



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 93 за 2022 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Александров,
Л.В. Дородницын, Д.Р. Колюхин

Исследование моделей
эволюции турбулентного
поля скоростей на основе
анализа автокорреляций

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Александров А.В., Дородницын Л.В., Колюхин Д.Р. Исследование моделей эволюции турбулентного поля скоростей на основе анализа автокорреляций // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 93. 18 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2022-93>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-93>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.В. Александров, Л.В. Дородницын, Д.Р. Колюхин

**Исследование моделей эволюции
турбулентного поля скоростей
на основе анализа автокорреляций**

Москва — 2022

Александров А.В., Дородницын Л.В., Колюхин Д.Р.

Исследование моделей эволюции турбулентного поля скоростей на основе анализа автокорреляций

В работе исследуется ряд способов задания временной эволюции в алгоритмах генерации искусственных турбулентных полей, основанных на рандомизированном спектральном методе (РСМ). Анализируются автокорреляционные функции, отвечающие рассматриваемым моделям. Теоретические результаты сравниваются с данными, полученными на основе тестового расчета турбулентности в кубе.

Ключевые слова: синтетическая турбулентность, рандомизированный спектральный метод, автокорреляционная функция

Alexandrov Anatoly, Dorodnicyn Ludwig, Kolyukhin Dmitry

Study of the turbulent velocity field evolutionary models based on the autocorrelation analysis

This paper deals with a set of time-evolution formulations in algorithms for artificial turbulent field generation based on the Randomized Spectral Method (RSM). We analyze the autocorrelation functions associated with the models considered. The theoretical results are compared to the data from a test computation of turbulence in the cube.

Key words: synthetic turbulence, Randomized Spectral Method, autocorrelation function

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-51-80001 БРИКС_Т) и проекта ИНГГ СО РАН АААА-А19-119102490039-7.

Оглавление

Введение	3
Автокорреляции случайного поля скоростей с различными типами эволюции по времени	4
Модель переноса турбулентного поля («замороженная турбулентность» Тейлора).....	6
Модели турбулентной диффузии	7
Модель переноса и турбулентной диффузии	12
Вычислительные тесты.....	14
Заключение.....	17

Введение

Искусственно сгенерированные (синтетические) турбулентные поля широко применяются в прикладных задачах гидро- и газовой динамики. На современном этапе развития вычислительной техники использование таких полей остается весьма актуальным, поскольку это позволяет многократно сократить потребление суперкомпьютерных ресурсов. Основное применение синтетических полей связано с заданием турбулентного потока на входной границе зоны вихреразрешающего моделирования (LES) [1]. Входящее турбулентное поле должно быть существенно нестационарным и соответствовать реальной физике.

Среди методов генерации синтетических турбулентных полей наиболее популярными в инженерных расчетах являются спектральные алгоритмы. Их разработка началась еще в 70-х годах прошлого века с работы Крайчнана [2]. Спектральный подход получил дальнейшее развитие в многочисленных публикациях: упомянем [3, 4]. Согласно спектральным методам пульсационное поле скоростей представляется в виде линейной комбинации гармоник Фурье с параметрами, задаваемыми детерминированными или стохастическими способами.

В настоящей работе используется полностью стохастический рандомизированный спектральный метод (PCM) генерации пространственных гармоник [5, 6]. Данный метод генерации позволяет строить поля с широким набором заранее заданных характеристик. Так, в изотропном случае PCM позволяет корректно воспроизводить заданный энергетический спектр, а в анизотропном случае – наперёд заданный тензор рейнольдсовых напряжений. Метод также обеспечивает несжимаемость (бездивергентность) поля скоростей. Валидация PCM выполнена в предыдущих работах авторов [7, 8].

Переменное поле скоростей, задаваемое на входной границе, должно подчиняться прежде всего заданным статистическим закономерностям. Ключевую роль здесь играют корреляционные характеристики. В настоящей работе рассматриваются различные варианты временных корреляций скоростей, а именно, исследуется связь между способами задания временной эволюции и корреляционными свойствами получаемых моделей.

Среди способов задания нестационарных граничных условий можно выделить два основных направления. Первый подход основан на генерации новых случайных величин на очередном шаге по времени с последующим применением алгоритмов временной фильтрации [9, 10]. Второй подход, который чаще применяется в спектральных методах, подразумевает детерминированную эволюцию по времени [3, 4] с использованием дополнительных стохастических параметров, сгенерированных еще в ходе задания начальных условий. Мы будем действовать по этому принципу в данной работе.

Широкий набор вариантов эволюции турбулентного поля по времени представлен в [11]. Встает вопрос о том, какая же модель является наиболее правильной, то есть адекватной физическому процессу турбулентного перемешивания. В настоящей работе проводится подробный анализ автокорреляцион-

ных функций, которые следуют из моделей эволюции поля скоростей [11, 12]. Теоретические результаты сравниваются с LES-расчетом эволюции начального поля, сгенерированного с помощью РСМ в кубической области.

Автокорреляции случайного поля скоростей с различными типами эволюции по времени

В соответствии с рандомизированным спектральным методом однородное изотропное случайное поле имеет вид

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \mathbf{u}^n(\mathbf{x}, t).$$

Здесь σ^2 – средняя кинетическая энергия турбулентности,

$$\mathbf{u}^n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}^n) [\boldsymbol{\xi}^n \sin(k^n(\boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x}) - \Omega^n t) + \boldsymbol{\eta}^n \cos(k^n(\boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x}) - \Omega^n t)] \quad (1)$$

– гармоника со случайными параметрами $k^n, \boldsymbol{\omega}^n, \boldsymbol{\xi}^n, \boldsymbol{\eta}^n, \Omega^n$. Они таковы:

k^n – модуль волнового вектора (волновое число), плотность распределения которого пропорциональна энергетическому спектру $E(k)$;

$\boldsymbol{\omega}^n$ – направление волнового вектора \mathbf{k}^n : вектор, изотропно распределенный по единичной сфере; $\mathbf{k}^n = k^n \boldsymbol{\omega}^n$;

$\boldsymbol{\xi}^n$ и $\boldsymbol{\eta}^n$ – случайные векторы, имеющие трехмерное стандартное нормальное распределение $N(0,1)$.

