двух лучах модуля?	$X_0<X_\mu<X_{in}$
05	$X_{min}=2v^2=X_1<X_2=2u^2<(u-v)^2=X_3<X_0=X_{Max}$	двух лучах модуля?	$X_0<X_\mu<X_{in}$
06	$X_{min}=2u^2=X_1<X_2=2v^2<X_0<(u-v)^2=X_3=X_{Max}$	одном луче модуля?	$X_0<X_\mu<X_{in}$
07	$X_{min}=2v^2=X_1<X_2=2u^2<(u-v)^2=X_3<X_0=X_{Max}$	двух лучах модуля	$X_{0>}{}^{<}X_\mu<X_{in}>X_0$
08	$X_{min}=2v^2=X_1<X_2=(u-v)^2<2u^2=X_3<X_0=X_{Max}$	двух лучах модуля	$X_0<X_\mu<X_{in}$
09	$X_{min}=2v^2=X_1<X_2=(u-v)^2<X_0<2u^2=X_3=X_{Max}$	одном луче модуля?	$X_0<X_\mu<X_{in}$
10	$X_{min}=(u-v)^2=X_1<X_2=2v^2<X_0<2u^2=X_3=X_{Max}$	одном луче модуля?	$X_0<X_\mu<X_{in}$
11	$X_{min}=(u-v)^2=X_1<X_2=2v^2<2u^2=X_3<X_0=X_{Max}$	двух лучах модуля?	$X_{0>}{}^{<}X_\mu<X_{in>}{}^{<}X_0$
12	$X_{min}=(u-v)^2=X_1<X_2=2v^2<2u^2=X_3<X_0=X_{Max}$	двух лучах модуля?	$X_{0>}{}^{<}X_\mu<X_{in}>X_0$

В отмеченных «?» зонах сравнение X_3 с X_0 необходимо, но не достаточно. Сравнение X_0 с $2a^2$ и $2c^2$ показывает, что $2a^2<X_0<2c^2$ в зонах 4, 5, 11, 12, а в остальных – $X_0<2a^2<2c^2$. Аналогичные результаты получаем и при сравнении X_0 с X_μ и с X_{in}: X_0 >?< X_μ >?< X_{in}.

Кроме того, если $2a^2$ и $2c^2$ лежат на одном луче модуля, должно выполняться равенство $(d+b)=(\sqrt{D_c}-\sqrt{D_a})/(2c^2-2a^2)$. Здесь дискриминанты D_c и D_a – это учетверённые правые части уравнений (7.1) и (7.2). Если же они лежат на обоих лучах модуля (зоны 4, 5, 11, 12), то $(d+b)=(\sqrt{D_c}+\sqrt{D_a})/2(c^2-a^2)$, что и проиллюстрировано на рис.4-5. С учётом того, что для $\sqrt{D_c}$ и $\pm\sqrt{D_a}$ левые части уравнения (7.1) дают формулы $\sqrt{D_c}=(b+d)(2c^2-X_0)$ и $\sqrt{D_a}=(b+d)|2a^2-X_0|$, можно указать ещё на две пары гарантированных рациональных точек $(X_{\pm s}, \pm Y_{\pm s})$ на кривой E_s, таких, что $(2a^2, \pm\sqrt{D_a})\oplus(2c^2, \sqrt{D_c})\oplus(X_{\pm s}, Y_{\pm s})=0$ – третьих точек пересечения с кривой E_s прямых, проходящих через $(2a^2, \pm\sqrt{D_a})$ и $(2c^2, \sqrt{D_c})$: $y=[(\sqrt{D_c}\pm\sqrt{D_a})/(2c^2-2a^2)](x-2a^2)+\sqrt{D_a}$.

Стандартная процедура ([9,с.20]) даёт абсциссы $X_{\pm s}$ в двух эквивалентных формах:

$$X_{+s}=S_1-(2c^2+2a^2)+[(\sqrt{D_c}-\sqrt{D_a})/(2c^2-2a^2)]^2\equiv(b-d)^2+2u^2+2v^2-(2b^2+2d^2)+(b+d)^2=2u^2+2v^2, \qquad (7.3)$$

$$X_{-s}=S_1-(2c^2+2a^2)+[(\sqrt{D_c}+\sqrt{D_a})/(2c^2-2a^2)]^2\equiv 2u^2+2v^2+(b+d)^2\{[(b^2+d^2-X_0)/(c^2-a^2)]^2-1\}. \qquad (7.4)$$

Здесь S_i – симметрические функции корней исходного кубического многочлена. Формулы (7.3-4) записаны для точки $P=P_4$ из зон 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10; при нахождении точки P в зонах 4, 5, 11, 12 в формулах (7.3-4) X_{+s} и X_{-s} следует поменять местами.

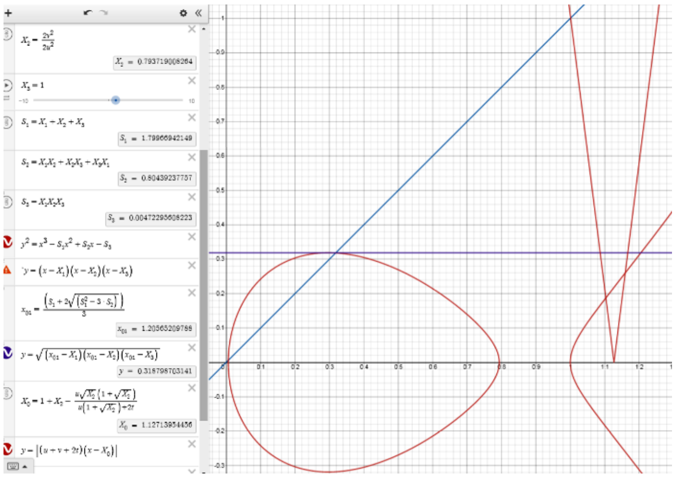

Рис4. Возможный вид графика решений уравнений (7.1). Точка P в зонах 4, 5, 11, 12.

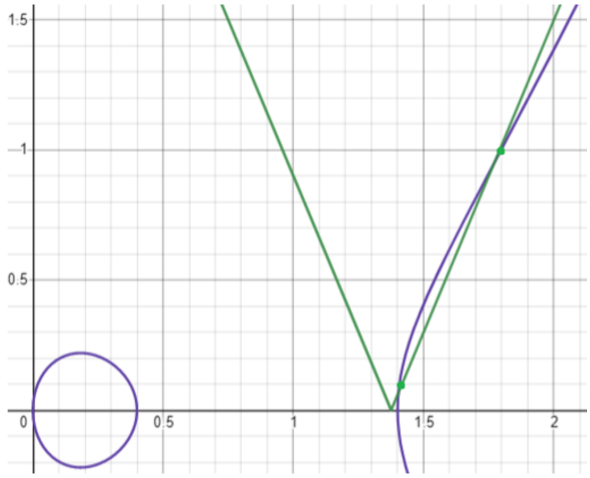

Рис.5. Возможный вид графика решений уравнений (7.1). Точка P в зонах 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10.

Заключение

Сводка основных результатов

Суммируя результаты, полученные в семи предыдущих разделах, получаем следующее.

Целочисленные расстояния от гипотетической точки Штейнгауза до вершин соответствующего целочисленного квадрата должны быть не кратными 6 и достаточно велики (более 1000). Сторона квадрата кратна 12 (как минимум). Это – не оптимальные оценки; они эффективно улучшаемы с использованием ЭВМ.

Точки Штейнгауза целочисленного центрально симметричного квадрата со стороной t могут быть расположены разве только на окружностях с нечётным квадратом радиуса, и их нет на прямых, параллельных его диагональным осям симметрии на расстояниях $kt/2$ от одной из них ($k\in\mathbb{Z}$). Их нет также и на прямых $x=\pm kt/2$ и $y=\pm kt/2$, где либо $k\pm1=2^{\varphi}$, либо $k\pm1=3^{\psi}$. Поиск точек Штейнгауза достаточно вести строго внутри сектора $0<y<x$; при $d\geq a+4$, $b\geq d+2$.

В формулах (2.1) для расстояний до точки Штейнгауза параметры (p,q,ς,δ) должны быть достаточно велики, в частности, они не могут быть равными $p=1=\delta$ и $q=2$. Это – не оптимальные оценки; они эффективно улучшаемы, но процедура оценки весьма громоздка.

Гипотеза об отсутствии на плоскости точек Штейнгауза, удалённых на расстояния a, b, c, d от вершин квадрата со стороной t, эквивалентна справедливости следующего утверждения про эллиптические кривые Штейнгауза $y^2=(x-(u-v)^2)(x-2u^2)(x-2v^2)$ и $Y^2=(X-(U-V)^2)(X-2U^2)(X-2V^2)$, где по-прежнему $u=(b-t)$, $v=(d-t)$, а $U=(c-t)$ и $V=(a-t)$; все они нечётны и не кратны трём, а t делится как минимум на 12: обе эти кривые не имеют рациональных точек с абсциссами ($2a^2$ и $2c^2$) и ($2b^2$ и $2d^2$) соответственно. Более точно: точка $P=(x;y)$ с целыми координатами вида $6k\pm 1$, такими, что $0<y<x$, является точкой Штейнгауза для квадрата $ABCD$ с вершинами $(\pm t/2;\pm t/2)$, где t кратно 12, тогда и только тогда, – когда две эллиптические кривые E_s: $Y^2=X(X-S_1)(X-S_2)$ и E_q: $Y^2=X(X-Q_1)(X-Q_2)$ коэффициенты и корни которых зависят от a, b, c, d, t следующим образом $S_1=2(b-t)^2-(b-d)^2$, $S_2=2(d-t)^2-(b-d)^2$, $Q_1=2(c-t)^2-(c-a)^2$, $Q_2=2(a-t)^2-(c-a)^2$, имеют по две целые точки с абсциссами $(2a^2-(b-d)^2)$ и $(2c^2-(b-d)^2)$ для кривой E_s и $(2d^2-(c-a)^2)$ и $(2b^2-(c-a)^2)$ для кривой E_s.

