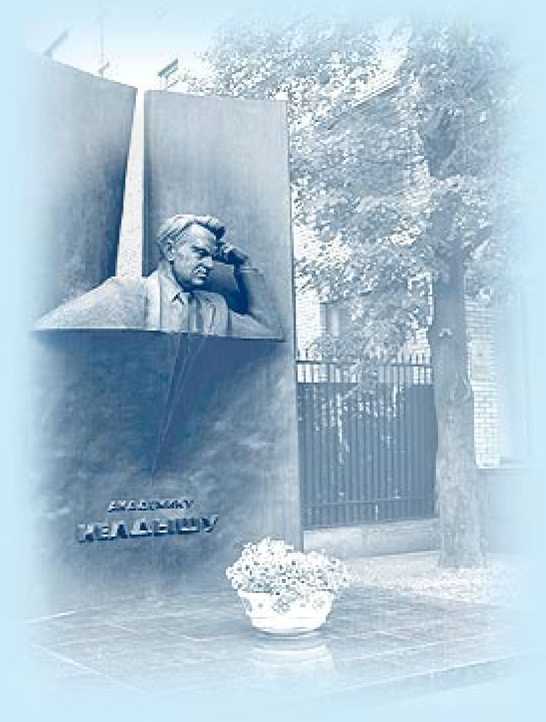
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 99 за 2022 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

В.А. Глазатов, В.Ж. Сакбаев

О купмановском представлении гамильтоновых потоков в бесконечномерных пространствах с инвариантной мерой

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Глазатов В.А., Сакбаев В.Ж. О купмановском представлении гамильтоновых потоков в бесконечномерных пространствах с инвариантной мерой // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 99. 15 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2022-99
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-99

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

В.А. Глазатов, В.Ж. Сакбаев

О купмановском представлении гамильтоновых потоков в бесконечномерных пространствах с инвариантной мерой

Москва — 2022

Глазатов В.А., Сакбаев В.Ж.

О купмановском представлении гамильтоновых потоков в бесконечномерных пространствах с инвариантной мерой

Исследуются гамильтоновы потоки в наделенном симплектической структурой вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве. Исследованы меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно потоков вполне интегрируемых гамильтоновых систем и позволяющие описывать гамильтоновы потоки в фазовом пространстве посредством унитарных групп в пространстве квадратично интегрируемых по инвариантной мере функций. Описываются свойства купмановского представления на примере гамильтониана счетного набора невзаимодействующих гармонических осцилляторов. Проводится спектральный анализ генератора такого гамильтониана, позволяющий определить инвариантное подпространство сильной непрерывности купмановской унитарной группы.

Ключевые слова: трансляционно-инвариантная мера, теорема А.Вейля, гамильтонов поток, купмановское представление, генератор купмановской группы

Glazatov V.A., Sakbaev V.Zh.

On the Koopman representation of Hamiltonian flows in infinite-dimensional spaces with invariant measure

We study Hamiltonian flows in a real separable Hilbert space endowed with a symplectic structure. Measures on a Hilbert space that are invariant with respect to flows of completely integrable Hamiltonian systems and allow one to describe Hamiltonian flows in a phase space in terms of unitary groups in the space of functions squarely integrable with respect to an invariant measure are studied. The properties of the Koopman representation are described using the example of the Hamiltonian of a countable set of noninteracting harmonic oscillators. A spectral analysis of the generator of Koopman group for such a Hamiltonian is carried out. An invariant subspace of strong continuity of Koopman unitary group is described in terms of spectrum of the generator.

Keywords: translation-invariant measure, A. Weyl theorem, Hamiltonian flow, Koopman representation, Koopman group generator

1. Введение

Согласно теореме А.Вейля, не существует бесконечномерного варианта меры Лебега, в связи с чем встает вопрос о необходимости построения аналогичной конструкции, пусть и с потерей некоторых свойств исходной меры.

Теорема А. Вейля. *Если топологическая группа G не является локально компактной, то не существует нетривиальной σ-аддитивной σ-конечной локально конечной борелевской лево-инвариантной меры на группе G.*

Построение аналогов меры Лебега на бесконечномерных локально выпуклых пространствах требуется для изучения процедуры квантования бесконечномерных гамильтоновых систем (в частности, вторичного квантования), для задач статистической механики, для изучения случайных унитарных групп и динамики открытых квантовых систем.

Настоящая статья продолжает работу, начатую в [1], где была поставлена задача по исследованию мер на бесконечномерном симплектическом пространстве, инвариантных относительно группы симплектоморфизмов. В [1], для получения результата, были ослаблены ограничения, накладываемые теоремой А.Вейля, благодаря чему и была получена искомая мера - расширенная трансляционно инвариантная мера из работ [2, 3] до меры, инвариантной относительно подгруппы группы симплектоморфизмов евклидова фазового пространства, оставляющих инвариантными двумерные симплектические подпространства фазового пространства. Такая мера была названа симплектической мерой.

Существуют и другие конструкции, не являющиеся либо счетно-аддитивными, либо сигма-конечными, либо являющиеся обобщенными (являющиеся линейными функционалами на пространстве пробных функций, но не функциями множества). В [4] была исследована инвариантная относительно сдвигов мера на пространстве последовательностей, не являющаяся локально конечной и σ-конечной. В [2] построена конечно-аддитивная мера на гильбертовом пространстве, инвариантная относительно сдвигов и ортогональных преобразований. В [5] были предложены обобщенные меры Лебега на гильбертовом пространстве, полученные продолжением трансляционно инвариантной меры до инвариантной относительно всех ортогональных преобразований, обладающие свойством инвариантности относительно всех изометрических симплектоморфизмов евклидова фазового пространства. Но ни одна из этих мер не инвариантна относительно гамильтоновых потоков, допускающих сжатия и растяжения по бесконечному набору направлений в евклидовом фазовом пространстве, введенных в [1].