Матрица $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega})$ с элементами

$$Q_{ij}(\boldsymbol{\omega}) = \delta_{ij} - \omega_i \omega_j$$

– ортогональный проектор на плоскость, перпендикулярную направлению $\boldsymbol{\omega}$, – делает поле (1) несжимаемым.

Энергетическая спектральная плотность удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^\infty E(k) dk = \sigma^2,$$

что будет необходимо прежде всего для корректности предстоящего анализа.

Зависимость от времени в гармонике (1) связана с частотой Ω^n , для задания которой мы рассмотрим различные варианты. В самом общем виде Ω^n состоит из конвективного и диффузионного слагаемых:

$$\Omega^n = (k^n \boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{U}) + \frac{c^n}{T(k^n)}. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{U} – вектор скорости внешнего потока; c^n – случайная величина, распределенная с плотностью $f(c)$ с нулевым средним; $T(k)$ – время турбулентной (тейлоровской) релаксации, которое может различаться на разных масштабах. Таким образом, первый член (2) описывает детерминированный перенос заданного случайного пространственного поля. Второй член является стохастиче-

ским, однако нормировочный параметр случайной величины зависит, в общем случае, от ранее сгенерированного волнового числа.

Будем исследовать тензор ковариаций скоростей

$$\langle u'_i(\mathbf{x}, t) u'_j(\mathbf{x}, t + \tau) \rangle,$$

где угловые скобки обозначают вероятностное осреднение, и вытекающую из этого тензора корреляционную матрицу

$$R_{ij}(\tau; \mathbf{x}, t) = \frac{\langle u'_i(\mathbf{x}, t) u'_j(\mathbf{x}, t + \tau) \rangle}{[\langle u'_i(\mathbf{x}, t)^2 \rangle \langle u'_j(\mathbf{x}, t + \tau)^2 \rangle]^{1/2}}.$$

Очевидно, что для гармоник (1) корреляции слагаемых с различными индексами равны нулю в силу независимости случайных величин. Задача сводится к нахождению ковариационного тензора

$$\langle u_i^n(\mathbf{x}, t) u_j^n(\mathbf{x}, t + \tau) \rangle.$$

Следующий важный факт: в нашем случае (1) ковариационный тензор не зависит от пространства \mathbf{x} и инвариантен относительно сдвига времени t . Единственный параметр, определяющий временные корреляции, – это интервал τ . Покажем это:

$$\begin{aligned} \langle u_i^n(\mathbf{x}, t) u_j^n(\mathbf{x}, t + \tau) \rangle &= \\ &= \langle Q_{il}(\boldsymbol{\omega}^n) Q_{jm}(\boldsymbol{\omega}^n) \xi_l^n \xi_m^n \sin(k^n(\boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x}) - \Omega^n t) \sin(k^n(\boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x}) - \\ &\quad - \Omega^n(t + \tau)) \rangle + \\ &+ \langle Q_{il}(\boldsymbol{\omega}^n) Q_{jm}(\boldsymbol{\omega}^n) \eta_l^n \eta_m^n \cos(k^n(\boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x}) - \Omega^n t) \cos(k^n(\boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x}) - \\ &\quad - \Omega^n(t + \tau)) \rangle. \end{aligned}$$

Дальнейшие упрощения связаны со свойствами случайных величин ξ^n и η^n , которые не зависят от остальных параметров и удовлетворяют соотношениям:

$$\langle \xi_l^n \eta_m^n \rangle = 0, \quad \langle \xi_l^n \xi_m^n \rangle = \langle \eta_l^n \eta_m^n \rangle = Y_{lm}.$$

Первой формулой мы воспользовались выше, не выписывая «смешанных» слагаемых. Во втором соотношении в изотропном случае $Y_{lm} = \delta_{lm}$. Введем матрицу

$$X_{ij}(\boldsymbol{\omega}^n) = Q_{il}(\boldsymbol{\omega}^n) Q_{jm}(\boldsymbol{\omega}^n) Y_{lm}$$

и перепишем выражение

$$\begin{aligned} \langle u_i^n(\mathbf{x}, t) u_j^n(\mathbf{x}, t + \tau) \rangle &= \\ &= \langle X_{ij}(\boldsymbol{\omega}^n) [\sin(k^n(\boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x}) - \Omega^n t) \sin(k^n(\boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x}) - \Omega^n(t + \tau)) + \\ &\quad + \cos(k^n(\boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x}) - \Omega^n t) \cos(k^n(\boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x}) - \Omega^n(t + \tau))] \rangle. \end{aligned}$$

Правая часть приобретает компактный вид благодаря формуле косинуса разности. Итак,

$$\langle u_i^n(\mathbf{x}, t) u_j^n(\mathbf{x}, t + \tau) \rangle = \langle X_{ij}(\boldsymbol{\omega}^n) \cos(\Omega^n \tau) \rangle. \quad (3)$$

В дальнейшем нас прежде всего будет интересовать автокорреляция продольных скоростей при $\mathbf{x} = 0$, т.е. ковариация

$$\langle u_x^n(t) u_x^n(t + \tau) \rangle$$

и соответствующая корреляция

$$R(\tau) = \frac{\langle u_x^n(t)u_x^n(t+\tau) \rangle}{\langle u_x^n(t)^2 \rangle}, \quad \tau \geq 0.$$

Нижними индексами x, y, z обозначаются проекции векторов на соответствующие оси; одинаковый пространственный аргумент впредь будем опускать.

Внешний поток \mathbf{U} преимущественно будем считать направленным вдоль оси x :

$$\mathbf{U} = (U, 0, 0).$$

Функция автокорреляции $R(\tau)$ при $\tau \in \mathbb{R}$ является чётной и притом гладкой (дважды дифференцируемой), из соображений физической корректности. Отсюда вытекает требование

$$R'(0) = 0.$$

Важными характеристиками турбулентности считаются тейлоровский масштаб времени τ_T , определяемый по формуле

$$\tau_T^2 = \frac{-2}{R''(0)}, \quad (4)$$

и интегральный масштаб времени

$$\tau_I = \int_0^\infty R(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Модель переноса турбулентного поля («замороженная турбулентность» Тейлора)

В предположении Тейлора [13], конвекция турбулентных вихрей влияет на эволюцию поля значительно сильнее, чем их диффузия. Пусть заданное в начальный момент поле скоростей (1) движется со скоростью \mathbf{U} , не меняя формы:

$$\mathbf{u}^n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}^n) [\boldsymbol{\xi}^n \sin(k^n \boldsymbol{\omega}^n \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{U}t)) + \boldsymbol{\eta}^n \cos(k^n \boldsymbol{\omega}^n \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{U}t))].$$