Acknowledgments

Работа начиналась в рамках Компьютерной Школы при ИММ РАН и ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Автор благодарит участников Проектов "История+Математика", терпеливо переносивших все тяготы отладки текста, а также всех слушателей Школы, чьи советы и замечания способствовали улучшению изложения этого нового для учеников средней школы материала. Особую благодарность автор выражает С.В. Подоляко, помогавшему в программной части уже студенческого проекта.

Литература

1. В. Серпинский. О решении уравнений в целых числах. М., ГИФМЛ, 1961. – 88 с.
2. Г. Штейнгауз. Задачи и размышления. М.: Мир, 1974. – 400 с.
3. De Li Lei & Hong Du Key. On a Problem of Steinhaus. MM Research Preprints, 186–193 MMRC, AMSS, Academia, Sinica, Beijing No. 22, December 2003.
4. **http://math4school.ru/shteinghauz.html**
5. H.C. Pocklington. Some Diophantine Impossibilities. Proc. Cambridge Phil. Soc., 17, 108 (1914). – Pp.108-121.
6. R.K. Guy, "Rational Distances from the Corner of a Square," in *Unsolved Problems in Number Theory*, 2nd ed., New York: Springer-Verlag, 1994. – Pp. 181–185. (see also R.K. Guy. Unsolved Problems in Number Theory. 3rd edition, Springer, 2004.)
7. **http://mathhelpplanet.com/viewtopic.php?f=51&t=38210&st=0&sk=t&sd=a&sid=2e2f2e9de9cb5f8759e34c0666c79578** , **https://dxdy.ru/topic61748.html** , **https://dxdy.ru/topic96693.html**
8. А.А. Бухштаб. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966. – 384 с.
9. В.В. Острик, М.А. Цфасман. Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые. М., изд. МЦНМО, 2001. – 48 с.
10. В. Серпинский. Пифагоровы треугольники. М., Учпедгиз, 1959. – 112 с.
11. С. Сингх. Великая теорема Ферма. М. МЦНМО. 2000. – 288 с.
12. J.H.J. Almering. Rational quadrilaterals. Indag. Mat. 25 (1963). – Pp. 192–199.
13. Дж.И. Литтлвуд. Математическая смесь. М.: Физматгиз, 1962. – 151 с.
14. В.В. Прасолов, Ю.В. Соловьёв. Эллиптические функции и алгебраические уравнения. М.: Факториал, 1997. – 288 с.
15. К.М. Абдулова, Н.С. Келлин. Точки Берри правильного треугольника и гипотеза Штейнгауза. – Труды XXII Международной научной конференции «Цивилизация знаний: Российские реалии» [электронный ресурс], М.: РосНОУ, 15-24 апреля 2020, сс. 226-235. – Киров, 724с.

16. Н.С. Келлин, В.П. Романова. Случай плоских многоугольников в обобщенной задаче Штейнгауза. – Труды XXII Международной научной конференции «Цивилизация знаний: Российские реалии» [электронный ресурс], М.: РосНОУ, 15-24 апреля 2020, сс. 248-259. – Киров, 724 с.
17. Joseph G. Sadeq (Bachelor of Science George Mason University, 2008). Points at Rational Distance from the Vertices of a Square. A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science at George Mason University. Director: Dr. Walter Morris, Professor Department of Mathematical Sciences Spring Semester 2015. George Mason University Fairfax, VA.
18. М.А. Зыкова, Н.С. Келлин. Алгебро-геометрические аспекты некоторых вопросов теории чисел. – Труды XXII Международной научной конференции «Цивилизация знаний: Российские реалии» [электронный ресурс], М.: РосНОУ, 15-24 апреля 2020, сс. 236-248. – Киров, 724 с.
19. T.G. Berry. Points at rational distance from the corners of a unit square. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 17 (1990), pp. 505–529.
20. Н.С. Келлин. Об отсутствии точек Штейнгауза. – Труды XXI Международной научной конференции «Цивилизация знаний: Российские реалии» [электронный ресурс], М.: РосНОУ, 10-11 апреля 2020, сс. 419-434. – Киров, 684 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Вспомогательные утверждения

П.1.0. Взаимная простота параметров t, a, b, c, d, по трое

Дано: ***НОД***$(t;a;b;c;d)=1$ & $(a^2+c^2)=(b^2+d^2)$ & $2t^4+2b^4+c^4+a^4 = 2(a^2+c^2)(t^2+b^2)$. Следовательно, если любая тройка из a, b, c, d не взаимно проста, то, в силу второго условия, и вся четвёрка (a, b, c, d) не взаимно проста, а в силу последнего условия t делится на их наибольший общий делитель. Из последнего условия вытекает то, что ***НОД***$(t;a;c)>1$ влечёт делимость на него и b, и аналогично для троек (t, b, c) и (t, b, a). Для получения взаимной простоты оставшихся троек (t, b, d), (t, d, c) и (t, d, a) теперь достаточно воспользоваться условием, эквивалентным (в силу второго условия) третьему: $2t^4+2d^4+c^4+a^4 = 2(a^2+c^2)(t^2+d^2)$.

Попарная взаимная простота чисел t, a, b, c, d в общем случае недоказуема: условиям (1.7-8) не достаёт ещё как минимум одного. Она может наличествовать в одной из ограниченных задач Штейнгауза, когда к системе (1.1-4) добавлено какое-либо дополнительное условие, например, поиск точек Штейнгауза на кривой, заданной алгебраическим уравнением, как в случае (2.5-6) или при условии $(c^2-b^2)*(b^2-a^2)=t^4$, означающем нахождение точки P на гиперболе $xy=t^2/4$. Но в общем случае имеет место лишь следующее утверждение: пусть нечётное $\pi\in\mathbb{P}$ делит оба числа диагональной пары (a,c). Тогда на π^2 делятся числа (t^4+b^4), (t^4+d^4) и (b^2+d^2), и аналогично для пары (b,d).

П.1.1. Делимость параметров t, a, b, c, d, на 2, на 3 и на 5.

Дано: $\{2t^4+2b^4+c^4+a^4=2(a^2+c^2)(t^2+b^2)$ & $a^2+c^2=b^2+d^2\}$. Следовательно, в силу П.1.0. все числа четвёрки (a, b, c, d) не могут быть чётными или кратными 3. Следовательно, как минимум два из них нечётны или не кратны 3. В силу второго условия оставшаяся пара чётных (или кратных 3) не $4k+2=4h$ либо $9k=3h+2$ с целыми k и h. Также в силу второго условия невозможен случай только одного чётного (делящегося на 3), иначе $2k+1=2h$ либо $3k=3h+1$ с целыми же k и h.

Осталось исключить возможность, например, a и b – нечётные, а c и d – чётные, либо a и b – делятся на 3, а c и d – нет. В этом случае левая часть первого условия чётна (делится на 3), а правая – нечётна (не кратна 3). Поскольку второе условие симметрично относительно перестановок (a, c) и (b, d) и мы нигде не пользовались неравенствами (1.9), то доказана оставшаяся единственной возможность: $a{\cdot}d{\cdot}b{\cdot}c$ нечётно (не кратно 3).

Подставив нечётные a, b, c, в уравнение (1.8) $2t^4+(c^2-b^2)^2+(b^2-a^2)^2 = 4[(a^2+c^2)/2]t^2$, получаем, представив $t=2^{\tau}T$, где T – нечётно, $2^{4\tau+1}T^4+64\{[(c^2-b^2)/8]^2+[(b^2-a^2)/8]^2\}=2^{2\tau+2}[(a^2+c^2)/2]T^2$. При $\tau=0$ оказывается $2(2n+1)+64m= 4(2k+1)$; при $\tau=1$ оказывается $32(2n+1)+64m =64(2k+1)$; при $\tau\geq 2$ оказывается $2^{4\tau-5}(2n+1)+m=2^{2\tau-4}(2k+1)$. Таким образом, необходимо, чтобы t было кратно четырём.

Подставив не делящиеся на 3 a, b, c в уравнение (1.8) в форме $(t^2-(a^2+c^2)/2)^2 = a^2c^2 - [b^2-(a^2+c^2)/2]^2$, получаем соотношение $[t^2-(3k+1)]^2 = (3h+1)$, то есть делимость t на 3.

Далее представим уравнение (3.1) в виде $t^4+b^4+(c^4+a^4)/2=(a^2+c^2)(t^2+b^2)$. Если ни одно из t, a, b, c не кратно 5, то правая его часть при том же делении может давать в остатке только 0; $2{*}2=4$; $2{*}3\equiv 1(\mathrm{mod}5)$; $3{*}3\equiv 4(\mathrm{mod}5)$. Его левая часть даёт остаток 3 при делении на 5 (малая теорема Ферма). То есть среди t, a, b, c есть хотя бы одно кратное 5. Тот же вывод делаем и в отношении других четвёрок: (t, a, b, d); (t, a, c, d) и (t, b, c, d). Такое, разумеется, достигается при t кратном 5, причём, если ещё одно число из a, b, c, d кратно 5, то получим противоречие: правая часть уравнения (3.1) окажется кратной 25, а его левая часть даст остаток 1 при делении на 5. Уравнение (3.1) переходит в сравнение $b^2(a^2+c^2)\equiv b^2(b^2+d^2)\equiv 2(\mathrm{mod}5) \Rightarrow b^2d^2\equiv 1(\mathrm{mod}5)$ и так далее для остальных пяти пар расстояний.