Группа преобразований симплектической меры включает сдвиги на любой вектор, порождаемый произвольным линейным уравнением Шредингера поток, нешредингеровы линейные и некоторые нелинейные гамильтоновы потоки [6].

В данной статье будет использован подход, приведенный в [1], с помощью которого решения уравнений Гамильтона, допускающие особенности (см. [7]), можно описать посредством фазового потока в расширенном фазовом пространстве и соответствующей купмановскому представлению унитарной группы. Благодаря этому будет исследован генератор купмановской группы на примере гамильтониана счетного набора невзаимодействующих гармонических осцилляторов.

2. Основные понятия

Определение. *Симплектической структурой* на вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве E называется невырожденная замкнутая дифференциальная 2-форма на пространстве E. Если симплектическая структура на гильбертовом пространстве E инвариантна относительно сдвигов, то она задается невырожденной кососимметрической билинейной формой ω на пространстве E (при этом гильбертово пространство E отождествляется со своим сопряженным). Ассоциированный с билинейной формой ω линейный оператор $\mathbf{J}$ является невырожденным кососимметрическим оператором (см. [8, 9]).

Определение. Постоянная симплектическая структура ω на вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве E называется *естественной*, если в пространстве E существует такой ортонормированный базис $\{g_k\} \equiv \mathcal{G}$, что $\omega(g_{2k-1}, g_j) = \delta_{j,2k},\ k, j \in \mathbb{N}$, $\delta_{j,i}$ – символ Кронеккера.

Определение. Естественная симплектическая структура ω определяет разложение пространства E в прямую сумму двух подпространств $Q \oplus P$, ортонормированными базисами в которых являются соответственно ортонормированные системы $e_j = g_{2j-1}$, $j \in \mathbb{N}$ и $f_k = g_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\omega(e_j, e_i) = 0,\, \omega(f_i, f_j) = 0\ \forall\, i, j \in \mathbb{N};\quad \omega(e_j, f_k) = \delta_{jk},\, j, k \in \mathbb{N} \qquad (0.1)$$

(см. [5]). В этом случае базис $\{g_i,\ i \in \mathbb{N}\} = \{e_j, f_k;\ j, k \in \mathbb{N}\}$ называется *симплектическим базисом* пространства E, соответствующим симплектической форме ω.

Определение. *Гамильтоновой системой* называется тройка $(E, \mathbf{J}, h)$, где $(E, \mathbf{J})$ – гильбертово пространство с симплектической структурой, $h : E_2 \to \mathbb{R}$ – определенная и непрерывно дифференцируемая по Гато на векторном подпространстве E_2 пространства E функция, называемая функцией Гамильтона.

Определение. Функция $h : E_1 \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой* относительно плотно вложенного в гильбертово пространства E гильбертова подпространства $E_2 \subset E_1$ в точке $z_0 \in E_2$, если существует вектор $h'(z_0) \in E$, такой, что для любого $z \in E_2$ выполняется равенство $h(z_0 + z) - h(z_0) - (h'(z_0), z)_E = o(\|z\|_E),\ z \to 0$. Функция $H:\ E_1 \to \mathbb{R}$ называется *непрерывно дифференцируемой* относительно линейного подпространства $E_2 \subset E_1$, если $\lim\limits_{\|z\|_{E_2} \to 0} \|h'(z_0 + z) - h'(z_0)\|_E = 0$ для любого $z_0 \in E_2$.

Например, если функция Гамильтона h определяется равенством

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k^2, \tag{0.2}$$

где $\{\lambda_k\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $x_k = (x, e_k),\ k \in \mathbb{N},\ \{e_k\}$ – некоторый ОНБ в пространстве E, то тогда $E_1 = \{x \in E:\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| x_k^2 < \infty\}$, $E_2 = \{x \in E:\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 x_k^2 < \infty\}$.

Определение. Обозначим через $\mathbf{I}$ такой изоморфизм линейного пространства Q на линейное пространство P, что $\mathbf{I}(e_j) = f_j,\ j \in \mathbb{N}$. Естественная симплектическая форма ω на пространстве E с симплектическим базисом $\{e_j, f_k;\ j \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{N}\}$ может быть задана как квадратичная форма кососимметрического симплектического оператора $\mathbf{J}$, задаваемого равенствами $\mathbf{J}(e_j) = -f_j$, $\mathbf{J}(f_k) = e_k$, $j \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{N}$. При этом Q и P называются конфигурационным пространством и пространством импульсов соответственно, и предполагается, что P является сопряженным к Q пространством (см. [6, 8, 5]). Уравнение $z'(t) = \mathbf{J}(h'(z(t))),\ t \in \Delta$, относительно определенной на вещественном промежутке Δ и принимающей значения в пространстве E_2 функции $z:\ \Delta \to E_2$ называется *уравнением Гамильтона* для гамильтоновой системы $(E, \mathbf{J}, h)$ ([6, 8]). Линейное уравнение Шредингера является уравнением Гамильтона некоторой гамильтоновой системы с квадратичной функцией Гамильтона; роль фазового пространства здесь играет овеществление гильбертова пространства квантовой системы ([6]).

Определение. Плотно определенное векторное поле $\mathbf{v}:\ E_2 \to E$ называется *гамильтоновым*, если существует такая функция Гамильтона $h:\ E_1 \to \mathbb{R}$, что $\mathbf{v}(z) = \mathbf{J}Dh(z),\ z \in E_2$. Здесь функция h дифференцируема на плотно вложенном в пространство E подпространстве $E_2 \subset E_1$, Dh – дифференциал функции h, $\mathbf{J}$ – линейный оператор, ассоциированный с билинейной формой ω в гильбертовом пространстве E.