Ковариации по времени равносильны пространственным ковариациям

$$\langle u_i^n(\mathbf{x}, t) u_j^n(\mathbf{x}, t + \tau) \rangle = \langle u_i^n(\mathbf{x}, t) u_j^n(\mathbf{x} + \mathbf{U}t, t) \rangle.$$

Остановимся на случае ковариации продольных скоростей для потока, направленного по оси x :

$$\langle u_x^n(0) u_x^n(\tau) \rangle = \langle \left((1 - 2\omega_x^2 + \omega_x^4) \xi_x^2 + \omega_x^2 \omega_y^2 \xi_y^2 + \omega_x^2 \omega_z^2 \xi_z^2 \right)^n \cos(Uk_n \omega_x^n \tau) \rangle.$$

Подставляя моменты случайной величины $\boldsymbol{\xi}^n$, упрощаем выражение:

$$\begin{aligned} (1 - 2\omega_x^2 + \omega_x^4) \langle \xi_x^2 \rangle + \omega_x^2 \omega_y^2 \langle \xi_y^2 \rangle + \omega_x^2 \omega_z^2 \langle \xi_z^2 \rangle &= 1 - 2\omega_x^2 + \omega_x^2 (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) = \\ &= 1 - \omega_x^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\langle u_x^n(0) u_x^n(\tau) \rangle = \langle (1 - \omega_x^{n^2}) \cos(Uk_n \omega_x^n \tau) \rangle.$$

Запишем математические ожидания в форме соответствующих интегралов. Учитываем, что при изотропном распределении ω^n по сфере компонента ω_x^n распределена равномерно на $[-1, 1]$. Итак,

$$\begin{aligned} \langle u_x^n(t)u_x^n(t + \tau) \rangle &= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty E(k)dk \int_{-1}^1 (1 - \omega^2) \cos(Uk\omega\tau) \frac{d\omega}{2} = \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty E(k)\Phi(k\tau U)dk = G(\tau U), \quad \Phi(\eta) = 2 \left(\frac{\sin \eta}{\eta^3} - \frac{\cos \eta}{\eta^2} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Эта величина совпадает с пространственной продольной ковариацией на расстоянии $r = \tau U$.

Корреляционная функция вычисляется по формулам:

$$R_L(r) = \frac{G(r)}{G(0)}, \quad G(0) = \Phi(0) = \frac{2}{3}.$$

Убеждаемся в выполнении условия физической корректности $R'_L(0) = 0$. По правилам дифференцирования интеграла

$$G'(r) = \int_0^\infty k E(k)\Phi'(kr)dk, \quad G'(0) = \Phi'(0) \int_0^\infty k E(k)dk.$$

Правомерность перехода ко второй формуле следует из аналитичности функции $\Phi(\eta)$ в нуле и ее четности.

Для нахождения тейлоровского времени (или длины) требуется вычислить $R''_L(r = 0)$. Итак,

$$G''(r) = \int_0^\infty k^2 E(k)\Phi''(kr)dk, \quad G''(0) = \Phi''(0) \int_0^\infty k^2 E(k)dk.$$

Вторая формула верна, поскольку выкладки дают общее выражение и конечное значение функции в нуле:

$$\Phi''(\eta) = 24 \left(\frac{\sin \eta}{\eta^5} - \frac{\cos \eta}{\eta^4} \right) - \frac{10}{\eta^3} \sin \eta + \frac{2}{\eta^2} \cos \eta, \quad \Phi''(0) = -\frac{2}{15}.$$

Отсюда, привлекая формулу (4), получаем:

$$R''(0) = -\frac{1}{5\sigma^2} \int_0^\infty k^2 E(k)dk = -\frac{\varepsilon}{10\nu\sigma^2}, \quad r_T^2 = \frac{20\nu\sigma^2}{\varepsilon}, \quad \tau_T = r_T/U.$$

Интегральный масштаб турбулентности может быть вычислен по общей формуле (5).

Замечание. Во всех встречавшихся нам выражениях функция $E(k)$ стоит под интегралом и ни разу не подвергается дифференцированию либо делению на нее. Поэтому можно задавать ее на конечном интервале $k \in [k_{\min}, k_{\max}]$, дополняя нулем, либо менять пределы интегрирования.

Модели турбулентной диффузии

Будем по-прежнему использовать гармоники вида (1):

$$\mathbf{u}^n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\omega^n) [\boldsymbol{\xi}^n \sin(k^n(\omega^n \cdot \mathbf{x}) - \Omega^n t) + \boldsymbol{\eta}^n \cos(k^n(\omega^n \cdot \mathbf{x}) - \Omega^n t)],$$

но теперь определяемая по (2) частота Ω^n является случайной с нулевым средним и задается формулой

$$\Omega^n = \frac{c^n}{T(k^n)}.$$

Остановимся на двух вариантах задания зависимости времени турбулентной релаксации $T(k)$ от волнового числа. Первый случай описывает диффузию, однородную по масштабу:

$$\text{А) } T(k) = \tau_0 = \text{const.}$$

Второй случай соответствует закону подобия Колмогорова:

$$\text{Б) } T(k) = \gamma \varepsilon^{1/3} k^{2/3}.$$

Ряд способов задания случайных величин для генерации поля приводились ранее в [11], но будут также предложены оригинальные варианты.

Рассмотрим ковариацию гармоник, для которой выражение (3), благодаря независимости случайной величины Ω^n и направления $\boldsymbol{\omega}^n$, приобретает вид

$$\langle u_i^n(0) u_j^n(\tau) \rangle = \langle X_{ij}(\boldsymbol{\omega}^n) \rangle \langle \cos(\Omega^n \tau) \rangle.$$

От времени зависит только второй сомножитель. Автокорреляция $R(\tau)$ обладает свойством $R(0) = 1$ и потому равна

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \langle \cos(\Omega^n \tau) \rangle = \langle \cos(c^n \tau / T(k^n)) \rangle = \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty E(k) dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(c) \cos(c\tau / T(k)) dc. \end{aligned}$$

Перепишем формулу, введя обозначение для второго интеграла:

$$R(\tau) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty E(k) F\left(\frac{\tau}{T(k)}\right) dk, \quad F(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(c) \cos(c\eta) dc. \quad (7)$$

Частный случай постоянного времени релаксации (А) упрощает выражения (7). Из первого интеграла выносится множитель F , и отсюда

$$R(\tau) = F\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(c) \cos\left(c \frac{\tau}{\tau_0}\right) dc. \quad (7A)$$

Требование физической корректности модели $R'(0) = 0$ сводится к следующему:

$$R'(\tau) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty \frac{E(k)}{T(k)} F'\left(\frac{\tau}{T(k)}\right) dk, \quad R'(0) = \frac{1}{\sigma^2} F'(0) \int_0^\infty \frac{E(k)}{T(k)} dk. \quad (8)$$

Данное требование равносильно, при существовании интегралов, условию $F'(0) = 0$.