Если t не кратно 5, то тогда ровно два из четырёх расстояний кратны 5. Если эта пара диагональная, то уравнение (3.1) опять доставляет противоречие: $2{\cdot}1+2{\cdot}1+0+0\equiv 0(\mathrm{mod}5)$. Пусть теперь для определённости числа недиагональной пары (c,b) кратны 5. Тогда уравнение (3.1) переходит в сравнение $\{2t^4+a^4\equiv 2a^2t^2(\mathrm{mod}5) \Leftrightarrow t^4+(a^2-t^2)^2\equiv 0(\mathrm{mod}5)\}$ & $\{2t^4+d^4\equiv 2d^2t^2(\mathrm{mod}5) \Leftrightarrow t^4+(d^2-t^2)^2\equiv 0(\mathrm{mod}5)\}$. Отсюда следует, что $a^2\equiv d^2(\mathrm{mod}5)$, а с t^2 они не сравнимы. Аналогичными оказываются и остатки от деления на 5 у трёх других недиагональных пар.

П.1.2. О решении в целых числах уравнений (подробнее см. в [1] и [2])

Решение уравнения $xy = uv$ в натуральных числах проведём таким образом. Пусть $НОД(x;u)=\delta$, то есть $x=p\delta$ и $u=q\delta$, где $НОД(p;q)=1$. Далее, $p\cancel{\delta}y=q\cancel{\delta}v$. Поэтому $p|v$ и $q|y$, то есть $v=p\alpha$ и $y=q\beta$. Следовательно, $\cancel{p}\beta\cancel{q} = \cancel{p}\alpha\cancel{q}$, то есть $\alpha=\beta=\gamma=НОД(y;v)$. Итак, при $НОД(p;q)=1$ имеем: $x=p\delta$, $y=q\gamma$, $u=q\delta$, $v=p\gamma$. В частности, решение уравнения $xy=z^2$ имеет вид: $x=a^2c$, $y=b^2c$, $z=abc$, где $НОД(a;b)=1$.

Решение уравнения $x^2+y^2=u^2+v^2 \Leftrightarrow (x+v)(x-v)=(u+y)(u-y)$ в натуральных числах проводится аналогичным образом. В результате имеем $x=(ps+qr)/2$,

$y=(ps-qr)/2$, $u=(qs+pr)/2$, $v=(qs-pr)/2$, где p, q, r, s – натуральные числа, такие, что $НОД(p;q)=1$, причем либо оба числа r и s чётные, либо все числа p, q, r, s нечётные.

Уравнение $x^2+y^2=z^2$. Это уравнение Пифагора. Все его примитивные решения, где y чётно, даются формулами $x=m^2-n^2$, $y=2mn$, $z=m^2+n^2$, где $НОД(m;n)=1$, $m>n$ и $m*n$ чётно. Его общее решение таково: $x=k(m^2-n^2)$, $y=2mnk$, $z=(m^2+n^2)k$, где k – произвольное натуральное число. Числа m, n и k – это *пифагоровы параметры*. В примитивном решении только одно из x и y кратно 3, а только одно из x, y, z кратно 5.

Уравнения $2x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2=2z^2$, $x^2+2y^2=2z^2$ и $2x^2+2y^2=z^2$. В двух последних делаем замены $z'=z/2$ и $x'=x/2$ соответственно и переходим к двум первым. Заменой $x=x'+y'$ и $y=x'-y'$ второе уравнение сведено к уравнению Пифагора. В примитивном решении первого уравнения y и z обязаны быть нечётными, и умножение его на 2 снова приводит к третьему уравнению.

Примитивные решения для четвёртого и второго уравнений при $x>y$, $НОД(m;n)=1$, $m>n$ и $m*n$ чётном даются соответственно формулами $\{x=m^2+2mn-n^2,\ y=m^2-2mn-n^2,\ z=2(m^2+n^2)\}$ и $\{x=(m^2+2mn-n^2),\ y=|m^2-2mn-n^2|,\ z=m^2+n^2\}$. Их общие решения также получаются из примитивных умножением на k – произвольное натуральное число.

Примитивные решения для третьего и первого уравнений при $НОД(m;n)=1$, m чётном и n нечётном даются соответственно формулами $\{x=2mn,\ y=|m^2-2n^2|/2,\ z=(m^2+2n^2)/2\}$ и $\{x=mn,\ y=|m^2-2n^2|/2,\ z=(m^2+2n^2)/2\}$. Их общие решения также получаются из примитивных умножением на k – произвольное натуральное число.

П.1.3. Уравнение $X^2+\pi Y^2=Z^2$, где нечётное $\pi\in\mathbb{P}$.

Следуя схеме, использованной в [9], ищем (и находим, в отличие от общего случая, рассмотренного в [9]) частное решение $(X_0,Y_0,Z_0)=(1,0,1)$. Обозначаем $X/Z=\xi$, $Y/Z=\eta$. Через точку $(1;0)$ на эллипсе $\xi^2+\pi\eta^2=1$ и произвольную рациональную точку r на оси 0η ($r=m/n$, где $НОД(m;n)=1$) проводим прямую, пересекающую эллипс во второй точке с рациональными координатами $(\xi;\eta)=((\pi m^2-n^2)/(\pi m^2+n^2);\ 2mn/(\pi m^2+n^2))$, а потому общее решение примет вид $(X,Y,Z)=(r(\pi m^2-n^2), 2mnr, r(\pi m^2+n^2))$, где r – подходящим образом взятое рациональное число. Далее при поиске примитивных решений рассмотрим два случая.

<u>**А**</u>: числа m и n разной чётности. В этом случае дробь r имеет числителем 1, числа в общем решении могут быть кратными разве лишь π, а потому знаменатель у r – это либо 1, либо π. Примитивные решения имеют следующий вид: $(X,Y,Z)=((\pi m^2-n^2),2mn,(\pi m^2+n^2))$ при n не кратном π и $(X,Y,Z)=((\pi m^2-n^2)/\pi,\ 2mn/\pi,\ (\pi m^2+n^2)/\pi)$ при n кратном π.

<u>**В**</u>: числа m и n одной чётности, то есть – нечётны. В этом случае дробь r имеет числителем 1, числа в общем решении могут быть кратными разве лишь 2 и π, а потому знаменатель у r – это либо 2, либо 2π. Примитивные решения имеют аналогичный вид: $(X, Y, Z) = ((\pi m^2-n^2)/2, mn, (\pi m^2+n^2)/2)$ при n не кратном π и $(X, Y, Z) = ((\pi m^2-n^2)/2\pi, mn/\pi, (\pi m^2+n^2)/2\pi)$ при n кратном π.

Формулы пунктов **<u>А</u>** и **<u>В</u>** можно упростить, переобозначив в них кратный π параметр n через πm, а прежний m – через n. В результате они преобразуются к **<u>А</u>**: $(X,Y,Z)=(|\pi m^2-n^2|, 2mn, (\pi m^2+n^2))$. **<u>В</u>**: $(X,Y,Z) = (|\pi m^2-n^2|/2, mn, (\pi m^2+n^2)/2)$.

<u>П.1.4. Уравнения $X^4\pm Y^4=Z^2$, $X^2+Y^2+Z^2=T^2$ и $X^2+DY^2=Z^2$, где $2\nmid D=\mathrm{rad}(D)$</u>

Указанное первым уравнение обобщает при $n=4$ Великую теорему Ферма. Детальные доказательства приведены в [8] и в [10]. Идея доказательства отсутствия у него нетривиальных решений – метод бесконечного спуска (эквивалент метода полной математической индукции), – восходящая к самому Ферма, состоит в нахождении очередного решения, если известно хотя бы одно. Причём оно – следующее – должно иметь хотя бы одно из X, Y, Z меньшим, нежели таковое из исходного решения. Эта схема реализуется для пифагоровых параметров m и n вкупе с X либо с Y будут образовывать новое решение с меньшим значением Z либо X, чем оно было у старого. К нему же сводится и доказательство отсутствия точек Штейнгауза на оси Ox. Записав уравнение (1.8) при $y=0$, получим $(a^2+b^2)/2=[(b^2-a^2)/2t]^2+t^2/2$ или $(2t^2-a^2-b^2)^2=4a^2b^2-(b^2-a^2)^2$. Перемножив его почленно с тождеством $(a^2+b^2)^2=4a^2b^2+(b^2-a^2)^2$, получаем противоречие: $[(a^2+b^2)(2t^2-a^2-b^2)]^2=[2ab]^4-[b^2-a^2]^4$.

Два метода решения второго уравнения, приводящие к представлению ответа в разных формах, приведены в [9] и в [10]. Нам потребуется метод Серпинского. Получаемый ответ таков. *Все решения уравнения* $x^2+y^2+z^2=t^2$ *в натуральных числах, где* y *и* z *чётны, получаются из формул:* $x=(l^2+m^2)/n-n$, $y=2l$, $z=2m$, $t=(l^2+m^2)/n+n$, *причём за* (l,m) *следует взять все пары чисел, а за* n *все делители суммы* (l^2+m^2), *причём* $n<\sqrt{(l^2+m^2)}$. *Каждое решение получается таким способом только один раз*.

Введением двух дополнительных параметров можно получить формулы, разрешающие третье уравнение для всех, а не только для простых D. Дополнительное условие свободы его от квадратов необременительно: оно нужно лишь при рассмотрении примитивных решений.

Пусть $x^2+Dy^2=z^2$, где x или z взаимно просто с Dy. Тогда x взаимно просто с z, так как если p является общим простым делителем x и z, то оно делит Dy^2, а, следовательно, и Dy, то есть тройка (x,y,z) примитивная и $НОД((z-x);(z+x))$ равен 1 или 2. Пусть он равен 1, то есть Dy нечетно. Записав данное уравнение как $Dy^2=(z+x)(z-x)$, получим, что $z+x=\xi u$, $z-x=\eta v$, где $\xi\eta=D$, а ξu взаимно просто с ηv, причём uv чётно. Теперь мы имеем $y^2=uv$, откуда $u=n^2$, $v=m^2$ и, следовательно, $x=|\xi n^2-\eta m^2|/2$, $y=nm$, $z=(\xi n^2+\eta m^2)/2$.