Определение. Однопараметрическая группа $\Phi_t,\ t \in \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемых преобразований пространства E_2 называется *гладким гамильтоновым потоком* в пространстве E_2, порожденным гамильтоновым векторным полем $\mathbf{v}:\ E_2 \to E$, если $\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}_t(q,p) = \mathbf{v}(\mathbf{\Phi}_t(q,p)),\ (q,p) \in E_2$. Если гамильтонов поток в пространстве E_2 допускает единственное продолжение по непрерывности с пространства E_2 на пространство E, то такое продолжение потока называется *обобщенным гамильтоновым потоком* в пространстве E, порожденным гамильтоновым векторным полем $\mathbf{v}$ (гамильтонианом h). Такое продолжение гладкого гамильтонова потока до обобщенного существует, если гладкий поток не увеличивает норму векторов пространства E, что реализуется в случае потока, порождаемого связанной с линейным уравнением Шредингера гамильтоновой системой.

3. Симплектические меры

В [1] определены меры на вещественном гильбертовом пространстве $E = Q \oplus P$ с симплектической формой $\mathbf{J}$, инвариантные относительно гамильтоновых потоков, сохраняющих стандартную симплектическую структуру $(E, \mathbf{J})$. Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{E} \bigcup \mathcal{F}$ – симплектический базис симплектической формы ω (см. (0.1)).

Определение 1. **[1]** Множество $\Pi \subset E$ назывется абсолютно измеримым симплектическим брусом в гильбертовом пространстве E, если существует симплектическая форма ω на пространстве E, имеющая симплектический базис $\{e_j, f_k,\ j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$ пространства E, и такая, что множество Π выражается равенством

$$\Pi = \{z \in E :\ ((z, e_i), (z, f_i)) \in B_i,\ i \in \mathbb{N}\}, \tag{0.3}$$

где B_i – измеримые по Лебегу множества в плоскости $\mathbb{R}^2$, такие, что выполняется условие $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \max\{\ln(\lambda_2(B_j)), 0\} < +\infty$ (здесь λ_2 – мера Лебега на $\mathbb{R}^2$).

Множество всех абсолютно измеримых симплектических брусов в гильбертовом пространстве E обозначим символом $\mathcal{K}(E)$ и определим функцию множества $\lambda :\ \mathcal{K}(E) \to [0, +\infty)$, задаваемую равенством

$$\lambda(\Pi) = \prod_{j=1}^{\infty} \lambda_2(B_j) = \exp(\sum_{j=1}^{\infty} \ln(\lambda_2(B_j)))$$

при условии, что $\Pi \neq \oslash$; в случае $\Pi = \oslash$ положим $\lambda(\Pi) = 0$.

Заметим, что в определении 1 для каждого симплектического бруса симплектический базис может быть свой. Фиксировав симплектический базис $\mathcal{G} = \mathcal{E} \bigcup \mathcal{F}$, обозначим через $\mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E) \equiv \mathcal{K}_{\mathcal{G}}(E)$ множество всех абсолютно измеримых симплектических брусов, имеющих вид (0.3) в заданном базисе $\mathcal{E} \bigcup \mathcal{F}$. Легко видеть, что если $A, B \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$ для некоторого ОНБ $\mathcal{E} \bigcup \mathcal{F}$, то выполняется условие $A \bigcap B \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$; что класс множеств $\mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$ инвариантен относительно сдвига на произвольный вектор пространства E и что функция множества $\lambda :\ \mathcal{K}(E) \to [0, +\infty)$ инвариантна относительно сдвига. Множество $\Pi \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$ из (0.3) будем обозначать символом $\times_{j=1}^{\infty} B_j$.

Лемма 3.1. **[1]** *Функция множества* $\lambda :\ \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E) \to [0, +\infty)$ *является* *аддитивной.*

Лемма 3.2 [1]. *Класс* Λ *множеств вида* $A = \Pi \backslash (\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Pi_i)$, *где* $n \in \mathbb{N}_0$, $\Pi, \Pi_1, ..., \Pi_n \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, *является полукольцом.*

Следствие 3.3 [1]. *Класс множеств* $r_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, *состоящий из конечных объединений множеств из полукольца* Λ, *является минимальным кольцом, содержащим класс множеств* $\mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$.

Лемма 3.4 [1]. *Пусть* $\Pi, Q \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$ *и* $Q \subset \Pi$. *Тогда для любого* $\epsilon > 0$ *существует такое* $N \in \mathbb{N}$, *что* $\Pi \supset Q_N \supset Q$, $\lambda(Q_N) - \lambda(Q) < \epsilon$ *и существуют попарно непересекающиеся симплектические брусы* $\Pi_1, ..., \Pi_m \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$, *такие, что* $\Pi \backslash Q_N = \bigcup\limits_{j=1}^{m} \Pi_j$.

Лемма 3.5 [1]. *Пусть* $\Pi, Q \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$ *и* $Q \subset \Pi$. *Тогда существует такая последовательность* $\{\Pi_k\}$ *попарно непересекающихся симплектических брусов из класса* $\mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E)$, *что* $\Pi \backslash Q = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Pi_k$ *и* $\lambda(\Pi) = \lambda(Q) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(\Pi_k)$.

Теорема 3.6. [1] *Аддитивная функция множества* $\lambda : \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(E) \to [0, +\infty)$ *имеет единственное аддитивное продолжение на полукольцо* Λ.