Для нахождения тейлоровского масштаба, по аналогии с (8), вычисляем

$$\begin{aligned} R''(\tau) &= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty \frac{E(k)}{T(k)^2} F''\left(\frac{\tau}{T(k)}\right) dk, \\ R''(0) &= \frac{1}{\sigma^2} F''(0) \int_0^\infty \frac{E(k)}{T(k)^2} dk. \end{aligned} \quad (9)$$

При $T(k) = \tau_0$ получаем выражения

$$R''(0) = \frac{1}{\tau_0^2} F''(0), \quad \tau_T^2 = \frac{-2\tau_0^2}{F''(0)}. \quad (9A)$$

Отметим важное свойство тейлоровского масштаба турбулентности. Из второй формулы (9), с учетом (4), следует, что этот масштаб является произведением двух величин, одна из которых определяется выбором описания диффузии $f(c)$, а другая зависит полностью от модели релаксации $T(k)$. Это означает, что при заданной функции $T(k)$ соотношение между тейлоровскими масштабами (если таковые существуют) для различных вариантов диффузии будет одно и то же. Аналогично при любом способе получения случайной величины c^n модель релаксации будет пропорционально удлинять или сокращать тейлоровское время.

Обратимся теперь к определению интегрального масштаба. В исходную формулу (5) подставим первое равенство (7) и поменяем порядок интегрирования, приняв предположение о правомерности такового:

$$\tau_1 = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty E(k) dk \int_0^\infty F\left(\frac{\tau}{T(k)}\right) d\tau.$$

Во внутреннем интеграле в качестве переменной интегрирования выберем величину в круглых скобках, в результате чего всё выражение превратится в произведение интегралов

$$\tau_1 = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty E(k) T(k) dk \cdot \int_0^\infty F(\eta) d\eta, \quad (10)$$

где функция $F(\eta)$ задана в (7).

Из формулы (10) следует, что для различных способов задания случайной величины c^n соотношение между интегральными масштабами времени не зависит от выбора релаксационной функции $T(k)$, как и для тейлоровских масштабов.

Далее изучим конкретные примеры моделей турбулентной диффузии.

(E1) Модельный пример. Величина c^n имеет стандартное нормальное распределение $N(0,1)$. В работе [11] случайный параметр реализуется с помощью преобразования Бокса–Мюллера: $c^n = \sqrt{-2 \ln(\alpha^n)} \sin(2\pi\beta^n)$. Здесь и далее случайные величины α^n и β^n независимо равномерно распределены в интервале $[0,1]$.

А) При постоянном $T(k) = \tau_0$ получаем, согласно (7A),

$$R_1(\tau) = \langle \cos(c^n \tau / \tau_0) \rangle = C \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-c^2/2\} \cos(c\tau/\tau_0) dc = \exp\left\{-\frac{\tau^2}{2\tau_0^2}\right\}.$$

Очевидно, $R_1'(0) = 0$. Формулы (4), (9A) дают тейлоровское время $\tau_T = \tau_1$:

$$R_1''(0) = -\frac{1}{\tau_0^2}, \quad \tau_1 = \sqrt{2} \tau_0.$$

Интегральный масштаб (5) равен

$$\tau_{11} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tau_0.$$

Б) Рассмотрено в [11]. Для колмогоровского $T(k)$ по формуле (7) находим

$$R(\tau) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty E(k) \exp\left\{-\frac{\tau^2}{2\gamma^2} \varepsilon^{-2/3} k^{-4/3}\right\} dk.$$

Чтобы убедиться в корректности модели, вычислим производную

$$R'(\tau) = -\frac{\varepsilon^{-2/3} \tau}{\gamma^2 \sigma^2} \int_0^\infty E(k) k^{-4/3} \exp\left\{-\frac{\tau^2}{2\gamma^2} \varepsilon^{-2/3} k^{-4/3}\right\} dk.$$

Обратим внимание на отсутствие у подынтегральной функции особенности в нуле. В самом деле, согласно [14], энергетическая плотность $E(k)$ имеет в точке $k = 0$ нуль по меньшей мере 4-го порядка. В инженерных моделях преимущественно полагается $E(k) \equiv 0$ при $k \leq k_{\min}$. Таким образом, предельный переход справедлив, и стоящая впереди интеграла дробь показывает $R'(0) = 0$.

Для вычисления тейлоровского масштаба найдем

$$R''(\tau) = \frac{\varepsilon^{-2/3}}{\gamma^2 \sigma^2} \int_0^\infty E(k) \left[\frac{\tau^2}{\gamma^2} \varepsilon^{-2/3} k^{-8/3} - k^{-4/3} \right] \exp\left\{-\frac{\tau^2}{2\gamma^2} \varepsilon^{-2/3} k^{-4/3}\right\} dk.$$

Асимптотика в нуле $k^{-8/3}$ не дает особенности подынтегральной функции. Отсюда

$$R''(0) = -\frac{1}{\gamma^2 \sigma^2} \varepsilon^{-2/3} \int_0^\infty E(k) k^{-4/3} dk,$$

после чего применяется формула (4).

(E2) Пример заимствован из [11] и соответствует модели диффузии Ланжевена турбулентных частиц [12]. Здесь $c^n = \text{tg}(\pi(\alpha^n - 1/2))$.

А) Как и в случае (E1),

$$R_2(\tau) = \langle \cos(c^n \tau / \tau_0) \rangle = \int_0^1 \cos(\text{tg}(\pi(\alpha - 1/2)) \tau / \tau_0) d\alpha.$$

Заменой переменной $s = \text{tg}(\pi(\alpha - 1/2))$ выражение сводится к известному интегралу Лапласа:

$$R_2(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(s\tau/\tau_0)}{\pi(1+s^2)} ds = \exp\left\{-\frac{\tau}{\tau_0}\right\}.$$

Здесь $R_2'(0) \neq 0$, и корреляционная функция нефизична.