Далее предположим, что $НОД((z-x);(z+x))=2$, то есть, что Dy^2 делится на 4. Тогда, если y четно, имеем $D(y/2)^2=[(z+x)/2]\bullet[(z-x)/2]$, где $(z+x)/2$ взаимно просто с $(z-x)/2$. Рассматривая их, как и ранее, находим $x=|\xi n^2-\eta m^2|$, $y=2nm$, $z=(\xi n^2+\eta m^2)$. Если y нечетно, то D должно делиться на 8 и $Dy^2/4=[(z+x)/2]*[(z-x)/2]$, откуда, как и прежде, находим $x=|\xi n^2-\eta m^2|$, $y=nm$, $z=(\xi n^2+\eta m^2)$, где ξn взаимно просто с $m\eta$ и $\xi\eta=D/4$, но этот вариант не подходит ввиду объявленной ранее нечётностью D.

П.1.5. Кубические уравнения и эллиптические кривые [1]

0. Хорошо известно [14], что кубические уравнения $x^3-S_1x^2+S_2x-S_3\equiv z^3-3p^2z-2q^3=0$ с тремя различными действительными корнями X_1, X_2, X_3 не могут быть разрешены в действительных радикалах. Формула Кардано даёт для $z_0=(3x_0-S_1)/\surd(S_1^2-3S_2)$ выражение $z_0=U_++U_-$, где $U_\pm=[q^3\pm\surd(\Delta)]^{1/3}$, в котором дискриминант $\Delta=q^6-p^6$ отрицателен.

В действительной форме z_0 даётся тригонометрическими функциями: $z_0=2p\cdot\cos(\varphi/3)$, где $\varphi=\arccos(q^3/p^3)$. Далее $z_{1,2}$ находятся как решения квадратного уравнения $z^2+z_0z+(z_0^2-3p^2)=0$.

Приведём здесь формулы по эллиптическим кривым, соответствующим неприводимому случаю для формулы Кардано: $Y^2=(x-X_1)(x-X_2)(x-X_3)$, где X_1, X_2, X_3 действительные.

1 Найдём точки перегиба на кривой $y^2=x^3-S_1x^2+S_2x-S_3 \Leftrightarrow y^2=(R^3/27)(((3x-S_1)/R)^3-3(3x-S_1)/R)-2Q/R^3)$, где $R=\surd(S_1^2-3S_2)$ а $2Q=(27S_3+3R^2S_1-S_1^3)\equiv(27S_3-9S_2S_1+2S_1^3)$; (эти точки и являются точками порядка 3, см. задачу 40 в книге (9)). Здесь $S_3=x_1x_2x_3$, $S_2=x_1x_2+x_3x_1+x_2x_3$, $S_1=x_1+x_2+x_3$. Для этого продифференцируем два раза её уравнение: $2yy'=(y^2)'=3x^2-2S_1x^2+S_2$, $(y^2)''=2(y')^2+2yy''=6x-2S_1$. Если $y''=0$, то $(y')^2=3x-S_1$. Комбинируя последнее соотношение с формулой для y': $y'=(3x^2-2S_1x+S_2)/2\surd(x^3-S_1x^2+S_2x-S_3)$, получаем окончательно

$$(3x^2-2S_1x+S_2)^2= =4(3x-S_1)(x^3-S_1x^2+S_2x-S_3), \qquad (П.1.5.1)$$

что эквивалентно следующему уравнению степени 4:

$$(z^2+F)^2=2(F+3)z^2-8[Q/R^3]z-[3+F^2], \qquad (П.1.5.2)$$

где $z=(x-S_1/3)$, а F – параметр Феррари. Приравнивая (П.1.5.2) к нулю и добиваясь за счёт выбора параметра Феррари равенства величины $(z^2+F)^2$ полному квадрату $[A(F)z+B(F)]^2$, получаем кубическую резольвенту: $[F+(S_1/3)^2-(S_2/3)]^3+8[(S_1/3)^2-(S_2/3)]^3=[S_3+2(S_1/3)^3-(S_1/3)S_2]^2$ для его определения. Вычислив F, получаем и абсциссу точки перегиба кривой E_s: $X_{in}=S_1/3+\surd\{1.5[(S_1/3)^2-(S_2/3)]+F/2\}+\surd\{1.5[(S_1/3)^2-(S_2/3)]-F/2+\surd[F^2+3((S_1/3)^2-(S_2/3))^2]\}$

Здесь использован положительный корень преобразованного по Феррари уравнения (П.1.5.2). Остальные корни посторонние: второй – отрицателен, а два последних – недействительные.

2. На овале есть две точки экстремума $(X_{em},\pm Y_{em})$, где $X_{em}=\{(X_1+X_2)-\surd[(X_1+X_2)^2-3X_1X_2]\}/3$, а $Y_{em}=X_{em}\surd[X_1+X_2-2X_{em}]$. На некомпактной ветви есть пара точек $(X_\mu,\pm Y_\mu)$, таких, что $Y_\mu=Y_{em}$, а $X_\mu=X_{em}+\surd[(X_1+X_2)^2-3X_1X_2]$. Как на овале, так и на некомпактной ветви есть по паре точек, в которых касательные к кривой проходят также через точку $(X_3, 0)$. Их координаты таковы:
$\xi_\pm=X_3\pm\surd[(X_3-X_1)(X_3-X_2)]$, а $\eta_\pm=[(X_3-X_1)(X_3-X_2)]\{[2X_3-X_1-X_2]\pm2\surd[(X_3-X_1)(X_3-X_2)]\}$.

[1] **В работе [18] есть досадная ошибка. По недосмотру старшего из авторов на сс. 244-246 попал текст неправленого её черновика. Здесь (в п.07) приведены его исправления.**

3. Для кривых специального вида типа E_s и E_q, некомпактная ветвь которых касается оси ординат, процедуру поиска точек перегиба можно модифицировать. Параллельным переносом добившись, чтобы $y^2=x(x-x_1)(x-x_2)\equiv x^3-(x_1+x_2)x^2+(x_1\cdot x_2)x$, получаем вместо условия (П.1.5.1) аналогичное ему при $X_3=0$:
$3x^4-4(x_1+x_2)x^3+6x_1\cdot x_2x^2=(x_1\cdot x_2)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4[3x-(x_1+x_2)]*[x^3-(x_1+x_2)x^2+x_1\cdot x_2x]=(3x^2-2(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2)^2. \qquad (П.1.5.3)$$

Введя новую переменную $t=\sqrt{(x_1\cdot x_2)}/x$, параметр $e=(x_1+x_2)/2\sqrt{(x_1\cdot x_2)}$ и параметр Феррари f, получаем: $t^4=6t^2-8et+3 \Leftrightarrow (f+t^2)^2\equiv(Bt-C)^2=B^2t^2-2CBt+C^2=2(f+3)t^2-8et+(3+f^2)$. Следовательно, $2(f+3)(3+f^2)=(4e)^2 \Leftrightarrow (f+1)^3=8(e^2-1)$; $f=2\{[(x_2/x_1+x_1x_2)/2]^2-1\}^{1/3}>0$. Итак,

$f=[2(e^2-1)^{1/3}-1]$, $B=2\sqrt{[(e^2-1)^{1/3}+1]}$, $C=2\sqrt{[1+(e^2-1)^{1/3}+(e^2-1)^{2/3}]}$.

Отсюда $t^2\pm B(f)t+(f\pm C(f))=0 \Leftrightarrow t^2\pm2\sqrt{[(e^2-1)^{1/3}+1]}t+(f\mp2\sqrt{[1+(e^2-1)^{1/3}+(e^2-1)^{2/3}]})=0$.

П.1.6. Поведение гипербол $c-b=2\delta p$, $d-a=2\delta q$, $b-a=(\varsigma+\delta)(q-p)$, $c-d=(\varsigma-\delta)(q-p)$, $b-d=\varsigma(q-p)-\delta(q+p)$, $c-a=\varsigma(q-p)+\delta(q+p)$ в секторе $0<y<x$ при условии $1<q/p<(\sqrt{2}+1)$

a) $t/\sqrt2>c-b=2\delta p \Leftrightarrow (y/\delta p)^2-(2x+t)^2/(t^2-(2\delta p)^2)=1$. Правая часть верхней ветви.
Пересечение с биссектрисой $y=x$: $y=z_p=x=\delta p(t\sqrt2-2\delta p)/(t-2\delta p\sqrt2)$.
Пересечение с осью Oy; $x=0$: $y_{0p}=\delta p\sqrt{[2-1/(1-(t/2\delta p)^2)]}$. Асимптота: $y\sqrt{(t^2-(2\delta p)^2)}=(2x+t)\delta p$.
Пересечение со сторонами квадрата: $x=-t/2 \Rightarrow y(-t/2)=\delta p$ (вершина);
$x=t/2 \Rightarrow y(t/2)=\delta p\sqrt{[5+4/((t/2\delta p)^2-1)]}$.