Пополнением меры $\lambda : \Lambda \to [0, +\infty)$ является полная мера $\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}} : \mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \to [0, +\infty)$. Кольцо $\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ определяется по кольцу Λ как совокупность множеств, на которых совпадают значения внешней и внутренней меры, построенные по мере λ.

Пространство $\mathcal{H} = L_2(E, \mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}, \lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}}, \mathbb{C})$ строится по мере $\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}} : \mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \to [0, +\infty)$ стандартным образом как пополнение пространства классов эквивалентности простых функций по евклидовой норме.

Построенная выше мера $\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ определена на пространстве l_2, порождаемом выбором базиса $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ в пространстве E. Меру, задаваемую аналогичным образом на прямом произведении счетной совокупности двумерных измеримых множеств, можно определить также и на банаховых пространствах l_p, $p \in [1, +\infty]$, и на топологическом векторном пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ вещественнозначных числовых последовательностей с топологией поточечной сходимости.

4. Гамильтонова структура Шрёдингеровой динамики

Пусть H – комплексное сепарабельное гильбертово пространство, E – вещественное сепарабельное гильбертово пространство. Пусть ω – однородная симплектическая форма на пространстве E, $\mathcal{G} = \mathcal{E} \bigcup \mathcal{F}$ – соответствующий симплектический базис и $\mathbf{J}$ – оператор, ассоциированный с формой ω (см. (0.1)).

Биективное отображение $\mathbf{R} : H \to E$ называется овеществлением комплексного пространства H, если (см. [6]) в пространстве H существует такой ортонормированный базис $\mathcal{H} = \{\psi_k\}$, что отображение задается равенством $\mathbf{R}(u) = q+p$ для любого вектора $u \in H$, где $q = \sum\limits_{j=1}^{\infty} e_j \mathrm{Re}(\psi_j, u) \in Q$ и $p = \sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j \mathrm{Im}(\psi_j, u) \in P$.

Отображение $\mathbf{C} = (\mathbf{R})^{-1} : \ E \to H$ называется комплексификацией вещественного пространства E.

Легко проверить, что отображение $\mathbf{R}$ обладает следующими свойствами относительно линейных операций в унитарном пространстве H:

$$\mathbf{R}(ax) = a\mathbf{R}(x),\ \forall\, a \in \mathbb{R}, x \in H;$$

$$\mathbf{R}(ix) = \mathbf{J}\mathbf{R}(x),\ \forall\ x \in H; \tag{0.4}$$

$$\mathbf{R}(x+y) = \mathbf{R}(x) + \mathbf{R}(y)\ \forall\ x, y \in H.$$

Тогда в силу биективности оператора $\mathbf{R}$ и условия $\mathbf{C}\mathbf{R}x = x\ \forall\ x \in H$ получим, что

$$\mathbf{C}(az) = a\mathbf{C}z\ \forall\ a \in R,\ z \in E;$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{J}z) = i\mathbf{C}(z)\ \forall\ z \in E; \tag{0.5}$$

$$\mathbf{C}(z_1 + z_2) = \mathbf{C}(z_1) + \mathbf{C}(z_2)\ \forall\ z_1, z_2 \in E.$$

Линейный оператор $\mathbf{U}$ в унитарном пространстве H индуцирует посредством отображения $\mathbf{R}$ оператор $\mathbf{U}_R$ в вещественном пространстве E по следующему правилу: $\mathbf{U}_R(z) = \mathbf{U}_R(q,p) = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^{-1}(z)$, $z \in E$. Тогда для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $z \in E$ выполняется равество $\mathbf{U}_R(\alpha z) = \alpha \mathbf{U}_R(z)$, а для любых $z_1, z_2 \in E$ выполняется равенство $\mathbf{U}_R(z_1 + z_2) = \mathbf{U}_R(z_1) + \mathbf{U}_R(z_2)$. Из определения овеществления следует, что $(\mathbf{R}u, \mathbf{R}u)_E = (u,u)_H\ \forall\ u \in H$. Тогда из биективности отображения $\mathbf{R}$ следует, что $(\mathbf{C}z, \mathbf{C}z)_H = (z,z)_E$ для любого $z \in E$. Если $u_1, u_2 \in H$, то в соответствии с определением овеществления $\mathbf{R}$ найдется такой ОНБ $\mathcal{H}$, что $\mathbf{R}(u_j) = q_j + p_j$, $j = 1,2$; следовательно, $(\mathbf{R}u_1, \mathbf{R}u_2)_E = (q_1,q_2)_Q + (p_1,p_2)_P$, в то время как $(u_1,u_2)_H = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_1, g_k)(g_k, u_2) = (q_1,q_2)_Q + (p_1,p_2)_P + i[(q_1, \mathbf{I}p_2)_Q - (q_2, \mathbf{I}p_1)_Q] = (\mathbf{R}(u_1), \mathbf{R}(u_2))_E + i(\mathbf{R}(u_1), \mathbf{J}\mathbf{R}(u_2))_E$. Таким образом, для любых $u_1, u_2 \in H$ выполняется равенство

$$(\mathbf{R}(u_1), \mathbf{R}(u_2))_E = (u_1,u_2)_H - i(\mathbf{R}(u_1), \mathbf{J}\mathbf{R}(u_2))_E = \mathrm{Re}(u_1,u_2)_H. \tag{11}$$

Следовательно, для любых $z_1, z_2 \in E$ выполняется равенство

$$(z_1,z_2)_E = (\mathbf{C}z_1, \mathbf{C}z_2)_H - i(z_1, \mathbf{J}z_2)_E = \mathrm{Re}(\mathbf{C}z_1, \mathbf{C}z_2)_H. \tag{12}$$

Теорема 4.1. [6] Преобразование $\mathbf{U}: H \to H$ является унитарным тогда и только тогда, когда соответствующее линейное преобразование $\mathbf{V} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{C}$ пространства E обладает следующими двумя свойствами:

1) является ортогональным преобразованием пространства E;

2) сохраняет линейную симплектическую форму ω на пространнстве E.