Из предыдущего также следует, что плотность $f(c)$ соответствует распределению Коши: $c^n \sim C(0,1)$. Интегральный масштаб (5) равен

$$\tau_{12} = \tau_0.$$

Б) $T(k) = \gamma \varepsilon^{1/3} k^{2/3}$, $c^n = 2\pi \text{tg}(\pi(\alpha^n - 1/2))$.

По аналогии с предыдущим случаем вычисляем

$$F(\eta) = \exp\{-\eta\}, \quad \eta = \frac{\tau}{T(k)},$$

$$R(\tau) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty E(k) \exp\left\{-\frac{\tau}{\gamma} \varepsilon^{-1/3} k^{-2/3}\right\} dk.$$

При заданной зависимости $T(k) \sim k^{2/3}$ все интегралы существуют. Однако $F'(0) \neq 0$, что делает модель физически некорректной.

(E3) Пример заимствован из [11] и обобщает предыдущий случай (E2).
Здесь

$$c^n = \begin{cases} \omega_1(\alpha^n), & \beta^n < 1/2, \\ \omega_2(\alpha^n), & \beta^n \geq 1/2, \end{cases}$$

$$\omega_1(\alpha) = \mu + \lambda \operatorname{tg}(\pi(\alpha - 1/2)), \quad \omega_2(\alpha) = -\mu - \lambda \operatorname{tg}(\pi(\alpha + 1/2)).$$

Легко приходим к выражению

$$R(\tau) = \frac{1}{2} (R_{(1)}(\tau) + R_{(2)}(\tau)),$$

где две функции связаны каждая со своей $\omega_{1,2}(\alpha)$. При постоянном значении (A) $T(k) = \tau_0$ путём той же замены переменной $s = \operatorname{tg}(\pi(\alpha - 1/2))$ получаем

$$R_{(1)}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\tau}{\tau_0}(\mu - \lambda s)\right)}{\pi(1 + s^2)} ds = \cos\left(\frac{\tau}{\tau_0}\mu\right) \exp\left\{-\frac{\tau}{\tau_0}\lambda\right\}.$$

Здесь мы применили формулу косинуса разности, чем свели задачу к примеру (E2). Аналогично находим, что $R_{(2)}(\tau) = R_{(1)}(\tau)$. В результате имеем окончательное выражение для $R(\tau) = R_3(\tau)$:

$$R_3(\tau) = \cos\left(\frac{\tau}{\tau_0}\mu\right) \exp\left\{-\frac{\tau}{\tau_0}\lambda\right\}.$$

В данном примере нарушается требование физической корректности: $R'_3(0) = R'_2(0) \neq 0$, и с этой точки зрения вариант не отличается от предыдущего (E2).

Интегральный масштаб (5) равен

$$\tau_{13} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \mu^2} \tau_0.$$

Б) $T(k) = \gamma \varepsilon^{1/3} k^{2/3}$.

$$R(\tau) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty E(k) \cos\left(\frac{\tau\mu}{\gamma} \varepsilon^{-1/3} k^{-2/3}\right) \exp\left\{-\frac{\tau\lambda}{\gamma} \varepsilon^{-1/3} k^{-2/3}\right\} dk.$$

Как и в случае (A), тейлоровский масштаб не существует.

(E4) Модифицированная модель диффузии Ланжевена [12]: система двух уравнений.

Начнем с вида корреляционной функции.

А) $T(k) = \tau_0$.

$$R_4(\tau) = \frac{\mu \exp\{-\lambda\tau/\tau_0\} - \lambda \exp\{-\mu\tau/\tau_0\}}{\mu - \lambda}.$$

Остановимся на случае $\mu = \lambda = 1$, когда предельный переход дает

$$R_{4,0}(\tau) = \left(1 + \frac{\tau}{\tau_0}\right) \exp\left\{-\frac{\tau}{\tau_0}\right\}.$$

Последнему соответствует плотность

$$f(c) = \frac{2}{\pi(1+c^2)^2}.$$

По поводу тейлоровского масштаба (4) заметим, что функция $R_{4,0}(\tau)$ при $\tau < 0$ отличается от своего чётного продолжения. Тем не менее модель корректна, поскольку

$$R_{4,0}(\tau) = 1 - \frac{\tau^2}{2\tau_0^2} + O(\tau^3), \quad \tau_{4,0} = \sqrt{2} \tau_0.$$

Тейлоровское время совпадает с гауссовым случаем (E1). Интегральный масштаб (5) равен

$$\tau_{I4} = 2\tau_0.$$

Б) $T(k) = \gamma \varepsilon^{1/3} k^{2/3}$.

$$R(\tau) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty E(k) \left(1 + \frac{\tau}{\gamma} \varepsilon^{-1/3} k^{-2/3}\right) \exp\left\{-\frac{\tau}{\gamma} \varepsilon^{-1/3} k^{-2/3}\right\} dk.$$

Модель с колмогоровским временем релаксации также является корректной, поскольку дифференцирование интеграла

$$R'(\tau) = -\frac{\varepsilon^{-2/3} \tau}{\gamma^2 \sigma^2} \int_0^\infty E(k) k^{-4/3} \exp\left\{-\frac{\tau}{\gamma} \varepsilon^{-1/3} k^{-2/3}\right\} dk$$

дает интеграл без особенности в нуле, сходящийся на бесконечности. При этом $R'(0) = 0$.

Для вычисления тейлоровского масштаба найдем

$$R''(\tau) = \frac{1}{\gamma^3 \varepsilon \sigma^2} \int_0^\infty E(k) k^{-2} [\tau - \gamma \varepsilon^{1/3} k^{2/3}] \exp\left\{-\frac{\tau}{\gamma} \varepsilon^{-1/3} k^{-2/3}\right\} dk,$$

где в окрестности нуля член порядка k^{-2} подавляется функцией $E(k)$. Справедлива вторая формула (9):

$$R''(0) = -\frac{1}{\gamma^2 \sigma^2} \varepsilon^{-2/3} \int_0^\infty E(k) k^{-4/3} dk.$$

Тем самым тейлоровское время повторяет случай (E1).