b) $t>d-a=2\delta q \Leftrightarrow (y/\delta q)^2-(2x-t)^2/(t^2-(2\delta q)^2)=1$. Правая часть верхней ветви.
Пересечение с биссектрисой $y=x$: $y=z_{q\pm}=x=\delta q(2\delta q\pm t\sqrt2)/(t\pm2\delta q\sqrt2)$. ($z_{q-}$ только при $t\sqrt2<4\delta q$).
Пересечение с осью Oy; $x=0$: $y_{0q}=\delta q\sqrt{[2-1/(1-(t/2\delta q)^2)]}$. Асимптоты: $y\sqrt{(t^2-(2\delta q)^2)}=\pm(2x-t)\delta q$.
Пересечение со сторонами квадрата: $x=t/2 \Rightarrow y(t/2)=\delta q$ (вершина);
$x=-t/2 \Rightarrow y(-t/2)=\delta q\sqrt{[5+4/((t/2\delta q)^2-1)]}$.
Точки y_{0p} и y_{0q} связаны неравенством $y_{0p}<y_{0q}$ и аналогично при $2\delta p\sqrt2>t$ имеем $z_{q+}<z_p<z_{q-}$.
Пересечение гипербол $c-b=2\delta p$ и $d-a=2\delta q$ в точках с $2(x_{1,2})/t=x_0\pm\sqrt{[(\varepsilon^2-1)(1-(2\delta q/t)^2)(1-(2\delta p/t)^2)]}$; $x_0=\sqrt{(\varepsilon^2+1)}-\varepsilon(2\delta/t)^2qp$ – это абсцисса точки касания гипербол при $\varepsilon=1$; $\varepsilon=2qp/(q^2-p^2)$.
Пересечение их асимптот в точках с $2(x_{1,2})/t=x_0\mp\varepsilon\sqrt{[(1-(2\delta q/t)^2)(1-(2\delta p/t)^2)]}$
и $y_{1,2}=2\delta^2qp\varepsilon[\sqrt{(1-(2\delta q/t)^2)}\pm\sqrt{(1-(2\delta p/t)^2)}]$

c) $t>c-d=(q-p)(\varsigma-\delta)\equiv2\Delta P \Leftrightarrow (x/\Delta P)^2-(2y+t)^2/(t^2-(2\Delta P)^2)=1$; Верхняя часть правой ветви.
Пересечение с биссектрисой $y=x$: $y=Z_P=x=\Delta P(t\sqrt2-2\Delta P)/(t-2\Delta P\sqrt2)$.
Пересечение с осью Ox; $y=0$: $X_{0P}=\Delta P\sqrt{[2-1/(1-(t/2\Delta P)^2)]}$. Асимптота: $x\sqrt{(t^2-(2\Delta P)^2)}=(2y+t)\Delta P$.
Пересечение со сторонами квадрата: $Y=-t/2 \Rightarrow X(-t/2)=\Delta P=(q-p)(\varsigma-\delta)/2$ (вершина);
$Y=t/2 \Rightarrow X(t/2)=\Delta P\sqrt{[5+4/((t/2\Delta P)^2-1)]}$.

d) $t>b-a=(q-p)(\varsigma+\delta)\equiv2\Delta Q \Leftrightarrow (x/\Delta Q)^2-(2y-t)^2/(t^2-(2\Delta Q)^2)=1$. Нижняя часть правой ветви.
Пересечение с биссектрисой $y=x$: $y=Z_Q=x=\Delta Q(2\Delta Q\pm t\sqrt2)/(t\pm2\Delta Q\sqrt2)$; ($Z_{Q-}$ только при $t\sqrt2<4\Delta Q$).
Пересечение с осью Ox; $y=0$: $X_{0Q}=\Delta Q\sqrt{[2-1/(1-(t/2\Delta Q)^2)]}$. Асимптота: $-x\sqrt{(t^2-(2\Delta Q)^2)}=(2y-t)\Delta Q$.
Пересечение со сторонами квадрата: $Y=t/2 \Rightarrow X(t/2)=\Delta Q=(q-p)(\varsigma+\delta)/2$ (вершина);
$Y=-t/2 \Rightarrow X(-t/2)=\Delta Q\sqrt{[5+4/((t/2\Delta Q)^2-1)]}$.
Точки X_{0P} и X_{0Q} связаны неравенством $X_{0P}<X_{0Q}$ и аналогично при $2\Delta P\sqrt2>t$ имеем $Z_{Q+}<Z_P<Z_{Q-}$.
Пересечение гипербол $c-d=2\Delta P$ и $b-a=2\Delta Q$ в точках $2(Y_{1,2})/t=Y_0\pm\sqrt{[(E^2-1)(1-(2\Delta P/t)^2)(1-(2\Delta Q/t)^2)]}$; $Y_0=\sqrt{(E^2+1)}-[2\Delta/t]^2QP$ – ордината точки касания гипербол при $E=1$; $E=2QP/(Q^2-P^2)$.
Пересечение их асимптот в точках с $2(Y_{1,2})/t=Y_0\mp E\sqrt{[(1-(2\Delta Q/t)^2)(1-(2\Delta P/t)^2)]}$
и $X_{1,2}=2\Delta Q\Delta PE[\sqrt{(1-(2\Delta Q/t)^2)}\pm\sqrt{(1-(2\Delta P/t)^2)}]$.

Неравенства (2.3) исключают возможность касания гипербол, отвечающих точке Штейнгауза, так как в этом случае $\varepsilon>1$ и $E>1$.

e) $0<k<t/2$; $k=0 \Rightarrow x=y$; $b-d=\varsigma(q-p)-\delta(q+p)=2k \Leftrightarrow (x-y)^2/2k^2-(x+y)^2/(t^2-2k^2)=1$:
верхняя часть правой нижней ветви; асимптота: $y=[(\sqrt{(t^2-2k^2)}-k\sqrt{2})/(\sqrt{(t^2-2k^2)}+k\sqrt{2})]x$.
При $t\sqrt{}/2>k\geq t/2$ гипербола находится во втором и четвёртом квадрантах. $k=t/2 \Rightarrow xy=-t^2/8$.
При $k<t/2$ $y=0 \Rightarrow x_0=k\sqrt{[2(t^2-2k^2)/(t^2-4k^2)]}$; $0<k<t(\sqrt{5}-1)/4 \Rightarrow x_0<t/2\ \&\ 0<y(t/2)=2k^2/(t-2k)-k+t/2$.
Вторые координаты точек пересечения гиперболы со сторонами квадрата или с их продолжениями $y=t/2$ либо $x=t/2$ являются корнями одного и того же квадратного уравнения, т.е.
$y(t/2)=tk/(t-2k)+k+t/2$, $x(t/2)=tk/(t+2k)-k+t/2$, либо $x(t/2)=t/2+tk/(t-2k)+k$, $y(t/2)=t/2-tk/(t+2k)-k$.

f) $0<K<t/\sqrt{2}$; $K=0 \Rightarrow x=0=y$; $c-a=\varsigma(q-p)+\delta(q+p)=2K \Leftrightarrow (x+y)^2/2K^2-(x-y)^2/(t^2-2K^2)=1$:
нижняя часть правой верхней ветви; асимптота: $y=[(-\sqrt{(t^2-2K^2)}+K\sqrt{2})/(\sqrt{(t^2-2K^2)}+K\sqrt{2})]x$.
При $0<K<t/2$ $y=0 \Rightarrow x_0=K\sqrt{[2(t^2-2K^2)/(t^2-4K^2)]}$; $K=t/2 \Rightarrow xy=-t^2/8$. Вершина: $x=y=K/\sqrt{2}$.
Вторые координаты точек пересечения гиперболы со сторонами квадрата или с их продолжениями $y=t/2$ либо $x=t/2$ являются корнями одного и того же квадратного уравнения, т.е.
$y(t/2)=2K[(t+2K)/(t+2K)]-t/2$, $x(t/2)=2K[(t-2K)/(t-2K)]-t/2$, либо $x(t/2)$ и $y(t/2)$ меняются местами.

П.1.7. Делимость на 7 параметров ς, δ, q, p и t задачи Штейнгауза

t	t^2	$2t^2$
0	0	0
1	1	2
2	4	1
3	2	4
4	2	4
5	4	1
6	1	2

$(\varsigma^2+\delta^2)$

$\varsigma \backslash \delta$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	4	2	2	4	1
1	1	2	5	3	3	5	2
2	4	5	1	6	6	1	5
3	2	3	6	4	4	6	3
4	2	3	6	4	4	6	3
5	4	5	1	6	6	1	4
6	1	2	5	3	3	4	2

$(\varsigma^2+\delta^2)^2$

$\varsigma \backslash \delta$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	4	4	2	1
1	1	4	4	2	2	4	4
2	2	4	1	1	1	1	4
3	4	2	1	2	2	1	2
4	4	2	1	2	2	1	2
5	2	4	1	1	1	1	4
6	1	4	4	2	2	4	4

$\varsigma^2 * \delta^2$

$\varsigma \backslash \delta$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	4	2	2	4	1
2	0	4	2	1	1	2	4
3	0	2	1	4	4	1	2
4	0	2	1	4	4	1	2
5	0	4	2	1	1	2	4
6	0	1	4	2	2	4	1

$5(\varsigma^2+\delta^2)$

$\varsigma \backslash \delta$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	5	6	3	3	6	5
1	5	3	4	1	1	4	3
2	6	4	5	2	2	5	4
3	3	1	2	6	6	2	1
4	3	1	2	6	6	2	1
5	6	4	5	2	2	5	4
6	5	3	4	1	1	4	3

$5(\varsigma^2+\delta^2)$ приведённые

$\varsigma \backslash \delta$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	-	-	-	-	-	-
1	-	-	4	1	1	4	-
2	-	4	-	2	2	-	4
3	-	1	2	-	-	2	1
4	-	1	2	-	-	2	1
5	-	4	-	2	2	-	4
6	-	-	4	1	1	4	-

$(\varsigma^2+\delta^2)^2-\varsigma^2\delta^2$ приведённые

$\varsigma \backslash \delta$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	4	4	2	1
1	1	3	-	-	-	-	3
2	2	-	6	-	-	-	-
3	4	-	-	5	5	-	-
4	4	-	-	5	5	-	-
5	2	-	6	-	-	6	-
6	1	3	-	-	-	-	3

$(\varsigma^2+\delta^2)^2-7\varsigma^2\delta^2-\varsigma^2\delta^2$

$\varsigma \backslash \delta$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	4	4	2	1
1	1	3	0	0	0	0	3
2	2	0	6	0	0	6	0
3	4	0	0	5	5	0	0
4	4	0	0	5	5	0	0
5	2	0	6	0	0	6	0
6	1	3	0	0	0	0	3

10. ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Авторская формулировка и анализ задачи

При воспроизведении русского перевода оригинального текста Штейнгауза в компьютерном варианте были сделаны следующие его модификации. Переформатирование и (по возможности) замена штрихованных и индексированных букв на соответствующие греческие. Внесение авторской сноски в текст с выделением фигурными скобками: {…}. Исправление опечаток в абзаце со сноской “1” и в абзаце за формулой (5'): «$m^2-n^2<\alpha\gamma$» и «$3x^2$» вместо «$3x^2y^2$» в стр. 2 св. с. 122. Примечания переводчика (сноски “1” и “2” вместо звёздочек) также внесены в основной текст с выделением двойными угловыми скобками: <<…>>. Изменена нумерация рисунка и формул.