Линейный оператор $\mathbf{A}$ в вещественном евклидовом пространстве E индуцирует в унитарном пространстве H оператор $\mathbf{A}_C = \mathbf{CAR}$, действующий по правилу $\mathbf{A}_C = \mathbf{CAR}$.

Теорема 4.2. [6] *Отображение $\mathbf{U} \to \mathbf{U}_R$ осуществляет изоморфизм алгебры ограниченных линейных операторов $B(H)$, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H, на подалгебру $\mathbf{J}$-коммутирующих ограниченных линейных операторов $B_{\mathbf{J}}(E)$ алгебры ограниченных линейных операторов $B(E)$, действующих в вещественном гильбертовом пространстве E.*

Заметим, что на фазовом пространстве E могут быть заданы и другие симплектические формы – замкнутые невырожденные дифференциальные 2-формы на пространстве E. Выбор симплектической формы $\omega_{\mathbf{J}}$ определяет то ортогональное преобразование вещественного пространства E, которое соответствует линейному оператору умножения на мнимую единицу в унитарном пространстве H. Построенная нами симплектическая мера зависит от выбора симплектической формы $\mathbf{J}$. Мера будет инвариантна относительно $\mathbf{J}$-инвариантных гамильтоновых потоков $e^{it\mathbf{A}}$, для которых оператор $\mathbf{A}$ в некотором каноническом базисе формы $\omega_{\mathbf{J}}$ состоит из двумерных блоков. Примером такой гамильтоновой системы может служить счетная система гиперболических осцилляторов.

5. Инвариантность симплектической меры относительно гамильтоовых потоков

Пусть $h : E \to R$ – невырожденная квадратичная функция Гамильтона на евклидовом пространстве E. Симметричная квадратичная функция на E, порожденная квадратичной формой h, обладает каноническим базисом $\mathcal{G}$, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Предположим также, что базис $\mathcal{G}$ является каноническим базисом для симплектической формы $\mathbf{J}$ на пространстве E. В базисе $\mathcal{G}$ форма $\mathbf{J}$ удовлетворяет равенству $\mathbf{J}(g_{2k-1}, g_{2k}) = -\mathbf{J}(g_{2k}, g_{2k-1}) = 1$ и $\mathbf{J}(g_l, g_m) = 0$ в остальных случаях. Определим ортонормированные системы $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ в подпространствах P, Q таким образом, что $\mathcal{G} = \mathcal{E} \bigcup \mathcal{F}$ и $g_{2k-1} = e_k$, $g_{2k} = f_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Счетная система невзаимодействующих гармонических осцилляторов.

Лемма 5.1 [1]. *Пусть $\mathcal{G}$ – канонический базис, в котором симплектическая форма ω имеет канонический вид (0.1). Пусть* *квадратичная функция h имеет в базисе $\mathcal{G}$ диагональный вид*

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(p_k^2 + q_k^2),\ D(h) = E_1 = \{(q,p) \in E:\ \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|(p_k^2 + q_k^2) < +\infty\}, \quad (0.6)$$

где $\{\lambda_k\}:\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Тогда гамильтоново векторное поле $\mathbf{v} = \mathbf{J}\nabla h$ определено на пространстве

$$E_2 = \{(q,p) \in E:\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2(q_k^2 + p_k^2) < +\infty\},$$

и задает на пространстве E_2 гладкий гамильтонов поток $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$, допускающий единственное продолжение по непрерывности до гамильтонова потока на пространстве E. При этом симплектическая мера λ_ω инвариантна относительно гамильтонова потока $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$, на пространстве E.

Динамика гамильтоновой системы (0.6) описывается счетной системой ОДУ

$$q_k' = h_{p_k}' = \omega_k p_k;\ p_k' = -h_{q_k}' = -\omega_k q_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (0.7)$$

Система уравнений Гамильтона (0.7) обладает первым интегралом $h(u) = (u, \mathbf{H}u)$, $u \in E_1 = D(\mathbf{H})$, где $\mathbf{H}$ – самосопряженный оператор в вещественном пространстве E, каждому собственному значению λ_k которого отвечает двумерное собственное подпространство $\mathrm{span}(e_k, f_k)$. В каждом из собственных подпространств $E_k = \mathrm{span}(e_k, f_k)$ определен двумерный гамильтонов поток $\mathbf{\Phi}_{t,k}$, $t \in \mathbb{R}$ ортогональных преобразований пространств E_k, порождаемых двумерным квадратичным гамильтонианом $h_k = \lambda_k(q_k^2 + p_k^2)$. Поэтому определена такая однопараметрическая группа $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$, ортогональных преобразований пространства E, что подпространства E_k приводят операторы группы $\mathbf{\Phi}_t$.

Так как $[\mathbf{H}, \mathbf{J}] = 0$, то первым интегралом системы уравнений Гамильтона является и квадратичная функция $h^{(2)}(u) = (u, \mathbf{H}^2 u)$, $u \in E_2 = D(\mathbf{H}^2)$. Поэтому подпространства E_1, E_2 инвариантны относительно операторов гамильтонова потока $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, сужение $(\mathbf{\Phi}_t)|_{E_2}$, $t \in \mathbb{R}$, является гладким гамильтоновым потоком в пространстве E_2, на котором определено векторное поле $\mathbf{v}$. При этом поток $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$, представляет собой единственной продолжение по непрерывности гладкого гамильтонова потока в пространстве E_2.