Модель переноса и турбулентной диффузии

В гармониках (1) учитываются оба феномена: движение поля со скоростью U вдоль оси x и его случайное перемешивание:

$$\mathbf{u}^n(0, t) = \mathbf{Q}(\omega^n) [\boldsymbol{\xi}^n \sin(Uk^n \omega_x^n t + \Omega^n t) + \boldsymbol{\eta}^n \cos(Uk^n \omega_x^n t + \Omega^n t)],$$

где $\Omega^n = c^n/T(k^n)$ и можно рассмотреть все указанные выше варианты ее задания.

Вычисляя ковариацию продольных скоростей на основе формулы (3), по аналогии с процедурой вывода выражений (6) и (7), приходим к троекратному интегралу

$$\langle u_x^n(0)u_x^n(\tau) \rangle = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty E(k)dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(c)dc \int_{-1}^1 (1 - \omega^2) \cos(Uk\omega\tau + \Omega\tau) \frac{d\omega}{2}, \quad \Omega = \frac{c}{T(k)}.$$

Далее используем тождество

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1 - \omega^2) \cos(Uk\omega\tau + \Omega\tau) \frac{d\omega}{2} = \\ & = \cos(\Omega\tau) \int_{-1}^1 (1 - \omega^2) \cos(Uk\omega\tau) \frac{d\omega}{2} - \sin(\Omega\tau) \int_{-1}^1 (1 - \omega^2) \sin(Uk\omega\tau) \frac{d\omega}{2}. \end{aligned}$$

Второй интеграл равен нулю. Первое слагаемое дает выражение

$$\begin{aligned} \langle u_x^n(0)u_x^n(\tau) \rangle & = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty E(k)dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(c) \cos(c\tau/T(k)) dc \\ & \int_{-1}^1 (1 - \omega^2) \cos(Uk\omega\tau) \frac{d\omega}{2} = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty E(k) F\left(\frac{\tau}{T(k)}\right) \Phi(k\tau U) dk, \end{aligned}$$

где использованы введенные ранее обозначения (6), (7).

Остановимся на случае (А) постоянного времени релаксации $T(k) = \tau_0$. Тогда из интеграла выносится множитель $F(\tau/\tau_0)$:

$$R(\tau) = \frac{1}{\sigma^2} F\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) \int_0^\infty E(k) \Phi(k\tau U) dk.$$

Следовательно, автокорреляционная функция $R(\tau)$ представляет собой произведение автокорреляционных функций двух предыдущих моделей – переносной (тейлоровской) и диффузионной:

$$R(\tau) = R_L(\tau) R_D(\tau). \quad (11)$$

Вопрос о физической корректности сводится к корректности диффузионной модели, ибо первая производная функции R в нуле равна:

$$R'(0) = R'_L(0) R_D(0) + R_L(0) R'_D(0) = R'_D(0).$$

Для вычисления тейлоровского масштаба τ_T запишем автокорреляционную функцию в удобном виде

$$R(\tau) = 1 - \frac{\tau^2}{\tau_T^2} + o(\tau^2).$$

Аналогичные выражения справедливы для обоих сомножителей (11), обладающих тейлоровскими временами τ_L и τ_D . Отсюда

$$R(\tau) = \left(1 - \frac{\tau^2}{\tau_L^2} + o(\tau^2)\right) \left(1 - \frac{\tau^2}{\tau_D^2} + o(\tau^2)\right) = 1 - \frac{\tau^2}{\tau_L^2} - \frac{\tau^2}{\tau_D^2} + o(\tau^2).$$

В итоге получаем соотношение

$$\frac{1}{\tau_T^2} = \frac{1}{\tau_L^2} + \frac{1}{\tau_D^2}. \quad (12)$$

Перейдем к рассмотрению известных нам моделей турбулентной диффузии при постоянном времени релаксации и в сочетании с потоковым переносом.

(E1) А) Согласно формуле (11), получаем выражения для ковариации в виде произведения интегралов

$$\langle u_x^n(0)u_x^n(\tau) \rangle = \frac{2}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{\tau^2}{2\tau_0^2}\right\} \int_0^\infty E(k) \left[\frac{\sin(k\tau U)}{(k\tau U)^3} - \frac{\cos(k\tau U)}{(k\tau U)^2} \right] dk$$

и для коэффициента автокорреляции

$$R(\tau) = R_L(\tau) R_1(\tau).$$

Подставляя в (12) известные результаты, для нахождения тейлоровского времени имеем:

$$\frac{1}{\tau_T^2} = \frac{1}{2\tau_0^2} + \frac{\varepsilon U^2}{20 \nu \sigma^2}.$$

(E2) А) Справедлива формула (11):

$$R(\tau) = R_L(\tau) R_2(\tau).$$

Производная

$$R'(0) = R_2'(0) \neq 0.$$

Модель физически некорректна.

(E3) А) Вновь справедлива формула (11) вида

$$R(\tau) = R_L(\tau) R_3(\tau).$$

Модель физически некорректна ввиду равенства

$$R'(0) = R_3'(0) \neq 0.$$

(E4) А) Формула (11) имеет вид

$$R(\tau) = R_L(\tau) R_{4,0}(\tau).$$

Тейлоровский масштаб вычисляется, согласно (12), по формуле

$$\frac{1}{\tau_T^2} = \frac{1}{2\tau_0^2} + \frac{\varepsilon U^2}{20 \nu \sigma^2}.$$

Вычислительные тесты

Выше были исследованы различные модели эволюции турбулентного поля. Стоит вопрос о том, какая из них наиболее адекватна реальной физике. Кроме того, необходимо выбрать значения параметров, соответствующие экспериментальным данным.

В настоящей работе мы сосредоточились на тестировании диффузионной модели турбулентности, для чего рассматривается случай отсутствия фонового течения ($\mathbf{U} = 0$). Перейти к общему случаю легко, добавив в формулу (1) соответствующий член. Если верно выбрана модель диффузии, столь же верной окажется модель, учитывающая перенос.

Был проведен следующий вычислительный эксперимент, опирающийся на наш предыдущий опыт [7]. В кубе со стороной 2π на равномерной декартовой сетке из 64^3 узлов (с шагом $2\pi/64$) задавалось начальное турбулентное поле скоростей (в формуле (1) полагалось $t = 0$). В качестве энергетического спектра $E(k)$ взята модифицированная плотность Кармана–Пао из [4]. При нулевой фоновой скорости $\mathbf{U} = 0$ выбрано число Рейнольдса, определяемое через среднеквадратичную скорость перемешивания σ , равное $Re = 1620$.