Гуго Штейнгауз

ЗАДАЧИ И РАЗМЫШЛЕНИЯ

Перевод с польского
Составитель и переводчик Ю. А. ДАНИЛОВ

***Под ред.* Я. А. СМОРОДИНСКОГО**

Издательство «Мир»
Москва
1974

61
Ш88
Штейнгауз Г.
Ш88

Задачи и размышления. Пер. с польск. Сост. и перев. Ю. А. Данилов. Под ред. Я. А. Смородинского, М., «Мир», 1972.

Имя замечательного польского математика Гуго Штейнгауза хорошо известно советским читателям по переводам его популярных книг «Математический калейдоскоп» и «Сто задач». В предлагаемой книге читателя ожидают не только новые задачи и встречи с «доктором всех математических наук Сильвестром Шарадеком», но и занимательное введение в теорию вероятностей и популярные статьи о взаимосвязи математики с другими науками и ее роли в современном мире. Книга доставит удовольствие самым широким кругам читателей, интересующихся математикой.

20201–192
Ш ——————— 192–74 **51**
041(01)–74

Редакция научно-популярной и научно-фантастической литературы
Г. Штейнгауз
ЗАДАЧИ И РАЗМЫШЛЕНИЯ

Редактор *А.Г.Белевцева* **Оформление художника** *С.И.Мухина* **Иллюстрации** *Ю.А.Ващенко* **Художественный редактор** *Ю.Л.Максимов* **Технический редактор** *Н.Д.Толстякова* **Корректор** *И.П.Максимова*

Сдано в набор 22/V 1974 г. Подписано к печати 17/X 1974 г. Бум. №2 84Х108 1/32=6,25 **бум. л. 21 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 21,39 Изд. № 12/7365 Цена 1 р. 22 к. Зак. 203.**

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2
Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография N° 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли» 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

11. Квадрат. Можно ли построить квадрат с целочисленными сторонами и указать в его плоскости такую точку, чтобы расстояния от этой точки до всех 4 вершин квадрата выражались целыми числами?

{***Примечание.*** **Решение этой весьма трудной задачи мне //Штейнгаузу// не известно.**}

13. Треугольник с особыми свойствами. Существует ли треугольник с целочисленными сторонами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, у которого высота, опущенная на основание, равна основанию?

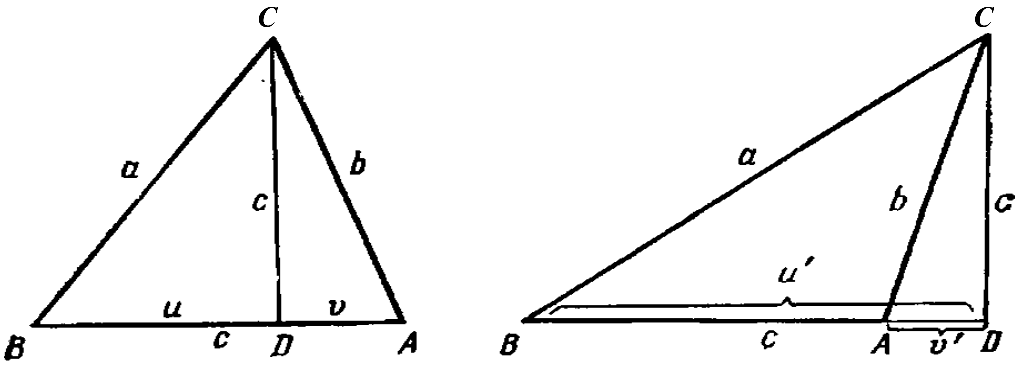

Рис. П.2.1.

13. Ответ на вопрос задачи отрицателен: треугольника с указанными в условии задачи свойствами не существует. Докажем это.

Пусть ABC – треугольник, длины сторон которого выражаются натуральными числами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (рис. П.2.1), и пусть высота $\boldsymbol{CD}$ равна основанию треугольника $\boldsymbol{BA}$. Заметим, прежде всего, что $\boldsymbol{a \neq b}$ (в противном случае должно было бы выполняться равенство $(2a)^2=5c^2$, что невозможно). Не ограничивая общности, предположим, что $\boldsymbol{a>b}$. (Заметим, что неравенство $\boldsymbol{b \leq c}$ выполняться также не может.)

Учитывая соотношения между элементами треугольника, получаем следующую систему равенств: либо

$$a^2 = c^2 + u^2, \qquad (П.2.1)$$
$$b^2 = c^2 + v^2, \qquad (П.2.2)$$
$$c = u + v, \qquad (П.2.3)$$

либо

$$a^2 = c^2 + u'^2, \qquad (П.2.1')$$
$$b^2 = c^2 + v'^2, \qquad (П.2.2')$$
$$c = u' - v', \qquad (П.2.3')$$

где $\boldsymbol{u, v, u', v'}$ – натуральные числа.

Докажем, например, что числа $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ натуральные. Поскольку $\boldsymbol{a>c}$, то $\boldsymbol{k=u^2=a^2-c^2}$ – натуральное число, а $\boldsymbol{u=(a^2-b^2+c^2)/2c}$, вообще говоря, положительное рациональное число. Представим его в виде $\boldsymbol{u=p/q}$, где $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ – натуральные числа, такие, что $\boldsymbol{(p,q)=1}$.[1]

<<[1] Принятый в теории чисел символ $(x,y)=z$ означает, что общий наибольший делитель чисел x и y равен z. Если $z=1$, то x и y взаимно простые числа. – Прим. перев. >>

Возведя в квадрат обе части выражения $\boldsymbol{u=p/q}$ и воспользовавшись тем, что число $\boldsymbol{k=u^2}$ натуральное, получим $\boldsymbol{p^2=kq^2}$, откуда следует, что $\boldsymbol{q=1}$. Но тогда $\boldsymbol{u=p}$ и $\boldsymbol{v=c-p}$ – натуральные числа. Аналогичным образом можно доказать, что числа $\boldsymbol{u'}$ и $\boldsymbol{v'}$ тоже натуральные.

Итак, решение исходной задачи сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = u^2 - v^2, \\ c = u + v \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = u'^2 - v'^2, \\ c = u' - v' \end{cases}$$

в натуральных числах $\boldsymbol{a, b, c, u, v}$, где $\boldsymbol{a > b > c}$.

Докажем[2], что все решения уравнения $\boldsymbol{a^2-b^2=u^2-v^2}$ в натуральных числах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b, u, v}$, где $\boldsymbol{a > b}$, определяются выражениями

$a=(ms+nr)/2,\ b=(ms-nr)/2,\ u=(ns+mr)/2,\ v=(ns-mr)/2,$ (П.2.4)

где m, n, r, s – натуральные числа, такие, что $(m,n)=1$, $ms>nr$, $ns>mr$, причем либо оба числа r и s четные, либо все числа m, n, r, s нечетные. Каждое решение уравнения $a^2-b^2=u^2-v^2$ в натуральных числах встречается среди чисел, определяемых выражениями (П.2.4), один и только один раз.

<< [2]Формулировка и доказательство приводимого ниже утверждения заимствованы из книги W. Sierpiński, Teoria liczb, cz. II, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1959, стр. 83-84. – Прим. перев. >>

Предположим, что a, b, u, v – натуральные числа, удовлетворяющие уравнению $a^2-b^2=u^2-v^2$. Пусть $s=(a+b,u+v)$. Тогда $a+b=ms$, $u+v=ns$, где m и n – натуральные числа, такие, что $(m,n)=1$. Подставляя полученные значения $a+b$ и $u+v$ в уравнение $(a+b)(a-b)=(u+v)(u-v)$, находим $(a-b)m=(u-v)n$. Поскольку $(m,n)=1$, то n делит $(a-b)$, а так как $a>b$, то $a-b=nr$, где r – некоторое натуральное число. Подставляя $a-b=nr$ в уравнение, преобразуем его к виду $nrm = (u-v)n$, откуда $(u-v) = mr$. Разрешая равенства $a+b= ms$, $u+v=ns$, $a-b=nr$, $u-v=mr$ относительно a, b, u и v, получаем выражения (П.2.4).

Поскольку числа u и v натуральные, то должны выполняться неравенства $ns > mr$ и $ms > nr$. Кроме того, оба числа r и s должны быть либо четными, либо нечетными. Действительно, если бы число r было нечетным, а s –четным, то из равенства $ms + nr = 2a$ следовало бы, что число n четное, а из равенства $ns + mr = 2u$ – что число m тоже четное. Одновременная четность m и n противоречит тому, что $(m,n)=1$. Если же оба числа r и s нечетные, то из равенства $ms + nr = 2a$ следует, что и числа m и n нечетные (ибо они не могут быть одновременно четными, поскольку $(m,n)=1$, и не могут быть различной четности, поскольку $ms + nr = 2a$. Таким образом, либо оба числа r и s четные, либо все числа m, n, r и s нечетные.

С другой стороны, если натуральные числа m, n, r и s, где $(m,n)=1$, обладают указанными свойствами, причем $ns > mr$ и $ms > nr$, то числа a, b, u и v, определяемые выражениями (П.2.4), как нетрудно проверить, удовлетворяют уравнению $a^2-b^2 = u^2-v^2$. Нетрудно также проверить, что каждое решение этого уравнения среди чисел, определяемых выражениями (П.2.4), встречается один и только один раз. Действительно, из формул (П.2.4) следует, что $a + b = ms$, $u + v = ns$. Эти равенства означают (поскольку $(m,n) = 1$), что $s = (a+b,u+v)$. Отсюда мы с легкостью заключаем, что числа s, m, n и r полностью определяются числами a, b, u и v. Таким образом, наше утверждение доказано.