Если множество $A \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, то $\mathbf{\Phi}_t(A) \in \mathcal{K}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ и $\lambda_{\mathcal{G}}(\mathbf{\Phi}_t(A)) = \lambda_{\mathcal{G}}(A)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ (здесь и далее $\mathcal{G} = \mathcal{E} \bigcup \mathcal{F}$). Значит, кольцо $\mathcal{R}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ инвариантно относительно потока $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$ и выполняется равенство $\lambda_{\mathcal{G}} \circ \mathbf{\Phi}_t = \lambda_{\mathcal{G}},\ t \in \mathbb{R}$.

□

Поток $\mathbf{\Phi}_t$, $t \in \mathbb{R}$, задаваемый квадратичным гамильтонианом из леммы 4.1, определяет однопараметрическую группу

$$\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}_t} u(x) = u(\mathbf{\Phi}_{-t}(x)),\ x \in E,\ u \in S(E, \mathcal{R}_{\mathcal{G}}, \mathbb{C}),\ t \in \mathbb{R},$$

линейных изометрий пространства простых функций $S(E, \mathcal{R}_{\mathcal{G}}, \mathbb{C})$ на себя. Заданная на плотном в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$ линейном подпространстве $S(E, \mathcal{R}_{\mathcal{G}}, \mathbb{C})$ группа изометрий $\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}_t}$, $t \in \mathbb{R}$, единственным образом продолжается по непрерывности до унитарной группы в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$, действующей по правилу

$$\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}_t} u(x) = u(\mathbf{\Phi}_{-t}(x)),\ t \in \mathbb{R},\ u \in \mathcal{H}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\ x \in E, \tag{0.8}$$

и называемой купмановским представлением гамильтонова потока $\mathbf{\Phi}$.

Рассмотрим уравнение Шредингера с гамильтонианом $\mathbf{H}$ с простым дискретным спектром $\{\omega_k\}$, лежащим на положительной полуоси. Порождаемая в унитарном пространстве H унитарная группа $\exp(-it\mathbf{H})$, $t \in \mathbb{R}$, может быть представлена как гамильтонов поток гамильтоновой системы с кадратичной функцией Гамильтона (0.6) в овеществлении E гильбертова пространства H, наделеном симплектической структурой $\mathbf{J}$. При этом $q_k = \mathrm{Re}(u, \phi_k)$, $p_k = \mathrm{Im}(u, \phi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, где u – искомая функция в уравнении Шредингера, $\{\phi_k\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов гамильтониана $\mathbf{H}$, а функция гамильтона задается равенством

$$h(q,p) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \omega_k (q_k^2 + p_k^2) = (u, \mathbf{H}u)_H,\ (q,p) \in E,$$

где $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (q_k + ip_k)\phi_k$.

Унитарная группа $e^{-it\mathbf{H}}$, $t \in \mathbb{R}$, представляется обобщенным гамильтоновым потоком в фазовом пространстве $Q \oplus P$, задаваемом гамильтоновой системой уравнений (0.7). Фазовый поток, порожденный в пространстве E гамильтонианом h, сохраняет меру $\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, так же как и ротационно инвариантную меру из работы [2] и обобщенную меру Смолянова-Шамарова [5].

Следствие 5.2 [1]. *Однопараметрическое семейство* $\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *линейных операторов в пространстве* $\mathcal{H}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, *действующих по правилу*

$$\mathbf{U}_{\Phi}(t) u(x) = u(\mathbf{\Phi}(t)x),\ t \in \mathbb{R},\ u \in \mathcal{H}_{\mathcal{E},\mathcal{F}},\ x \in E, \tag{0.9}$$

является группой унитарных преобразований пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$. Унитарная группа (0.9) называется купмановским представлением потока $\mathbf{\Phi}$.

6. Генератор купмановской группы

Если гамильтониан h потока Φ есть овеществление квадратичной формы положительного оператора $\mathbf{\Lambda}$ в пространстве $\mathcal{H}=\mathbf{R}(E,R_\epsilon,\lambda_\epsilon,\mathbb{C})$ с дискретным спектром $\{\lambda_k\}$, то $\mathbb{H}$ – это гамильтониан счетной системы гармонических осцилляторов в симплектическом пространстве $(E,\mathbf{J})$:

$$\mathbb{H}(q,p)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(p_k^2+q_k^2),\ (q,p)\in E_1=D(\mathbb{H}).$$

Гамильтонов поток Φ сохраняет двумерные симплектические подпространства E_k, $k\in\mathbb{N}$, пространства E. Более того, он сохраняет меру $\lambda_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$.

Лемма 6.1. Купмановская группа $\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}$ — это унитарная группа в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$, которая сильно непрерывна тогда и только тогда, когда $\{\lambda_k\}\in c_0$.

Доказательство. Согласно [10] (см. также [11]), пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ представимо как тензорное произведение $\mathcal{H}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}=L_2(R^{2n})\otimes\mathcal{H}_{\mathcal{F}^n,\mathcal{G}^n}$. Здесь R^{2n} - линейная оболочка первых $2n$ базисных векторов, а E^{2n} - это те векторы, у которых первые $2n$ координат нулевые; $\mathcal{F}^n,\mathcal{G}^n$ – базисные векторы ОНБ $\mathcal{F},\mathcal{G}$, лежащие в пространстве E^{2n}. При этом пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{F}^n,\mathcal{G}^n}$ функций на E^{2n} строится с помощью меры $\lambda_{\mathcal{F}^n,\mathcal{G}^n}$ так же, как и пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ строится с помощью меры $\lambda_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$.