Расчет LES проводился с помощью пакета NOISEtte [15] с использованием центрально-разностной схемы 4-го порядка по пространству и явного алгоритма Рунге–Кутты 4-го порядка по времени. На всех шести гранях куба ставились периодические граничные условия.

На протяжении расчета аккумулировались массивы значений горизонтальной скорости в узлах сетки. На основе этих данных построена статистика временных автокорреляций, которые вычислялись по формуле

$$R(\tau; t) = \frac{\langle u_x(x, y, z, t) u_x(x, y, z, t + \tau) \rangle_{\text{num}}}{[\langle u_x(x, y, z, t)^2 \rangle_{\text{num}} \langle u_x(x, y, z, t + \tau)^2 \rangle_{\text{num}}]^{1/2}},$$

где

$$\langle \varphi(x, y, z, t) \varphi(x, y, z, t') \rangle_{\text{num}} = \frac{1}{64^3} \sum_{i,j,l} \varphi(x_i, y_j, z_l, t) \varphi(x_i, y_j, z_l, t').$$

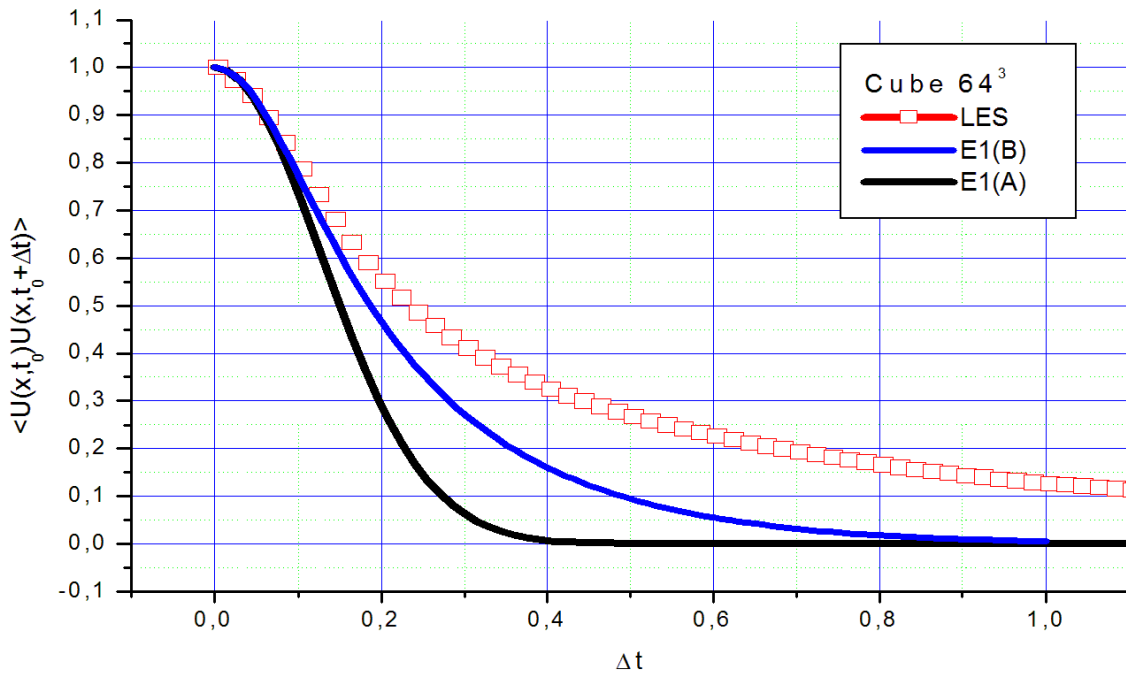


Рис. 1. Автокорреляционные функции: расчетные данные и кривые для модели (E1), (A) и (B).

Вычисленные автокорреляционные функции для начального момента времени $t = 0$ в зависимости от интервала τ представлены на рис. 1. Результаты сравниваются с теоретическими кривыми для гауссовой модели диффузии (E1) при постоянном (A) и колмогоровском (B) параметрах релаксации. Оба графика

сильно отличаются от расчетных данных. Вместе с тем можно утверждать, что закон подобия Колмогорова гораздо лучше отражает физику турбулентной среды, чем упрощенная модель, как и следовало ожидать. Далее будем рассматривать только время релаксации, задаваемое согласно (Б).