Комбинируя выражения (П.2.4) с равенствами (П.2.1) и (П.2.3) [или (П.2.2) и (П.2.3)], получаем $m^2s^2 + n^2r^2 = 4n^2s^2 + n^2s^2 + m^2r^2$, или

$$(m^2-n^2)(s^2-r^2) = (n^2-m^2)(r^2-s^2) = 4n^2s^2, \qquad (П.2.5)$$

причем $(m,n) = 1$.

Докажем, что уравнение (П.2.5), а следовательно, и уравнение

$$(m^2-n^2)(s^2-r^2) = 4m^2r^2, \qquad (П.2.5')$$

получающееся при подстановке выражений (П.2.4) в равенства (П.2.1') и (П.2.3'), не имеет решений в натуральных числах. Не уменьшая общности, предположим, что $(r,s)=1$. (Если бы $(r,s)=d>1$, то мы могли бы положить $r=d\rho$, $s=d\sigma$, откуда $(m^2-n^2)(\sigma^2-\rho^2)=4n^2\sigma^2$, где $(\rho,\sigma)=1$).

Пусть $(m^2-n^2,4s^2)=\alpha$ при $m>n$. Тогда $m^2-n^2=\alpha\gamma$, $4s^2=\alpha\delta$, где γ и δ – натуральные числа, причем $(\gamma,\delta)=1$. Подставляя эти выражения в уравнение (П.2.5), получаем $(s^2-r^2)\alpha\gamma=n^2\alpha\delta$, или $(s^2-r^2)\gamma=n^2\delta$. Поскольку $(\gamma,\delta)=1$, то $\delta|(s^2-r^2)$ и, следовательно, $(s^2-r^2)=\beta\delta$, где β – некоторое натуральное число. Таким образом, $\beta\gamma\delta=n^2\delta$, или, окончательно, $n^2=\beta\gamma$. С другой стороны, если $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – натуральные числа и $m^2-n^2=\alpha\gamma$, $s^2-r^2=\beta\delta$, $n^2=\beta\gamma$, $4s^2=\alpha\delta$, то $(m^2-n^2)(s^2-r^2)=4n^2s^2$.

Поскольку $(m^2-n^2,n^2)=1$ (это следует из того, что $(m,n)=1$), то $\gamma = 1$, а из равенств $(s^2-r^2)=\beta\delta$, $4s^2=\alpha\delta$ и $4s^2-4(s^2-r^2)=4r^2$ мы заключаем, что $\delta|4r^2$ и $\delta|4s^2$. Однако поскольку $(r,s) =1$, то $(r^2,s^2)=1$ и, следовательно, $\delta|4$. Таким образом, либо $\delta = 4$, либо $\delta = 2$, либо $\delta = 1$.

Если $\delta=4$, то $m^2-n^2=s^2$, $s^2-r^2=4n^2$, поэтому $s^2+n^2=m^2$, $r^2+(2n)^2=s^2$. Последнее из равенств (поскольку $(r,s)=1$) означает, что существуют натуральные числа p и q, такие, что $n=pq$, $s=p^2+q^2$, $(p,q)=1$, Следовательно, $s^2 + n^2=p^4 + 3p^2q^2 + q^4 = m^2$. Как доказал Г.Ч.Поклингтон {**H.C.Pocklington, Proc. Cambridge Phil. Soc., 17, 108 (1914)**}, уравнение $x^4+kx^2y^2+y^4=z^2$ не имеет решений в натуральных числах x, y, z при некоторых значениях k, в том числе при $k=3$.

Если $\delta=2$, то $m^2-n^2=2s^2$, $s^2-r^2=2n^2$, или $n^2+2s^2=m^2$, $r^2+2n^2=s^2$. Умножив обе части первого равенства на r^2, а второго – на m^2, получим $n^2r^2+2s^2r^2=m^2r^2$, $m^2r^2+2m^2n^2 =m^2s^2$, откуда $2m^2n^2+2r^2s^2 = m^2s^2 - n^2r^2$. Положим $x = mn$, $y = rs$, $f = (ms+nr)/2$, $g=(ms-nr)/2$. Поскольку число $m^2s^2-n^2r^2$ четно, то числа ms и nr либо оба четны, либо оба нечетны. Отсюда следует, что f и g – натуральные числа. Нетрудно проверить, что $x^2 + y^2 = 2fg$, $xy = f^2 + g^2$. Следовательно, $x^4 + 3x^2y^2 + y^4 = (f^2 + g^2)^2$. Итак, мы снова пришли к уравнению Поклингтона, не имеющему решений в натуральных числах.

Наконец, если $\delta=1$, то $m^2-n^2=4s^2$, $s^2-r^2=n^2$. Из уравнения Пифагора $n^2+(2s)^2=m^2$ (учитывая, что $(m,n)=1$) мы заключаем, что s – четное число. Из другого же уравнения Пифагора $n^2+r^2=s^2$ – поскольку $(r,s)=1$ – следует, что s – нечетное число. Таким образом, система уравнений { $n^2+(2s)^2=m^2$ & $n^2+r^2=s^2$ } противоречива.

Аналогичным образом можно доказать, что случай $m < n$, так же как и уравнение (5'), приводит к противоречию.

Таким образом, треугольника с целочисленными сторонами, у которого высота, опущенная на основание, была бы равна основанию, не существует.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Обобщение задачи 13 до частного случая задачи 11

Штейнгаузу при решении задачи 13 в полной мере удалось соблюсти известное правило, приписываемое Дж.И.Литтлвудом [13] А.С.Безиковичу, которому удовлетворяют оригинальные тексты: *работы первооткрывателей неуклюжи*. "Посильную помощь" в этом оказал ему и переводчик (опечатки издания 1972 года исправлены в приложении 2). Само доказательство содержит "лишнюю страницу текста" с подробным решением уравнения $a^2-b^2=u^2-v^2$, которое включено в изложение, видимо, "*для полноты*" [13]: оно разобрано у Серпинского, на которого и даётся ссылка. Заключительную часть доказательства – исследование уравнения $(m^2–n^2)(s^2–r^2)=4m^2r^2$ – также возможно модернизировать, по крайней мере, в двух из трёх его пунктов. Это и выявит связь задач 11 и 13 между собой, которую, как это ни удивительно, Штейнгауз никак не отметил, хотя и поместил эти задачи рядом друг с другом. Итак, ...

Треугольник с особыми свойствами. Всегда ли существует ли треугольник (см. рис. П.3.1) с целочисленными нечётными боковыми сторонами a, b и чётно-чётным основанием t, у которого высота c, опущенная на основание, в h раз больше самого основания, где h – целое или полуцелое, а $НОД(a;b;t)=1$? Ответ на данный вопрос отрицателен: треугольника с указанными в условии задачи свойствами может и не существовать при некоторых h. Докажем это, по возможности следуя тексту самого Штейнгауза.

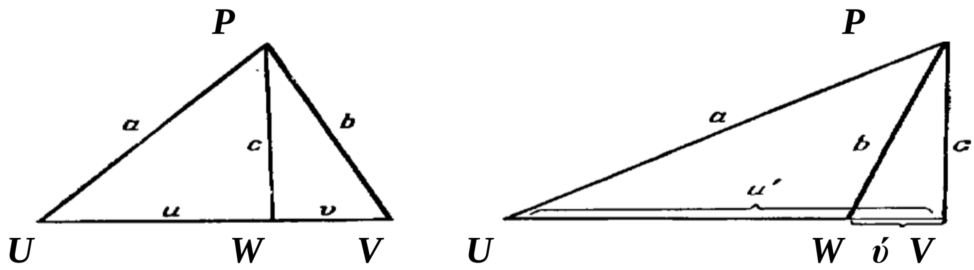

Рис. П.3.1. Остроугольный и тупоугольный треугольники с условием $UV=t=h*c=h*PW$; $h=0.5$.

Пусть UPV – треугольник, длины сторон которого выражаются натуральными числами a, b, t, и пусть c – высота PW в h раз больше основания треугольника, $UV=t=u\pm v$ (на рис. П.3.1 $h=1/2$). Заметим, прежде всего, что $a\neq b$ (в противном случае было бы выполнено равенство $(2a)^2=[(2h)^2+1]t^2$, что невозможно). Не ограничивая общности, предположим, что $a>b$ и, следовательно, $u>v$. (Заметим, что неравенство $b\leq c$ выполняться также не может.)

Вновь поставленная задача следующим образом связана с исходной проблемой Штейнгауза. Треугольник UPV – это один из четырёх треугольников APB, CPD, APD и BPC. Если $P=(x;y)=(kt/2;y)$, то высоты PW к стороне длины t в треугольниках CPB и DPA равны $th_{\pm}=(k\pm1)t/2$; соответственно u и u' равны $t/2+y$, а v и v' равны $|t/2–y|$; все они нечётны. Если $P=(x;y)=(x;kt/2)$, то высоты PW к стороне длины t в треугольниках CPD и APB равны $th_{\pm}=(k\pm1)t/2$; соответственно u и u' равны $t/2+x$, а v и v' равны $x–t/2$; все они нечётны, а учитывая делимость t на 12, в обоих случаях получаем некратность 3 всех u, v, u' и v'.

Значения k, определяющие величины $h_{\pm}$, таковы: случай $k=0$ (для $P=(x;0)$) разобран в П.1.4, случаи $k=1$ и $k=3$ разобраны в пп. 5.B и 5.C соответственно. Оставшиеся к рассмотрению значения параметра – $k=2, 4, 5, \dots$.

Учтя соотношения между элементами треугольника, получаем (для ΔAPB, например) следующую систему равенств:

$$\begin{array}{lll} & a^2 = c^2+u^2, & a^2= c^2+(u')^2, \\ \text{либо} & b^2= c^2+v^2, \quad \text{либо} & b^2= c^2+(v')^2, \\ & c =(u+v)h, & c =(u'– v')h, \end{array} \qquad (П.3.1)$$

где u, v, u', v' – нечётные натуральные числа а треугольник APB – либо остроугольный, либо тупоугольный.