Так как $\{\lambda_k\}\in c_0$, то преобразование, порождаемое гамильтонианом $\mathbb{H}$, совершает поворот по конечному фазовых переменных, а по всем оставшимся фазовым переменным преобразование будет тождественным. Таким образом, если $\lambda_k=0\ \ \forall\ k>n$, то $\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}=\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}_{2n}}\otimes\mathbf{I}^{2n}$, где $\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}$ – купмановская группа счетной системы осцилляторов в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$, $\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}_{2n}}$ – купмановская группа системы n осцилляторов в пространстве $L_2(\mathbb{R}^{2n})$, $\mathbf{I}^{2n}$ – тождественный оператор в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}^n,\mathcal{F}^n}$. Как известно (и как нетрудно проверить), купмановская группа конечной системы из n гармонических осцилляторов является сильно непрерывной в пространстве $L_2(\mathbb{R}^{2n})$. Поэтому купмановская группа $\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}$ счетной системы осцилляторов с финитной последовательностью частот $\{\lambda_k\}$, действующая в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$, является унитарной и сильно непрерывной.

Обратно, допустим, что $\{\lambda_k\}\notin c_0$. Не ограничивая общности, предположим, что $\{\lambda_k\}\neq 0\ \forall\ k$. Воспользуемся тем, что в каждом двумерном подпространстве $E_{(k)}=\mathrm{span}(f_k,g_k)$ мы совершаем поворот со скоростью λ_k. В каждой двумерной плоскости $E_{(k)}$ выберем круг K радиуса $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ площади и разделим его на 2^{m_k} последовательно занумерованных секторов с площадью каждого $\frac{1}{2^{m_k}}$. Составим множество из секторов с четными номерами и обозначим его через A_k. Тогда $\lambda_{\mathbb{R}^2}(A_k)=1$. Положим $\Pi=A_1\times A_2\times$ .... Тогда $\Pi\in K_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ – симплектический брус и $\lambda_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\Pi)=1$. Отсутствие сильной (и даже слабой) непрерывности оператор-функции $\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, будет установлено, если мы докажем отсутствие непрерывности у скалярной функции $(\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}(t)\chi_\Pi, \chi_\Pi)_{\mathcal{H}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}}$, $t \in \mathbb{R}$.

Фиксируем некоторое $\delta \in (0, \frac{1}{3})$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ условие $(\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}_k}(t)\chi_{A_k}, \chi_{A_k}) \in [0, 1-\delta)$ выполняется при всех $t \in \Delta_k^n$, где

$$\Delta_k^n = (\frac{1}{\lambda_k}(\frac{1}{3}2^{-m_k}\pi + 2^{-m_k}\pi n), \frac{1}{\lambda_k}(\frac{2}{3}2^{-m_k}\pi + 2^{-m_k}\pi n)),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Последовательность $\{m_k\}$ можно подобрать так, чтобы для каждого $k \in \mathbb{N}$ при некотором $n_k \in \mathbb{N}$ промежуток $\Delta_k^{n_k}$ входил в интервал $(0, \frac{1}{k})$ и содержал бы промежуток $\Delta_{k+1}^{n_{k+1}}$ хотя бы при одном $n_{k+1} \in \mathbb{N}$. При таком подборе последовательности $\{m_k\}$ в каждой правой полуокрестности нуля содержатся такие точки τ, что для бесконечного набора номеров $k \in \mathbb{N}$ выполняется условие $(\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}_k}(t)\chi_{A_k}, \chi_{A_k}) \in [0, 1-\delta)$. Следовательно, существует такая последовательность $\{\tau_n\}$, что $\tau_n \to +0$ и $(\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}(\tau_n)\chi_\Pi, \chi_\Pi)_{\mathcal{H}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}} = 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. С учетом $(\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}(0)\chi_\Pi, \chi_\Pi)_{\mathcal{H}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}} = 1$ это означает разрыв функции $(\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}(t)\chi_\Pi, \chi_\Pi)_{\mathcal{H}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}}$, $t \in \mathbb{R}$, в точке $t = 0$. $\Box$

Замечание. Let $u = \chi_{\Pi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}}$. Тогда функция $(\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}(t)u, u)_{\mathcal{H}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}}$, $t \in \mathbb{R}$, непрерывна тогда и только тогда, когда $\{\lambda_k\} \in l_1$.

Пусть $\mathcal{E}$ — ОНБ в пространстве E. Пусть $L_1(\mathcal{E}) = \{x \in E:\ \{(x, e_k)\} \in l_1\}$.

Пусть $L_{2,r}(0, +\infty)$ – гильбертово пространство измеримых функций $(0, +\infty) \to \mathbb{C}$, интегрируемых квадратично с весом $\omega = \frac{1}{r}$. Пусть $(\mathbb{N} \to \mathbb{Z})_0$ – множество финитных числовых последовательностей со значениями в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$.

Теорема 6.2. *Купмановская группа* $\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}$ *имеет инвариантное подпространство* $\mathcal{H}_\Phi$ *сильной непрерывности в пространстве* $\mathcal{H}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$. *Генератор* $\mathbf{H}_\Phi$ C_0*-полугруппы* $\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}|_{\mathcal{H}_\Phi}$ *имеет счетное семейство собственных значений* $\lambda_{m_1,\dots,m_N} = m_1\lambda_1 + \dots + m_N\lambda_N,\quad N \in \mathbb{N},\ m_1, \dots, m_N \in \mathbb{Z}$.