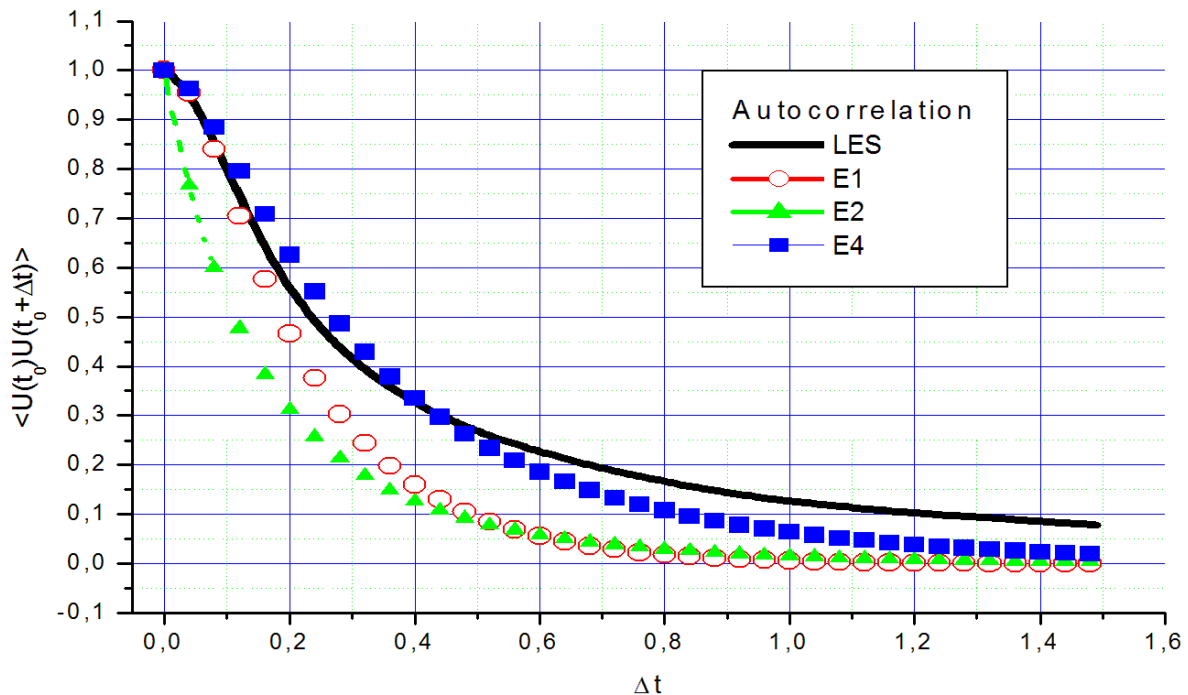


Рис. 2. Автокорреляционные функции. Расчетные данные и кривые для моделей (E1), (E2) и (E4): (Б).

На рис. 2 показаны теоретические кривые для моделей (E1), (E2) и (E4) – вариант (Б) – в сравнении с результатами расчета. Экспоненциальная модель (E2) дает ошибочную картину при малых временах τ , что связано с отсутствием в ней тейлоровского масштаба. Однако с ростом временного интервала форма кривой становится более адекватной физике, чем для гауссовой модели (E1).

Наиболее соответствует реальной турбулентности поведение кривой двойной модели Ланжевена (E4). Некоторое завышение корреляции наблюдается при небольших значениях τ , тогда как в целом кривая (E4) соответствует данным вычислительного эксперимента намного лучше, чем поведение всех остальных моделей.

Приходится констатировать, что ни одна из рассмотренных здесь моделей турбулентной диффузии не воспроизводит асимптотику затухания корреляции на больших интервалах времени. Следует отметить, однако, что при выборе модели турбулентной среды важнее обращать внимание на корреляцию на умеренном интервале времени.

Заключение

В работе рассмотрены различные методы задания временной эволюции синтетического турбулентного поля. Проведен анализ соответствующих автокорреляционных функций. Теоретические результаты сравнены с LES-расчетом эволюции начального поля, сгенерированного с помощью РСМ в кубической области.

Наиболее близкие к расчетным значения автокорреляционной функции в рассмотренной задаче обеспечиваются одной из диффузионных моделей.

Использование рассмотренных способов задания временной эволюции при постановке граничных условий входного турбулентного потока не затрудняет общего алгоритма LES и по трудоемкости не превосходит метод задания начального поля, разработанный ранее.

В дальнейшем предполагается расширить методику задания эволюции по времени на случай пространственно-анизотропной турбулентности. Возможно использование тех же диффузионных моделей.

Проведенный анализ автокорреляций может в дальнейшем быть полезным при разработке эволюционных алгоритмов как для спектральных методов генерации синтетической турбулентности, так и для альтернативных подходов, включая методы фильтрации [16].

Список литературы

1. Dhamankar N.S., Blaisdell G.A., Lyrintzis A.S. Overview of Turbulent Inflow Boundary Conditions for Large-Eddy Simulations // *AIAA J.*, 56(4), (2018), 1317–1334.
2. Kraichnan R. Diffusion by a random velocity field // *Phys. Fluids* 13(1), (1970), 22–31.
3. Smirnov A., Shi S., Celik I. Random flow generation technique for large eddy simulations and particle-dynamics modeling // *J. Fluids Eng.*, 123(2), 359–371 (Feb 16, 2001).
4. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., and Travin A.K. Synthetic turbulence generators for RANS-LES interfaces in zonal simulations of aerodynamic and aeroacoustic problems // *Flow Turbulence Combust.*, 93(1), (2014), 63–92.
5. Сабельфельд К.К. Методы Монте-Карло в краевых задачах. – Новосибирск: Наука, 1989, 280 с.; англ. пер.: Sabelfeld K.K. Monte Carlo Methods in boundary value problems. Springer, Heidelberg–Berlin–New York, 1991.
6. Kurbanmuradov O., Sabelfeld K., and Kramer P.R. Randomized spectral and Fourier-wavelet methods for multidimensional Gaussian random vector fields // *J. Comput. Phys.*, 245, (2013), 218–234.

7. Александров А.В., Дородницын Л.В., Дубень А.П. Генерация трехмерных однородных изотропных турбулентных полей скорости на основе рандомизированного спектрального метода // Матем. моделирование, 31:10 (2019), 49–62.
8. Александров А.В., Дородницын Л.В., Дубень А.П., Колухин Д.Р. Генерация неоднородных турбулентных полей скорости на основе модифицированного рандомизированного спектрального метода // Прикладная математика и информатика №63, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2020, с.22–35; англ. пер.: Aleksandrov A.V., Dorodnitsyn L.V., Duben' A.P., Kolyukhin D.R. Generation of nonhomogeneous isotropic turbulent velocity fields by Modified Randomized Spectral Method // Comput. Math. Model., 31(3), (2020), 308–319.
9. Davidson L. Inlet boundary conditions for embedded LES First CEAS European Air and Space Conf. 2007 (Berlin).
10. Ewert R. and Emunds R. CAA slat noise studies applying stochastic sound sources based on solenoidal digital filters // AIAA 2005-2862 1–23
11. Sabelfeld K.K., Kurbanmuradov O. Stochastic Lagrangian models for two-particle motion in turbulent flows // Monte Carlo Methods Appl., 3(1), (1997), 53–72. DOI: <https://doi.org/10.1515/mcma.1997.3.1.53>.
12. Dieste M., Gabard G. Random particle methods applied to broadband fan interaction noise // J. Comput. Phys., 231, (2012), 8133–8151.
13. Taylor G.I. The spectrum of turbulence // Proc. Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences, 164(919), (1938), 476–490.
14. Batchelor G.K. The Theory of Homogeneous Turbulence. Cambridge University Press, London–New York, 1959.
15. Абалакин И.В., Бахвалов П.А., Горобец А.В., Дубень А.В., Козубская Т.К. Параллельный программный комплекс NOISEtte для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // Выч. мет. программирование, 13(3), (2012), 110–125.
16. Zhen Shen, Xin Zhang. Direct anisotropic filter method of generating synthetic turbulence applied to turbulence-airfoil interaction noise prediction // J. Sound Vibr., 458, (2019), 544–564.