Если данная задача о треугольнике рассматривается отдельно от исходной, то докажем, например, что вновь появившиеся числа u и v натуральные. Поскольку $a>c$, то $\kappa=u^2=a^2-c^2$ – натуральное число, а $u=(a^2-b^2+t^2)/2t$, вообще говоря, положительное рациональное число. Представим его в виде $u=p/q$, где p и q – натуральные числа, такие, что $НОД(p,q)=1$. Возведя в квадрат обе части выражения $u=p/q$ и воспользовавшись тем, что число $\kappa=u^2$ натуральное, получим $p^2 = \kappa q^2$, откуда следует, что $q=1$. Но тогда $u=p$ и $v=t-p$ – натуральные числа. Аналогичным образом доказывается, что числа u' и v' тоже натуральные.

Итак, при заданном h решение исходной задачи сводится к решению в натуральных числах a, b, c, u, v, где $a>b>c$, системы уравнений

$\{ a^2-b^2=u^2-v^2$ & $c = (u + v)h \}$ или $\{ a^2-b^2=u'^2-v'^2$ & $c = (u' - v')h \}$.

Согласно П.1.2, все решения уравнения $a^2-b^2=u^2-v^2$ в нечётных и не делящихся на 3 натуральных числах $a, b, u, v,$ где $a>b,$ определяются выражениями, аналогичными (2.3): $a=ms+nr,$ $b=ms-nr,$ $u=ns+mr,$ $v=ns-mr,$ где $НОД((u-v);(a-b))=2r,$ $НОД((u+v);(a+b))=2s,$ $НОД((a+b);(u-v))=2m,$ $НОД((a-b);(u+v))=2n$. Здесь m, n, r, s – натуральные числа, такие, что $ms>nr,$ $ns>mr,$ причем ровно один из параметров чётен и ровно один из них кратен 3. Каждое решение уравнения $a^2-b^2=u^2-v^2$ в натуральных числах встречается среди чисел, определяемых выражениями (2.3) один и ровно один раз. Здесь $НОД(m;n)=1=НОД(r;s)$. Действительно, взаимная простота m и n получается при решении уравнений П.3.1 как и П.2.1 автоматически. Пусть далее s и r кратны нечётному простому π. Тогда вместе с a, b, u, v кратным π. оказывается и $(u\pm v)=t$. Таким образом, одна из троек $(t, a, d), (t, a, b), (t, c, d), (t, b, c)$ оказывается не взаимно простой в противоречие с П.1.0. Оба возможных варианта упорядочивания чисел a, b, u, v: $a>b>u>v$ и $a>u>b>v$ приводят к неравенствам $m>n$ и $s>r$.

Комбинируя полученные для a, b, u, v выражения с равенствами П.3.1 для остроугольного (либо для тупоугольного) треугольника $UPV,$ получаем

$$\begin{aligned} &m^2s^2+n^2r^2=4h^2n^2s^2+n^2s^2+m^2r^2, \text{ или } (m^2-n^2)(s^2-r^2)\equiv(n^2-m^2)(r^2-s^2)=4h^2n^2s^2 \\ &m^2s^2+n^2r^2=4h^2m^2r^2+n^2s^2+m^2r^2, \text{ или } (m^2-n^2)(s^2-r^2)\equiv(n^2-m^2)(r^2-s^2)=4h^2m^2r^2 \end{aligned} \qquad (П.3.2)$$

Попарная взаимная простота «греко-латинских» пар преобразует соотношения (П.3.2) к следующим системам уравнений (П.3.3), в которых $K_1K_2=(k\pm1)^2\equiv4h^2$, то есть правые части уравнений (П.3.2) надо разложить на два натуральных сомножителя всеми возможными способами.

$$\begin{cases} m^2-n^2=K_1s^2 \\ s^2-r^2=K_2n^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} m^2-n^2=K_1r^2 \\ s^2-r^2=K_2m^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} \mu^2-\nu^2=K_1\sigma^2 \\ \sigma^2-\rho^2=K_2\nu^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} \mu^2-\nu^2=K_1\rho^2 \\ \sigma^2-\rho^2=K_2\mu^2 \end{cases}. \qquad (П.3.3)$$

Здесь греческая нотация использована для треугольников ΔCPB, и ΔCPD. Данные системы аналогичны рассмотренной в пункте **5**.В. Более того, дополнительные к ним условия также имеют место: либо ns (в случае остроугольного треугольника), либо mr (в случае тупоугольного треугольника) в них кратны 6.

Предположим <u>**дополнительно**</u>, что $K_1K_2=2^{\varphi}$, либо $K_1K_2=3^{\psi}$. В этом случае, пользуясь единственностью как кратных двум, так и кратных трём чисел среди $m, n, r, s,$ от систем (П.3.3) можно перейти к системам (П.3.4) в которых $\varphi>1$:

$$\begin{cases} m^2-n^2=2^{2\varphi}s^2 \\ s^2-r^2=n^2 \end{cases};\quad \begin{cases} m^2-n^2=2^{2\varphi}r^2 \\ s^2-r^2=m^2 \end{cases};\quad \begin{cases} m^2-n^2=s^2 \\ s^2-r^2=2^{2\varphi}n^2 \end{cases};\quad \begin{cases} m^2-n^2=r^2 \\ s^2-r^2=2^{2\varphi}m^2 \end{cases} \qquad (П.3.4)$$

и к таким же, но с заменой в коэффициентах их правых частей $2^{2\varphi}$ на $3^{2\psi}$, где $\psi\geq 1$.

$$\begin{cases} m^2-n^2=3^{2\psi}s^2 \\ s^2-r^2=n^2 \end{cases};\quad \begin{cases} m^2-n^2=3^{2\psi}r^2 \\ s^2-r^2=m^2 \end{cases};\quad \begin{cases} m^2-n^2=s^2 \\ s^2-r^2=3^{2\psi}n^2 \end{cases};\quad \begin{cases} m^2-n^2=r^2 \\ s^2-r^2=3^{2\psi}m^2. \end{cases} \qquad (П.3.5)$$

Тройки, образующие системы (П.3.3-5), являются основными пифагоровыми, поэтому длины гипотенуз соответствующих прямоугольных треугольников не могут делиться ни на два, ни на три. Отсюда следует, что первые и четвёртые системы как в (П.3.4), так и в (П.3.5) противоречивы. Вторая и третья системы переводятся друг в друга подстановкой $((m,s)(n,r))$ и заменой $2^{2\varphi}$ на $3^{2\psi}$ и наоборот. Таким образом, исследованию подлежит система, аналогичная уже рассмотренной в пункте 5.В: { $\varsigma^2-\delta^2=\gamma^2p^2$ & $q^2-\varsigma^2=p^2$ }. Здесь γ – это либо 2^{φ}, либо 3^{ψ}. Выразив переменные в обоих её уравнениях через параметры Пифагора, имеем следующее:

$$\begin{matrix} \gamma p=2MN,\ \varsigma=M^2+N^2,\ \delta=|M^2-N^2|,\ 6|MN,\ НОД(M;N)=1 \\ p=2\mu\nu,\quad \varsigma=\mu^2-\nu^2,\ q=\mu^2+\nu^2,\ 6|\mu\nu,\ НОД(\mu;\nu)=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mu^2=\nu^2+M^2+N^2 \Rightarrow (\text{П.1.4}) \Rightarrow 6|\nu=2l, \\ M=(l^2+m^2)/n-n,\ N=2m,\ \mu=(l^2+m^2)/n+n. \end{matrix} \qquad (П.3.6)$$

Здесь μ не делится ни на 2, ни на 3, а следовательно, на 2 и на 3 делятся ν и l. Учтём теперь, что сумма (l^2+m^2) не может быть нечётной, ибо в этом случае нечётным обязано быть и n, а потому M и μ станут чётными в противоречие с (П.3.6). Так же в противоречие с (П.3.6) все числа μ, ν, M, N будут иметь общий множитель Δ, коль скоро $\Delta=НОД(l;m)>0$. Воспользуемся равенством $2\mu\nu=p=2MN/\gamma$ и получим, что $n^2=(l^2+m^2)(m-\gamma l)/(m+\gamma l)$. Отсюда следует, что $\mu=2m\sqrt{[(l^2+m^2)/(m^2-\gamma^2l^2)]}$, а $M=2l\gamma\sqrt{[(l^2+m^2)/(m^2-\gamma^2l^2)]}$. Итак, l и m взаимно просты, а (l^2+m^2) обязано быть чётным, что требует чётности m, что в совокупности с делимостью l на 6 приводит к противоречию, доказывающему неразрешимость исследуемой системы и доказательству исходного утверждения:

Теорема 6. *Не существует треугольника с целочисленными боковыми сторонами* a, b *вида* $6k\pm 1$ *и основанием* t*, кратным* 12*, высота которого* c*, опущенная на основание, в* h *раз больше самого основания, где* h *– целое или полуцелое, а* $НОД(a;b;t)=1$*, если* $4h^2=2^{2\varphi}$ *либо* $4h^2=3^{2\psi}$.

В применении к задаче поиска гипотетических точек Штейнгауза это означает, что таких точек нет как на прямых $x=\pm kt/2$*, так и на прямых* $y=\pm kt/2$*, при условии* $k\pm 1=2^{\varphi}$ *либо* $k\pm 1=3^{\psi}$*, а исходный квадрат имеет вершинами точки* $(\pm t/2;\pm t/2)$.

Замечание. Может показаться, что доказательство последней теоремы справедливо для всех h, а не только для степеней двойки и тройки: при анализе делимости выражений из (П.3.6) не использовался конкретный вид γ, и он действительно сохраняет силу при всех h. Но для аналогичного анализа систем общего вида (П.3.3) потребуется введение двух параметров, и, как следствие, работа с символами Лежандра, Якоби и Кронекера…

На этом и заканчивалась работа в математическом проекте МКШЮ - 4–15.