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{H}_\Phi - \lambda_{m_1,\dots,m_N}\mathbf{I}) \equiv \mathcal{H}_{\vec{m}} = \mathrm{span}(\prod_{k=1}^{\infty} v_{j_k}(r_k)e^{im_k\phi_k}), \tag{0.10}$$

где $\vec{m} \in (\mathbb{N} \to \mathbb{Z})_0$, $\{v_j\}$ *ОНБ в пространстве* $L_{2,r}([0, +\infty))$, $\{j_k\}:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Гильбертово пространство $\mathcal{H}_\Phi = \oplus_{\vec{m}}\mathcal{H}_{\vec{m}}$ *является инвариантным подпространством сильной непрерывности группы Купмана* $\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}$.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что

$$\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}(t)(v_{j_k}(r_k)e^{im_k\phi_k}) = e^{it\lambda_k m_k}v_{j_k}(r_k)e^{im_k\phi_k},\ t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, генератор $\mathbf{H}_\Phi$ C_0-полугруппы $\mathbf{U}_{\mathbf{\Phi}}$ имеет счетное семейство собственных значений $\lambda_{m_1,\dots,m_N} = m_1\lambda_1 + \dots + m_N\lambda_N,\quad N \in \mathbb{N},\ m_1, \dots, m_N \in \mathbb{Z}$, причем каждому из собственных значений $\lambda_{\vec{m}}$ соответствует бесконечномерное собственное подпространство (0.10). Если $\vec{m} \neq \vec{n}$, то легко проверить, что подпространства $\mathcal{H}_{\vec{m}}$ и $\mathcal{H}_{\vec{n}}$ ортогональны. При этом если $\lambda_{\vec{m}} = \lambda_{\vec{n}}$, то собственному значению $\lambda_{\vec{m}}$ отвечает собственное подпространство $\mathcal{H}_{\vec{m}} \oplus \mathcal{H}_{\vec{n}}$. Каждое собственное подпространство $\mathcal{H}_{\vec{m}}$ инвариантно относительно операторов группы $\mathbf{U_\Phi}$б сужение $\mathbf{U_\Phi}|_{\mathcal{H}_{\vec{m}}}$ является сильно непрерывной группой в пространстве $\mathcal{H}_{\vec{m}}$. Поэтому если $\mathcal{H}_\Phi = \oplus_{\vec{m}} \mathcal{H}_{\vec{m}}$, то пространство $\mathcal{H}_\Phi$ инвариантно относительно операторов группы $\mathbf{U_\Phi}$ и сужение $\mathbf{U_\Phi}|_{\mathcal{H}_\Phi}$ является сильно непрерывной группой в пространстве $\mathcal{H}_\Phi$. $\square$

Замечание. Если $\lambda_k \in \mathbb{N}\ \forall\ k \in \mathbb{N}$, то $\lambda_{\vec{m}} \in \mathbb{Z}\ \forall\ \vec{m} \in (\mathbb{N} \to \mathbb{Z})_0$.

Замечание. Если последовательность $\{\lambda_k\}$ не является финитной, то купмановская унитарная группа $\mathbf{U_\Phi}$ не является сильно непрерывной в целом пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$. Но она обладает подпространством сильной непрерывности $\mathcal{H}_\Phi$, определяемом спектральными свойствами операторов группы $\mathbf{U_\Phi}$.

Авторы выражают глубокую благодарность И.В. Воловичу за интерес и внимание к работе и ряд ценных обсуждений исследуемой тематики.

Библиографический список

1. В.А. Глазатов, В.Ж. Сакбаев. *Меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно гамильтоновых потоков* // Уфимский мат.журнал. Т. 14, № 2. С. 3-22 (2022).

2. В.Ж. Сакбаев. *Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига.* ТМФ. Т. **191**. № 3. С. 473-502 (2017).

3. В.М. Бусовиков. *Свойства одной конечно-аддитивной меры на l_p, инвариантной относительно сдвигов* // Труды МФТИ. Т. 10, № 2. С. 163-172 (2018).

4. Д.В. Завадский. *Аналоги меры Лебега в пространствах последовательностей и классы интегрируемых по ним функций* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **151**. С. 37-44 (2018).

5. О.Г. Смолянов, Н.Н. Шамаров. *Квантование по Шредингеру бесконечномерных гамильтоновых систем с неквадратичной функцией Гамильтона* // Доклады РАН. Т. 492. С. 65-69 (2020).

6. А.Ю. Хренников. *Симплектическая геометрия на бесконечномерном фазовом пространстве и асимптотическое представление квантовых средних гауссовыми функциональными интегралами* // Изв. РАН. Сер. Мат. Т. 72, N° 1. С. 137-160 (2008).

7. С.Н. Власов, В.И. Таланов. *Распределенный волновой коллапс в модели нелинейного уравнения Шредингера.* / В сб. Нулинейные волны. Динамика и эволюция. М.: Наука. 1989.

8. В.В. Козлов, О.Г. Смолянов. *Гамильтонов подход к вторичному квантованию* // Докл. РАН, **483**:2 С. 138-142 (2018).

9. О.Г. Смолянов, Н.Н. Шамаров. *Гамильтоновы меры Фейнмана, интеграл Колмогорова и бесконечномерные псевдодифференциальные операторы* // Доклады РАН. **Т. 488**:3. С. 243-247 (2019).

10. В. М. Бусовиков, В. Ж. Сакбаев Пространства Соболева функций на гильбертовом пространстве с трансляционно инвариантной мерой и аппроксимации полугрупп // Изв. РАН. 2020. Том. 84. № 4. С. 89–109.

11. V. M. Busovikov, V. Zh. Sakbaev. Invariant measures for Hamiltonian flows and diffusion in infinitely dimensional phase spaces // Intern. J. of Mathem. Phys. 2022. V. 37. No 20-21. 2243018 (15 pages).

Оглавление